Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. М. Жданова, Вполне интегрируемые гамильтоновы системы на полупрямых суммах алгебр Ли, *Матем. сб.*, 2009, том 200, номер 5, 3–32

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm6385>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 17:16:58

УДК 514.745.82

М. М. Жданова

Вполне интегрируемые гамильтоновы системы на полупрямых суммах алгебр Ли

В работе исследуется вопрос полной интегрируемости гамильтоновых систем, возникающих на алгебрах Ли вида полупрямой суммы. Для этих классов алгебр метод Садэтова приобретает более простую форму: изоморфизм алгебры, возникающей на втором шаге метода Садэтова, и стационарной подалгебры элемента общего положения выписывается в явном виде. Приведена явная форма этого изоморфизма, а также явные формулы полиномов полного набора для алгебр $\mathfrak{so}(n) + (\mathbb{R}^n)_k$, $\mathfrak{su}(n) + (\mathbb{C}^n)_k$ и $\mathfrak{u}(n) + (\mathbb{C}^n)_k$. Для алгебр $\mathfrak{so}(n) + \mathbb{R}^n$ исследуются степени получившихся полиномиальных функций.

Библиография: 15 названий.

Ключевые слова: скобка Пуассона, теорема Лиувилля, метод Садэтова, гипотеза Мищенко–Фоменко.

§ 1. Введение. Основные понятия

Пусть $\mathfrak{G}$ – произвольная конечномерная алгебра Ли над полем $\mathbb{R}$. Обозначим через $\mathfrak{G}^*$ двойственное пространство к $\mathfrak{G}$. На двойственном пространстве $\mathfrak{G}^*$ будем рассматривать полиномиальные функции $f: \mathfrak{G}^* \rightarrow \mathbb{R}$. Заметим, что многообразие $\mathfrak{G}^*$ является пуассоновым. Действительно, на нем существует скобка Пуассона

$$\{\cdot, \cdot\}: C^\infty(\mathfrak{G}^*) \times C^\infty(\mathfrak{G}^*) \rightarrow C^\infty(\mathfrak{G}^*),$$

определяемая в каждой точке $x \in \mathfrak{G}^*$ равенством

$$\{f, g\}(x) = c_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j} x_k.$$

Эта скобка является вырожденной на $\mathfrak{G}^*$, т.е. соответствующее ей тензорное поле обнуляется на $\mathfrak{G}^*$. Однако на орбитах O^* коприсоединенного представления она становится невырожденной, и задаваемая ею симплектическая структура совпадает со стандартной (см. [1]). Из теоремы Лиувилля (см., например, [1], [2]) известно, что для полной интегрируемости системы на симплектическом многообразии Ω необходимое число коммутирующих интегралов в инволюции равно $\dim \Omega/2$. Это значит, что если мы найдем $\dim \Omega/2$ функций, то, взяв любую из этих функций в качестве гамильтониана, получим гамильтонову систему, интегрируемую по Лиувиллю, первыми интегралами которой будут найденные функции. Из этого, в частности, следует, что для полной

интегрируемости системы на орбите O^* необходимо $\dim O^*/2$ полиномов, а для интегрируемости системы на $\mathfrak{G}^*$ их требуется

$$\begin{aligned} m &= \max_{O^*} \left(\dim \mathfrak{G}^* - \dim O^* + \frac{\dim O^*}{2} \right) = \max_{O^*} \left(\frac{\dim \mathfrak{G}^* + \dim \mathfrak{G}^* - \dim O^*}{2} \right) \\ &= \max_{O^*} \left(\frac{\dim \mathfrak{G}^* + \operatorname{codim} O^*}{2} \right) = \left(\frac{\dim \mathfrak{G}^* + \operatorname{ind} \mathfrak{G}^*}{2} \right). \end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Коммутативный относительно скобки Пуассона набор алгебраически независимых полиномов $f_1, \dots, f_m$ называется *полным*, если

$$m = \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{G} + \operatorname{ind} \mathfrak{G}). \quad (1)$$

Таким образом, если на алгебре Ли найдется полный коммутативный набор полиномов $f_1, \dots, f_m$, то гамильтонова система на всей алгебре с гамильтонианом $f \in \{f_1, \dots, f_m\}$ будет интегрируема.

ТЕОРЕМА (А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко). *На двойственном пространстве к любой конечномерной алгебре Ли существует полный инволютивный набор полиномов.*

Для случая редуктивной алгебры эта теорема была доказана А. С. Мищенко и А. Т. Фоменко в [3]–[7]. Полный инволютивный набор полиномов для такой алгебры может быть построен с помощью метода сдвига аргумента, введенного в [3], [5], [8]–[11]. Для алгебры $\mathfrak{so}(n)$ теорема была независимо доказана С. В. Манаковым, построившим полный набор полиномов для этого случая и показавшим, что найденные полиномы находятся в инволюции. Вопрос построения полных наборов для полупрямых сумм простых алгебр по неприводимому представлению рассматривался А. В. Болсиновым (см., например, [2]). Кроме того, для сумм $\mathfrak{gl}(2n) + V$ по представлению $\Lambda^2 \rho$, для сумм $\mathfrak{sl}(2n) + V$ по представлению $s^2 \rho$ и для сумм $\mathfrak{sp}(2n) + V$ по сумме представлений $\rho + \tau$ Т. А. Певцовой в [12] построены явные формулы для полиномов. Полное доказательство было проведено С. Т. Садзтовым в [13], предложившим алгебраическую конструкцию, сводящую задачу к случаю редуктивной алгебры. Более наглядное геометрическое доказательство приведено А. В. Болсиновым в [14]. В этой же работе был построен полный набор для алгебры $\mathfrak{so}(n) + \mathbb{R}^n$.

В настоящей работе исследуется метод Садзтова для алгебр вида полупрямой суммы полупростой алгебры с коммутативной. Показывается, что стационарная подалгебра регулярного элемента, возникающая с появлением представления рассматриваемой полупростой алгебры, играет важную роль в методе Садзтова. Именно ей изоморфна алгебра, возникающая на втором шаге метода Садзтова, а значит, построив полный набор в стационарной подалгебре и зная явную формулу для изоморфизма, мы сможем перенести функции на исходную алгебру, тем самым дополнив функции, построенные на первом шаге, до полного набора. Мы напомним, какой вид будет иметь такая стационарная подалгебра в классических случаях для сумм полупростых алгебр бесконечных серий и алгебры g_2 по представлениям минимальной размерности и их итерациям, а также приведем явные формулы для полиномов в случаях $\mathfrak{so}(n) + (\mathbb{R}^n)^k$, $\mathfrak{su}(n) + (\mathbb{C}^n)^k$ и $\mathfrak{u}(n) + (\mathbb{C}^n)^k$.

В § 2 будет описано, как преобразуется метод Садэтова для рассматриваемых алгебр. В § 3 описаны виды стабилизаторов для исследуемых серий. Вычислению индексов алгебр, необходимому для подсчета количества функционально независимых полиномов в полном наборе, посвящен § 4. В §§ 5–7 схема, изложенная в § 2, применяется к алгебрам $\mathfrak{so}(n) + (\mathbb{R}^n)^k$. Выписываются явные формулы для полиномов, исследуются степени полученных полиномиальных функций для алгебр $\mathfrak{so}(n) + \mathbb{R}^n$. В § 8 и § 9 эта же схема применяется к алгебрам $\mathfrak{su}(n) + (\mathbb{C}^n)^k$, а в § 10 – к алгебрам $\mathfrak{u}(n) + (\mathbb{C}^n)^k$.

§ 2. Общая схема построения набора полиномов методом Садэтова для алгебр вида $\mathfrak{G} = \mathfrak{L} +_{\chi} V$

Ниже мы изложим метод Садэтова для алгебр вида полупрямой суммы. Пусть

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{L} +_{\chi} V, \quad (2)$$

где полупрямая сумма алгебры Ли $\mathfrak{L}$ и пространства V берется по представлению $\chi: \mathfrak{L} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Введем следующие обозначения:

$A, B, \dots$ – элементы из $\mathfrak{L}$,

$u, v, \dots$ – векторы из V ,

$\alpha, \beta, \dots$ – функции из $V^{\perp} = \mathfrak{L}^*$,

$a, b, \dots$ – ковекторы из $V^* = \mathfrak{L}^{\perp}$,

наконец, элементы $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G}^*$ условимся обозначать буквами $\xi, \eta, \dots$ и $x, y, \dots$ соответственно. Таким образом, $\xi = A + u$, $\eta = B + v$, $\dots$ принадлежат алгебре $\mathfrak{G}$, $x = \alpha + a$, $y = \beta + b$, $\dots$ принадлежат коалгебре $\mathfrak{G}^*$. Кроме того, результат применения функционала x к элементу ξ (так же, как и результат применения a к v и α к A) будем обозначать угловыми скобками: $\langle x, \xi \rangle$.

Согласно лемме 1 из [14] любая конечномерная алгебра Ли $\mathfrak{G}$ удовлетворяет одному из случаев:

- $\mathfrak{G}$ – полупростая алгебра;
- $\mathfrak{G} = \mathfrak{L} + \mathbb{K}$, $\mathfrak{L}$ – полупростая алгебра, $\mathbb{K}$ – основное поле;
- $\mathfrak{G}$ содержит коммутативный идеал, не являющийся одномерным центром алгебры;
- $\mathfrak{G}$ содержит идеал, изоморфный алгебре Гейзенберга, причем центр алгебры Гейзенберга совпадает с центром алгебры $\mathfrak{G}$.

В первых двух случаях полный коммутативный набор может быть получен методом сдвига аргумента (см. [3]). Вернемся теперь к алгебрам (2). Напомним некоторые общие факты.

Коммутатор в рассматриваемых алгебрах имеет вид

$$[A + v, B + u]_{\mathfrak{G}} = [A, B]_{\mathfrak{L}} + \chi(A)u - \chi(B)v.$$

Здесь $[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{L}}$ – коммутатор в алгебре $\mathfrak{L}$. Следовательно, для присоединенного представления в алгебре $\mathfrak{G}$ верна следующая формула:

$$\mathrm{ad}_{(A+v)}(B + u) = \mathrm{ad}_{\mathfrak{L}, A} B + \chi(A)u - \chi(B)v,$$

где $\text{ad}_{\mathfrak{L}, \cdot}$ – присоединенное представление в алгебре $\mathfrak{L}$. Выясним, как выглядит формула для коприсоединенного представления. Пусть $\alpha + a \in \mathfrak{G}^*$. Тогда элемент $\text{ad}_{A+v}^*(\alpha + a)$ по определению коприсоединенного представления действует на любом $B + u \in \mathfrak{G}$ по правилу

$$\begin{aligned} \langle \text{ad}_{A+v}^*(\alpha + a), B + u \rangle &= -\langle \alpha + a, \text{ad}_{(A+v)}(B + u) \rangle \\ &= -\langle \alpha + a, \text{ad}_{\mathfrak{L}, A} B + \chi(A)u - \chi(B)v \rangle \\ &= \{ \langle \alpha, \text{ad}_{\mathfrak{L}, A} B \rangle + \langle a, \chi(A)u - \chi(B)v \rangle \}. \end{aligned} \quad (3)$$

Если через $\chi^*: \mathfrak{L} \rightarrow \text{gl}(V^*)$ обозначим представление, двойственное χ (а именно, $\langle \chi^*(A)a, u \rangle = -\langle a, \chi(A)u \rangle$), а через $\Phi: V^* \times V \rightarrow \mathfrak{L}^*$ обозначим отображение, действующее по правилу $\Phi(b, v)B = \langle b, \chi(B)v \rangle$, то формула (3) примет вид

$$\begin{aligned} \langle \text{ad}_{A+v}^*(\alpha + a), B + u \rangle &= \langle \text{ad}_{\mathfrak{L}, A} \alpha, B \rangle + \langle \chi^*(A)a, u \rangle + \langle \Phi(a, v), B \rangle \\ &= \langle \text{ad}_{\mathfrak{L}, A} + \Phi(a, v) + \chi^*(A)a, B + u \rangle. \end{aligned}$$

Таким образом, $\text{ad}_{A+v}^*(\alpha + a) = \underbrace{\text{ad}_{\mathfrak{L}, A} \alpha + A(b, v)}_{\in \mathfrak{L}^*} + \underbrace{\chi^*(A)a}_{\in V^*}$.

Заметим, что поскольку V – идеал в алгебре $\mathfrak{G}$, то корректно определено ограничение присоединенного представления на V :

$$(\text{ad}_V)_{A+v}(u) = \chi(A)u.$$

А значит, и двойственное к нему тоже существует и имеет вид

$$(\text{ad}_V^*)_{A+v}a := \chi^*(A)a. \quad (4)$$

Посмотрим, как преобразуется алгоритм, описанный в [14], для нашего частного случая, а именно для алгебр вида (2).

1. Согласно [14] в качестве “первой части” набора мы берем элементы коммутативного идеала V , которые являются линейными функциями на идеале V^* . Эту “первую часть” мы хотим дополнить функциями, которые находятся в инволюции с элементами V . Обозначим через $\text{Ann}(V)$ множество функций из $P(\mathfrak{G})$, коммутирующих с элементами V . Наша цель – найти в $\text{Ann}(V)$ некоторую удобно описываемую подалгебру. Для этого сначала исследуем стационарную подалгебру элемента $a \in V^*$ в смысле представления ad_V^* , т.е.

$$\text{St}(a) = \{ \xi \in \mathfrak{G} \mid (\text{ad}_V^*)_{\xi} a = 0 \}.$$

ЛЕММА 1. *Уравнение стационарной подалгебры элемента $a \in V^*$ имеет вид*

$$\text{St}(a) = \{ (A, u) \mid u \in V, \chi^*(A)a = 0 \},$$

где $\chi^*: \mathfrak{L} \rightarrow \text{gl}(V^*)$ – представление, двойственное представлению χ .

Доказательство явно следует из формулы (4).

Введем обозначение

$$\{ A \mid \chi^*(A)a = 0 \} = \tilde{\text{St}}(a). \quad (5)$$

Тогда стационарная подалгебра будет являться полупрямой суммой

$$\text{St}(a) = \tilde{\text{St}}(a) +_{\chi|_{\text{St}}} V$$

по ограничению $\chi|_{\text{St}}: \tilde{\text{St}}(a) \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ представления χ на стационарную подалгебру.

2. Теперь рассмотрим рациональные функции $\psi: V^* \rightarrow \mathfrak{G}$, где для любого $a \in V^*$ имеем $\psi(a) \in \text{St}(a)$. Эти функции будут являться рациональными сечениями расслоения стационарных подалгебр в $\mathfrak{G}$ (см. [14]).

Остановимся подробнее на строении алгебры сечений. Если мы введем поточечный коммутатор на множестве этих сечений $[\psi_1, \psi_2](a) = [\psi_1(a), \psi_2(a)]$, алгебра сечений станет алгеброй Ли, размерность которой над исходным полем, очевидно, равна бесконечности. Но если мы перейдем к полю $\mathbb{K}(V^*)$ рациональных функций на V^* , алгебра станет конечномерной. Алгебра сечений так же, как и стационарная подалгебра $\tilde{\text{St}}(a)$ регулярного элемента, состоит из двух частей: $\Phi = \{\varphi: V^* \rightarrow \mathfrak{L} \mid \chi^*(\varphi(a))a = 0\}$ – множество рациональных функций, обладающих условием $\chi^*(\varphi(a))a = 0$, и $S = \{s: V^* \rightarrow V\}$ – множество произвольных рациональных отображений. При этом сумма здесь тоже не будет прямой:

$$\begin{aligned} [\varphi_1 + s_1, \varphi_2 + s_2](a) &= [\varphi_1(a) + s_1(a), \varphi_2(a) + s_2(a)] \\ &= [\varphi_1(a), \varphi_2(a)] + \chi(\varphi_1(a))s_2(a) - \chi(\varphi_2(a))s_1(a) \neq [\varphi_1, \varphi_2](a) + [s_1, s_2](a). \end{aligned}$$

Если ввести базис в $\mathfrak{G}$, а именно $v_1, \dots, v_m \in V$, $A_1, \dots, A_k \in \mathfrak{L}$, то сечения запишутся в виде

$$s(\cdot) = \sum_{i=1}^m P_i(\cdot)v_i, \quad \varphi(\cdot) = \sum_{j=1}^k Q_j(\cdot)A_j, \quad (6)$$

где $P_i(\cdot)$ и $Q_j(\cdot)$ – рациональные функции от элементов V .

Построим отображение $\tilde{\chi}: \Phi \rightarrow \mathfrak{gl}(S)$ по правилу

$$\tilde{\chi}(\varphi)s = \tilde{s}, \quad \text{где} \quad \tilde{s}(a) = \chi(\varphi(a))s(a).$$

Это отображение также будет являться представлением. Действительно, воспользовавшись записью (6), получим

$$\tilde{s}(a) = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^m P_i(a)Q_j(a)\chi(A_j)u_i,$$

откуда

$$s(\cdot) = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^m \underbrace{P_i(\cdot)Q_j(\cdot)}_{R_{ij}(\cdot)} \underbrace{\chi(A_j)u_i}_{\in V}$$

и, кроме того, $\tilde{\chi}([\varphi_1, \varphi_2]) = [\tilde{\chi}(\varphi_1), \tilde{\chi}(\varphi_2)]$. Таким образом, алгебра сечений оказывается полупрямой суммой $\Phi +_{\tilde{\chi}} S$.

3. Наконец, введем функции

$$f_\psi(x) = \langle x, \psi(\text{pr}_{V^*} x) \rangle. \quad (7)$$

ЛЕММА 2 (А. В. Болсинов; см. [14]). *Функции $f_\psi(x) = \langle x, \psi(\text{pr}_{V^*} x) \rangle$ принадлежат $\text{Ann}(V)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидна равносильность следующих условий:

- $f \in \text{Ann}(V)$;
- $\{f, v_i\} = 0 \quad \forall v_i \in V$;
- $\forall x \in \mathfrak{G}^*, \forall v \in V \quad 0 = \langle x, \{f, v\} \rangle = \langle [df_x, v], x \rangle = \langle \text{ad}_{df_x} v, x \rangle = -\langle v, \text{ad}_{df_x}^* x \rangle$;
- $\text{ad}_{df_x}^* x = 0 \iff df_x \in \text{St}(x) \quad \forall x$;
- $\chi^*(df_x|_{\mathfrak{L}})x = 0$.

Здесь мы рассматриваем df_x как элемент алгебры $\mathfrak{G}$. Таким образом, задача сводится к описанию той компоненты df_x , которая лежит в алгебре $\mathfrak{L}$. Для этого посмотрим, как df_x действует на элементах $y = \beta \in \mathfrak{L}^*$. Для таких y имеем $\text{pr}_{V^*} y = 0 \implies \text{pr}_{V^*}(x + \varepsilon y) = \text{pr}_{V^*} x$, поэтому

$$\begin{aligned} df_x(y) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \varepsilon y) - f(x)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\langle x + \varepsilon y, \psi(\text{pr}(x + \varepsilon y)) \rangle - \langle x, \psi(\text{pr} x) \rangle}{\varepsilon} \\ &= \langle y, \psi(\text{pr} x) \rangle, \end{aligned}$$

т.е. $df_x|_{\mathfrak{L}} = \psi(\text{pr}(x))$, откуда, очевидно, следует $\chi^*(df_x|_{\mathfrak{L}})x = 0$.

Лемма 2 доказана.

Пусть $x = a + \alpha$, а f_{ψ_1} и f_{ψ_2} — две функции, отвечающие сечениям $\psi_1 = (\varphi_1 + s_1)$ и $\psi_2 = (\varphi_2 + s_2)$ соответственно. Вычислим их скобку:

$$\begin{aligned} \{f_{\psi_1}, f_{\psi_2}\}(x) &= \langle [\psi_1, \psi_2](\text{pr}_{V^*} x), x \rangle = \langle [\psi_1, \psi_2](a), \alpha + a \rangle = \langle [\psi_1(a), \psi_2(a)], \alpha + a \rangle \\ &= \langle [\varphi_1(a), \varphi_2(a)] + \chi(\varphi_1(a))s_2(a) - \chi(\varphi_2(a))s_1(a), \alpha + a \rangle \\ &= \langle [\varphi_1(a), \varphi_2(a)], \alpha \rangle + \langle \chi(\varphi_1(a))s_2(a), a \rangle - \langle \chi(\varphi_2(a))s_1(a), a \rangle. \end{aligned}$$

Однако второе и третье слагаемые равны нулю, поскольку

$$\langle \chi(\varphi_2(a))s_1(a), a \rangle = -\langle s_1(a), \chi^*(\varphi_2(a))a \rangle = -\langle s_1(a), 0 \rangle$$

по свойству сечений φ . Поэтому сумма алгебр функций будет прямой и, более того, будет содержать центр — функции f_s . Используя представление (6), легко получить наглядную запись для функций f_s :

$$f_s(\cdot) = \langle P_i(\cdot)u_i, \cdot \rangle = P_i(\cdot)u_i(\cdot) = \tilde{P}_i(\cdot),$$

где $\tilde{P}_i = P_i u_i$. То есть алгебра $\{f_s\}$ — это не что иное, как алгебра рациональных функций $K(V^*)$. Следовательно, ее размерность над $\mathbb{K}(V^*)$ равна 1.

Обозначим вторую компоненту этой прямой суммы через L_φ .

Итак, поскольку $\{f_{\psi_1}, f_{\psi_2}\} = 0 \iff \{f_{\varphi_1}, f_{\varphi_2}\} = 0$, то для второй части набора можно искать отображения ψ_i , для которых второе слагаемое равно нулю: $s_i = 0$. Тогда функции и их скобка Пуассона принимают соответственно вид

$$\begin{aligned} f_\varphi(x, a) &= \langle x, \varphi(a) \rangle, \\ \{f_{\varphi_1}, f_{\varphi_2}\}(x, a) &= \langle x, [\varphi_1(a), \varphi_2(a)] \rangle. \end{aligned}$$

ЛЕММА 3 (А. В. Болсинов; см. [14]). Если подалгебра $\tilde{\text{St}}(a)$ полупроста, то подалгебра в $\text{Ann}(V)$ функций $\{f_\varphi\}$ также является полупростой.

Конечно, даже полупростота алгебры $\mathfrak{L}$ не влечет полупростоту $\text{St}(a)$, как это будет показано в § 3. Однако если все же условие леммы выполняется, то на втором шаге остающуюся часть полиномов можно получить методом сдвига аргумента.

Для случая полупростых компактных алгебр наборы были предъявлены в дипломной работе А. С. Тена; полученные там наборы совпадают с наборами, которые могут быть построены методом Садэтова.

§ 3. Некоторые полупрямые суммы алгебр и их стационарные подалгебры $\tilde{\text{St}}$

Как уже было отмечено выше, для построения полного набора полиномов в рассматриваемых алгебрах нам необходимо знать структуру стационарных подалгебр регулярных элементов. В этом параграфе будут изучены эти стационарные подалгебры $\tilde{\text{St}}(a)$ (5).

3.1. Несколько общих замечаний о матричных представлениях алгебр Ли.

3.1.1. Принимая во внимание то, что любое представление алгебры Ли $\mathfrak{L}$ в пространстве V можно задать в виде матриц порядка $\dim V$, действующих на векторах-столбцах из V , получаем матричное представление алгебры $\mathfrak{G}$ (2):

$$\mathfrak{G} \ni \xi = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \vec{v} \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где v – вектор-столбец, $\rho(A)v = \mathbf{A}\vec{v}$, а коммутатор в алгебре $\mathfrak{G}$ – это стандартный коммутатор матриц: $[X, Y] = XY - YX$.

3.1.2. Элементы $\mathfrak{G}^*$ представляются матрицами вида

$$\mathfrak{G}^* \ni x = \begin{pmatrix} & 0 \\ \alpha & \vdots \\ & 0 \\ \vec{a} & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь $\vec{a}$ – вектор-строка. При этом результат применения x к ξ вычисляется по формуле

$$\langle x, \xi \rangle = \text{Tr} \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \vec{v} \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \vdots \\ \vec{a} & 0 \end{pmatrix} \right\} = \text{Tr}(\alpha \mathbf{A}) + \vec{a} \cdot \vec{v}.$$

Поскольку алгебра $\mathfrak{L}$ полупроста, имеет место изоморфизм $\mathfrak{L}^* \cong \mathfrak{L}$ (отождествление производится при помощи формы Киллинга).

3.2. Стационарные подалгебры регулярных элементов.

3.2.1. Для начала мы рассмотрим алгебры

$$\mathfrak{G}_{nk} = \mathfrak{so}(n) +_{\rho_k} (\mathbb{R}^n)_k, \quad (8)$$

где сумма берется по представлению $\rho_k = \underbrace{\rho \times \rho \times \cdots \times \rho}_{k \text{ раз}}$, а $\rho: \mathfrak{so}(n) \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathbb{R}^n)$,

т.е. $\mathfrak{so}(n)$ действует независимо на каждой компоненте $\mathbb{R}^n$. Двойственное пространство к алгебре (8) отождествляется с самой алгеброй посредством невырожденного скалярного произведения:

$$\langle (M_1, v_1, \dots, v_k), (M_2, u_1, \dots, u_k) \rangle = \text{Tr } M_1 M_2 + (v_1, u_1) + \cdots + (v_k, u_k),$$

где $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в каждом из экземпляров $\mathbb{R}^n$. Это позволяет нам отождествить ρ^* с ρ (а значит, и ρ_k^* с ρ_k). Действительно, пусть $\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_k) \in (\mathbb{R}^n)_k^*$ — элемент, двойственный элементу $u = (u_1, \dots, u_k) \in (\mathbb{R}^n)_k$ в смысле отождествления. Возьмем произвольные вектор $v = (v_1, \dots, v_k) \in (\mathbb{R}^n)_k$ и матрицу $N \in \mathfrak{so}(n)$. Тогда

$$\langle \rho^*(N)\tilde{u}_m, v_m \rangle = -\langle \tilde{u}_m, \rho(N)v_m \rangle = -\langle u_m, \mathbf{N}v_m \rangle = \langle -\mathbf{N}^T u_m, v_m \rangle = \langle \mathbf{N}u_m, v_m \rangle \quad (9)$$

(жирные заглавные буквы обозначают матрицы, которыми представляются соответствующие элементы алгебры $\mathfrak{L}$ в рассматриваемом базисе, $(\cdot)^T$ — транспонирование матрицы). Иными словами, при описанном отождествлении (9) ковектор $\rho^*(N)\tilde{u}_m$ отождествляется с вектором $\rho(N)u = (N)u$.

После этого отождествления уравнение стационарной подалгебры принимает вид

$$\tilde{\text{St}}(u) = \{\mathbf{N} \mid \mathbf{N}u_1 = 0, \dots, \mathbf{N}u_k = 0\}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. а) При $k \geq n$ стационарная подалгебра регулярного элемента в смысле представления ρ_k^* тривиальна;

б) при $k < n$ эта подалгебра изоморфна $\mathfrak{so}(n - k)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала п. б). Рассмотрим $\tilde{\text{St}}(v)$ для элемента

$$v = (e_1, e_2, \dots, e_k) \in (\mathbb{R}^n)_k, \quad \text{где } e_k = (\underbrace{0, \dots, 0}_{k-1 \text{ нулей}}, 1, 0, \dots, 0). \quad (10)$$

Эта подалгебра матриц вида

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & & & \\ 0 & \cdots & 0 & & \mathfrak{so}(n - k) & \end{pmatrix}.$$

Теперь покажем, что элемент v регулярный. Действительно, орбита регулярного элемента будет иметь размерность не более чем $nk - k(k + 1)/2$ (так как имеется по крайней мере $k(k + 1)/2$ инвариантов орбиты: длины векторов и попарные скалярные произведения). Поэтому стационарная подалгебра имеет размерность не менее

$$\frac{n(n - 1)}{2} - nk + \frac{k(k + 1)}{2} = \frac{(n - k)(n - k - 1)}{2}.$$

Подалгебра такой размерности приведена выше. Следовательно, элемент v регулярный, а размерность его орбиты в точности равна $nk - k(k+1)/2$.

Докажем теперь п. а). Пусть $k \geq n$. Фиксируем вектор $v = (v_1, \dots, v_k)$. Пусть m – максимальное количество линейно независимых векторов в наборе $\{v_1, \dots, v_k\}$. Найдем размерность орбиты v при действии $\mathfrak{so}(n)$. Образ вектора v полностью определяется образами m линейно независимых векторов из набора $\{v_1, \dots, v_k\}$. Однако множество образов этих m векторов имеет размерность $nm - m(m-1)/2$ (см. выше). Следовательно, и орбита вектора v имеет размерность $nm - m(m-1)/2$. Максимум значения функции $y(m) = (-m^2 + 2nm - m)/2$ достигается при $m = n$. В итоге получаем, что орбита регулярного элемента $(n(n-1)/2)$ -мерная, а стационарная подалгебра тривиальная, что и требовалось доказать.

3.2.2. Найдем стационарную подалгебру $\tilde{\text{St}}(v)$ для алгебр

$$\mathfrak{H}_{nk} = \mathfrak{su}(n) + \zeta_k (\mathbb{C}^n)_k, \quad (11)$$

где сумма берется по представлению $\zeta_k = \underbrace{\zeta \times \zeta \times \dots \times \zeta}_{k \text{ раз}}$, а $\zeta: \mathfrak{su}(n) \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathbb{C}^n)$,

т.е. $\mathfrak{su}(n)$ действует независимо на каждой компоненте $\mathbb{C}^n$ и для алгебр

$$\mathfrak{F}_{nk} = \mathfrak{u}(n) + \zeta'_k (\mathbb{C}^n)_k, \quad (12)$$

где $\zeta'_k = \underbrace{\zeta' \times \zeta' \times \dots \times \zeta'}_{k \text{ раз}}$, а $\zeta': \mathfrak{su}(n) \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathbb{C}^n)$. В каждом экземпляре введем

эрмитово произведение $(\cdot, \cdot)$ (линейное по первому аргументу и косолинейное по второму), которое порождает форму $\langle \cdot, \cdot \rangle = \text{Re}(\cdot, \cdot)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Поскольку все алгебры $\mathfrak{H}_{nk}$, $\mathfrak{F}_{nk}$, как и алгебры $\mathfrak{su}(n)$, $\mathfrak{u}(n)$, являются вещественными, двойственное пространство к каждой из алгебр (11), (12) отождествляется с самой алгеброй посредством невырожденной формы

$$\langle (M_1, v_1, \dots, v_k), (M_2, u_1, \dots, u_k) \rangle = \text{Tr } M_1 M_2 + \langle v_1, u_1 \rangle + \dots + \langle v_k, u_k \rangle, \quad (13)$$

что позволяет нам произвести, как и в п. 3.2.1, отождествление представлений. Действительно, пусть ковектор $u^\top \in (\mathbb{C}^n)_k^*$ двойствен вектору $u \in (\mathbb{C}^n)_k$, т.е. эти два вектора имеют одинаковые координаты в двойственных базисах. Положим по определению результат действия ковектора $u^\top = (u_1^\top, \dots, u_k^\top)$ на вектор $v = (v_1, \dots, v_k)$ равным

$$\langle u^\top, v \rangle = \text{Re}(u, v) = \sum_{m=1}^n \text{Re}(u_m, v_m). \quad (14)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \langle \zeta * (N) u_m, v_m \rangle &= -\langle u_m, \zeta_k(N) v_m \rangle = -\langle u_m, \mathbf{N} v_m \rangle = -\text{Re}(u_m, \mathbf{N} v_m) \\ &= u_m^T \overline{(\mathbf{N} v_m)} = u_m^T \overline{\mathbf{N}} \bar{v}_m = (-\overline{\mathbf{N}}^T u_m)^T \bar{v}_m = \text{Re}(\mathbf{N} u_m, v_m) = \text{Re}(\zeta(N) u_m, v_m). \end{aligned}$$

Здесь первое равенство получается по определению ζ^* , второе – поскольку в фиксированном базисе $\zeta(N)$ представляется матрицей $\mathbf{N}$, третье – в силу

отождествления (14), а четвертое выполняется для ортонормированного базиса.

После проделанных отождествлений уравнение стационарной подалгебры принимает вид $\text{St}(v) = \tilde{\text{St}}(v) + \mathbb{C}^n$, где $\tilde{\text{St}}(v) = \{N \in \mathfrak{su}(n) \mid Nv_1 = 0, \dots, Nv_k = 0\}$ (соответственно $\tilde{\text{St}}(v) = \{N \in \mathfrak{u}(n) \mid Nv_1 = 0, \dots, Nv_k = 0\}$). Это следует из формулы (3) и невырожденности формы (13), являющейся, как уже было сказано, скалярным произведением в $\mathbb{R}^{2n}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Невырожденность формы (13) для алгебр (11) следует из того, что $\mathfrak{su}(n)$ полупроста. Покажем, что форма (13) также невырождена для алгебр (12), т.е. что из условия

$$\langle (M_1, v_1, \dots, v_k), (M_2, u_1, \dots, u_k) \rangle = 0 \quad \forall (M_2, u_1, \dots, u_k) \in \mathfrak{F}_{nk} \quad (15)$$

следует, что $M_1 = 0$ и $v_1 = \dots = v_k = 0$. Действительно, последние равенства получаются, если подставлять в (15) $(M_2, u_1, \dots, u_k) = (0, 0, \dots, u_i, \dots, 0)$, где $i = 1, \dots, k$. Подставим теперь в (15) $u_1 = 0, \dots, u_k = 0$, $M = iE \in \mathfrak{u}(n)$. Тогда получим $\text{Tr } M_1 = 0$, откуда следует, что $M_1 \in \mathfrak{su}(n)$. После этого условие $\text{Tr } M_1 M_2 = 0 \quad \forall M_2 \in \mathfrak{su}(n)$ сразу влечет за собой $M_1 = 0$.

Рассуждая абсолютно аналогично, получим

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. а) При $k \geq n$ $\tilde{\text{St}}(v)$ для регулярного элемента v тривиальна;

б) при $k < n$ эта подалгебра изоморфна $\mathfrak{su}(n - k)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. а) При $k > n$ стационарная подалгебра регулярного элемента $\tilde{\text{St}}(v)$ тривиальна;

б) при $k \leq n$ она изоморфна $\mathfrak{u}(n - k)$.

3.2.3. Новые результаты получим при рассмотрении алгебр $M_{nk} = \mathfrak{sl}(n) +_{\mu_k} (\mathbb{R}^n)_k$ и $\mathfrak{sp}(n) + \mathbb{R}^{2n}$. Сначала рассмотрим матрицы M_{nk} . Поскольку алгебра $\mathfrak{sl}(n)$ полупроста, в силу замечания 1 можно выяснить, какие элементы $A \in \mathfrak{sl}(n)$ входят в стационарную подалгебру набора $v = (v_1, \dots, v_k)$, т.е. удовлетворяют соотношениям $\{Av_1 = 0, \dots, Av_k = 0\}$. Взяв в качестве v вектор (10), получим подалгебру матриц вида

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & & & \\ 0 & \dots & 0 & & & \\ 0 & \dots & 0 & a_{11} & \dots & a_{1(n-k)} \\ 0 & \dots & 0 & a_{k1} & \dots & a_{k(n-k)} \end{pmatrix}.$$

Несложно показать, что эта подалгебра отвечает регулярному элементу. Действительно, размерность орбиты не более чем nk -мерная, т.е. коразмерность $\tilde{\text{St}}(a)$ относительно $\mathfrak{sl}(n)$ не менее чем nk . А такой пример как раз и приведен выше. Следовательно, $\tilde{\text{St}}(a)$ является алгеброй, изоморфной $M_{(n-k)k}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. При $k \leq n$ стационарная подалгебра $\tilde{\text{St}}(a)$ регулярного элемента для алгебры $M_{nk} = \mathfrak{sl}(n) +_{\mu_k} (\mathbb{R}^n)_k$ изоморфна $M_{(n-k)k}$. Если же $k > n$, то стационарная подалгебра тривиальна.

Аналогично для алгебры $\mathfrak{sp}(n) + \mathbb{R}^{2n}$ получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Стационарная подалгебра $\tilde{\text{St}}(a)$ регулярного элемента для алгебры $\mathfrak{sp}(n) + \mathbb{R}^{2n}$ изоморфна $\mathfrak{sp}(n-1) + \mathbb{R}^{2n-2}$.*

3.2.4. Рассмотрим алгебру $\mathfrak{M} = \mathfrak{g}_2 + \mathbb{R}^7$. Фиксируем базис, в котором матричное представление алгебры $\mathfrak{g}_2$ в пространстве $\mathbb{R}^7$ имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}\alpha_7 & \sqrt{2}\alpha_9 & \sqrt{2}\alpha_{11} & \sqrt{2}\alpha_8 & \sqrt{2}\alpha_{10} & \sqrt{2}\alpha_{12} \\ -\sqrt{2}\alpha_8 & a_1 & \alpha_2 & \alpha_4 & 0 & -\alpha_{12} & -\alpha_{10} \\ -\sqrt{2}\alpha_{10} & \alpha_1 & a_2 & \alpha_6 & \alpha_{12} & 0 & -\alpha_8 \\ -\sqrt{2}\alpha_{12} & \alpha_3 & \alpha_5 & a_3 & \alpha_{10} & \alpha_8 & 0 \\ -\sqrt{2}\alpha_7 & 0 & \alpha_{11} & \alpha_9 & -a_1 & -\alpha_1 & -\alpha_3 \\ -\sqrt{2}\alpha_9 & -\alpha_{11} & 0 & \alpha_7 & -\alpha_2 & -a_2 & -\alpha_5 \\ -\sqrt{2}\alpha_{11} & -\alpha_9 & -\alpha_7 & 0 & -\alpha_4 & -\alpha_6 & -a_3 \end{pmatrix}$$

Это подалгебра в алгебре Ли $\mathfrak{so}(7)$ группы Ли матриц, сохраняющих форму

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{0} & \mathbf{E}_3 \\ 0 & \mathbf{E}_3 & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Форма G задает скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$ в пространстве $\mathbb{R}^7$. Двойственное пространство к алгебре $\mathfrak{M}$ отождествляется с самой алгеброй при помощи скалярного произведения:

$$\langle (N_1, v_1), (N_2, v_2) \rangle = \text{Tr } N_1 N_2 + (v_1, v_2).$$

Рассмотрим $\tilde{\text{St}}(v)$ для элемента $v = (1, \underbrace{0, \dots, 0}_{7 \text{ нулей}})^T$. Видим, что для выполнения

условия $Av = 0$ необходимо и достаточно, чтобы матрицы имели вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & \alpha_2 & \alpha_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & a_2 & \alpha_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_3 & \alpha_5 & a_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a_1 & -\alpha_1 & -\alpha_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_2 & -a_2 & -\alpha_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_4 & -\alpha_6 & -a_3 \end{pmatrix}$$

Такие матрицы образуют 8-мерную алгебру, изоморфную $\mathfrak{sl}(3)$. Теперь покажем, что вектор v является регулярным. Действительно, регулярным является элемент, стационарная подалгебра которого имеет наименьшую возможную размерность. Орбита регулярного вектора при действии группы Ли G_2 (отвечающей алгебре $\mathfrak{g}_2$) не более чем 6-мерная, поскольку сохраняется норма вектора. Поэтому размерность $\tilde{\text{St}}(v)$ регулярного элемента не менее $14 - 6 = 8$. С другой стороны, 8-мерная подалгебра уже найдена. Поэтому имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Для регулярного элемента v стационарная подалгебра в смысле представления ρ^* изоморфна $\mathfrak{sl}(3)$.*

3.2.5. Рассмотрим сумму по присоединенному представлению

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{so}_1(n) +_{\text{ad}} \mathfrak{so}_2(n) \quad (16)$$

(индексы здесь означают лишь номера экземпляров алгебр). Двойственное пространство к алгебрам (16) отождествляется с самой алгеброй при помощи метрики Киллинга. При этом ad^* отождествляется с ad . Следовательно, стационарная подалгебра регулярного элемента $\tilde{\text{St}}(a) = \{N \mid \text{ad}_N^* a = 0\}$ будет изоморфна ее картановской подалгебре в $\mathfrak{so}(n)$, которая коммутативна.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. *Для алгебры $\mathfrak{N}$ стационарная подалгебра $\text{St}(v)$ совпадает с картановской подалгеброй алгебры $\mathfrak{so}(n)$.*

§ 4. Индексы алгебр Ли

Как было описано в § 1, необходимое число полиномов в инволюции для полного набора равно $m = \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{G} + \text{ind } \mathfrak{G})$. Найдем индексы рассматриваемых алгебр. Согласно формуле Раиса (см. [15]) индекс алгебр вида (2) вычисляется по формуле

$$\text{ind } \mathfrak{G} = \text{ind } \tilde{\text{St}}(a) + \text{ind } \chi^*,$$

где, как и раньше, $\tilde{\text{St}}(a)$ — стационарная подалгебра регулярного элемента $a \in \mathfrak{L}^*$. Пусть $O^*(a)$ — орбита регулярного элемента a при действии χ^* . Имеют место следующие очевидные соотношения:

$$\begin{aligned} \text{ind } \mathfrak{G} &= \text{ind } \tilde{\text{St}}(a) + \text{codim } O(a), \\ \text{codim } O(a) &= \dim V - \dim O(a), \quad \dim O(a) = \dim \mathfrak{G} - \dim \tilde{\text{St}}(a). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\text{ind } \mathfrak{G} = \text{ind } \tilde{\text{St}}(a) + \dim V - \dim \mathfrak{G} + \dim \tilde{\text{St}}(a),$$

а следовательно, формула (1) в рассматриваемом случае принимает вид

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{G} + \text{ind } \mathfrak{G}) \\ &= \frac{1}{2}(\dim V + \dim \mathfrak{G} + \dim V - \dim \mathfrak{G} + \text{ind } \tilde{\text{St}}(a) + \dim \tilde{\text{St}}(a)) \\ &= \dim V + \frac{1}{2}(\dim \tilde{\text{St}}(a) + \text{ind } \tilde{\text{St}}(a)). \end{aligned}$$

Поэтому для рассматриваемых алгебр можно вычислить необходимое количество полиномов.

$$1) \ \mathfrak{G}_{nk} = \mathfrak{so}(n) +_{\rho_k} (\mathbb{R}^n)_k.$$

Если $k \geq n - 1$, то согласно результатам из § 3 имеем тривиальный стабилизатор $\tilde{\text{St}}(a)$, откуда сразу следует, что первый шаг алгоритма Садзэтова дает полный набор. Если же $k < n - 1$, то $\tilde{\text{St}}(a) \cong \mathfrak{so}(n - k)$, поэтому

$$m = nk + \left(\left[\frac{n - k - 1}{2} \right] + \frac{(n - k - 1)(n - k)}{2} \right).$$

$$2) \ \mathfrak{H}_{nk} = \mathfrak{su}(n) +_{\zeta_k} (\mathbb{C}^n)_k.$$

Как и в предыдущем случае, при $k \geq n-1$ имеем тривиальный стабилизатор $\tilde{\text{St}}(a)$. Если $k < n-1$, то $\tilde{\text{St}}(a) \cong \mathfrak{su}(n-k)$. Теперь нам требуется подсчитать размерность $\mathfrak{su}(n-k)$ над $\mathbb{R}$. Поскольку $\mathfrak{su}(n)$ – вещественная форма алгебры $\mathfrak{sl}(n)$, то размерность первой над $\mathbb{R}$ равна размерности второй над $\mathbb{C}$, т.е. $n^2 - 1$. В итоге получаем

$$m = 2nk + \frac{1}{2}(\text{ind } \mathfrak{su}(n-k) + \dim \mathfrak{su}(n-k)) = nk + \frac{1}{2}[(n-k-1) + (n-k)^2 - 1].$$

Заметим, что приведенное выше число является целым, так как выражение в квадратных скобках равно $(n-k) + (n-k)^2 - 2 = (n-k)(n-k+1) - 2$, а первое произведение четно при любых значениях k и n .

$$3) \mathfrak{F}_{nk} = \mathfrak{u}(n) + \zeta'_k(\mathbb{C}^n)_k.$$

Теперь стабилизатор будет тривиальным только при $k \geq n$. При меньших k $\tilde{\text{St}}(a) \cong \mathfrak{u}(n-k)$. Найдём индекс $\mathfrak{u}(n)$. Поскольку

$$\mathfrak{u}(n) = \mathfrak{su}(n) \oplus \mathbb{R} \quad (17)$$

(сумма в данном случае прямая), то $\text{ind } \mathfrak{u}(n) = \text{ind } \mathfrak{su}(n) + \dim \mathbb{R} = n-k-1+1$. Воспользовавшись ещё раз соотношением (17), найдём $\dim \mathfrak{u}(n) = n^2 - 1 + 1$. Отсюда

$$m = 2nk + \frac{1}{2}(n-k-1+1 + (n-k)^2 - 1 + 1).$$

$$4) \mathfrak{M} = g_2 + \mathbb{R}^7.$$

Поскольку стационарная подалгебра изоморфна $\mathfrak{sl}(3)$, сразу получаем искомое число:

$$m = 7 + \frac{1}{2}(\text{ind } \mathfrak{sl}(3) + \dim \mathfrak{sl}(3)) = 7 + \frac{2+8}{2} = 7+5 = 12.$$

§ 5. Алгебры $\mathfrak{G}_{nk} = \mathfrak{so}(n) +_{\rho_k} (\mathbb{R}^n)_k$

Все первоначальные сведения для этих алгебр были даны в § 3 и § 4. Согласно предложению 1 стационарная подалгебра регулярного элемента (а значит, и алгебра функций L_φ , возникающая на втором шаге; см. [14]) полупроста. Следовательно, линейные функции можно дополнить функциями, полученными методом сдвига аргумента. В качестве сечений $\varphi(a)$ можно взять ортогональную в смысле формы Киллинга проекцию произвольного элемента $A \in \mathfrak{so}(n)$ на стационарную подалгебру. Построим такую проекцию $\text{pr}_{\text{St}(v_1, \dots, v_k)}$.

Ортогонализуем набор $v_1, \dots, v_k$:

$$w_1 = v_1, \quad w_2 = v_2 - \frac{(v_2, w_1)}{|w_1|^2} w_1, \quad \dots, \quad w_m = v_m - \sum_{i=1}^{m-1} \frac{(v_m, w_i)}{|w_i|^2} w_i, \\ m = 2, \dots, k.$$

Очевидна эквивалентность систем:

$$\begin{cases} Aw_1 = 0, \\ \dots\dots\dots \\ Aw_k = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} Av_1 = 0, \\ \dots\dots\dots \\ Av_k = 0. \end{cases}$$

Поэтому $\tilde{\text{St}}(v)$ для вектора $v = (v_1, \dots, v_k)$ совпадает со стационарной подалгеброй вектора $w = (w_1, \dots, w_k)$. Запишем формулу для проекции на эту подалгебру:

$$\begin{aligned} N &= \text{pr}_{\text{St}(v_1, \dots, v_k)} M \\ &= M - \sum_{i=1}^k \frac{1}{|w_i|^2} (Mw_i \otimes w_i^\top - w_i \otimes (Mw_i)^\top) + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \frac{(Mw_i, w_j)}{|w_i|^2 |w_j|^2} w_j \otimes w_i^\top. \end{aligned} \quad (18)$$

Проверим, что эта формула действительно является формулой для ортогональной проекции на стационарную подалгебру.

Во-первых, $Nw_m = 0$:

$$\begin{aligned} Nw_m &= Mw_m - \sum_{i=1}^k \frac{1}{|w_i|^2} Mw_i(w_i, w_m) - \sum_{i=1}^k \frac{1}{|w_i|^2} w_i(Mw_i, w_m) \\ &\quad + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \frac{(Mw_i, w_j)}{|w_i|^2 |w_j|^2} w_j(w_i, w_m) \\ &= Mw_m - \frac{1}{|w_m|^2} Mw_m(w_m, w_m) - \sum_{i=1}^k \frac{1}{|w_i|^2} w_i(Mw_i, w_m) \\ &\quad + \sum_{j=1}^k \frac{(Mw_m, w_j)}{|w_m|^2 |w_j|^2} w_j(w_m, w_m) \\ &= - \sum_{i=1}^k \frac{(Mw_i, w_m)}{|w_i|^2} w_i + \sum_{j=1}^k \frac{(Mw_m, w_j)}{|w_j|^2} w_j = 0. \end{aligned}$$

Кроме того, $(Nu, u) = 0 \quad \forall u \in \mathbb{R}^n$. Действительно,

$$\begin{aligned} (Mu, u) &= 0, \\ ((Mw_i \otimes w_i^\top - w_i \otimes (Mw_i)^\top)u, u) &= ((Mw_i(w_i, u) - w_i(Mw_i, u)), u) \\ &= (Mw_i, u)(w_i, u) - (Mw_i, u)(w_i, u) = 0, \\ \left(\left(\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \frac{(Mw_i, w_j)}{|w_i|^2 |w_j|^2} w_j \otimes w_i^\top \right) u, u \right) &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \frac{(Mw_i, w_j)}{|w_i|^2 |w_j|^2} (w_j, u)(w_i, u) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \left(\frac{(Mw_i, w_j)}{|w_i|^2 |w_j|^2} + \frac{(Mw_j, w_i)}{|w_i|^2 |w_j|^2} \right) (w_j, u)(w_i, u) = 0. \end{aligned}$$

И наконец, покажем, что проекция является ортогональной в смысле заданного скалярного произведения, т.е. что $\text{Tr}(N(M - N)) = 0$. Дополним векторы $w_1, \dots, w_k$ до ортогонального базиса $w_1, \dots, w_n$ в $\mathbb{R}^n$. Тогда

$$\begin{aligned} \text{Tr}(N(M - N)) &= \sum_{m=1}^n \frac{1}{|w_m|^2} (N(M - N)w_m, w_m) \\ &= \sum_{m=1}^n \frac{1}{|w_m|^2} ((M - N)Nw_m, w_m). \end{aligned} \quad (19)$$

Заметим, что первые k слагаемых равны нулю, так как $Nw_m = 0$ при $m \leq k$.
Далее, при $m > k$

$$\begin{aligned}
Nw_m &= Mw_m - \sum_{i=1}^k \frac{1}{|w_i|^2} Mw_i \underbrace{(w_i, w_m)}_{=0} + \sum_{i=1}^k \frac{1}{|w_i|^2} w_i (Mw_i, w_m) \\
&\quad + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \frac{(Mw_i, w_j)}{|w_i|^2 |w_j|^2} w_j \underbrace{(w_i, w_m)}_{=0} \\
&= Mw_m + \sum_{i=1}^k \frac{1}{|w_i|^2} w_i (Mw_i, w_m), (M - N)Nw_m \\
&= \left(\sum_{i=1}^k \frac{1}{|w_i|^2} (Mw_i \otimes w_i^\top - w_i \otimes (Mw_i)^\top) \right. \\
&\quad \left. - \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \frac{(Mw_i, w_j)}{|w_i|^2 |w_j|^2} w_j \otimes w_i^\top \right) \left(Mw_m + \sum_{l=1}^k \frac{1}{|w_l|^2} w_l (Mw_l, w_m) \right) \\
&= \sum_{i=1}^k \frac{1}{|w_i|^2} (Mw_i(w_i, Mw_m) - w_i(Mw_i, Mw_m)) \\
&\quad - \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \frac{(Mw_i, w_j)}{|w_i|^2 |w_j|^2} w_j(w_i, Mw_m) \\
&\quad + \sum_{i=1}^k \sum_{l=1}^k \frac{(Mw_l, w_m)}{|w_l|^2 |w_i|^2} (Mw_i(w_i, w_l) - w_i(Mw_i, w_l)) \\
&\quad - \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \sum_{l=1}^k \frac{(Mw_i, w_j)(Mw_l, w_m)}{|w_i|^2 |w_j|^2 |w_l|^2} w_j(w_i, w_l) \\
&= \sum_{i=1}^k \frac{(w_i, Mw_m)}{|w_i|^2} Mw_i - \sum_{i=1}^k \frac{(Mw_i, Mw_m)}{|w_i|^2} w_i \\
&\quad - \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \frac{(Mw_i, w_j)(w_i, Mw_m)}{|w_i|^2 |w_j|^2} w_j + \sum_{i=1}^k \frac{(Mw_i, w_m)}{|w_i|^2} Mw_i \\
&\quad - \sum_{i=1}^k \sum_{l=1}^k \frac{(Mw_l, w_m)(Mw_i, w_l)}{|w_l|^2 |w_i|^2} w_i - \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \frac{(Mw_i, w_j)(Mw_i, w_m)}{|w_i|^2 |w_j|^2} w_j.
\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
((M - N)Nw_m, w_m) &= \sum_{i=1}^k \frac{(w_i, Mw_m)}{|w_i|^2} (Mw_i, w_m) - \sum_{i=1}^k \frac{(Mw_i, Mw_m)}{|w_i|^2} \underbrace{(w_i, w_m)}_{=0} \\
&\quad - \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \frac{(Mw_i, w_j)(w_i, Mw_m)}{|w_i|^2 |w_j|^2} \underbrace{(w_j, w_m)}_{=0} + \sum_{i=1}^k \frac{(Mw_i, w_m)}{|w_i|^2} (Mw_i, w_m) \\
&\quad - \sum_{i=1}^k \sum_{l=1}^k \frac{(Mw_l, w_m)(Mw_i, w_l)}{|w_l|^2 |w_i|^2} \underbrace{(w_i, w_m)}_{=0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \frac{(Mw_i, w_j)(Mw_i, w_m)}{|w_i|^2 |w_j|^2} \underbrace{(w_i, w_m)}_{=0} \\
& = \sum_{i=1}^k \frac{(w_i, Mw_m)}{|w_i|^2} (Mw_i, w_m) + \sum_{i=1}^k \frac{(Mw_i, w_m)}{|w_i|^2} (Mw_i, w_m) = 0,
\end{aligned}$$

т.е. каждое слагаемое в сумме (19) равно нулю, поэтому и $\text{Tr } N(M - N) = 0$.

Итак, справедлива

ТЕОРЕМА 1. *Полный набор полиномиальных функций в инволюции на двойственном пространстве к алгебре $\mathfrak{G}_{nk} = \text{so}(n) +_{\rho_k} (\mathbb{R}^n)_k$ состоит из:*

- линейных функций на идеале $u_1, \dots, u_{nk}$ при $k \geq n - 1$;
- функций $u_1, \dots, u_{nk}$ и

$$f_{l,\lambda}(M, v) = \text{Tr} \left(\left(\prod |w_i|^2 \right) \text{pr}_{\text{St}(v_1, \dots, v_k)}(M + \lambda B) \right)^l, \quad l = 2, 4, \dots, 2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \quad (20)$$

(где проекция задана формулой (18)), при $k < n - 1$.

§ 6. Степени полиномов

В этом параграфе исследуем степени полиномов из формулы (20) в случае алгебр $\text{so}(n) + \mathbb{R}^n$. Он отвечает значению $k = 1$, а значит, функции (20) можно переписать в форме

$$\begin{aligned}
f_{l,\lambda}(M, v) &= \text{Tr}(|v|^2 \text{pr}_{\text{St}(v)}(M + \lambda B))^l \\
&= \text{Tr}((M + \lambda B)|v|^2 + v \otimes (Mv)^\top + \lambda v \otimes (Bv)^\top - Mv \otimes v^\top - \lambda Bv \otimes v^\top))^l \\
&= \text{Tr}((M|v|^2 + v \otimes (Mv)^\top - Mv \otimes v^\top) + \lambda(B|v|^2 + v \otimes (Bv)^\top - Bv \otimes v^\top))^l \\
&= \text{Tr}(|v|^2 \text{pr}_{\text{St}(v)} M + \lambda |v|^2 \text{pr}_{\text{St}(v)} B)^l = \text{Tr}(P(M, v) + \lambda Q_B(v))^l, \quad (21)
\end{aligned}$$

где $P(M, v)$ – полином третьей степени, зависящий от M и v , а $Q_B(v)$ – квадратичный полином, не зависящий от M , коэффициенты которого зависят от параметра B .

Таким образом, после разложения по степеням λ для разных l получим следующие полиномы (в скобках указана степень полинома):

	λ^0	λ^1	λ^2	λ^3	λ^4
$l = 1$	$\text{Tr } P \ (3)$	$\text{Tr } Q \ (2)$	—	—	—
$l = 2$	$\text{Tr } P^2 \ (6)$	$\text{Tr } PQ \ (5)$	$\text{Tr } Q^2 \ (4)$	—	—
$l = 3$	$\text{Tr } P^3 \ (9)$	$\text{Tr } P^2 Q \ (8)$	$\text{Tr } PQ^2 \ (7)$	$\text{Tr } Q^3 \ (6)$	—
$l = 4$	$\text{Tr } P^4 \ (12)$	$\text{Tr } P^3 Q \ (11)$	$\text{Tr}(P^2 Q^2 + (PQ)^2) \ (10)$	$\text{Tr } PQ^3 \ (9)$	$\text{Tr } Q^4 \ (8)$
...	...	...	...	...	...

Поскольку для кососимметрических матриц $\text{Tr } A^{2i+1} = 0$, то строчки, соответствующие нечетным l , мы не рассматриваем.

Фиксируем ортонормированный базис. Тогда элементы $\mathbb{R}^n$ запишутся столбиками $1 \times n$, элементы $(\mathbb{R}^n)^*$ запишутся строчками (причем двойственной вектору v будет строчка v^T), а элементы $\mathfrak{so}(n)$ запишутся матрицами. Введем функцию

$$S(X) = |v|^2 \operatorname{pr}_{\operatorname{St}(v)} X = X|v|^2 - vv^T X - Xvv^T, \quad X \in \mathfrak{so}(n).$$

Главный результат параграфа будет получаться как следствие из следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 2. *Полином*

$$f = \operatorname{Tr} \prod_{i=1}^{2t} S(X_i) = \operatorname{Tr} \prod_{i=1}^{2t} (X|v|^2 - vv^T X - Xvv^T) \quad (22)$$

делится на $|v|^{2t}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Раскроем скобки в произведении (22) и посмотрим на вид одного монома M . Это произведение сомножителей трех типов: $P_1 = vv^T X$, $P_0 = |v|^2 X$, $P_{-1} = Xvv^T$. Заметим, что если в мономе M встречаются комбинации $P_\epsilon P_\epsilon$, $\epsilon = \pm 1$, или $P_{-1}P_0P_1$, то $M = 0$, что следует из равенства $v^T Xv = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{so}(n)$:

$$\begin{aligned} vv^T X_i vv^T X_j &= X_i v (v^T X_j v) v^T = 0, \\ X_i vv^T X_j |v|^2 vv^T X_k &= |v|^2 X_i v (v^T X_j v) v^T X_k = 0. \end{aligned}$$

Кроме того, поскольку нас интересует лишь след этого монома, то мы можем циклически переставлять сомножители. Пусть $\operatorname{Tr} M \neq 0$. Рассмотрим два случая:

1) В мономе M нет ни одного сомножителя типа P_{-1} . Переставим сомножители циклически так, чтобы M начинался с P_1 (если так сделать нельзя, то $\operatorname{Tr} M = |v|^{4t} \operatorname{Tr} X^{2t}$). Тогда после каждого сомножителя P_1 стоит P_0 (иначе $M = 0$) и в конце также стоит P_0 , так как в противном случае $\operatorname{Tr} M = \operatorname{Tr}(P_1 \cdots P_1) = \operatorname{Tr}(P_1 P_1 \cdots) = 0$. Поэтому сомножителей P_0 не меньше половины, но так как каждый из них делится на $|v|^2$, то M делится на $|v|^{2t}$ и $\operatorname{Tr} M$ также делится на $|v|^{2t}$.

2) Сомножители типа P_{-1} присутствуют. Переставим сомножители циклически так, чтобы M начинался с P_{-1} . После каждого P_{-1} стоит либо P_0 , либо P_{-1} . Каждая такая пара делится на $|v|^2$:

$$P_{-1}P_1 = Xv \underbrace{v^T v}_{=|v|^2} X = |v|^2 Xvv^T X, \quad P_{-1}P_0 = Xvv^T X|v|^2.$$

Выделим все такие пары с P_{-1} . Посмотрим, что осталось невыделенным. Если невыделенными остались только P_0 , то из монома можно вынести заведомо большую степень $|v|$, чем $2t$. Кроме того, заметим, что поскольку P_1 не может стоять после любой выделенной пары и два P_1 не могут стоять подряд, то в каждом промежутке перед каждым P_1 стоит P_0 , т.е. и в невыделенном множестве множителей P_0 не меньше половины. Поэтому из M , а значит, и из $\operatorname{Tr} M$ вынесется не менее чем $|v|^{2t}$, что и требовалось доказать.

СЛЕДСТВИЕ. Степени полиномов, входящих в набор, не превосходят $2n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из введенных обозначений следует, что $P(M, v) = S(M)$, а $Q(v) = S(B)$. Кроме того, степень полинома T есть $\text{Tr} \prod_{i=1}^{m+k} S(X_i)$, где среди X_i k раз встречается M и m раз переменная Q равна $3k + 2m$. Но тогда по теореме 2 полином T делится на $|v|^{k+m}$ ($k + m$ – четное число, как было отмечено раньше). Итак, степень полинома T можно уменьшить до $2k + m$. Поскольку $k + m < n$, то максимальное значение выражение $2k + m$ принимает при $k = n - 1$, $m = 0$. При этом $2k + m = 2(n - 1) < 2n$, что и требовалось доказать.

§ 7. Алгебры малых размерностей

Разберем теперь случаи малых n (k по-прежнему равно 1).

1. $n = 2$. Рассматривается алгебра $\mathfrak{so}(2) + \mathbb{R}^2$. Набор должен содержать $(3+1)/2 = 2$ полинома. Видим, что коммутативный идеал имеет размерность 2.

2. $n = 3$, $\mathfrak{G}_{31} = \mathfrak{e}_3 = \mathfrak{so}(3) +_{\rho} \mathbb{R}^3$. Здесь необходимы $(6+2)/2 = 4$ полинома, и линейных функций на идеале уже не хватает. Выпишем функцию $f(M, v) = \text{Tr} P^2$ в фиксированном базисе. Поскольку $\text{Tr}(u^T w) = (u, w)$ для любых векторов u и w , то полином можно записать следующим образом:

$$\tilde{f}(M, v) = \frac{1}{|v|^2} f(M, v) = |v|^2 \text{Tr} M^2 - 2(v, M^2 v) = |v|^2 \text{Tr} M^2 + 2(Mv, Mv).$$

Введем координаты на алгебре:

$$v = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & p_{12} & -p_{13} \\ -p_{12} & 0 & p_{23} \\ p_{13} & -p_{23} & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{f}(M, v) &= -2((p_{12}^2 + p_{13}^2 + p_{23}^2)(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) \\ &\quad - ((p_{12}s_2 - p_{13}s_3)^2 + (p_{12}s_1 - p_{23}s_3)^2 + (p_{13}s_1 - p_{23}s_2)^2)) \\ &= 2(p_{12}^2 s_2^2 + p_{13}^2 s_3^2 + p_{12}^2 s_1^2 + p_{23}^2 s_3^2 + p_{13}^2 s_1^2 + p_{23}^2 s_2^2 \\ &\quad - 2p_{12}p_{13}s_2s_3 - 2p_{12}p_{23}s_1s_3 - 2p_{13}p_{23}s_1s_2 \\ &\quad - p_{12}^2 s_1^2 - p_{12}^2 s_2^2 - p_{12}^2 s_3^2 - p_{13}^2 s_1^2 - p_{13}^2 s_2^2 - p_{13}^2 s_3^2 - p_{23}^2 s_1^2 - p_{23}^2 s_2^2 - p_{23}^2 s_3^2) \\ &= -2(p_{12}^2 s_3^2 + p_{23}^2 s_1^2 + p_{13}^2 s_2^2 + 2p_{12}p_{13}s_2s_3 + 2p_{12}p_{23}s_1s_3 + 2p_{13}p_{23}s_1s_2) \\ &= -2(p_{12}s_3 + p_{23}s_1 + p_{13}s_2)^2. \end{aligned}$$

Видим, что полином является (с точностью до константы) квадратом некоторого полинома, который также будет находиться в инволюции с тремя линейными функциями на идеале.

Таким образом, имеет место

ТЕОРЕМА 3. Функции s_1, s_2, s_3 и $\hat{f}(M, v) = (p_{12}s_3 + p_{23}s_1 + p_{13}s_2)$ образуют полный набор полиномов на алгебре Ли $\mathfrak{e}(3)$.

Видим, что в этом случае метод Садэтова дает не что иное, как интеграл площадей.

3. $n = 4$. Здесь необходимо найти $(10 + 4)/2 = 7$ полиномов, коммутативный идеал 4-мерный. Следовательно, необходимы еще три полинома. Рассмотрим функции $\text{Tr } P^2$, $\text{Tr } PQ$ и $\text{Tr } P^4$. Введем координаты на алгебре следующим образом:

$$v = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ -p_{12} & 0 & p_{23} & p_{24} \\ -p_{13} & -p_{23} & 0 & p_{34} \\ -p_{14} & -p_{24} & -p_{34} & 0 \end{pmatrix}.$$

После деления функций, полученных методом Садэтова, на максимально возможную степень $|v|$ получим новый набор функций

$$\begin{aligned} \tilde{f}_1(M, v) &= |v|^2 \text{Tr } M^2 + 2(Mv, Mv), \\ \tilde{f}_2(M, v) &= |v|^2 \text{Tr } MB + 2(Bv, Mv), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}_3(M, v) &= \frac{1}{|v|^4} \{ |v|^8 \text{Tr } M^4 - 5|v|^6 \text{Tr } M^4 vv^T + |v|^4 (0 + \text{Tr } M^2 vv^T M^2 vv^T \\ &\quad + \text{Tr } M^4 vv^T + 0 + 2 \text{Tr } M^2 vv^T M^2 vv^T) - |v|^4 \text{Tr } M^2 vv^T M^2 vv^T \} \\ &= |v|^4 \text{Tr } M^4 - 4|v|^2 \text{Tr } M^4 vv^T + 2 \text{Tr } M^2 vv^T M^2 vv^T. \end{aligned}$$

Заметим, что $\text{Tr } M^2 vv^T M^2 vv^T = (v, M^2 v)^2 = (Mv, Mv)^2$, поэтому последний полином можно переписать в виде

$$\tilde{f}_3(M, v) = |v|^4 \text{Tr } M^4 - 4|v|^2 \text{Tr } M^4 vv^T + \frac{1}{2}(\tilde{f}_1 - |v|^2 \text{Tr } M^2)(Mv, Mv),$$

откуда следует, что вместо третьего полинома можно взять следующий:

$$\hat{f}_3(M, v) = |v|^2 \text{Tr } M^4 - 4 \text{Tr } M^4 vv^T - \frac{1}{2} \text{Tr } M^2 (Mv, Mv).$$

ТЕОРЕМА 4. *Функции v_1, v_2, v_3, v_4 и $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \hat{f}_3$ образуют полный набор полиномов на алгебре $e(4)$.*

Представляет интерес вопрос о сравнении полиномов, предъявленных в работе [14] (и являющихся частным случаем формулы (20)) для алгебр $\mathfrak{so}(n) + \mathbb{R}^n$, с уже известными. Эта задача эквивалентна исследованию плоскостей, натянутых на градиенты функций, и на данный момент не известно, дает метод Садэтова наборы, эквивалентные полученным ранее, или эти наборы являются новыми.

§ 8. Алгебры $\mathfrak{H}_{nk} = \mathfrak{su}(n) + \zeta_k (\mathbb{C}^n)_k$

В этом параграфе мы рассмотрим алгебры (11), стационарная подалгебра $\tilde{\text{St}}(a)$ для которых была найдена в п. 3.2.2.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Обозначим через $\mathcal{I}$ оператор умножения на мнимую единицу. Чтобы не загромождать выкладки, условимся под $\mathcal{I}w^T$ понимать образ

вектора $\mathfrak{I}w$ после отождествления (9):

$$\mathfrak{I}w^T := (\mathfrak{I}w)^T.$$

Впрочем, трактовка этой записи однозначна, поскольку оператор $\mathfrak{I}$ по определению действует только на векторах и поэтому выражение $\mathfrak{I}(w^T)$ не имеет смысла.

Принимая во внимание замечания 2 и 4, запишем формулу для ортогональной в смысле формы Киллинга проекции на стационарную алгебру вектора $v = (v_1, \dots, v_k)$. Ортогонализуем систему $v_1, \dots, v_k$:

$$w_1 = v_1, \quad w_2 = v_2 - \frac{(v_2, w_1)}{|w_1|^2} w_1, \quad \dots, \quad w_m = v_m - \sum_{i=1}^{m-1} \frac{(v_m, w_i)}{|w_i|^2} w_i.$$

Очевидно, что условие на стабилизатор эквивалентно следующему:

$$\begin{cases} Aw_1 = 0, \\ \dots\dots\dots \\ Aw_k = 0. \end{cases}$$

Выпишем проекцию на множество таких матриц:

$$N = \text{pr}_{\text{St}(v)} M = N_1 + N_2 + N_3 + N_4, \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} N_1 &= M - \sum_{i=1}^k \frac{1}{|w_i|^2} (Mw_i \times w_i^T + M\mathfrak{I}w_i \times \mathfrak{I}w_i^T - \mathfrak{I}w_i \times (M\mathfrak{I}w_i)^T - w_i \times (Mw_i)^T), \\ N_2 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \frac{\langle Mw_i, w_j \rangle}{|w_i|^2 |w_j|^2} (w_j \times w_i^T - w_i \times w_j^T + \mathfrak{I}w_j \times \mathfrak{I}w_i^T - \mathfrak{I}w_i \times \mathfrak{I}w_j^T), \\ N_3 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \frac{\langle M\mathfrak{I}w_i, w_j \rangle}{|w_i|^2 |w_j|^2} (w_j \times \mathfrak{I}w_i^T + w_i \times \mathfrak{I}w_j^T - \mathfrak{I}w_j \times w_i^T - \mathfrak{I}w_i \times w_j^T), \\ N_4 &= - \sum_{i=1}^k \frac{(w_i, Mw_i)}{|w_i|^2 (n-k)} \left(E - \sum_{i=1}^k \frac{w_i \times w_i^T}{|w_i|^2} \right). \end{aligned} \quad (24)$$

ЛЕММА 4. Формула (23) удовлетворяет всем свойствам ортогональной в смысле формы Киллинга проекции на подалгебру $\tilde{\text{St}}(v)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Дополним набор $w_1, \dots, w_k$ до ортогонального базиса $w_1, \dots, w_n$ в $\mathbb{C}^n$ (т.е. $(w_i, w_j) \neq 0 \iff i = j$). Нам необходимо проверить выполнение следующих свойств:

1) $Nw_m = 0 \quad \forall m = 1, \dots, k$;

$$2) N \in \text{su}(n) \iff \begin{cases} \text{Tr } N = 0 \iff \sum_{i=1}^n \frac{1}{|w_i|^2} (Nw_i, w_i) = 0, \\ N = -\overline{N}^T \iff (Nv, u) + (v, Nu) = 0; \end{cases}$$

3) N – ортогональная проекция:

$$\text{Tr } N(M - N) = 0 \iff \sum_{i=1}^n \frac{1}{|w_i|^2} (N(M - N)w_i, w_i) = 0.$$

При проверке этих свойств будем пользоваться соотношениями

$$(w, w) = |w|^2, \quad \langle w, \mathfrak{I}w \rangle = 0, \quad (25)$$

$$\forall i \neq j \quad \langle w_i, w_j \rangle = \langle \mathfrak{I}w_i, w_j \rangle = 0, \quad (26)$$

$$(Mw_j, w_l) + (w_j, Mw_l) = 0 \implies \langle Mw_j, w_l \rangle + \langle w_j, Mw_l \rangle = 0, \quad (27)$$

$$\frac{(Mw, w)}{i} \in \mathbb{R} \implies \langle Mw, w \rangle = 0, \quad (28)$$

$$\langle M\mathfrak{I}w, w_i \rangle i + \langle Mw, w_i \rangle = -i \text{Im}(Mw, w_i) + \text{Re}(Mw, w_i) = \overline{(Mw, w_i)}, \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \langle M\mathfrak{I}w_m, w_j \rangle &= \text{Re}(i(Mw_m, w_j)) = -\text{Re}(i(w_m, Mw_j)) \\ &= \text{Re}(w_m, M\mathfrak{I}w_j) = \langle w_m, M\mathfrak{I}w_j \rangle. \end{aligned} \quad (30)$$

Докажем свойства 1)–3).

Пусть $Nw_m = 0$ при $m \leq k$, тогда

$$\begin{aligned} N_1 w_m &= Mw_m - \sum_{i=1}^k \frac{1}{|w_i|^2} (Mw_i \underbrace{\langle w_i, w_m \rangle}_{=\delta_{im}|w_m|^2} + M\mathfrak{I}w_i \underbrace{\langle \mathfrak{I}w_i, w_m \rangle}_0) \\ &\quad - \mathfrak{I}w_i \langle M\mathfrak{I}w_i, w_m \rangle - w_i \langle Mw_i, w_m \rangle) \\ &= \sum_{i=1}^k \frac{1}{|w_i|^2} (\mathfrak{I}w_i \langle M\mathfrak{I}w_i, w_m \rangle + w_i \langle Mw_i, w_m \rangle), \\ N_2 w_m &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \frac{\langle Mw_i, w_j \rangle}{|w_i|^2 |w_j|^2} (w_j \langle w_i, w_m \rangle - w_i \langle w_j, w_m \rangle \\ &\quad + \underbrace{\mathfrak{I}w_j \langle \mathfrak{I}w_i, w_m \rangle}_{=0} - \underbrace{\mathfrak{I}w_i \langle \mathfrak{I}w_j, w_m \rangle}_{=0}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^k \frac{\langle Mw_m, w_j \rangle}{|w_j|^2} w_j - \sum_{i=1}^k \frac{\langle Mw_i, w_m \rangle}{|w_i|^2} w_i \right) = \sum_{i=1}^k \frac{\langle Mw_m, w_i \rangle}{|w_i|^2} w_i, \\ N_3 w_m &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \frac{\langle M\mathfrak{I}w_i, w_j \rangle}{|w_i|^2 |w_j|^2} (w_j \underbrace{\langle \mathfrak{I}w_i, w_m \rangle}_{=0} \\ &\quad + w_i \underbrace{\langle \mathfrak{I}w_j, w_m \rangle}_{=0} - \mathfrak{I}w_j \langle w_i, w_m \rangle - \mathfrak{I}w_i \langle w_j, w_m \rangle) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \frac{\langle M\mathfrak{I}w_m, w_j \rangle}{|w_j|^2} \mathfrak{I}w_j - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \frac{\langle M\mathfrak{I}w_i, w_m \rangle}{|w_i|^2} w_i \\ &\stackrel{\text{из (30)}}{=} - \sum_{j=1}^k \frac{\langle M\mathfrak{I}w_j, w_m \rangle}{|w_j|^2} \mathfrak{I}w_j, \end{aligned}$$

$$N_4 w_m = - \sum_{i=1}^k \frac{(w_i, M w_i)}{|w_i|^2 (n-k)} (w_m - w_m) = 0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} N w_m &= \sum_{i=1}^k \frac{1}{|w_i|^2} (\mathfrak{I} w_i \langle M \mathfrak{I} w_i, w_m \rangle + w_i \langle M w_i, w_m \rangle) \\ &\quad + \sum_{i=1}^k \frac{\langle M w_m, w_i \rangle}{|w_i|^2} w_i - \sum_{j=1}^k \frac{\langle M \mathfrak{I} w_j, w_m \rangle}{|w_j|^2} \mathfrak{I} w_j = 0. \end{aligned}$$

Свойство 1) доказано.

Выпишем теперь $N w_m$ для $m > k$:

$$\begin{aligned} N_1 w_m &= M w_m - \sum_{i=1}^k \frac{1}{|w_i|^2} (M w_i \underbrace{\langle w_i, w_m \rangle}_{=0} + M \mathfrak{I} w_i \underbrace{\langle \mathfrak{I} w_i, w_m \rangle}_{=0}) \\ &\quad - \mathfrak{I} w_i \langle M \mathfrak{I} w_i, w_m \rangle - w_i \langle M w_i, w_m \rangle) \\ &= M w_m + \sum_{i=1}^k \frac{1}{|w_i|^2} (\mathfrak{I} w_i \langle M \mathfrak{I} w_i, w_m \rangle + w_i \langle M w_i, w_m \rangle). \end{aligned}$$

Далее, поскольку $0 \leq i \leq k$, а $m > k$, из (26) следует

$$N_2 w_m = N_3 w_m = 0, \quad N_4 w_m = - \sum_{i=1}^k \frac{(w_i, M w_i)}{|w_i|^2 (n-k)} w_m.$$

В итоге получаем

$$N w_m = M w_m + \sum_{i=1}^k \frac{1}{|w_i|^2} (\mathfrak{I} w_i \langle M \mathfrak{I} w_i, w_m \rangle + w_i \langle M w_i, w_m \rangle) - \sum_{i=1}^k \frac{(w_i, M w_i)}{|w_i|^2 (n-k)} w_m. \quad (31)$$

Пользуясь формулой (31), докажем первую часть свойства 2). При $m \leq k$ произведение $(N w_m, w_m)$ обращается в нуль. Вычислим это произведение при $m > k$:

$$\begin{aligned} (N w_m, w_m) &= (M w_m, w_m) + \sum_{i=1}^k \frac{1}{|w_i|^2} ((\underbrace{\mathfrak{I} w_i, w_m}_{=0}) \langle M \mathfrak{I} w_i, w_m \rangle \\ &\quad + \underbrace{(w_i, w_m)}_{=0} \langle M w_i, w_m \rangle) - \sum_{i=1}^k \frac{(w_i, M w_i)}{|w_i|^2 (n-k)} (w_m, w_m) \\ &= (M w_m, w_m) - \frac{(w_m, w_m)}{(n-k)} \sum_{i=1}^k \frac{(w_i, M w_i)}{|w_i|^2}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\sum_{m=1}^n \frac{(N w_m, w_m)}{|w_m|^2} = \sum_{m=k+1}^n \frac{(N w_m, w_m)}{|w_m|^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{m=k+1}^n \frac{(Mw_m, w_m)}{|w_m|^2} - \underbrace{\sum_{m=k+1}^n \frac{1}{(n-k)}}_{=1} \sum_{i=1}^k \frac{(w_i, Mw_i)}{|w_i|^2} \\
&= \sum_{m=k+1}^n \frac{(Mw_m, w_m)}{|w_m|^2} - \sum_{i=1}^k \frac{(w_i, Mw_i)}{|w_i|^2} = \sum_{m=1}^n \frac{(Mw_m, w_m)}{|w_m|^2} = 0.
\end{aligned}$$

Перейдем ко второй части свойства 2). Очевидно, что это условие достаточно проверить для базисных векторов $v = w_m$, $u = w_l$. Заметим, во-первых, что если $m, l \leq k$, то обе скобки равны нулю. Во-вторых, если $l \leq k$, а $m > k$, то второе произведение все также равно нулю, а первое имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
(Nw_m, w_l) &= (Mw_m, w_l) + \sum_{i=1}^k \frac{1}{|w_i|^2} ((\mathcal{I}w_i, w_l) \langle M\mathcal{I}w_i, w_m \rangle + (w_i, w_l) \langle Mw_i, w_m \rangle) \\
&\quad - \sum_{i=1}^k \frac{\overline{(w_i, Mw_i)}}{|w_i|^2(n-k)} \underbrace{(w_m, w_l)}_{=0} \\
&= (Mw_m, w_l) + i \langle M\mathcal{I}w_l, w_m \rangle + \langle Mw_l, w_m \rangle \\
&\stackrel{\text{из (29)}}{=} (Mw_m, w_l) + \overline{(Mw_l, w_m)} = (Mw_m, w_l) + (w_m, Mw_l) = 0.
\end{aligned}$$

Наконец, при $l, m > k$ с учетом антилинейности эрмитова произведения левая часть второго соотношения 2) принимает вид

$$\begin{aligned}
(Nw_m, w_l) + (w_m, Nw_l) &= \underbrace{(Mw_m, w_l)}_I + \sum_{i=1}^k \frac{1}{|w_i|^2} \underbrace{((\mathcal{I}w_i, w_l) \langle M\mathcal{I}w_i, w_m \rangle)}_{=0} \\
&\quad + \underbrace{(w_i, w_l) \langle Mw_i, w_m \rangle}_{=0} - \underbrace{\sum_{i=1}^k \frac{(w_i, Mw_i)}{|w_i|^2(n-k)} (w_m, w_l)}_{II} + \underbrace{(w_m, Mw_l)}_I \\
&\quad + \sum_{i=1}^k \frac{1}{|w_i|^2} \underbrace{((w_m, \mathcal{I}w_i) \langle M\mathcal{I}w_i, w_l \rangle)}_{=0} + \underbrace{(w_m, w_i) \langle Mw_i, w_l \rangle}_{=0} \\
&\quad + \underbrace{\sum_{i=1}^k \frac{(w_i, Mw_i)}{|w_i|^2(n-k)} (w_m, w_l)}_{II} = 0,
\end{aligned}$$

где слагаемые, отмеченные цифрой I (соответственно II), в сумме дают 0.

Свойство 2) целиком доказано.

В заключение докажем ортогональность проекции в смысле формы Киллинга. Имеет место следующее соотношение:

$$\begin{aligned}
\text{Tr } N(M - N) &= \sum_{m=1}^n \frac{(N(M - N)w_m, w_m)}{|w_m|^2} = \sum_{m=1}^n \frac{((N - M)w_m, Nw_m)}{|w_m|^2} \\
&= \sum_{m=k+1}^n \frac{((N - M)w_m, Nw_m)}{|w_m|^2},
\end{aligned} \tag{32}$$

где

$$Nw_m \stackrel{\text{из (29)}}{=} Mw_m + \sum_{i=1}^k \frac{\overline{Mw_i, w_m}}{|w_i|^2} w_i - \sum_{i=1}^k \frac{(w_i, Mw_i)}{|w_i|^2(n-k)} w_m,$$

$$(N-M)w_m = \sum_{i=1}^k \frac{\overline{Mw_i, w_m}}{|w_i|^2} w_i - \sum_{i=1}^k \frac{(w_i, Mw_i)}{|w_i|^2(n-k)} w_m.$$

Преобразуем одно слагаемое суммы (32):

$$\begin{aligned} ((N-M)w_m, Nw_m) &= \left(\sum_{i=1}^k \frac{\overline{Mw_i, w_m}}{|w_i|^2} w_i - \sum_{i=1}^k \frac{(w_i, Mw_i)}{|w_i|^2(n-k)} w_m, Mw_m \right) \\ &+ \left(\sum_{i=1}^k \frac{\overline{Mw_i, w_m}}{|w_i|^2} w_i - \sum_{i=1}^k \frac{(w_i, Mw_i)}{|w_i|^2(n-k)} w_m, \right. \\ &\quad \left. \sum_{i=1}^k \frac{\overline{Mw_i, w_m}}{|w_i|^2} w_i - \sum_{i=1}^k \frac{(w_i, Mw_i)}{|w_i|^2(n-k)} w_m \right). \end{aligned}$$

В силу ортогональности векторов w_i и w_m получаем

$$\begin{aligned} ((N-M)w_m, Nw_m) &= \sum_{i=1}^k \frac{\overline{Mw_i, w_m}}{|w_i|^2} (w_i, Mw_m) - \sum_{i=1}^k \frac{(w_i, Mw_i)}{|w_i|^2(n-k)} (w_m, Mw_m) \\ &+ \left| \sum_{i=1}^k \frac{\overline{Mw_i, w_m}}{|w_i|^2} \right|^2 (w_i, w_i) + \left| \sum_{i=1}^k \frac{(w_i, Mw_i)}{|w_i|^2(n-k)} \right|^2 (w_m, w_m) \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^k \frac{\overline{Mw_i, w_m}(w_i, Mw_m)}{|w_i|^2} + \sum_{i=1}^k \frac{\overline{Mw_i, w_m}(Mw_i, w_m)}{|w_i|^2}}_{=0} \\ &+ \sum_{i=1}^k \frac{(w_i, Mw_i)}{|w_i|^2(n-k)} \left((Mw_m, w_m) + \sum_{i=1}^k \frac{(Mw_i, w_i)}{|w_i|^2} \frac{|w_m|^2}{(n-k)} \right). \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что вся сумма (32) оказывается равной

$$\begin{aligned} \sum_{m=k+1}^n \frac{((N-M)w_m, Nw_m)}{|w_m|^2} &= \sum_{i=1}^k \frac{(w_i, Mw_i)}{|w_i|^2(n-k)} \left(\sum_{m=k+1}^n \frac{(Mw_m, w_m)}{|w_m|^2} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^k \frac{(Mw_i, w_i)}{|w_i|^2} \underbrace{\sum_{m=k+1}^n \frac{|w_m|^2}{|w_m|^2(n-k)}}_{=1} \right) \\ &= \sum_{i=1}^k \frac{(w_i, Mw_i)}{|w_i|^2(n-k)} \sum_{m=1}^n \frac{(Mw_m, w_m)}{|w_m|^2} = 0. \end{aligned}$$

Свойство 3) доказано.

Таким образом, лемма доказана, что позволяет нам сформулировать следующую теорему, подобную теореме 1.

ТЕОРЕМА 5. *Полный набор полиномиальных функций в инволюции на двойственном пространстве κ алгебре $\mathfrak{H}_{nk} = \mathfrak{su}(n)\zeta_k(\mathbb{C}^n)_k$ состоит из:*

- *линейных функций на идеале $u_1, \dots, u_{2nk}$ при $k \geq n - 1$;*
- *функций $u_1, \dots, u_{2nk}$ и*

$$f_{l,\lambda}(M, v) = \text{Tr} \left(\left(\prod |w_i|^4 \right) \text{pr}_{\text{St}(v_1, \dots, v_k)}(M + \lambda B) \right)^l, \quad l = 1, 2, \dots, n - 1 \quad (33)$$

(где проекция задана формулой (23)), при $k < n - 1$.

§ 9. Алгебры семейства $\mathfrak{H}_{n1}$

В случае $k = 1$ формула (23) еще упрощается. Согласно выводам из § 4 для рассматриваемых алгебр необходимо

$$m = \frac{n^2 + 2n - 1 + n - 1}{2} = \frac{n^2 + 3n - 2}{2}$$

полиномов. Отсюда получаем следующее:

- при $n = 2$ (поскольку $m = 4$) линейных полиномов хватает для образования полного набора;
- при $n \geq 3$ линейных полиномов не хватает, поэтому исследуем, какой вид принимает формула (23) в этом случае.

Во-первых, видим, что

$$N = N_1 + N_2 + N_3 + N_4,$$

где

$$\begin{aligned} N_1 &= M - \frac{1}{|w|^2} (Mw \times w^T + M\mathfrak{I}w \times \mathfrak{I}w^T - \mathfrak{I}w \times (M\mathfrak{I}w)^T - w \times (Mw)^T), \\ N_2 &= \frac{1}{2} \frac{\langle Mw, w \rangle}{|w|^2 |w|^2} (w \times w^T - w \times w^T + \mathfrak{I}w \times \mathfrak{I}w^T - \mathfrak{I}w \times \mathfrak{I}w^T) = 0, \\ N_3 &= \frac{1}{2} \frac{\langle M\mathfrak{I}w, w \rangle}{|w|^4} (w \times \mathfrak{I}w^T + w \times \mathfrak{I}w^T - \mathfrak{I}w \times w^T - \mathfrak{I}w \times w^T) \\ &= \frac{\langle M\mathfrak{I}w, w \rangle}{|w|^4} (w \times \mathfrak{I}w^T - \mathfrak{I}w \times w^T), \\ N_4 &= -\frac{\langle w, Mw \rangle}{|w|^2 (n - 1)} \left(E - \frac{w \times w^T}{|w|^2} \right). \end{aligned}$$

Фиксируем теперь тот ортонормированный “канонический” базис, в котором оператор $\mathfrak{I}$ – это оператор умножения вектора $w \in \mathbb{C}^n$ (рассматриваемого как вектор с n комплексными координатами) на мнимую единицу. Посмотрим, какой вид примет формула для N в этом базисе. Сначала приведем ряд

очевидных соотношений, которыми будем пользоваться:

$$\begin{aligned}
 M\mathfrak{I}w &= i \cdot Mw, \\
 u \times v + \mathfrak{I}u \times \mathfrak{I}v^T &= u\langle \cdot, v \rangle + iu\langle \cdot, iv \rangle = u \operatorname{Re}(\cdot, v) + iu \operatorname{Re}(\cdot, iv) \\
 &= u \operatorname{Re}(\cdot, v) + iu \operatorname{Re}\{-i(\cdot, v)\} = u \operatorname{Re}(\cdot, v) + iu \operatorname{Im}(\cdot, v) \\
 &= u\{\operatorname{Re}(\cdot, v) + i \operatorname{Im}(\cdot, v)\} = u(\cdot, v), \\
 -i\langle M\mathfrak{I}w, w \rangle &= -i \operatorname{Re}(iMw, w) = i \operatorname{Im}(Mw, w) \stackrel{\text{no (28)}}{=} (Mw, w), \\
 w \times \mathfrak{I}w^T - \mathfrak{I}w \times w^T &= w \times \mathfrak{I}w^T + \mathfrak{I}w \times \mathfrak{I}\mathfrak{I}w^T = w \times \mathfrak{I}w^T + \mathfrak{I}w \times \mathfrak{I}(\mathfrak{I}w)^T = -iw(\cdot, w) \\
 \implies N_1 &= M - \frac{1}{|w|^2}(Mw(\cdot, w) - w(\cdot, Mw)), \\
 N_3 &= \frac{(Mw, w)w(\cdot, w)}{|w|^4}.
 \end{aligned}$$

В приведенных соотношениях вначале записано выражение в инвариантных терминах, а в конце – его вид в фиксированном базисе. Так, первая формула означает, что результат композиции действий операторов M и $\mathfrak{I}$ на вектор w есть не что иное, как вектор $Mw \in \mathbb{C}^n$, умноженный на мнимую единицу.

Заметим, однако, что в выбранном базисе (u, v) можно переписать как результат умножения вектора-столбца u на вектор-строку $\bar{v}^T$ (здесь и далее T – транспонирование комплексных вектора или матрицы):

$$(u, v) = u\bar{v}^T.$$

Следовательно, в матричном виде проекция (23) переписывается следующим образом:

$$\operatorname{pr}_{\tilde{\mathfrak{S}}t(v)} M = M - \frac{1}{|w|^2}(Mw\bar{w}^T - w(\overline{Mw})^T) + \frac{(Mw, w)}{|w|^4}w\bar{w}^T - \frac{(w, Mw)}{|w|^2(n-1)}\left(E - \frac{w\bar{w}^T}{|w|^2}\right).$$

Значит, формулы для нелинейных полиномов получаются из функций

$$f_{l,\lambda}(M, w) = \operatorname{Tr}(|w|^4 \operatorname{pr}_{\tilde{\mathfrak{S}}t(w)}(M + \lambda B))^l, \quad l = 1, 2, \dots, n,$$

как коэффициенты разложения f по степеням переменной λ .

§ 10. Алгебры $\mathfrak{F}_{nk} = \mathfrak{u}(n) +_{\zeta'_k} (\mathbb{C}^n)_k$

В заключение рассмотрим случай алгебр (12). В этом параграфе все замечания, сделанные для алгебр (11), так же, как и введенное обозначение оператора $\mathfrak{I}$, остаются в силе. При $k > n$ линейных полиномов хватает для образования полного коммутативного набора. В случае $k < n$ стабилизатор регулярного элемента является редуктивной алгеброй, следовательно, оставшаяся часть набора может быть построена методом сдвига аргумента. В обозначениях (24) получаем, что искомая проекция на стационарную алгебру вектора $v = (v_1, \dots, v_k)$ может быть записана в форме

$$K = N_1 + N_2 + N_3 \tag{34}$$

(слагаемое N_4 , корректировавшее след матрицы, в этом случае нам, очевидно, не понадобится).

ЛЕММА 5. Формула (34) удовлетворяет всем свойствам ортогональной в смысле формы Кильлинга проекции на подалгебру $\tilde{\text{St}}(v)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Дополним набор $w_1, \dots, w_k$ до ортогонального базиса $w_1, \dots, w_n$ в $\mathbb{C}^n$. Нам необходимо проверить выполнение следующих свойств:

- 1) $Kw_m = 0 \quad \forall m = 1, \dots, k$;
- 2) $K \in \text{su}(n) \iff K = -\overline{K}^T \iff (Kv, u) + (v, Ku) = 0$;
- 3) K – ортогональная проекция:

$$\text{Tr } K(M - K) = 0 \iff \sum_{i=1}^n \frac{1}{|w_i|^2} (K(M - K)w_i, w_i) = 0.$$

При проверке этих свойств будем пользоваться соотношениями (25)–(30).

Пусть $Nw_m = 0$ при $m \leq k$, тогда

$$\begin{aligned} N_1 w_m &= Mw_m - \sum_{i=1}^k \frac{1}{|w_i|^2} (Mw_i \underbrace{\langle w_i, w_m \rangle}_{=\delta_{im}|w_m|^2} + M\mathfrak{I}w_i \underbrace{\langle \mathfrak{I}w_i, w_m \rangle}_{=0} \\ &\quad - \mathfrak{I}w_i \langle M\mathfrak{I}w_i, w_m \rangle - w_i \langle Mw_i, w_m \rangle) \\ &= \sum_{i=1}^k \frac{1}{|w_i|^2} (\mathfrak{I}w_i \langle M\mathfrak{I}w_i, w_m \rangle + w_i \langle Mw_i, w_m \rangle), \\ N_2 w_m &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \frac{\langle Mw_i, w_j \rangle}{|w_i|^2 |w_j|^2} (w_j \langle w_i, w_m \rangle - w_i \langle w_j, w_m \rangle \\ &\quad + \mathfrak{I}w_j \underbrace{\langle \mathfrak{I}w_i, w_m \rangle}_{=0} - \mathfrak{I}w_i \underbrace{\langle \mathfrak{I}w_j, w_m \rangle}_{=0}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^k \frac{\langle Mw_m, w_j \rangle}{|w_j|^2} w_j - \sum_{i=1}^k \frac{\langle Mw_i, w_m \rangle}{|w_i|^2} w_i \right) = \sum_{i=1}^k \frac{\langle Mw_m, w_i \rangle}{|w_i|^2} w_i, \\ N_3 w_m &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \frac{\langle M\mathfrak{I}w_i, w_j \rangle}{|w_i|^2 |w_j|^2} (w_j \underbrace{\langle \mathfrak{I}w_i, w_m \rangle}_{=0} + w_i \underbrace{\langle \mathfrak{I}w_j, w_m \rangle}_{=0} \\ &\quad - \mathfrak{I}w_j \langle w_i, w_m \rangle - \mathfrak{I}w_i \langle w_j, w_m \rangle) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \frac{\langle M\mathfrak{I}w_m, w_j \rangle}{|w_j|^2} \mathfrak{I}w_j - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \frac{\langle M\mathfrak{I}w_i, w_m \rangle}{|w_i|^2} w_i \\ &\stackrel{\text{из (30)}}{=} -\sum_{j=1}^k \frac{\langle M\mathfrak{I}w_j, w_m \rangle}{|w_j|^2} \mathfrak{I}w_j, \\ Nw_m &= \sum_{i=1}^k \frac{1}{|w_i|^2} (\mathfrak{I}w_i \langle M\mathfrak{I}w_i, w_m \rangle + w_i \langle Mw_i, w_m \rangle) \\ &\quad + \sum_{i=1}^k \frac{\langle Mw_m, w_i \rangle}{|w_i|^2} w_i - \sum_{j=1}^k \frac{\langle M\mathfrak{I}w_j, w_m \rangle}{|w_j|^2} \mathfrak{I}w_j = 0. \end{aligned}$$

Свойство 1) доказано.

Выпишем теперь Nw_m для $m > k$:

$$\begin{aligned} N_1 w_m &= Mw_m - \sum_{i=1}^k \frac{1}{|w_i|^2} (Mw_i \underbrace{\langle w_i, w_m \rangle}_{=0} + M\mathfrak{I}w_i \underbrace{\langle \mathfrak{I}w_i, w_m \rangle}_{=0}) \\ &\quad - \mathfrak{I}w_i \langle M\mathfrak{I}w_i, w_m \rangle - w_i \langle Mw_i, w_m \rangle) \\ &= Mw_m + \sum_{i=1}^k \frac{1}{|w_i|^2} (\mathfrak{I}w_i \langle M\mathfrak{I}w_i, w_m \rangle + w_i \langle Mw_i, w_m \rangle). \end{aligned}$$

Далее, поскольку $0 \leq i \leq k$, а $m > k$, из (26) следует

$$N_2 w_m = N_3 w_m = 0.$$

В итоге получаем

$$Nw_m = Mw_m + \sum_{i=1}^k \frac{1}{|w_i|^2} (\mathfrak{I}w_i \langle M\mathfrak{I}w_i, w_m \rangle + w_i \langle Mw_i, w_m \rangle). \quad (35)$$

Перейдем к свойству 2). Очевидно, что это условие достаточно проверить для базисных векторов $v = w_m$, $u = w_l$. Заметим, во-первых, что если $m, l \leq k$, то обе скобки равны нулю. Во-вторых, если $l \leq k$, а $m > k$, то первое произведение все так же равно нулю, а первое имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} (Nw_m, w_l) &= (Mw_m, w_l) + \sum_{i=1}^k \frac{1}{|w_i|^2} ((\mathfrak{I}w_i, w_l) \langle M\mathfrak{I}w_i, w_m \rangle + (w_i, w_l) \langle Mw_i, w_m \rangle) \\ &= (Mw_m, w_l) + i \langle M\mathfrak{I}w_l, w_m \rangle + \langle Mw_l, w_m \rangle \\ &\stackrel{\text{из (29)}}{=} (Mw_m, w_l) + \overline{(Mw_l, w_m)} = (Mw_m, w_l) + (w_m, Mw_l) = 0. \end{aligned}$$

Наконец, при $l, m > k$ с учетом антилинейности эрмитова произведения левая часть соотношения (2) преобразуется к форме

$$\begin{aligned} (Nw_m, w_l) + (w_m, Nw_l) &= \underbrace{(Mw_m, w_l)}_I + \sum_{i=1}^k \frac{1}{|w_i|^2} (\underbrace{(\mathfrak{I}w_i, w_l)}_0 \langle M\mathfrak{I}w_i, w_m \rangle \\ &\quad + \underbrace{(w_i, w_l)}_{=0} \langle Mw_i, w_m \rangle) + \underbrace{(w_m, Mw_l)}_I \\ &\quad + \sum_{i=1}^k \frac{1}{|w_i|^2} (\underbrace{(w_m, \mathfrak{I}w_i)}_{=0} \langle M\mathfrak{I}w_i, w_l \rangle + \underbrace{(w_m, w_i)}_{=0} \langle Mw_i, w_l \rangle) = 0, \end{aligned}$$

где слагаемые, отмеченные цифрой I, в сумме дают 0. Свойство 2) доказано.

В заключение докажем ортогональность проекции в смысле формы Киллинга. Имеет место следующее соотношение:

$$\begin{aligned} \text{Tr } N(M - N) &= \sum_{m=1}^n \frac{(N(M - N)w_m, w_m)}{|w_m|^2} = \sum_{m=1}^n \frac{((N - M)w_m, Nw_m)}{|w_m|^2} \\ &= \sum_{m=k+1}^n \frac{((N - M)w_m, Nw_m)}{|w_m|^2}, \end{aligned} \quad (36)$$

где

$$Nw_m \stackrel{\text{по (29)}}{=} Mw_m + \sum_{i=1}^k \frac{\overline{Mw_i, w_m}}{|w_i|^2} w_i, \quad (N - M)w_m = \sum_{i=1}^k \frac{\overline{Mw_i, w_m}}{|w_i|^2} w_i.$$

Используя последние равенства, преобразуем одно слагаемое суммы (36):

$$\begin{aligned} & ((N - M)w_m, Nw_m) \\ &= \left(\sum_{i=1}^k \frac{\overline{Mw_i, w_m}}{|w_i|^2} w_i, Mw_m \right) + \left(\sum_{i=1}^k \frac{\overline{Mw_i, w_m}}{|w_i|^2} w_i, \sum_{i=1}^k \frac{\overline{Mw_i, w_m}}{|w_i|^2} w_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^k \frac{\overline{Mw_i, w_m}}{|w_i|^2} (w_i, Mw_m) + \left| \sum_{i=1}^k \frac{\overline{Mw_i, w_m}}{|w_i|^2} w_i \right|^2 (w_i, w_i) \\ &= \sum_{i=1}^k \frac{\overline{Mw_i, w_m} (w_i, Mw_m)}{|w_i|^2} + \sum_{i=1}^k \frac{\overline{Mw_i, w_m} (Mw_i, w_m)}{|w_i|^2} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что каждое слагаемое суммы (36) равно нулю, а значит, и вся сумма тоже. Свойство 3) доказано.

ТЕОРЕМА 6. *Полный набор полиномиальных функций в инволюции на двойственном пространстве к алгебре $\mathfrak{F}_{nk} = \mathfrak{u}(n) + \zeta'_k (\mathbb{C}^n)_k$ состоит из:*

- линейных функций на идеале $u_1, \dots, u_{2nk}$ при $k \geq n$;
- функций $u_1, \dots, u_{2nk}$ и

$$f_{l,\lambda}(M, v) = \text{Tr} \left(\left(\prod |w_i|^4 \right) \text{pr}_{\text{St}(v_1, \dots, v_k)}(M + \lambda B) \right)^l, \quad l = 1, 2, \dots, n \quad (37)$$

(где проекция задана формулой (34)), при $k \leq n$.

Автор выражает благодарность А. Т. Фоменко и А. В. Болсинову за постановку задачи и обсуждения, а также А. С. Мищенко за полезные замечания.

Список литературы

- [1] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, *Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация*, т. 1, 2, РХД, Ижевск, 1999; англ. пер.: A. V. Bolsinov, A. T. Fomenko, *Integrable Hamiltonian systems. Geometry, topology, classification*, Chapman & Hall, CRC, Boca Raton, FL, 2004.
- [2] В. В. Трофимов, А. Т. Фоменко, *Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений*, Факториал, М.; Просперус, Ижевск, 1995.
- [3] А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко, “Об интегрировании уравнений Эйлера на полупростых алгебрах Ли”, *Докл. АН СССР*, **231:3** (1976), 536–538; англ. пер.: A. S. Mishchenko, A. T. Fomenko, “On the integration of the Euler equations on semisimple Lie algebras”, *Soviet Math. Dokl.*, **17:6** (1976), 1591–1593.
- [4] А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко, “Уравнения Эйлера на конечномерных группах Ли”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **42:2** (1978), 396–415; англ. пер.: A. S. Mišchenko, A. T. Fomenko, “Euler equations on finite-dimensional Lie groups”, *Math. USSR-Izv.*, **12:2** (1978), 371–389.

- [5] А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко, “Интегрируемость уравнений Эйлера на полупростых алгебрах Ли”, Тр. сем. по векторному и тензорному анализу, **19**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1979, 3–94; англ. пер.: A. S. Mishchenko, A. T. Fomenko, “Integrability of Euler equations on semisimple Lie algebras”, *Selecta Math. Soviet.*, **2**:3 (1982), 207–291.
- [6] В. В. Трофимов, А. Т. Фоменко, “Динамические системы на орбитах линейных представлений групп Ли и полная интегрируемость некоторых гидродинамических систем”, *Функц. анализ и его прил.*, **17**:1 (1983), 31–39; англ. пер.: V. V. Trofimov, A. T. Fomenko, “Dynamical systems on the orbits of linear representations of Lie groups and the complete integrability of certain hydrodynamical systems”, *Funct. Anal. Appl.*, **17**:1 (1983), 23–29.
- [7] А. В. Браилов, А. Т. Фоменко, “Топология интегральных подмногообразий вполне интегрируемых гамильтоновых систем”, *Матем. сб.*, **134(176)**:3(11) (1987), 375–385; англ. пер.: A. V. Brailov, A. T. Fomenko, “The topology of integral submanifolds of completely integrable Hamiltonian systems”, *Math. USSR-Sb.*, **62**:2 (1989), 373–383.
- [8] А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко, “Обобщенный метод Лиувилля интегрирования гамильтоновых систем”, *Функц. анализ и его прил.*, **12**:2 (1978), 46–56; англ. пер.: A. S. Mishchenko, A. T. Fomenko, “Generalized Liouville method of integration of Hamiltonian systems”, *Funct. Anal. Appl.*, **12**:2 (1978), 113–121.
- [9] А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко, “Некоммутативное интегрирование гамильтоновых систем и его приложения”, *Механика твердого тела*, 1978, № 4, 187–188.
- [10] А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко, “Интегрирование гамильтоновых систем с некоммутативными симметриями”, Тр. сем. по векторному и тензорному анализу, **20**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1981, 5–54.
- [11] В. В. Трофимов, А. Т. Фоменко, “Интегрируемость по Лиувиллю гамильтоновых систем на алгебрах Ли”, *УМН*, **2** (1984), 3–56; англ. пер.: V. V. Trofimov, A. T. Fomenko, “Liouville integrability of Hamiltonian systems on Lie algebras”, *Russian Math. Surveys*, **2** (1984), 1–67.
- [12] Т. А. Певцова, “Симплектическая структура орбит коприсоединенного представления алгебр Ли типа $E \times_{\rho} G$ ”, *Матем. сб.*, **123(165)**:2 (1984), 276–286; англ. пер.: T. A. Pevtsova, “The symplectic structure of the orbits of the coadjoint representation of Lie algebras of type $E \times_{\rho} G$ ”, *Math. USSR-Sb.*, **1** (1985), 275–286.
- [13] С. Т. Садэтов, “Доказательство гипотезы Мищенко–Фоменко”, *Докл. РАН*, **397**:6 (2004), 751–754; англ. пер.: S. T. Sadetov, “A proof of the Mishchenko–Fomenko conjecture”, *Dokl. Math.*, **1** (2004), 635–638.
- [14] А. В. Болсинов, “Полные инволютивные наборы полиномов в пуассоновых алгебрах: доказательство гипотезы Мищенко–Фоменко”, Тр. сем. по векторному и тензорному анализу, **26**, Изд-во Моск. ун-та, М., 2005, 87–109.
- [15] M. Raïs, “L’indice des produits semi-directs $E \times_{\rho} \mathfrak{G}$ ”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, **287**:4 (1978), 195–197.

М. М. Жданова (M. M. Zhdanova)
 Механико-математический факультет
 Московского государственного университета
 им. М. В. Ломоносова
E-mail: zhdanovamm@gmail.com

Поступила в редакцию
 24.06.2008 и 13.02.2009