Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Воронцов, Инварианты алгебр Ли, представимых
в виде полупрямой суммы с коммутативным идеалом,
Матем. сб., 2009, том 200, номер 8, 45–62

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm6383>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 16:56:25

УДК 514.763.8

А. С. Воронцов

Инварианты алгебр Ли, представимых в виде полупрямой суммы с коммутативным идеалом

Приведены явные формулы для инвариантов коприсоединенного представления алгебр Ли, имеющих вид полупрямой суммы классической полупростой алгебры Ли с коммутативным идеалом по представлению минимальной размерности или по k -ой тензорной степени этого представления. Эти формулы позволяют применить ряд известных конструкций построения полных коммутативных наборов и сравнить интегрируемые системы, получаемые таким образом. Предложен критерий полноты набора, построенного методом цепочек подалгебр, и сформулирована гипотеза об эквивалентности общего метода Садэтова и модификации метода сдвига аргумента, предложенного ранее Браиловым.

Библиография: 12 названий.

Ключевые слова: алгебры Ли, инварианты, динамические системы.

§ 1. Введение

Пусть G – группа Ли, $\mathfrak{G}$ – ее алгебра Ли. Можно рассмотреть действие группы на себе сопряжениями, т.е.

$$S_g: h \rightarrow ghg^{-1}.$$

Дифференциал этого действия задает действие группы на своей алгебре:

$$\mathrm{Ad}_g \xi = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} gh(t)g^{-1}, \quad \xi = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} h(t).$$

Это действие называется присоединенным действием группы.

Рассмотрим пространство $\mathfrak{G}^*$, двойственное к $\mathfrak{G}$ (коалгебру). Для этого пространства можно определить коприсоединенное действие:

$$\langle \mathrm{Ad}_g^*(x), \xi \rangle = \langle x, \mathrm{Ad}_{g^{-1}} \xi \rangle,$$

угловые скобки здесь и далее обозначают спаривание элементов алгебры и коалгебры.

Известно [1], что орбиты коприсоединенного действия группы Ли допускают естественную симплектическую структуру. Можно рассмотреть следующую конструкцию. Для функций $f, g \in C^\infty(\mathfrak{G}^*)$ определим скобку Пуассона:

$$\{f, g\}(x) = \langle [df, dg], x \rangle. \quad (1)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 07-01-00648-а).

Здесь дифференциалы f и g рассматриваются как элементы алгебры Ли $\mathfrak{G}$. Кососимметричность и выполнение тождества Лейбница следуют непосредственно из этой формулы, тождество Якоби легко выводится из аналогичного тождества для коммутатора в алгебре Ли. Скобку, определенную таким образом, часто называют скобкой Пуассона–Ли.

Скобка Пуассона–Ли, определенная для функций на $\mathfrak{G}^*$, вырождена. Но рассмотрев ее ограничение на орбиты коприсоединенного действия группы G , мы получаем на них невырожденную скобку Пуассона (а значит, можно взять обратный тензор и получить симплектическую структуру). Более того, регулярные орбиты – это подмногообразия максимальной размерности, для которых ограничение скобки Пуассона невырождено. Ядром скобки Пуассона будут в точности инварианты коприсоединенного действия группы G .

Задав произвольную функцию h на $\mathfrak{G}^*$, можно рассмотреть гамильтонову систему

$$\dot{x}(t) = \{x, h\}. \quad (2)$$

Интегралом гамильтоновой системы называется функция $f \in C^\infty(\mathfrak{G}^*)$ такая, что если $x(t)$ изменяется в соответствии с (2), то $f(x(t)) = \text{const}$. Несложно проверить, что это условие эквивалентно условию $\{f, h\} = 0$. Если скобка Пуассона двух функций равна нулю, то говорят, что они находятся в инволюции. В частности, функции, лежащие в ядре скобки Пуассона, находятся в инволюции со всеми функциями.

Гамильтонова система называется интегрируемой, если она допускает максимально возможное количество функционально независимых интегралов. Если скобка Пуассона невырождена, то максимально возможное количество интегралов равно половине размерности пространства, а если вырождена, то это количество равно

$$\dim \text{Ker}\{\cdot, \cdot\} + \frac{1}{2} \text{codim Ker}\{\cdot, \cdot\}.$$

В рассматриваемом нами случае размерность ядра скобки Пуассона совпадает с коразмерностью орбит общего положения коприсоединенного представления (т.е. индексом алгебры $\mathfrak{G}$). Таким образом, максимально возможное число независимых функций в инволюции оказывается равным

$$k = \text{ind } \mathfrak{G} + \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{G} - \text{ind } \mathfrak{G}) = \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{G} + \text{ind } \mathfrak{G}).$$

Инволютивный набор, содержащий ровно k независимых функций, называется полным коммутативным набором. Полные коммутативные наборы интересны тем, что они задают на коалгебре интегрируемые гамильтоновы системы: в качестве гамильтониана можно взять любую функцию из набора, а остальные функции будут первыми интегралами [2].

В классе гладких функций существование полного коммутативного набора для любой алгебры Ли доказывается достаточно просто. Более интересен вопрос о существовании полного коммутативного набора в классе полиномов.

ГИПОТЕЗА 1 (А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко; см. [3]). Пусть $\mathfrak{G}$ – вещественная или комплексная алгебра Ли. Тогда на $\mathfrak{G}^*$ существует полный коммутативный набор полиномов.

А. С. Мищенко и А. Т. Фоменко доказали эту гипотезу для полупростых алгебр Ли [4]–[6]. Затем в ряде работ различных авторов были приведены ее доказательства для многих других случаев. В общем виде гипотеза была доказана С. Т. Садэтовым [7]. Это доказательство подробно разобрано в работе А. В. Болсинова [8].

Многие явные конструкции, позволяющие строить полные коммутативные наборы (в частности, общий метод сдвига аргумента, предложенный А. С. Мищенко и А. Т. Фоменко для доказательства полупростого случая), используют инварианты коприсоединенного представления (см. [9]). Таким образом, задача нахождения явного вида инвариантов коприсоединенного действия групп Ли не только представляет чисто алгебраический интерес, но и имеет прикладное значение.

Первая часть настоящей работы посвящена описанию инвариантов коприсоединенного действия для групп Ли, имеющих вид полупрямой суммы, а вторая – сравнению некоторых способов построения полных коммутативных наборов для групп Ли такого вида.

Автор благодарен А. Т. Фоменко и А. В. Болсинову за постановку задач и постоянное внимание к работе, а также крайне признателен всем участникам семинара “Современные геометрические методы” за продуктивные обсуждения результатов настоящей работы.

§ 2. Обозначения

В этом параграфе мы будем рассматривать построение полных коммутативных наборов и инвариантов для алгебр Ли, имеющих вид полупрямой суммы с коммутативным идеалом. Эту алгебру обозначим через

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{G} +_{\varphi} V, \quad (3)$$

а ее элементы – через (ξ, v) или через $\xi + v$, $\xi \in \mathfrak{G}$, $v \in V$.

Коммутатор для такой алгебры определяется формулой

$$\mathrm{ad}_{(\xi_1, v_1)}(\xi_2, v_2) = [(\xi_1, v_1), (\xi_2, v_2)] = ([\xi_1, \xi_2], \varphi(\xi_1)v_2 - \varphi(\xi_2)v_1). \quad (4)$$

Для двойственного пространства $\mathfrak{R}^*$ имеем естественное разложение в прямую сумму $\mathfrak{R}^* = \mathfrak{G}^* + V^*$, $\mathfrak{G}^* = V^{\perp}$, $V^* = \mathfrak{G}^{\perp}$. Далее будет встречаться аннулятор регулярного элемента из V в смысле представления φ . Зафиксируем для него следующее обозначение:

$$H_a = \mathrm{Ann}_{\varphi}(a) = \{\xi \in \mathfrak{G} \mid \varphi(\xi)a = 0\}. \quad (5)$$

Из выражения для ad нетрудно получить выражение для ad^* :

$$\mathrm{ad}_{(\xi, v)}^*(x, a) = (\mathrm{ad}_{\xi} x + A(a, v), \varphi(\xi)a). \quad (6)$$

Здесь A – отображение $A: V \times V^* \rightarrow \mathfrak{G}^*$, которое определяется условием

$$\langle A(a, v), \xi \rangle = \langle \varphi(\xi)v, a \rangle. \quad (7)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Индексом представления φ алгебры Ли* называется размерность аннулятора элемента общего положения в смысле представления φ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Индексом алгебры Ли* называется индекс ее коприсоединенного представления.

§ 3. Теорема Раиса и индексы некоторых алгебр Ли

Найти индекс для полупрямой суммы алгебры Ли с коммутативным идеалом позволяет теорема Раиса [1].

ТЕОРЕМА 1 (Раис; см. [1]). *Пусть a – элемент общего положения $a \in V$ (в смысле представления φ). Тогда*

$$\text{ind } \mathfrak{R} = \text{ind } H_a + \text{ind } \varphi^*. \quad (8)$$

Представления φ^* – это представление $\mathfrak{G}$ в V^* , двойственное представлению φ , т.е. такое, что

$$\langle \varphi(\xi)v, a \rangle = -\langle v, \varphi^*(\xi)a \rangle. \quad (9)$$

Далее речь пойдет о построении инвариантов и полных коммутативных наборов для алгебр Ли, имеющих вид $\mathfrak{G} +_{\varphi} V$, где $\mathfrak{G}$ – одна из классических полупростых алгебр, а φ – представление минимальной размерности или некоторая его тензорная степень. Приведем вычисление соответствующих индексов. В случае тензорной степени будем считать, что элемент в $(\mathbb{R}^n)^k$ задается набором из k n -мерных векторов a^i .

3.1. Алгебра $\text{so}(n) +_{\varphi^k} (\mathbb{R}^n)^k$. Инвариантами представления φ^* являются скалярные произведения векторов из пространства $\mathbb{R}^n$. Независимыми будут всевозможные попарные произведения векторов (a^i, a^j) (включая скалярные квадраты), т.е. индекс представления φ равен $k(k+1)/2$. Аннулятором для элемента $(\mathbb{R}^n)^k$ общего положения является $\text{so}(n-k)$. Окончательно получаем

$$\text{ind } \text{so}(n) +_{\varphi^k} (\mathbb{R}^n)^k = \frac{k(k+1)}{2} + \left[\frac{n-k}{2} \right].$$

3.2. Алгебра $\text{sl}(n) +_{\varphi^k} (\mathbb{R}^n)^k$. Рассмотрим сначала более простой случай алгебры $\text{sl}(n) +_{\varphi} \mathbb{R}^n$. В тривиальном случае $n = 1$ индекс этой алгебры равен единице. При $n > 1$ индекс представления φ^* равен нулю и, следовательно, $\text{ind } \text{sl}(n) +_{\varphi} \mathbb{R}^n = \text{ind } \text{Ann}_{\varphi}(a)$.

Аннулятор элемента общего положения изоморфен $\text{sl}(n-1) +_{\varphi} \mathbb{R}^{n-1}$. Проведя те же рассуждения, получим, что

$$\text{ind } \text{sl}(n) +_{\varphi} \mathbb{R}^n = \text{ind } \text{sl}(n-1) +_{\varphi} \mathbb{R}^{n-1} = \dots = \text{ind } \text{sl}(1) +_{\varphi} \mathbb{R} = 1. \quad (10)$$

Для нескольких слагаемых в полупрямой сумме ситуация аналогична. Тривиальными случаями здесь являются случаи $n \leq k$. В этом случае аннулятор элемента общего положения тривиален, а индекс представления равен разности $\dim(\mathbb{R}^n)^k - \dim \mathfrak{sl}(n)$.

Если $n > k$, то индекс представления φ^* равен нулю, а аннулятор изоморфен $\mathfrak{sl}(n-k) +_{\varphi} (\mathbb{R}^{n-k})^k$. Таким образом, по индукции можно прийти к случаю $k \geq n$. Окончательно получаем следующий ответ:

$$\text{ind } \mathfrak{sl}(n) +_{\varphi^k} (\mathbb{R}^n)^k = kr - r^2 + 1, \quad r = n \pmod{k}.$$

3.3. Алгебра $\mathfrak{sp}(n) +_{\varphi^k} (\mathbb{R}^{2n})^k$. В этом случае ответ зависит от четности k . Для четных k инвариантами представления φ^* являются всевозможные косые произведения $\omega(a^i, a^j)$, $i \neq j$. Аннулятором регулярного элемента является $\mathfrak{sp}(n-k)$, поэтому

$$\text{ind } \mathfrak{sp}(n) +_{\varphi^k} (\mathbb{R}^{2n})^k = \frac{k(k-1)}{2} + n - k, \quad \text{если } k = 2l.$$

Для нечетного k количество инвариантов представления φ^* по-прежнему равно $k(k-1)/2$, но аннулятор регулярного элемента имеет вид полупрямой суммы алгебры $\mathfrak{sp}(n-k)$ с алгеброй Гейзенберга $\mathfrak{h}_{2(n-k)}$. Индекс этой алгебры равен $n-k+1$, поэтому

$$\text{ind } \mathfrak{sp}(n) +_{\varphi^k} (\mathbb{R}^{2n})^k = \frac{k(k-1)}{2} + n - k + 1, \quad \text{если } k = 2l - 1.$$

§ 4. Инварианты

4.1. Группы $\mathfrak{sp}(n) +_{\varphi} \mathbb{R}^{2n}$ и $\mathfrak{so}(n) +_{\varphi} \mathbb{R}^n$ (общая конструкция). Приведем общую конструкцию, из которой можно получить инварианты для алгебр вида $\mathfrak{sp}(n) +_{\varphi} \mathbb{R}^{2n}$ и $\mathfrak{so}(n) +_{\varphi} \mathbb{R}^n$. Эта конструкция во многом повторяет идеи, описанные в работе [10].

Рассмотрим линейное пространство V размерности n и невырожденную билинейную форму Λ на нем. Предположим, что форма Λ является либо симметричной, либо кососимметричной.

Обозначим через G группу линейных преобразований пространства V , сохраняющих форму Λ . Эту группу можно считать вложенной в $\text{SL}(n)$. Для группы G определено естественное действие на V , поэтому можно рассмотреть полупрямое произведение $R = G \times V$, операция в котором определяется как

$$(g, u) \circ (h, v) = (gh, u + gv). \quad (11)$$

Здесь gv обозначает действие g на вектор v .

Далее будет удобно рассматривать матричную реализацию такого полупрямого произведения:

$$\begin{pmatrix} & & u^1 \\ & C & \cdots \\ & & u^n \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C \in G, \quad u \in V. \quad (12)$$

Элементы алгебры Ли $\mathfrak{R}$ группы R в матричном виде имеют такой вид:

$$\begin{pmatrix} & & u^1 \\ & \xi & \cdots \\ & & u^n \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \xi \in \mathfrak{G}, \quad u \in V. \quad (13)$$

Элементы коалгебры удобно представлять в виде следующих матриц:

$$\begin{pmatrix} & & 0 \\ & X & \cdots \\ & & 0 \\ a_1 & \dots & a_n & 0 \end{pmatrix}, \quad X \in \mathfrak{G}^*, \quad a \in V^*. \quad (14)$$

Здесь $\mathfrak{G}^*$ обозначает ортогональное дополнение к V , а V^* – ортогональное дополнение к $\mathfrak{G}$. Спаривание элементов алгебры и коалгебры – след произведения соответствующих матриц.

Для того чтобы работать в координатах, удобно использовать тензорные обозначения. Элементы пространства V – векторы, элементы пространства V^* – ковекторы, элементы пространств $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G}^*$ – линейные операторы на V , т.е. тензоры типа $(1, 1)$. Действие оператора $C \in \mathfrak{G}$ на вектор $u \in V$ – свертка $C_i^j u^i$.

Используя эти обозначения, нетрудно установить, каким условиям удовлетворяют матрицы из G и $\mathfrak{G}$. Условие того, что операторы из G сохраняют форму Λ записывается в виде

$$\Lambda_{ij} C_\alpha^i C_\beta^j = \Lambda_{\alpha\beta}. \quad (15)$$

Очевидно, что для алгебры $\mathfrak{G}$ это условие можно переписать так:

$$\Lambda_{i\beta} \xi_\alpha^i + \Lambda_{\alpha i} \xi_\beta^i = 0. \quad (16)$$

Наша цель – описать инварианты коприсоединенного действия группы Ли R в терминах инвариантов. Для этого нам понадобится явное выражение для Ad^* в выбранных нами координатах. Для сокращения обозначений будем записывать матрицу (12) в виде пары элементов (C, u) , а матрицы (13) и (14) – в виде пар (ξ, u) и (X, a) соответственно.

ТЕОРЕМА 2. Пусть Λ^{ij} – тензор, обратный к Λ_{ij} , т.е. такой, что выполнены равенства $\Lambda_{ij} \Lambda^{jk} = \delta_i^k$. Тогда

$$\text{Ad}_{(C,u)}^*(X, a) = \left(CXC^{-1} + \frac{1}{2}(a_i u^j - \Lambda^{j\alpha} a_\alpha \Lambda_{i\beta} u^\beta), C_i^j a_j \right). \quad (17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Чтобы выписать явную формулу для Ad^* , можно воспользоваться общей формулой для Ad^* для полупрямых сумм вида $\mathfrak{G} + {}_\varphi V$ (см. [1]):

$$\text{Ad}_{(C,u)}^*(X, a) = (\text{Ad}_C^*(X + A(u, a)), \varphi(C)a), \quad (18)$$

где A – это отображение $A: V \times V^* \rightarrow \mathfrak{G}^*$, определяемое равенством

$$\langle A(u, a), \xi \rangle = \langle \varphi(\xi)u, a \rangle. \quad (19)$$

В нашем случае получаем

$$\langle A(u, a), \xi \rangle = \xi_i^j u^i a_j = \langle \xi, u^i a_j \rangle. \quad (20)$$

Матрица $u^i a_j$, вообще говоря, не лежит в $\mathfrak{G}^*$. Для того чтобы получить выражение для $A(u, v)$, нужно спроектировать эту матрицу на $\mathfrak{G}^*$ ортогонально $\mathfrak{G}$.

ЛЕММА 1. Матрица $Y_1 = u^i a_j - \Lambda^{i\alpha} a_\alpha \Lambda_{\beta j} u^\beta$ лежит в $\mathfrak{G}^*$, а матрица вида $Y_2 = u^i a_j + \Lambda^{i\alpha} a_\alpha \Lambda_{\beta j} u^\beta$ лежит в $\mathfrak{G}^\perp$.

Оба утверждения проверяются непосредственно. Для того чтобы проверить, что матрица Y_1 лежит в подпространстве $\mathfrak{G}^*$, нужно проверить, что для матрицы $\bar{Y}_1 \in \mathfrak{G}$, которая имеет те же координаты, что и Y_1 , выполняется соотношение (16):

$$\Lambda_{ik}(Y_1)_j^i = \Lambda_{ik}(u^i a_j - \Lambda^{i\alpha} a_\alpha \Lambda_{\beta j} u^\beta). \quad (21)$$

Если поменять порядок индексов у Λ_{ik} и у $\Lambda_{\beta j}$, то это выражение не изменится, но после всех сверток получим

$$\Lambda_{ik}(Y_1)_j^i = \Lambda_{ki} u^i a_j - a_k \Lambda_{j\beta} u^\beta. \quad (22)$$

Аналогично для $\Lambda_{ji}(Y_1)_k^i$ получаем

$$\Lambda_{ji}(Y_1)_k^i = \Lambda_{ij} u^i a_k - a_j \Lambda_{k\beta} u^\beta \quad (23)$$

и, следовательно, $\Lambda_{ik}(Y_1)_j^i + \Lambda_{ji}(Y_1)_k^i = 0$.

Остается проверить, что Y_2 ортогонален $\mathfrak{G}$. Пусть $\xi \in \mathfrak{G}$. Тогда

$$\langle Y_2, \xi \rangle = \xi_i^j (u^i a_j + \Lambda^{i\alpha} a_\alpha \Lambda_{\beta j} u^\beta). \quad (24)$$

Пользуясь (16), получаем

$$\langle Y_2, \xi \rangle = \xi_i^j u^i a_j - \Lambda^{i\alpha} a_\alpha \Lambda_{ji} \xi_j^\beta u^\beta = 0. \quad (25)$$

Лемма доказана.

Из леммы следует, что проекцию матрицы $a_i u^j$ на подпространство $\mathfrak{G}^*$ можно записать в виде $0.5(a_i u^j - \Lambda^{j\alpha} a_\alpha \Lambda_{i\beta} u^\beta)$, что и требовалось.

Теорема доказана.

Для того чтобы получить выражение для инвариантов Ad^* , сопоставим каждому элементу $(X, a) \in \mathfrak{G}^*$ матрицу следующего вида:

$$M_{(X,a)} = \begin{pmatrix} & & \Lambda^{1i} a_i \\ & X & \dots \\ & & \Lambda^{ni} a_i \\ a_1 & \dots & a_n & 0 \end{pmatrix}. \quad (26)$$

В последней строке этой матрицы записаны координаты a , а в последнем столбце – координаты вектора, который получается, если у a поднять индекс с помощью Λ .

Посмотрим, что происходит с матрицей $M_{(X,a)}$, если мы действуем на (X, a) с помощью Ad^* . Нетрудно проверить, что

$$M_{\text{Ad}^*_{(C,0)}(X,a)} = \overline{C} M \overline{C}^{-1}, \quad (27)$$

где $\overline{C}$ – матрица вида

$$\overline{C} = \begin{pmatrix} & & 0 \\ & C & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Это означает, что при действии элементов вида $(C, 0)$ инварианты матрицы M не меняются. Посмотрим, что происходит при действии элементов вида (E, u) . Из явного вида для Ad^* следует, что последние строка и столбец при этом остаются неизменными, а к каждой строке (столбцу) матрицы X прибавляется с некоторым весом последняя строка (столбец).

Легко видеть, что при такой операции остаются неизменными диагональные миноры матрицы M , содержащие последнюю строку и последний столбец. Напомним, что коэффициенты характеристического многочлена любой матрицы могут быть записаны в виде суммы ее диагональных миноров. Для того чтобы получить сумму диагональных миноров матрицы M , содержащих последнюю строку и столбец, нужно из суммы всех ее диагональных миноров вычесть сумму миноров матрицы X соответствующего порядка.

Приведенные выше рассуждения показывают, что коэффициенты многочлена

$$\det(M - \lambda E) + \lambda \det(X - \lambda E) \quad (29)$$

являются инвариантами коприсоединенного действия группы R .

Из доказательства следует, что результат не сильно изменится, если вместо действия $\mathfrak{G}$ на V рассмотреть несколько его “копий”:

$$\mathfrak{R}_k = \mathfrak{G} +_{\varphi^k} V^k. \quad (30)$$

В этом случае удобно считать, что у векторов a и ковекторов u есть дополнительный индекс ζ , меняющийся от единицы до k . Действие $\langle a, u \rangle$ теперь будет записываться в виде $u^{i\zeta} a_{i\zeta}$. Соответственно в формуле для $A(u, v)$ (см. (20)) получим

$$\langle A(u, a), \xi \rangle = \xi_i^j u^{i\zeta} a_{j\zeta} = \langle \xi, u^{i\zeta} a_{j\zeta} \rangle. \quad (31)$$

Далее нужно описать проекцию последней матрицы на $\mathfrak{G}$, но поскольку приведенные выше выкладки справедливы для каждого слагаемого в сумме по ζ , то они справедливы и для всей суммы в целом.

Очевидно, что для матрицы

$$M_{(X,a),k} = \begin{pmatrix} & & \Lambda^{1i} a_{i1} & \dots & \Lambda^{1i} a_{ik} \\ & X & \dots & \dots & \dots \\ & & \Lambda^{ni} a_{i1} & \dots & \Lambda^{ni} a_{ik} \\ a_{11} & \dots & a_{n1} & & \\ \dots & \dots & \dots & 0 & \\ a_{1k} & \dots & a_{nk} & & \end{pmatrix} \quad (32)$$

справедливы те же рассуждения, что и для матрицы $M_{(X,a)}$, а именно, суммы ее диагональных миноров, содержащих последние k столбцов, будут инвариантами.

Таким образом, мы получаем следующий результат для инвариантов $\mathfrak{R}_k$.

ТЕОРЕМА 3. *Инвариантами группы $\mathfrak{R}_k$ являются коэффициенты многочлена*

$$\det(M - \lambda E) - (-1)^k \lambda^k \det(X - \lambda E). \quad (33)$$

Отказаться от условия на форму Λ не удастся. Если группа G сохраняет произвольную билинейную форму Λ на V , то она сохраняет одновременно ее симметричную и кососимметричную части, поскольку они выражаются через Λ . Это означает, что интересующая нас группа является пересечением двух групп и проекция на ее алгебру устроена, вообще говоря, более сложно.

§ 5. Инварианты коприсоединенного представления

5.1. Алгебра $\mathfrak{so}(n) +_{\varphi^k} (\mathbb{R}^n)^k$. Посмотрим, какой результат дает формула, полученная в предыдущем параграфе. Инварианты для алгебр этого вида были описаны в работе [10].

Покажем, что градиенты построенных нами функций независимы в точке общего положения. Для этого достаточно указать подпространство, в ограничении на которое рассматриваемые функции независимы. Рассмотрим матрицы вида

$$M_{(X,a)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a \\ 0 & & & & 0 \\ \dots & & X & & \dots \\ 0 & & & & 0 \\ a & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X \in \mathfrak{so}(n-1). \quad (34)$$

Инвариантами в этом случае являются a^2 и $a^2 \operatorname{tr} X^k$. Среди функций $a^2 \operatorname{tr} X^k$ найдется $\operatorname{ind} \mathfrak{so}(n-1)$ независимых между собой функций, которые вместе с первым инвариантом дадут необходимое число инвариантов. Для большего числа слагаемых в полупрямой сумме нужно рассмотреть ограничение на подпространство вида

$$M_{(X,a),k} = \begin{pmatrix} & & a_1^1 & \dots & a_1^k \\ & 0 & 0 & \dots & \dots \\ & & a_k^1 & \dots & a_k^k \\ 0 & & & & 0 \\ a_1^1 & \dots & a_1^k & & \\ \dots & & 0 & & 0 \\ a_k^1 & \dots & a_k^k & & \end{pmatrix}, \quad X \in \mathfrak{so}(n-k), \quad a^i \in \mathbb{R}^k. \quad (35)$$

В этом случае инвариантами являются всевозможные попарные произведения (a^i, a^j) и следы степеней матрицы X . Очевидно, что из этого набора можно выбрать $\operatorname{ind} \mathfrak{so}(n-k) + k(k+1)/2$ независимых инвариантов. В случае, когда

$k > n$, достаточное число независимых инвариантов можно выбирать из попарных произведений векторов a^i .

Выпишем в явном виде несколько инвариантов $\mathfrak{so}(n) + {}_{\varphi} \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} I_0 &= (a, a), \\ I_2 &= 2(a, X^2 a) - \operatorname{tr} X^2(a, a), \\ I_4 &= 4(a, X^4 a) - 2 \operatorname{tr} X^2(a, X^2 a) + (\operatorname{tr} X^2)^2(a, a) - \operatorname{tr} X^4(a, a). \end{aligned}$$

5.2. Алгебра Ли $\mathfrak{sp}(n) + {}_{\varphi} \mathbb{R}^{2n}$. Как и в предыдущем случае, многие из инвариантов, которые дает формула (33), обращаются в нуль. Покажем, что среди них найдется нужное число линейно независимых. Будем считать, что мы работаем в координатах, в которых кососимметрическая форма составлена из матриц размера 2×2 вида $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, расположенных на главной диагонали. Для случая $\mathfrak{sp}(n) + {}_{\varphi} \mathbb{R}^{2n}$ рассмотрим ограничение инвариантов на подпространство с координатами

$$M_{(X,a)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & & & 0 \\ \dots & \dots & & X & & \dots \\ 0 & 0 & & & & 0 \\ 0 & a & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X \in \mathfrak{sp}(n-1). \quad (36)$$

Инвариантами, так же как и в случае $\mathfrak{so}(n) + \mathbb{R}^n$, являются следы степеней $\operatorname{tr} X^k$ и a^2 . Очевидно, что среди $\operatorname{tr} X^k$ найдется $n-1 = \operatorname{ind} \mathfrak{sp}(n-1)$ независимых инвариантов.

Для полупрямой суммы с четным числом слагаемых можно рассмотреть подпространство с координатами

$$M_{(X,a),k} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & X & 0 \\ a_1^1 & \dots & a_{2k}^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_1^k & \dots & a_{2k}^k \end{pmatrix}, \quad X \in \mathfrak{sp}(n-k), \quad a^i \in \mathbb{R}^k. \quad (37)$$

В блоке, обозначенном звездочкой, записаны столбцы, полученные из строк a^k применением матрицы Λ^{ij} . Здесь нужное число инвариантов набирается из $n-k$ инвариантов на $\mathfrak{sp}(n-k)$ и $2k^2 - k$ попарных косых произведений $\omega(a^i, a^j)$.

В случае нечетного числа слагаемых $2k-1$ будем считать, что $a_{2k}^i = 0$ (при этом в части, обозначенной звездочкой, нули будут в $(2k-1)$ -ой строке), а X будем считать блочно-диагональной матрицей, первый блок у которой имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Инвариантами являются $\operatorname{tr} X^i$ (среди них можно выбрать $n-k$ независимых), $\sum_i (a_{2k-1}^i)^2$ и попарные косые произведения $\omega(a^i, a^j)$, $i \neq j$.

Явные вычисления дают следующие выражения для инвариантов:

$$\begin{aligned} I_1 &= \omega(a, aX), \\ I_3 &= 2\omega(a, aX^3) - \omega(a, aX) \operatorname{tr} X^2, \\ I_5 &= 4\omega(a, aX^5) - 2\omega(a, aX^3) \operatorname{tr} X^2 + \omega(a, aX)((\operatorname{tr} X^2)^2 - \operatorname{tr} X^4). \end{aligned}$$

5.3. Алгебра $\mathfrak{sl}(n) +_{\varphi^k} (\mathbb{R}^n)^k$. Для того чтобы описать инварианты для алгебры $\mathfrak{sl}(n) +_{\varphi^k} (\mathbb{R}^n)^k$, нужно найти явный вид Ad^* для этой алгебры Ли. Как и в предыдущих случаях, будем считать, что группа $\text{SL}(n) +_{\varphi} (\mathbb{R}^n)^k$ вложена в $\mathfrak{sl}(n+k)$ следующим образом:

$$\begin{pmatrix} C & u_1 & \dots & u_k \\ 0 & \dots & 0 & E \end{pmatrix}, \quad C \in \text{SL}(n), \quad u_i \in \mathbb{R}^n. \quad (38)$$

Коалгебру удобно представить в виде

$$\begin{pmatrix} X & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & & & \\ \dots & & 0 & \\ a_k & & & \end{pmatrix}. \quad (39)$$

Прямое вычисление показывает, что

$$\text{Ad}_{(C,u)}^*(X, a) = (\text{Ad}_C^* X + ua - \text{tr}(ua)E, aC^{-1}). \quad (40)$$

Для проверки этой формулы нужно просто убедиться в том, что матрица λE ортогональна $\mathfrak{sl}(n)$, т.е. что

$$\langle \lambda E, X \rangle = \text{tr } \lambda EX = \lambda \text{tr } X = 0. \quad (41)$$

ТЕОРЕМА 4. Единственным инвариантом коприсоединенного действия группы $\text{SL}(n) +_{\varphi} \mathbb{R}^n$ является определитель матрицы M , составленной из строк $a, aX, aX^2, \dots, aX^{n-1}$, т.е. объем параллелепипеда, натянутого на эти векторы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала проверим, что $\det M$ не меняется при сопряжении элементом $(C, 0)$. При сопряжении этим элементом элемент коалгебры (X, a) переходит в элемент (CXC^{-1}, aC^{-1}) . При этом в матрице M каждая строка умножается справа на C^{-1} . Это означает, что матрица M переходит в MC^{-1} , но $\det MC^{-1} = \det M \det C^{-1} = \det M$.

Теперь рассмотрим, что происходит при сопряжении элементом $(0, u)$. Ковектор (X, a) при этом переходит в $(X + va - \text{tr}(va)E)$. Посмотрим, как при этом изменяется матрица M . Первая строка матрицы остается неизменной. Вторая строка имеет вид $a(X + va - \text{tr}(va)E)$. Удобно записать это выражение, используя тензорные обозначения:

$$a_i(X_j^i + v^i a_j - n * v^i a_j^i) = a_i X_j^i + a_i v^i a_j - v^i a_i a_j = a_i X_j^i, \quad (42)$$

т.е. ко второй строке матрицы прибавляется первая строка с некоторым коэффициентом, что не меняет определителя матрицы.

Далее нетрудно проверить по индукции, что в k -ой строке матрицы M будет стоять линейная комбинация первых k строк предыдущей матрицы (при этом k -ая строка исходной матрицы входит в эту линейную комбинацию с коэффициентом единица):

$$a(X + va - \text{tr}(va)E)^k = a(X + va - \text{tr}(va)E)^{k-1}(X + va - \text{tr}(va)E). \quad (43)$$

Пользуясь предположением индукции, получаем, что $a(X + va - \text{tr}(va)E)^{k-1} = aX^{k-1} + b$, где b – линейная комбинация первых $k-2$ строк. Отсюда получаем, что

$$a(X + va - \text{tr}(va)E)^k = (aX^{k-1} + b)(X + va - \text{tr}(va)E) = aX^k + c, \quad (44)$$

где c – линейная комбинация первых $k-1$ строк исходной матрицы. Это означает, что определитель матрицы не меняется.

Этот инвариант нетривиален, поскольку для матрицы и вектора общего положения векторы $a, aX, \dots, aX^n$ линейно независимы.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $n = kd + r$, $r < k$. Тогда для группы $\text{SL}(n) +_{\varphi} (\mathbb{R}^n)^k$ инвариантами коприсоединенного представления являются определители матриц $M_{i_1 \dots i_r}$, составленных из строк $a_1, \dots, a_k; a_1X, \dots, a_kX; \dots; a_1X^{d-1}, \dots, a_kX^{d-1}$ и r строк вида $a_{i_r}X^d$. Эти инварианты не являются независимыми, но из них можно выбрать полный набор независимых инвариантов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой теоремы полностью повторяет доказательство для случая $\text{SL}(n) +_{\varphi} \mathbb{R}^n$. При действии элемента вида $(C, 0)$ матрица M_i умножается справа на C^{-1} , что не меняет ее определителя.

При действии элемента вида $(0, u)$ строки вида a_iX^q заменяются на строки $a_iX^q + \sum \dots$, где под знаком суммы стоит линейная комбинация векторов a_kX^s , $0 \leq s < q$. Такая замена не меняет определителя матрицы.

Для того чтобы показать, что среди этих инвариантов можно выбрать нужное число независимых, рассмотрим невырожденную диагональную матрицу X с собственными значениями $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Последние r из них равны единице. Выберем векторы a^i так, чтобы у каждого из них из первые kd координат были нулевыми, за исключением d единиц (у a^1 это – первые d координат, у a^2 – вторые d и т.д.). Оставшиеся r координат мы выбираем произвольно. В этом случае матрица M будет иметь блочно-диагональный вид. Рассмотрим k “укороченных” векторов, составленных из последних r координат. Описанные инварианты можно интерпретировать как объем параллелепипеда, натянутого на первые r “укороченных” векторов, и коэффициенты разложения остальных “укороченных” векторов по этому базису, которые, очевидно, независимы.

§ 6. Способы построения полных коммутативных наборов

Далее будут обсуждаться два способа построения полных коммутативных наборов: метод сдвига аргумента и метод цепочек подалгебр. Если говорить об алгебрах Ли, имеющих вид полупрямой суммы, то для этих методов можно сформулировать дополнительные условия полноты получаемых наборов.

6.1. Метод цепочек подалгебр. Метод цепочек подалгебр основан на следующей лемме (А. Т. Фоменко, В. В. Трофимов [1]).

ЛЕММА 2. Пусть $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}$ – подалгебра. Тогда существует естественное отображение $\pi: \mathfrak{G}^* \rightarrow \mathfrak{H}^*$. Если функции f_1 и f_2 находятся в инволюции на $\mathfrak{H}^*$, то π^*f_1 и π^*f_2 находятся в инволюции на $\mathfrak{G}^*$.

Если мы умеем каким-либо образом строить полный коммутативный набор $h_1, \dots, h_k$ на коалгебре $\mathfrak{H}^*$, то полный коммутативный набор на $\mathfrak{G}^*$ можно пытаться строить следующим образом: “поднять” функции g_i на $\mathfrak{G}^*$ и дополнить набор инвариантами коприсоединенного представления. Полученный набор заведомо будет коммутативным (функции $\pi^* g_i$ находятся в инволюции согласно лемме 2, а инварианты коприсоединенного представления лежат в ядре скобки Пуассона), но может не быть полным.

В случае полупрямой суммы

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{G} +_{\varphi} V \quad (45)$$

можно рассмотреть цепочку подалгебр, возникающую из естественного вложения $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{R}$. Сформулируем критерий, показывающий, в каком случае набор, построенный с помощью такой цепочки, будет полным.

ТЕОРЕМА 6. *Набор функций на коалгебре $\mathfrak{R}^*$, получаемый с помощью цепочки $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{R}$, является полным, если полным является набор функций на коалгебре $\mathfrak{G}^*$, получаемый из цепочки $\mathbf{H}_a \subset \mathfrak{G}$ ($\mathbf{H}_a$ – стабилизатор регулярно элемента $a \in V^*$ в смысле представления φ).*

Это утверждение можно доказать, используя теорему Раиса и вычисляя количество функций, которые войдут в набор, но в этом случае придется дополнительно исследовать их независимость. Вместо этого мы приведем доказательство этого утверждения в других, более инвариантных терминах.

Рассмотрим полный набор функций на $\mathfrak{G}^*$ и поднимем их на $\mathfrak{R}^*$. В каждой точке коалгебры $\mathfrak{R}^*$ рассмотрим подпространство P , натянутое на градиенты этих функций. Его косоортогональное дополнение в смысле скобки Пуассона на $\mathfrak{R}^*$ содержит в себе подпространство P и подпространство, натянутое на градиенты инвариантов алгебры $\mathfrak{R}$, т.е. ядро скобки Пуассона. Необходимым и достаточным условием для того, чтобы набор, получаемый добавлением к исходному набору, был полным, является точное равенство

$$P^{\perp} = P + \text{Ker}(\{\cdot, \cdot\}). \quad (46)$$

Это равенство должно выполняться в каждой точке $\mathfrak{R}^*$.

Можно заменить это равенство следующим включением:

$$\mathfrak{G}^{\perp} \subseteq \mathfrak{G} + \text{Ker}(\{\cdot, \cdot\}). \quad (47)$$

Здесь $\mathfrak{G}$ – это подпространство, натянутое на градиенты координатных функций на $\mathfrak{G}$. Это условие эквивалентно равенству (46) в следующем смысле. Если мы выберем в $\mathfrak{G}$ полный набор функций и обозначим пространство, порождаемое их градиентами, через P , то из (47) будет следовать (46). То, что из (46) следует (47), очевидно, поскольку справедливы включения $\mathfrak{G}^{\perp} \subseteq P^{\perp}$ и $P \subseteq \mathfrak{G}$. Включение (47) должно выполняться почти во всех точках $\mathfrak{R}^*$.

В этих терминах теорема может быть переформулирована следующим образом:

ТЕОРЕМА 7. Пусть $\mathfrak{R} = \mathfrak{G} +_{\rho} V$. Обозначим через H_a стабилизатор элемента общего положения из V . Если для H_a справедливо включение $H_a^{\perp} \subseteq H_a + \mathfrak{G}^{\perp}$ (здесь косоортогональное дополнение берется в смысле скобки Пуассона на $\mathfrak{G}$), то справедливо включение $\mathfrak{G}^{\perp} \subseteq \mathfrak{G} + \mathfrak{R}^{\perp}$ (здесь косоортогональное дополнение берется в смысле скобки Пуассона на $\mathfrak{R}^*$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем выражение для скобки Пуассона в $\mathfrak{R}$ в точке (x, a) :

$$\{(\xi, u), (\eta, v)\} = \langle [\xi, \eta], x \rangle + \langle \rho(\xi)v - \rho(\eta)u, a \rangle. \quad (48)$$

Возьмем функцию из косоортогонального дополнения к $\mathfrak{G}$ в $\mathfrak{R}$ и обозначим ее градиент через (η, v) . Для ее градиента справедливо соотношение

$$\{(\xi, 0), (\eta, v)\} = \langle [\xi, \eta], x \rangle + \langle \rho(\xi)v, a \rangle = 0 \quad \forall \xi. \quad (49)$$

Выбирая $\xi \in \text{Ann } a$, получаем, что для всех таких ξ выполняется соотношение

$$\langle [\xi, \eta], x \rangle = 0, \quad (50)$$

т.е. η принадлежит к косоортогональному дополнению $(\text{Ann } a)^{\perp}$. По нашему предположению это означает, что либо $\eta \in \text{Ann } a$, либо η лежит в ядре скобки Пуассона для алгебры $\mathfrak{G}$.

В первом случае мы получаем, что из (49) и условия $\eta \in \text{Ann } a$ следует, что

$$\{(\xi, u), (\eta, v)\} = 0, \quad (51)$$

т.е. (η, v) лежит в ядре скобки Пуассона для $\mathfrak{R}$. Во втором случае из (49) получаем

$$\langle \rho(\xi)v, a \rangle = 0. \quad (52)$$

Это означает, что $(0, v)$ лежит в ядре скобки Пуассона, откуда следует включение $\mathfrak{G}^{\perp} \subseteq \mathfrak{G} + \mathfrak{R}^{\perp}$.

Нетрудно убедиться в том, что описанная конструкция может быть применена для алгебр Ли $\mathfrak{so}(n) +_{\varphi} \mathbb{R}^n$, $\mathfrak{sl}(n) +_{\varphi} \mathbb{R}^n$ и $\mathfrak{sp}(n) +_{\varphi} \mathbb{R}^{2n}$. Для алгебр Ли вида $\mathfrak{G} +_{\varphi^k} V^k$, $k \geq 2$, где $\mathfrak{G}$ – одна из классических алгебр Ли, а φ – представление минимальной размерности, эта конструкция не работает.

6.2. Метод сдвига аргумента. Одним из эффективных способов построения полных коммутативных наборов является метод сдвига аргумента. Его применение основано на следующей лемме (А. Т. Фоменко, В. В. Трофимов [1]).

ЛЕММА 3. Пусть f и g – инварианты коприсоединенного представления алгебры $\mathfrak{G}$. Тогда для любого ковектора $a \in \mathfrak{G}^*$ функции $f_{\lambda} = f(x + \lambda a)$ и $g_{\mu} = g(x + \mu a)$ находятся в инволюции.

Во многих случаях метод сдвига аргумента позволяет построить полный коммутативный набор. В частности, имеет место следующая теорема (см. [1]).

ТЕОРЕМА 8 (А. В. Болсинов). Пусть $\mathfrak{R} = \mathfrak{G} +_{\varphi} V$ и a – регулярный элемент пространства V . Если

- 1) $\mathfrak{G} = \mathfrak{sl}(n)$, $\varphi = \rho_0^k$, где ρ – представление минимальной размерности, $n \neq 0 \pmod{p}$;
- 2) $\mathfrak{G} = \mathfrak{so}(n)$, $\varphi = \rho_0^k$;
- 3) $\mathfrak{G} = \mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$, $\varphi = \rho_0^k$ и k нечетно либо $k > n$,

то семейство сдвигов инвариантов на ковектор a полное. Если ограничения на число слагаемых не выполнены, то семейство сдвигов не полное.

Кроме того, имеется следующее утверждение, позволяющее расширить область применимости метода сдвига аргумента [11].

ТЕОРЕМА 9 (Ю. А. Браилов). Пусть $\mathfrak{R} = \mathfrak{G} +_{\varphi} V$ – полупрямая сумма. Тогда сдвиги инвариантов коприсоединенного представления алгебры $\mathfrak{R}$ на элемент $y \in \mathfrak{G}^*$ коммутируют с координатными функциями на идеале $\mathfrak{G}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f_{\lambda} = f((x, a) + \lambda(y, 0))$, а g – функция на идеале, т.е. $dg \in V$. Запишем по определению скобку Пуассона этих функций:

$$\begin{aligned} \{f_{\lambda}, g\} &= \langle (x, a), [d_{(x+\lambda y, a)} f, dg] \rangle \\ &= \langle (x + \lambda y, a), [d_{(x+\lambda y, a)} f, dg] \rangle - \langle (\lambda y, 0), [df, dg] \rangle. \end{aligned} \quad (53)$$

Первое слагаемое равно нулю, так как f – инвариант, а второе равно нулю, поскольку V – идеал и, следовательно, $[df, dg] \in V$. Заметим, что в доказательстве нигде не используется коммутативность V .

Границы применимости этого метода показывает следующая теорема Браилова [11].

ТЕОРЕМА 10 (Ю. А. Браилов). Набор, полученный добавлением координатных функций на идеале к сдвигам инвариантов на элемент из $\mathfrak{G}$, будет полным только тогда, когда сдвиги инвариантов образуют полное семейство в $\mathcal{H}_a$.

Наконец, можно использовать следующий метод, являющийся некоторой комбинацией метода сдвига аргумента и метода цепочек подалгебр.

ЛЕММА 4. Пусть h – функция на $\mathcal{H}_a^*$, π^*h – ее поднятие до функции на $\mathfrak{R}$. Тогда сдвиги инвариантов коприсоединенного представления алгебры $\mathfrak{R}$ на элемент a коммутируют с π^*h .

§ 7. Сравнение методов построения коммутативных наборов

Приведенные в предыдущем параграфе методы дают, вообще говоря, разные результаты. Продемонстрируем это на простейшем примере. Рассмотрим алгебру Ли $e(3) = \mathfrak{so}(3) +_{\varphi} \mathbb{R}^3$. Обозначим координаты на $\mathfrak{so}(3)$ через (a, b, c) , а координаты на $\mathbb{R}^3$ – через (x, y, z) . Инварианты для этой алгебры Ли хорошо известны:

$$I_1 = x^2 + y^2 + z^2, \quad I_2 = ax + by + cz.$$

Для того чтобы получить полный коммутативный набор, нужно выбрать еще две функции. Если следовать методу цепочек подалгебр, мы должны взять

полный набор функций на $\mathfrak{so}(3)$. Одним из возможных наборов является следующий: $f_1 = a$, $f_2 = a^2 + b^2 + c^2$.

Метод Браилова дает другой результат. В данном случае нам не нужно даже рассматривать сдвиги инвариантов, достаточно добавить к ним координаты на коммутативном идеале. В этом случае полный коммутативный набор будет состоять из следующих функций:

$$I_1 = x^2 + y^2 + z^2, \quad I_2 = ax + by + cz, \quad f_1 = x, \quad f_2 = y.$$

Согласно методу сдвига инвариантов мы должны рассмотреть сдвиги инвариантов на элемент общего положения. В зависимости от того, как выбирать элемент, на который будут сдвигаться инварианты, можно получить (сдвигая на элемент $e_x + e_a$) набор

$$I_1 = x^2 + y^2 + z^2, \quad I_2 = ax + by + cz, \quad f_1 = x, \quad f_2 = a,$$

либо (сдвигая на элемент $e_x + e_b$) набор

$$I_1 = x^2 + y^2 + z^2, \quad I_2 = ax + by + cz, \quad f_1 = x, \quad f_2 = a + y.$$

Интересно отметить, что метод цепочек подалгебр, хотя и является наименее универсальным, дает наиболее интересный “физический” набор. Орбита коприсоединенного представления группы $e(3)$ представляет собой кокасательное расслоение к сфере, на котором вместо канонической симплектической структуры задана структура $\omega = dp \wedge dq + \varepsilon \omega_0$, где ω_0 – форма объема на сфере, а ε – некоторый параметр, который можно выразить через I_1 и I_2 .

Инвариант I_1 можно трактовать как геометрический интеграл, интеграл I_2 – как интеграл площадей. Функция $f_2 = a^2 + b^2 + c^2$ – квадрат импульса, именно ее естественно рассматривать как гамильтониан системы. Наборы, построенные по методу Садэтова (или методу Браилова), включают в себя только линейные функции, которые не задают никакой интересной динамики на орбитах коприсоединенного действия.

Эта ситуация достаточно общая. Для любой алгебры Ли вида (3) ее орбита общего положения имеет вид произведения кокасательного расслоения к орбите действия Φ и орбиты коприсоединенного действия в аннуляторе регулярного элемента. В методе Садэтова в качестве основы коммутативного набора используются координаты на орбите, лежащей в V . В предельном случае, когда аннулятор элемента общего положения в смысле представления φ коммутативен, этих координат оказывается достаточно для того, чтобы построить полный набор, и мы получаем набор, состоящий из инвариантов коприсоединенного представления и координатных функций на идеале.

В работе [12] для некоторых алгебр Ли обсуждаемого типа полные коммутативные наборы построены напрямую с помощью метода Садэтова. Сравнение их с наборами, получаемыми методом Браилова, позволяет сформулировать следующую гипотезу.

ГИПОТЕЗА 2. Пусть алгебра Ли $\mathfrak{L}$ имеет вид полупрямой суммы алгебры $\mathfrak{G}$ с коммутативным идеалом V по представлению φ . Тогда если аннулятор регулярного элемента из V является полупростой алгеброй Ли, то полный набор, построенный методом Садэтова, совпадает с набором, построенным методом Браилова.

Список литературы

- [1] В. В. Трофимов, А. Т. Фоменко, *Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений*, Факториал, М.; Просперус, Ижевск, 1995.
- [2] В. В. Трофимов, А. Т. Фоменко, “Интегрируемость по Лиувиллю гамильтоновых систем на алгебрах Ли”, *УМН*, **39**:2 (1984), 3–56; англ. пер.: V. V. Trofimov, A. T. Fomenko, “Liouville integrability of Hamiltonian systems on Lie algebras”, *Russian Math. Surveys*, **39**:2 (1984), 1–67.
- [3] А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко, “Уравнения Эйлера на конечномерных группах Ли”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **42**:2 (1978), 396–415; англ. пер.: A. S. Mišchenko, A. T. Fomenko, “Euler equations on finite-dimensional Lie groups”, *Math. USSR-Izv.*, **12**:2 (1978), 371–389.
- [4] А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко, “Интегрирование уравнений Эйлера на полупростых алгебрах Ли”, *Докл. АН СССР*, **231**:3 (1976), 536–538; англ. пер.: A. S. Mišchenko, A. T. Fomenko, “On the integration of the Euler equations on semisimple Lie algebras”, *Soviet Math. Dokl.*, **17**:6 (1977), 1591–1593.
- [5] А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко, “Обобщенный метод Лиувилля интегрирования гамильтоновых систем”, *Функц. анализ и его прил.*, **12**:2 (1978), 46–56; англ. пер.: A. S. Mishchenko, A. T. Fomenko, “Generalized Liouville method of integration of Hamiltonian systems”, *Funct. Anal. Appl.*, **12**:2 (1978), 113–121.
- [6] В. В. Трофимов, А. Т. Фоменко, “Групповые инвариантные симплектические структуры и гамильтоновы потоки на симметрических пространствах”, *Тр. сем. по вект. и тенз. анализу*, 1983, №21, 23–83; англ. пер.: V. V. Trofimov, A. T. Fomenko, “Non-invariant symplectic group structures and Hamiltonian flows on symmetric spaces”, *Selecta Math. Soviet.*, **7**:4 (1988), 355–414.
- [7] С. Т. Садэтов, “Доказательство гипотезы Мищенко–Фоменко”, *Докл. РАН*, **397**:6 (2004), 751–754; англ. пер.: S. T. Sadetov, “A proof of the Mishchenko–Fomenko conjecture”, *Dokl. Math.*, **70**:1 (2004), 635–638.
- [8] А. В. Болсинов, “Полные инволютивные наборы полиномов в пуассоновых алгебрах: доказательство гипотезы Мищенко–Фоменко”, *Тр. сем. по вект. и тенз. анализу*, **26** (2005), 87–109.
- [9] В. В. Трофимов, А. Т. Фоменко, “Динамические системы на орбитах линейных представлений групп Ли и полная интегрируемость некоторых гидродинамических систем”, *Функц. анализ и его прил.*, **17**:1 (1983), 31–39; англ. пер.: V. V. Trofimov, A. T. Fomenko, “Dynamical systems on the orbits of linear representations of Lie groups and the complete integrability of certain hydrodynamical systems”, *Funct. Anal. Appl.*, **17**:1 (1983), 23–29.
- [10] А. Гусейнов, *Инварианты коприсоединенного представления алгебр Ли $\mathfrak{so}(n) + \varphi \mathbb{R}^n$, $\mathfrak{so}(n) + \varphi (\mathbb{R}^n)^k$, $\mathfrak{gl}(n) + (\mathbb{R}^n)^k$* , Дипломная работа, МГУ им. М. В. Ломоносова, мех-мат. каф. диф. геометрии и приложений, М., 2006.
- [11] В. В. Трофимов, А. Т. Фоменко, “Геометрия скобок Пуассона и методы интегрирования по Лиувиллю систем на симметрических пространствах”, *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Нов. достиж.*, **29**, ВИНТИ, М., 1986; англ. пер.: V. V. Trofimov, A. T. Fomenko, “Geometry of Poisson brackets and methods of

Liouville integration of systems on symmetric spaces", *J. Soviet Math.*, **39**:3 (1987), 2683–2746.

- [12] М. М. Жданова, *Построение полных коммутативных наборов для полупрямых сумм методом Садэтова*, Дипломная работа, МГУ им. М. В. Ломоносова, мех-мат, каф. диф. геометрии и приложений, М., 2007.

А. С. Воронцов (A. S. Vorontsov)

Механико-математический факультет

Московского государственного университета

им. М. В. Ломоносова

E-mail: a.s.vorontsov@gmail.ru

Поступила в редакцию

19.06.2008 и 20.02.2009