Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Гордиенко, Корамерности обобщенных полиномиальных тождеств, *Матем. сб.*, 2010, том 201, номер 2, 79–94

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm6386>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 05:37:35

УДК 512.552.4

А. С. Гордиенко

Коразмерности обобщенных полиномиальных тождеств

Доказано, что для всякой конечномерной ассоциативной алгебры A над полем характеристики нуль существуют такие числа $C \in \mathbb{Q}_+$ и $t \in \mathbb{Z}_+$, что $gc_n(A) \sim Cn^t d^n$ при $n \rightarrow \infty$, где $d = PI \exp(A) \in \mathbb{Z}_+$. Таким образом, для коразмерностей $gc_n(A)$ обобщенных полиномиальных тождеств справедливости гипотезы С. А. Амицура и А. Регева.

Библиография: 6 названий.

Ключевые слова: ассоциативные алгебры, обобщенные полиномиальные тождества, асимптотика коразмерностей, PI -экспонента, представления симметрической группы.

В начале 80-х годов в теории полиномиальных тождеств зародилось и стало бурно развиваться новое направление, связанное с исследованием числовых характеристик многообразий алгебр. Были сформулированы гипотезы С. А. Амицура и А. Регева. Гипотеза Амицура об асимптотическом поведении обычных коразмерностей была доказана в 1999 году М. В. Зайцевым и А. Джамбруно [1; с. 143, теорема 5.2] для всех ассоциативных алгебр. Для широкого класса алгебр была доказана и гипотеза Регева [2]–[4]. Кроме обычных тождеств, важную роль в теории колец играют обобщенные полиномиальные тождества (см. [5]). В связи с этим возникает вопрос о справедливости указанных гипотез для обобщенных коразмерностей.

Пусть A – конечномерная ассоциативная алгебра над полем характеристики нуль, $gc_n(A)$ – последовательность ее обобщенных коразмерностей.

ГИПОТЕЗА 1 (С. А. Амицур). Существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{gc_n(A)} \in \mathbb{Z}_+$.

Гипотеза Амицура подтверждается в теореме 3, причем оказывается, что число $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{gc_n(A)}$ совпадает с экспонентой $PI \exp(A)$ обычных тождеств.

ГИПОТЕЗА 2 (А. Ревега). Существуют такие числа $C \in \mathbb{Q}_+$ и $t \in \mathbb{Z}_+$, что $gc_n(A) \sim Cn^t d^n$ при $n \rightarrow \infty$, где $d = PI \exp(A)$. (Мы пишем, что $f \sim g$, если $\lim f/g = 1$.)

Справедливость гипотезы Регева следует из теоремы 4. Кроме того, вычисляются обобщенные коразмерности полных матричных алгебр (теорема 1).

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае обычных коразмерностей $c_n(A)$ на константы C и t накладываются более слабые ограничения, так как существуют алгебры (см. [6]), для которых $c_n(A) \sim Cn^t d^n$, где $C \notin \mathbb{Q}$ и $t < 0$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 09-01-00303-а, 09-01-90416-Укр_ф_а) и Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-1983.2008.1).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $F\langle X \rangle$ – свободная алгебра без единицы на счетном множестве $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ над некоторым полем F , A – F -алгебра (здесь мы не накладываем условий $\text{char } F = 0$ и $\dim A < +\infty$). Многочлен $f(x_1, \dots, x_n) \in F\langle X \rangle *_F A$ называется *обобщенным полиномиальным тождеством* в алгебре A , если $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ для всех $a_i \in A$, $1 \leq i \leq n$. (Здесь знаком $*$ обозначено свободное произведение алгебр.)

Понятно, что обобщенные полиномиальные тождества алгебры A образуют идеал в алгебре $F\langle X \rangle *_F A$. Обозначим его через $\text{GId}(A)$.

Пусть

$$V_n(A) = \langle a_0 x_{\sigma(1)} a_1 x_{\sigma(2)} a_2 \cdots a_{n-1} x_{\sigma(n)} a_n \mid \sigma \in S_n, a_i \in A \cup \{1\} \rangle_F, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Элементы пространства $V_n(A)$ называются *обобщенными полилинейными многочленами* с коэффициентами в алгебре A . Последовательность

$$gc_n(A) = \dim \frac{V_n(A)}{V_n(A) \cap \text{GId}(A)}, \quad n \in \mathbb{N},$$

назовем *последовательностью обобщенных коразмерностей* алгебры A .

Обозначим через $L(A^{\otimes n}; A)$ пространство n -линейных отображений из алгебры A в алгебру A . Тогда существует естественное вложение

$$\frac{V_n(A)}{V_n(A) \cap \text{GId}(A)} \subseteq L(A^{\otimes n}; A).$$

Отсюда получаем следующее утверждение.

ЛЕММА 1. Если $m = \dim A < +\infty$, то $gc_n(A) \leq \dim L(A^{\otimes n}; A) = m^{n+1}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Таким образом, обобщенные коразмерности всякой конечномерной алгебры конечны. Однако существуют бесконечномерные алгебры, у которых все обобщенные коразмерности бесконечны. Пусть G – алгебра Грассмана с образующими e_i , $i \in \mathbb{N}$, где $e_i e_j = -e_j e_i$ для всех $i, j \in \mathbb{N}$. Тогда для любого фиксированного $n \in \mathbb{N}$ многочлены $e_{i_1} x_1 \cdots x_n$, $i \in \mathbb{N}$, линейно независимы по модулю $\text{GId}(G)$. Действительно, пусть $\alpha_{i_1} e_{i_1} x_1 \cdots x_n + \cdots + \alpha_{i_s} e_{i_s} x_1 \cdots x_n \equiv 0$. Подставив $x_j = e_{j+\ell}$, $1 \leq j \leq s$, где $\ell = \max_{1 \leq j \leq s} i_j$, получим сумму линейно независимых элементов, откуда следует, что все α_{i_j} равны нулю.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $M_k(F)$ – алгебра всех матриц $k \times k$. Тогда $gc_n(M_k(F)) = k^{2(n+1)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 1 достаточно доказать, что

$$\frac{V_n(M_k(F))}{V_n(M_k(F)) \cap \text{GId}(M_k(F))} = L(M_k(F)^{\otimes n}; M_k(F)).$$

Обозначим через e_{ij} матричные единицы, т.е. матрицы, имеющие единицу в клетках (i, j) и нули в остальных клетках. Пространство $L(M_k(F)^{\otimes n}; M_k(F))$ является линейной оболочкой таких отображений B_ν , что

$$B_\nu(e_{\ell_1 t_1}, \dots, e_{\ell_n t_n}) = \begin{cases} e_{i_0 j_0}, & \text{если } \ell_q = i_q \text{ и } t_q = j_q \text{ для всех } 1 \leq q \leq n, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Здесь $\nu = ((i_0, j_0), (i_1, j_1), \dots, (i_n, j_n))$, $1 \leq i_s, j_t \leq k$, – некоторые наборы чисел. Сопоставим наборам ν многочлены $f_\nu = e_{i_0 i_1} x_1 e_{j_1 i_2} x_2 e_{j_2 i_3} \dots e_{j_{n-1} i_n} x_n e_{j_n j_0}$. Всякий f_ν переходит в B_ν , если рассмотреть элементы пространства $V_n(A)$ как полилинейные отображения. Таким образом,

$$gc_n(M_k(F)) = \dim L(M_k(F)^{\otimes n}; M_k(F)) = k^{2(n+1)}.$$

Далее везде полагаем, что $\text{char } F = 0$, а $\dim A < +\infty$. Докажем, что обобщенные коразмерности не меняются при расширении основного поля.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $K \supset F$ – расширение основного поля F , $\bar{A} = A \otimes_F K$,

$$gc_n^K(\bar{A}) = \dim_K \frac{V_n^K(\bar{A})}{V_n^K(\bar{A}) \cap \text{GId}(\bar{A})}$$

(множество $\text{GId}(\bar{A})$ является идеалом в $K\langle X \rangle *_K \bar{A}$). Тогда $gc_n^K(\bar{A}) = gc_n(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что все коэффициенты из K можно вынести, поэтому $V_n^K(\bar{A}) = V_n(A) \otimes_F K$, $K\langle X \rangle *_K \bar{A} = (F\langle X \rangle *_F A) \otimes_F K$. Кроме того, $\text{GId}(A) \otimes_F K \subseteq \text{GId}(\bar{A})$. Действительно, пусть $f \in \text{GId}(A)$. К обобщенным тождествам применима стандартная процедура линеаризации [1; с. 7, теорема 3.8]. Отсюда получаем, что всякое тождество является следствием некоторого конечного множества полилинейных тождеств. Поэтому можно считать, что f – полилинейный обобщенный многочлен некоторой степени n . Пусть $\bar{a}_\ell = \sum_{i=1}^s a_{\ell i} \otimes k_{\ell i}$, где $a_{\ell i} \in A$, $1 \leq \ell \leq n$, – произвольные элементы алгебры A , $(k_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ – базис векторного пространства K над F . Тогда $f(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n) = \sum_{(i_1, \dots, i_n)} f(a_{1i_1}, \dots, a_{ni_n}) \otimes k_{1i_1} \dots k_{ni_n} = 0$.

Отсюда получаем, что если $f_1, \dots, f_m$ – прообразы в пространстве $V_n(A)$ элементов базиса пространства $V_n(A)/(V_n(A) \cap \text{GId}(A))$, то образы этих элементов будут полной системой в $V_n^K(\bar{A})/(V_n^K(\bar{A}) \cap \text{GId}(\bar{A}))$. Предположим, что они линейно зависимы, т.е. $\bar{\alpha}_1 f_1 + \dots + \bar{\alpha}_m f_m \equiv 0$. Пусть $\bar{\alpha}_\ell = \sum_{i=1}^s \alpha_{\ell i} k_{\ell i}$, где $k_1, \dots, k_s$ – линейно независимые над F элементы поля K . Тогда многочлен $(\alpha_{11} f_1 + \dots + \alpha_{m1} f_m) k_1 + \dots + (\alpha_{1s} f_1 + \dots + \alpha_{ms} f_m) k_s$ обращается в нуль при подстановке любых элементов из A . В силу линейной независимости k_i над F получаем, что каждая скобка является тождеством. Поэтому все $\alpha_{\ell i}$ равны нулю, т.е. образы $f_1, \dots, f_m$ являются базисом в $V_n^K(\bar{A})/(V_n^K(\bar{A}) \cap \text{GId}(\bar{A}))$. Из определения коразмерностей получаем утверждение теоремы.

Теорема 2 позволяет далее предполагать основное поле F алгебраически замкнутым.

В силу теоремы Веддерберна–Мальцева $A = A_0 + J$ – прямая сумма подпространств, где $J = J(A)$ – радикал Джекобсона алгебры A , а A_0 – ее максимальная полупростая подалгебра, $A_0 = A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_\omega$, $\omega \in \mathbb{N}$, – прямая сумма простых алгебр. Пусть $d = \max(\dim(A_{q_1} + \dots + A_{q_t}) \mid A_{q_1} J A_{q_2} J \dots J A_{q_t} \neq 0)$ (можно считать, что $A_{q_i} \neq A_{q_j}$ при $i \neq j$). Согласно теореме М. В. Зайцева–А. Джамбруно [1; гл. 6, часть 2] число d является экспонентой роста обычных тождеств. Докажем аналог этой теоремы для обобщенных тождеств.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $J^p = 0$, $J^{p-1} \neq 0$. Тогда

$$d^n \leq gc_n(A) \leq 2^\omega (\dim A) \left(\sum_{s=0}^{p-1} \binom{n}{s} (\dim J)^s d^{-s} \right) d^n$$

при $d > 0$ и $n \geq p - 1$. При $d = 0$ и $n \geq p$ выполняется равенство $gc_n(A) = 0$.

СЛЕДСТВИЕ. Для обобщенных коразмерностей любой конечномерной ассоциативной алгебры A над полем характеристики нуль справедлива гипотеза С. А. Амицура.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Число $gc_n(A)$ является рангом системы линейных уравнений для коэффициентов полилинейного обобщенного тождества степени n . Каждая строка этой системы соответствует подстановке базисных элементов алгебры A вместо переменных $x_1, \dots, x_n$. Достаточно подставлять не более $p - 1$ элементов радикала, так как иначе соответствующее уравнение будет нулевым. Фиксируем базис в A , являющийся объединением базисов алгебр A_i и J . Рассмотрим подстановку $a_1 \mapsto x_1, a_2 \mapsto x_2, \dots, a_n \mapsto x_n$. Пусть $A_{q_1} \oplus A_{q_2} \oplus \dots \oplus A_{q_t}$ – минимальная сумма алгебр, содержащая все элементы алгебры A_0 , встречающиеся в наборе $(a_i)_{i=1}^n$, т.е. для каждого k существует такое i , что $a_i \in A_{q_k}$. Если $\dim(A_{q_1} \oplus A_{q_2} \oplus \dots \oplus A_{q_t}) > d$, то соответствующая подстановка обнуляет любой полилинейный многочлен, т.е. дает нулевые уравнения. Поэтому достаточно рассматривать не более $2^\omega \sum_{s=0}^{p-1} \binom{n}{s} (\dim J)^s d^{n-s}$ подстановок (число подмножеств во множестве $\{A_1, \dots, A_\omega\}$ равно 2^ω). Отсюда получаем оценку сверху, так как всякая подстановка дает одно уравнение для коэффициентов тождества, эквивалентное $\dim A$ скалярным уравнениям.

Без ограничения общности $\dim(A_1 \oplus \dots \oplus A_t) = d$, причем $A_1 J A_2 J \dots J A_t \neq 0$. В силу алгебраической замкнутости поля F существуют изоморфизмы $A_\ell \cong M_{k_\ell}(F)$, где $k_\ell \in \mathbb{N}$. Пусть $e_{ij}^{(\ell)}$ – матричные единицы алгебр $M_{k_\ell}(F)$. Для того, чтобы доказать оценку снизу, достаточно для каждого набора $\nu = ((\gamma_1, \alpha_1, \beta_1), \dots, (\gamma_n, \alpha_n, \beta_n))$, $1 \leq \gamma_i \leq t$, $1 \leq \alpha_i, \beta_i \leq k_{\gamma_i}$, построить такой многочлен $f_\nu \in V_n(A)$, что

$$f_\nu(e_{r_1 t_1}^{(m_1)}, \dots, e_{r_n t_n}^{(m_n)}) = \begin{cases} a, & \text{если } m_q = \gamma_q, r_q = \alpha_q, t_q = \beta_q \text{ для всех } 1 \leq q \leq n, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $a \neq 0$ – некоторый элемент алгебры A . Из определения видно, что число таких многочленов будет равно d^n и по модулю тождеств они будут линейно независимы.

Так как $e_{ii}^{(\ell)}$ – ортогональные идемпотенты, то

$$J = \sum_{\ell, i, m, v} J_{iv}^{(\ell, m)} + \sum_{m, v} J_{0v}^{(0, m)} + \sum_{\ell, i} J_{i0}^{(\ell, 0)} + J_{00}^{(0, 0)} \quad (1)$$

– прямая сумма подпространств, заданных следующими условиями (здесь $j_{iv}^{(\ell, m)} \in J_{iv}^{(\ell, m)}$ – произвольный элемент):

$$e_{tt}^{(u)} j_{iv}^{(\ell, m)} = \delta_{ut} \delta_{ti} j_{iv}^{(\ell, m)}, \quad j_{iv}^{(\ell, m)} e_{tt}^{(u)} = \delta_{mu} \delta_{vt} j_{iv}^{(\ell, m)}, \quad (2)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера; либо $1 \leq \ell \leq \omega$ и $1 \leq i \leq k_\ell$, либо $\ell = i = 0$; либо $1 \leq m \leq \omega$ и $1 \leq v \leq k_m$, либо $m = v = 0$; $1 \leq u \leq \omega$; $1 \leq t \leq k_u$. В силу выбора алгебр A_i существуют такие $j_{i_s v_s}^{(s, s+1)} \in J_{i_s v_s}^{(s, s+1)}$, что

$$A_1 j_{i_1 v_1}^{(1, 2)} A_2 \dots A_{t-1} j_{i_{t-1} v_{t-1}}^{(t-1, t)} A_t \neq 0.$$

Тогда

$$a = e_{1i_1}^{(1)} j_{i_1 v_1}^{(1, 2)} e_{v_1 i_2}^{(2)} j_{i_2 v_2}^{(2, 3)} \dots j_{i_{t-1} v_{t-1}}^{(t-1, t)} e_{v_{t-1} 1}^{(t)} \neq 0$$

и достаточно рассмотреть

$$f_\nu = (e_{1\xi_1}^{(1)} x_{\zeta_1} e_{\eta_1\xi_2}^{(1)} x_{\zeta_2} \cdots x_{\zeta_r} e_{\eta_r i_1}^{(1)}) j_{i_1 v_1}^{(1,2)} (e_{v_1 \xi_{r+1}}^{(2)} x_{\zeta_{r+1}} e_{\eta_{r+1} \xi_{r+2}}^{(2)} x_{\zeta_{r+2}} \cdots \\ \times \cdots x_{\zeta_t} e_{\eta_t i_{t-1}}^{(t-1)}) j_{i_{t-1} v_{t-1}}^{(t-1,t)} (e_{v_{t-1} \xi_{t+1}}^{(t)} x_{\zeta_{t+1}} \cdots x_{\zeta_n} e_{\eta_n 1}^{(t)}).$$

Мы помещаем переменную x_k в γ_k -ю скобку, полагая $\xi_i = \alpha_k$, $\eta_i = \beta_k$, $\zeta_i = k$.

Если алгебра A без единицы, т.е.

$$\sum_{m,v} J_{0v}^{(0,m)} + \sum_{\ell,i} J_{i0}^{(\ell,0)} + J_{00}^{(0,0)} \neq 0,$$

то рассмотрим алгебру $A^+ = A + F \cdot 1$ с присоединенной единицей 1. Положим $e_0 = e_{00}^{(0)} = 1 - \sum_{\ell,i} e_{ii}^{(\ell)}$. Тогда $e_0^2 = e_0$, $A^+ = A_0^+ + J$, где $A_0^+ = F e_0 \oplus A_0$ – прямая сумма алгебр, и равенства (2) выполняются теперь и в случае $u = t = 0$. Можно для удобства ввести символ e_0 в сигнатуру обобщенных тождеств алгебры A :

$$e_0 x = x - \sum_{\ell,i} e_{ii}^{(\ell)} x, \quad x e_0 = x - \sum_{\ell,i} x e_{ii}^{(\ell)}.$$

(Разумеется, подставляя e_0 вместо переменных по-прежнему не разрешается, так как обобщенные коразмерности алгебр A^+ и A могут различаться. Достаточно рассмотреть случай, когда алгебра A нильпотентна.) Тогда, независимо от наличия единицы в алгебре A , всякий элемент пространства $V_n(A)$ есть линейная комбинация одночленов вида

$$f = a_{i_0 v_1}^{(\ell_0, m_1)} x_{\zeta_1} a_{i_1 v_2}^{(\ell_1, m_2)} x_{\zeta_2} a_{i_2 v_3}^{(\ell_2, m_3)} \cdots a_{i_{n-1} v_n}^{(\ell_{n-1}, m_n)} x_{\zeta_n} a_{i_n v_{n+1}}^{(\ell_n, m_{n+1})}, \quad (3)$$

где $a_{iv}^{(\ell, m)}$ при $\ell \neq m$ – базисный элемент пространства $J_{iv}^{(\ell, m)}$, а $a_{iv}^{(\ell, \ell)}$ является либо базисным элементом пространства $J_{iv}^{(\ell, \ell)}$, либо матричной единицей $e_{iv}^{(\ell)}$ и, если A – алгебра без единицы, то в (3) может также присутствовать элемент $a_{00}^{(0,0)} = e_{00}^{(0)}$. Обозначим через Ξ множество всех многочленов вида (3). Далее считаем, что фиксированный базис Θ алгебры A состоит из матричных единиц и элементов базиса радикала, согласованного с разложением (1). Пусть $\Theta^+ = \Theta$ для алгебры A с единицей и $\Theta^+ = \Theta \cup \{e_{00}^{(0)}\}$, если A без единицы.

Определим отображения $\varphi: \Xi \times \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{Z}_+^4$ и $\psi: \Theta^n \times \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{Z}_+^4$:

$$\varphi(f, k) = (m_s, v_s, \ell_s, i_s), \quad \psi(a, k) = (m, v, \ell, i).$$

Здесь числа m_s, v_s, ℓ_s, i_s берутся из формулы (3) при s , удовлетворяющем условию $k = \zeta_s$. Через $a = (a_1, \dots, a_n)$ мы обозначили набор из некоторых n элементов базиса Θ . Числа m, v, ℓ и i находятся из условий $a_k \in J_{iv}^{(\ell, m)}$ или $a_k = e_{iv}^{(\ell)}$. В последнем случае полагаем $m = \ell$.

Теперь заметим, что если для некоторого многочлена f и набора a выполнено условие $\varphi(f, \cdot) \neq \psi(a, \cdot)$, т.е. существует такое число $1 \leq k \leq n$, что $\varphi(f, k) \neq \psi(a, k)$, то $f(a) = 0$. Отсюда получаем, что если $f_s \in \Xi$ – такие одночлены, что ни один из них не является тождеством и $\varphi(f_s, \cdot) \neq \varphi(f_t, \cdot)$ при $s \neq t$, то f_s линейно независимы по модулю $\text{Gid}(A)$. Для проверки достаточно для каждого s совершить подстановку a такую, что $\varphi(f_s, \cdot) = \psi(a, \cdot)$

и $f_s(a) \neq 0$. Тогда для $t \neq s$ будет выполнено $f_t(a) = 0$. Поэтому многочлены f с одинаковыми отображениями $\varphi(f, \cdot)$ (последние мы теперь обозначим через χ) можно сгруппировать и

$$V_n(A)/(V_n(A) \cap \text{GId}(A)) = \bigoplus_{\chi} B(\chi),$$

где $B(\chi) = \pi \langle f \in \Xi \mid \varphi(f, \cdot) = \chi(\cdot) \rangle_F$, $\pi: V_n(A) \rightarrow V_n(A)/(V_n(A) \cap \text{GId}(A))$ – естественная проекция, $\chi: \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{Z}_+^4$ – некоторые отображения.

Пусть теперь $N = \dim A_0$, тройки (m, v, i) , где $1 \leq m \leq \omega$; $1 \leq v, i \leq k_m$, занумерованы числами $1, \dots, N$, причем отображение Φ сопоставляет каждой тройке ее номер. Фиксируем произвольные числа $n_s \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq s \leq N$, такие, что $\sum_{s=1}^N n_s \leq n$. Пусть предикат $\Pi(\chi, n_1, \dots, n_N)$ принимает значение “истина” тогда и только тогда, когда отображение χ имеет вид:

$$\chi(k) = \begin{cases} (m, v, m, i) & \text{при } \sum_{t=1}^N n_t < k \leq \sum_{t=1}^N n_t \text{ и } 1 \leq m \leq \omega; 1 \leq v, i \leq k_m, \\ (m, v, \ell, i) & \text{при } k > \sum_{t=1}^N n_t, \text{ где либо } m \neq \ell, \text{ либо } m = \ell = 0, \\ & \text{на } v, i \text{ ограничений не накладывается.} \end{cases}$$

Положим $\Pi_0(n_1, \dots, n_N) = \{\chi \mid \Pi(\chi, n_1, \dots, n_N)\}$ и

$$B_n(n_1, \dots, n_N) = \bigoplus_{\chi \in \Pi_0(n_1, \dots, n_N)} B(\chi).$$

Заметим, что если для $\chi_1, \chi_2: \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{Z}_+^4$ при всех (m, v, ℓ, i) выполнено условие $|\chi_1^{-1}(m, v, \ell, i)| = |\chi_2^{-1}(m, v, \ell, i)|$, то $\dim B(\chi_1) = \dim B(\chi_2)$ (достаточно сделать замену переменных). Поэтому, сгруппировав сходные χ и выбрав среди них по представителю, для которого истинно $\Pi(\chi, n_1, \dots, n_N)$, получим, что

$$g_{c_n}(A) = \sum_{(n_1, \dots, n_N)} \binom{n}{n_1, \dots, n_N} \dim B_n(n_1, \dots, n_N).$$

Многочлены, являвшиеся элементами пространства $V_n(A)$, зависели от переменных $x_1, \dots, x_n$. Для удобства мы изменим обозначения. Пусть $x_i^{(s)} = x_k$, где $1 \leq s \leq N$ и $k = \sum_{t=1}^{s-1} n_t + i$, а $x_i^{(0)} = x_\ell$, где $\ell = \sum_{t=1}^N n_t + i$. Положим $n_0 = n - \sum_{s=1}^N n_s$. Обозначим пространство обобщенных полилинейных многочленов от переменных $x_i^{(s)}$ через $V(A, n_0, n_1, \dots, n_N)$. Пусть $\varepsilon: V_n(A) \rightarrow V(A, n_0, n_1, \dots, n_N)$ – соответствующий изоморфизм. Он индуцирует изоморфизм факторпространств:

$$\varepsilon: \frac{V_n(A)}{V_n(A) \cap \text{GId}(A)} \rightarrow \frac{V(A, n_0, n_1, \dots, n_N)}{V(A, n_0, n_1, \dots, n_N) \cap \text{GId}(A)}.$$

Пусть

$$B(n_0, n_1, \dots, n_N) = \varepsilon B_n(n_1, \dots, n_N),$$

$$F_0(n_0, n_1, \dots, n_N) = \{\varepsilon f \mid (f \in \Xi) \ \& \ \Pi(\varphi(f, \cdot), n_1, \dots, n_N)\}.$$

Иными словами, множество $F_0(n_0, n_1, \dots, n_N)$ состоит из таких одночленов εf , что если $(\varepsilon f)(a) \neq 0$ для некоторой подстановки $a = (a_t^{(s)})_{s,t} \in \Theta^n$ базисных элементов, то необходимо $a_t^{(s)} \in \{e_{vi}^{(m)}\} \cup J_{vi}^{(m,m)}$, где $(m, v, i) = \Phi^{-1}(s)$, при $1 \leq s \leq N$ и $a_t^{(0)} \in J_{00}^{(0,0)} \cup \bigcup_{v,i} J_{vi}^{(m,\ell)}$. Тогда

$$B(n_0, n_1, \dots, n_N) = \varepsilon \pi \varepsilon^{-1} \langle F_0(n_0, n_1, \dots, n_N) \rangle_F.$$

В новых обозначениях

$$gc_n(A) = \sum_{(n_1, \dots, n_N)} \binom{n}{n_1, \dots, n_N} \dim B\left(n - \sum_{s=1}^N n_s, n_1, \dots, n_N\right). \quad (4)$$

Определим представление группы $S_{n_1} \times \dots \times S_{n_N}$ на пространстве $B(n_0, n_1, \dots, n_N)$. Каждый множитель S_{n_k} переставляет переменные $x_t^{(k)}$, оставляя остальные буквы на месте. Так как $\text{char } F = 0$, то по теореме Машке модуль $B(n_0, n_1, \dots, n_N)$ раскладывается в прямую сумму своих неприводимых подмодулей.

Нам потребуется следующее известное утверждение.

ЛЕММА 2. 1) *Неприводимые представления группы $S_{n_1} \times \dots \times S_{n_N}$ описываются наборами $\lambda^{(\cdot)} = (\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(N)})$ разбиений $\lambda^{(k)} = (\lambda_1^{(k)}, \dots, \lambda_{s_k}^{(k)}) \vdash n_k$, где $\lambda_1^{(k)} \geq \dots \geq \lambda_{s_k}^{(k)} > 0$, $\sum_{t=1}^{s_k} \lambda_t^{(k)} = n_k$.*

2) $M_{\lambda^{(\cdot)}} \cong M_{\lambda^{(1)}} \otimes_F \dots \otimes_F M_{\lambda^{(N)}}$, где $M_{\lambda^{(\cdot)}}$ – неприводимый $F(S_{n_1} \times \dots \times S_{n_N})$ -модуль, отвечающий разбиению $\lambda^{(\cdot)}$, $M_{\lambda^{(k)}}$ – неприводимые FS_{n_k} -модули, отвечающие разбиениям $\lambda^{(k)}$.

3) *Кратность вхождения $M_{\lambda^{(\cdot)}}$ в разложение модуля M равна*

$$\dim e_{T_{\lambda^{(\cdot)}}} M = \dim e_{T_{\lambda^{(1)}}} \dots e_{T_{\lambda^{(N)}}} M,$$

где $e_{T_{\lambda}} = \sum_{\sigma \in C_{T_{\lambda}}, \rho \in R_{T_{\lambda}}} (-1)^{\sigma} \rho \sigma$ – симметризатор, отвечающий некоторой таблице Юнга T_{λ} (см. [1; гл. 3, с. 64]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если G и H – конечные группы, то, как известно, всякий неприводимый $F(G \times H)$ -модуль V изоморфен модулю $W \otimes_F Q$, где W – некоторый неприводимый FG -модуль, а Q – некоторый неприводимый FH -модуль. Верно и обратное: всякий такой $F(G \times H)$ -модуль $W \otimes_F Q$ неприводим. Применяя индукцию, получаем пп. 1) и 2).

Справедливость п. 3) вытекает из аналогичного утверждения для представлений группы S_n [1; лемма 4.2, с. 67] и пп. 1) и 2).

Можно указать класс разбиений, которые заведомо не будут встречаться в разложении модуля $B(n_0, n_1, \dots, n_N)$.

ЛЕММА 3. *Пусть фиксировано число k , $1 \leq k \leq N$, и разбиение $\lambda^{(k)} \vdash n_k$, где $\sum_{t=2}^{s_k} \lambda_t^{(k)} \geq p$, а $T_{\lambda^{(k)}}$ – некоторая таблица Юнга. Тогда*

$$e_{T_{\lambda^{(k)}}} B(n_0, n_1, \dots, n_N) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать, что для всякого многочлена $f \in F_0(n_0, n_1, \dots, n_N)$ выполнено $e_{T_{\lambda^{(k)}}} f \in \text{GId}(A)$. Расписав симметризацию по

строчкам таблицы, получим, что $e_{T_{\lambda(k)}} f = f_1 + f_2 + \dots + f_\alpha$, $\alpha \in \mathbb{N}$, и для всякого f_s существуют наборы переменных $X_{s1}, \dots, X_{s\beta_s}$, по каждому из которых многочлен f_s кососимметричен. При этом $X_{s1} \sqcup \dots \sqcup X_{s\beta_s} = \{x_1^{(k)}, \dots, x_{n_k}^{(k)}\}$ и $|X_{sj}| = (\lambda^{(k)})_j^T$ – число клеток в j -м столбце таблицы $T_{\lambda(k)}$. Из элементов базиса Θ в переменные $x_t^{(k)}$ можно подставлять только $e_{vi}^{(m)}$, где $(m, v, i) = \Phi^{-1}(k)$, и элементы радикала, иначе выражение обратится в нуль. В силу косой симметрии в переменные каждого из множеств X_{sj} можно подставлять не более одного $e_{vi}^{(m)}$. Поэтому для того, чтобы многочлен $e_{T_{\lambda(k)}} f$ не обратился в нуль, необходимо подставлять в его переменные не менее $\sum_{j=1}^{\beta_s} (|X_{sj}| - 1) = \sum_{t=2}^{s_k} \lambda_t^{(k)} \geq p$ элементов радикала. Но $J^p = 0$, т.е. и в этом случае многочлен $e_{T_{\lambda(k)}} f$ обращается в нуль.

В доказательстве леммы 4 будет изложен метод, позволяющий переупорядочивать переменные $x_t^{(s)}$ многочленов $f \in F_0(n_0, n_1, \dots, n_N)$ так, что каждая переменная с данным s либо переносится в определенный участок произведения и в этом участке переменные выстраиваются по убыванию индекса t , либо к ней применяется операция $R_t^{(s)}$, суть которой изложена ниже, и при подстановке любой матричной единицы в такую переменную одночлен обращается в нуль. Множество получившихся многочленов будет обозначено через $F_1(n_0, n_1, \dots, n_N)$. Добавим в сигнатуру *фантомы* $\hat{x}_t^{(s)}$ переменных $x_t^{(s)}$, которые указывают позиции для проведения операций $R_t^{(s)}$. При фиксированных значениях s и t операция $R_t^{(s)}$ игнорирует символы $\hat{x}_\beta^{(\alpha)}$ и $x_\beta^{(\alpha)}$ при $(\alpha, \beta) \neq (s, t)$. Пусть $(m, v, i) = \Phi^{-1}(s)$. Тогда на полилинейный одночлен, содержащий $x_t^{(s)}$ и $\hat{x}_t^{(s)}$, операция $R_t^{(s)}$ действует так:

$$R_t^{(s)}(P x_t^{(s)} Q \hat{x}_t^{(s)} T) = P x_t^{(s)} Q e_{vi}^{(m)} T - P e_{vi}^{(m)} Q x_t^{(s)} T$$

(через P , Q и T мы обозначили произведения остальных переменных и элементов базиса Θ^+). Таким образом, подставляя в такой многочлен вместо $x_t^{(s)}$ любой элемент $a \in \Theta \setminus J_{vi}^{(m,m)}$, мы обязательно получим нуль.

Если перед выражением стоит символ $R_t^{(s)}$, то подразумевается, что в обобщенном полилинейном многочлене после него один раз встречается $x_t^{(s)}$ и один раз $\hat{x}_t^{(s)}$.

Теперь формально опишем требуемый вид многочленов с переупорядоченными буквами.

ЛЕММА 4. *Справедливо равенство*

$$\langle F_0(n_0, n_1, \dots, n_N) \rangle_F = \langle F_1(n_0, n_1, \dots, n_N) \rangle_F,$$

где $F_1(n_0, n_1, \dots, n_N)$ – конечное множество полилинейных многочленов вида

$$\begin{aligned} R_{\varepsilon_1}^{(\rho_1)} \dots R_{\varepsilon_w}^{(\rho_w)} & \left(\prod_{\alpha=1}^{\delta} W_\alpha \prod_{v=1}^{k_{\sigma(\alpha)}} \prod_{i=1}^{k_{\sigma(\alpha)}} e_{iv}^{(\sigma(\alpha))} x_{\xi(\alpha, v, i, 1)}^{(\Phi(\sigma(\alpha), v, i))} e_{iv}^{(\sigma(\alpha))} x_{\xi(\alpha, v, i, 2)}^{(\Phi(\sigma(\alpha), v, i))} e_{iv}^{(\sigma(\alpha))} \dots \right. \\ & \times e_{iv}^{(\sigma(\alpha))} x_{\xi(\alpha, v, i, n(\sigma(\alpha), v, i))}^{(\Phi(\sigma(\alpha), v, i))} e_{ii'}^{(\sigma(\alpha))} \left. \right) W_{\delta+1}, \end{aligned} \quad (5)$$

причем

$$1) i' = \begin{cases} 1 & \text{при } i = k_{\sigma(\alpha)}, \\ i + 1 & \text{при } i < k_{\sigma(\alpha)}; \end{cases}$$

2) $\sigma: \{1, \dots, \delta\} \hookrightarrow \{1, \dots, \omega\}$ – некоторое вложение, $\delta \leq \omega$;

3) $\xi(\alpha, v, i, \beta) > \xi(\alpha, v, i, \gamma)$ при $\beta < \gamma$;

4) W_α , где $1 \leq \alpha \leq \delta + 1$, – произведения переменных $x_t^{(s)}$, их фантомов и элементов базиса Θ^+ ;

5) для всякой переменной $x_t^{(s)}$, $1 \leq s \leq N$, либо существуют такие α, β, v, i , что $s = \Phi(\sigma(\alpha), v, i)$ и $t = \xi(\sigma(\alpha), v, i, \beta)$, тогда в (5) фантом $\hat{x}_t^{(s)}$ и символ $R_t^{(s)}$ не встречается, либо к одночлену (5) применяется операция $R_t^{(s)}$, а $x_t^{(s)}$ и $\hat{x}_t^{(s)}$ входят в произведения W_α ;

6) при подстановке произвольного элемента алгебры A_0 вместо любой переменной $x_t^{(s)}$, не встречающейся в (5) в виде $x_{\xi(\sigma(\alpha), v, i, \beta)}^{(\Phi(\sigma(\alpha), v, i))}$, выражение (5) обращается в нуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Элементы множества $F_0(n_0, n_1, \dots, n_N)$ можно привести к виду

$$a_{i_0 v_1}^{(\ell_0, m_1)} (e_{v_1 v_1}^{(m_1)} x_{t_1}^{(s_1)} e_{i_1 i_1}^{(\ell_1)}) a_{i_1 v_2}^{(\ell_1, m_2)} (e_{v_2 v_2}^{(m_2)} x_{t_2}^{(s_2)} e_{i_2 i_2}^{(\ell_2)}) \dots (e_{v_n v_n}^{(m_n)} x_{t_n}^{(s_n)} e_{i_n i_n}^{(\ell_n)}) a_{i_n v_{n+1}}^{(\ell_n, m_{n+1})}, \quad (6)$$

где

$$s_\theta = \begin{cases} \Phi(m_\theta, v_\theta, i_\theta) & \text{при } 1 \leq m_\theta = \ell_\theta \leq \omega, \\ 0 & \text{при } m_\theta \neq \ell_\theta \text{ или } m_\theta = \ell_\theta = 0. \end{cases}$$

для всех $1 \leq \theta \leq n$.

Для того, чтобы доказать лемму, необходимо, по существу, в произвольном одночлене собрать и переупорядочить выражения $e_{vv}^{(m)} x_t^{(s)} e_{ii}^{(m)}$. Это делается следующим образом: находим в последовательности $(\ell_0, m_1, \ell_1, m_2, \dots, \ell_n, m_{n+1})$ первое такое ненулевое число ℓ_θ или m_θ (положим $\sigma(1)$ равным этому числу), что выражение $e_{vv}^{(\sigma(1))} x_t^{(s)} e_{ii}^{(\sigma(1))}$, $s = \Phi(\sigma(1), v, i)$, входит в (6) для некоторых v, i и t . Пусть число u равно самому меньшему α для всех присутствующих в (6) выражений $e_{\alpha\alpha}^{(\sigma(1))} x_\eta^{(\varkappa)} e_{\beta\beta}^{(\sigma(1))}$, γ – самому меньшему β для всех таких выражений с $\alpha = u$; t – самому большому η для таких выражений с $\varkappa = s$, где $s = \Phi(\sigma(1), u, \gamma)$. Если $\sigma(1) = \ell_\theta$, то вставим перед $a_{i_\theta v_{\theta+1}}^{(\ell_\theta, m_{\theta+1})}$ фантом $\hat{x}_t^{(s)}$: $e_{i_\theta u}^{(\ell_\theta)} (e_{uu}^{(\ell_\theta)} \hat{x}_t^{(s)} e_{\gamma\gamma}^{(\ell_\theta)}) e_{\gamma i_\theta}^{(\ell_\theta)} a_{i_\theta v_{\theta+1}}^{(\ell_\theta, m_{\theta+1})}$. Если же $\sigma(1) = m_\theta$, то вставим этот фантом после $a_{i_{\theta-1} v_\theta}^{(\ell_{\theta-1}, m_\theta)}$: $a_{i_{\theta-1} v_\theta}^{(\ell_{\theta-1}, m_\theta)} e_{v_\theta u}^{(m_\theta)} (e_{uu}^{(m_\theta)} \hat{x}_t^{(s)} e_{\gamma\gamma}^{(m_\theta)}) e_{\gamma v_\theta}^{(m_\theta)}$. Далее заменим $\dots \hat{x}_t^{(s)} \dots x_t^{(s)} \dots$ на $(\dots x_t^{(s)} \dots e_{u\gamma}^{(\sigma(1))} \dots) + R_t^{(s)} (\dots \hat{x}_t^{(s)} \dots x_t^{(s)} \dots)$. Аналогично перенесем по порядку остальные выражения алгебры $M_{k_{\sigma(1)}}(F)$, не обращая внимания на переменные, уже связанные операциями $R_t^{(s)}$. Затем рассмотрим следующую алгебру $M_{k_{\sigma(2)}}(F)$, единицы которой стоят правее и т.д.

Нас интересует, как ведут себя кратности неприводимых подмодулей модуля $B(n_0, n_1, \dots, n_N)$ с ростом чисел $n_1, \dots, n_N$.

ЛЕММА 5. Предположим, что заданы начальные наборы чисел $(\tilde{n}_0, \tilde{n}_1, \dots, \tilde{n}_N)$, $\sum_{i=0}^N \tilde{n}_i = \tilde{n}$, и разбиений $\tilde{\lambda}^{(\cdot)} = (\tilde{\lambda}^{(1)}, \dots, \tilde{\lambda}^{(N)})$, $\tilde{\lambda}^{(k)} \vdash \tilde{n}_k$. Пусть $I = \{k \mid \tilde{n}_k \geq 4p, 1 \leq k \leq N\} \neq \emptyset$, $n_k = \tilde{n}_k$ при $k \notin I$, в том числе $n_0 = \tilde{n}_0$,

а при $k \in I$ числа $n_k \geq 4p$ являются переменными, $\lambda_t^{(k)} = \tilde{\lambda}_t^{(k)}$ при $t \geq 2$ или $k \notin I$, $\lambda_1^{(k)} = n_k - \sum_{t=2}^{s_k} \lambda_t^{(k)}$ при $k \in I$,

$$T_{\lambda^{(k)}} = \boxed{\text{числа от 1 до } 2p-1} \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 2p & 2p+1 & \dots & n_k-1 & n_k \\ \hline \end{array}$$

(Полагаем, что любое число в первой строчке таблицы $T_{\lambda^{(k)}}$ больше любого числа из остальных строчек.) Тогда существуют такое число $\varkappa \in \mathbb{Z}_+$ и многочлен $P \in \mathbb{Q}[n_{m_1}, \dots, n_{m_\gamma}] \setminus \{0\}$, где $\{m_1, \dots, m_\gamma\} = I$, что

$$\dim e_{T_{\lambda^{(\cdot)}}} B(n_0, n_1, \dots, n_N) \leq \varkappa$$

для всех наборов $(n_{m_1}, \dots, n_{m_\gamma}) = (n_k)_{k \in I}$, удовлетворяющих условию $n_k \geq \tilde{n}_k$, а при $P(n_{m_1}, \dots, n_{m_\gamma}) \neq 0$ достигается равенство

$$\dim e_{T_{\lambda^{(\cdot)}}} B(n_0, n_1, \dots, n_N) = \varkappa.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Число $\dim e_{T_{\lambda^{(\cdot)}}} B(n_0, n_1, \dots, n_N)$ является рангом системы линейных уравнений

$$\sum_{f \in F_0(n_0, n_1, \dots, n_N)} (\alpha_f e_{T_{\lambda^{(\cdot)}}} f)(a) = 0, \quad a \in \Theta^n, \quad (7)$$

для неопределенных коэффициентов $\alpha_f \in F$ тождеств $\sum_f \alpha_f e_{T_{\lambda^{(\cdot)}}} f$. Строчки матрицы этой системы соответствуют различным подстановкам $a \in \Theta^n$ базисных элементов алгебры A . Если при какой-то подстановке $a \in \Theta^n$ все $e_{T_{\lambda^{(\cdot)}}} f$ обращаются в нуль, то, как и в доказательстве теоремы 3, такое уравнение можно исключить из системы. Кроме того, при фиксированном k многочлены $e_{T_{\lambda^{(\cdot)}}} f$ симметричны по любому множеству переменных $x_t^{(k)}$, индексы t которых лежат в одной той же строчке таблицы $T_{\lambda^{(k)}}$. Поэтому существенно лишь то, какие элементы радикала мы подставляем в переменные соответствующей строчки, так как в остальные переменные этой строчки таблицы $T_{\lambda^{(k)}}$ мы обязаны подставить $e_{vi}^{(m)}$, где $(m, v, i) = \Phi^{-1}(k)$. Число строчек в таблицах $T_{\lambda^{(k)}}$ не меняется, алгебра A конечномерна и при подстановке p и более элементов радикала J все $e_{T_{\lambda^{(\cdot)}}} f$ обращаются в нуль. Отсюда следует, что для определения того, является ли линейная комбинация $\sum_f \alpha_f e_{T_{\lambda^{(\cdot)}}} f$ тождеством, достаточно произвести лишь конечное число подстановок базисных элементов, не зависящее от n_k . Таким образом, число строчек в матрице системы (7) постоянно. Ранг системы не превосходит числа строчек в матрице, поэтому $\dim e_{T_{\lambda^{(\cdot)}}} B(n_0, n_1, \dots, n_N)$ – ограниченная целочисленная функция переменных n_k , $k \in I$. Отсюда следует, что существует набор $(n_0^0, n_1^0, \dots, n_N^0)$, на котором она достигает максимума $\varkappa$. Первая часть утверждения доказана.

В силу леммы 4 можно заменить в (7) область суммирования $F_0(n_0, n_1, \dots, n_N)$ на $F_1(n_0, n_1, \dots, n_N)$. Пусть $f_1^0, f_2^0, \dots, f_\varkappa^0 \in F_1(n_0^0, n_1^0, \dots, n_N^0)$ – такие одночлены, что $e_{T_{\lambda^{(\cdot)}}} f_1^0, e_{T_{\lambda^{(\cdot)}}} f_2^0, \dots, e_{T_{\lambda^{(\cdot)}}} f_\varkappa^0$ линейно независимы по модулю $\text{GId}(A)$. Пусть $\ell \in \mathbb{N}$, T_μ – таблица Юнга, отвечающая разбиению $\mu \vdash \ell$. Тогда $e_{T_\mu} = a_{T_\mu} b_{T_\mu}$, где $a_{T_\mu} = \sum_{\rho \in R_{T_\mu}} \rho$, $b_{T_\mu} = \sum_{\sigma \in C_{T_\mu}} (-1)^\sigma \sigma$, R_{T_μ} – строчный, а C_{T_μ} – столбцовый стабилизаторы таблицы T_μ . Положим

$$a_{T_{\lambda^{(\cdot)}}} = a_{T_{\lambda^{(1)}}} \cdots a_{T_{\lambda^{(N)}}}, \quad b_{T_{\lambda^{(\cdot)}}} = b_{T_{\lambda^{(1)}}} \cdots b_{T_{\lambda^{(N)}}}.$$

В этих обозначениях $e_{T_{\lambda(\cdot)}} = a_{T_{\lambda(\cdot)}} b_{T_{\lambda(\cdot)}}$. Заметим, что в силу п. 6) леммы 4 число переменных $x_t^{(s)}$, по которым применяются операции $R_t^{(s)}$, не превосходит $p - 1$. Кроме того, в силу строения таблиц $T_{\lambda(\cdot)}$ элемент $b_{T_{\lambda(\cdot)}}$ оставляет неподвижными $x_t^{(s)}$ при $t \geq 2p$. Поэтому можно считать, что для всякой переменной $x_t^{(s)}$, где $t \geq 3p$, $s \in I$, $1 \leq k \leq \varkappa$, существует $\beta \in \mathbb{N}$ такое, что в представлении (5) многочлена f_k^0 выполняется равенство $\xi(\sigma^{-1}(m), v, i, \beta) = t$, где $(m, v, i) = \Phi^{-1}(s)$. Иными словами, во всяком f_k^0 такие переменные упорядочены:

$$e_{iv}^{(s)} x_{n_s^0}^{(s)} e_{iv}^{(s)} x_{n_{s-1}^0}^{(s)} e_{iv}^{(s)} \dots e_{iv}^{(s)} x_{3p}^{(s)} e_{iv}^{(s)}.$$

Для каждого из f_k^0 определим $f_k \in F_1(n_0, n_1, \dots, n_N)$, получающийся добавлением в такие участки (назовем их участками $x_{\xi(\cdot)}^{(\cdot)}$) новых букв или удалением старых: $e_{iv}^{(s)} x_{n_s}^{(s)} e_{iv}^{(s)} x_{n_{s-1}}^{(s)} e_{iv}^{(s)} \dots e_{iv}^{(s)} x_{3p}^{(s)} e_{iv}^{(s)}$. Исследуем теперь линейные зависимости между $e_{T_{\lambda(\cdot)}} f_1, \dots, e_{T_{\lambda(\cdot)}} f_{\varkappa}$ (обозначим новые разбиения также через $\lambda(\cdot)$). Во-первых, для каждого s восстановим при помощи операций $R_t^{(s)}$ упорядочение переменных $x_{\xi(\cdot)}^{(s)}$ по убыванию нижних индексов в многочленах $b_{T_{\lambda(\cdot)}} f_1, \dots, b_{T_{\lambda(\cdot)}} f_{\varkappa}$ и $b_{T_{\lambda(\cdot)}} f_1^0, \dots, b_{T_{\lambda(\cdot)}} f_{\varkappa}^0$. (Это упорядочение могло нарушиться под действием $b_{T_{\lambda(\cdot)}}$). Тогда слагаемые в $b_{T_{\lambda(\cdot)}} f_k$ будут соответствовать слагаемым в $b_{T_{\lambda(\cdot)}} f_k^0$. Затем произведем фиксированную подстановку элементов базиса Θ в переменные многочленов $e_{T_{\lambda(\cdot)}} f_k$ и $e_{T_{\lambda(\cdot)}} f_k^0$. В силу симметрии можно считать, что элементы радикала подставляются в $x_t^{(s)}$, где $s \in I$, только при $t < 2p$. Таким образом, в добавленные переменные $x_t^{(s)}$ подставляются $e_{vi}^{(m)}$. После симметризации $a_{T_{\lambda(\cdot)}}$ и подстановки элементов из Θ в многочленах $e_{T_{\lambda(\cdot)}} f_k$ и $e_{T_{\lambda(\cdot)}} f_k^0$ опять окажутся одинаковые слагаемые, но уже с разными коэффициентами, так как симметризация производится по разному количеству букв. Определим для каждого из получившихся слагаемых числа η_s и β_s , $1 \leq s \leq N$. Пусть β_s — число элементов радикала, подставленных в те переменные первой строчки таблицы $T_{\lambda(s)}$, которые после действия симметризатора $a_{T_{\lambda(s)}}$ оказались на участке $x_{\xi(\cdot)}^{(s)}$, а η_s — число элементов радикала, которые были подставлены во все переменные первой строчки плюс число клеток в остальных строчках таблицы $T_{\lambda(s)}$. Итак, сгруппируем все слагаемые, получившиеся после действия элемента $a_{T_{\lambda(s)}}$, у которых одинаковые наборы η_s, β_s , одинаковые участки W_α , одинаковое расположение переменных нижних строчек таблицы $T_{\lambda(s)}$ и те переменные первой строчки, в которые подставляются элементы радикала, идут в одинаковом порядке. Число таких слагаемых равно числу способов расставить буквы первых строчек таблиц $T_{\lambda(\cdot)}$, в которые подставляются матричные единицы, внутри ящиков, где s -й ящик имеет β_s перегородок, т.е. это число равно $\prod_{s \in I} (n_s - \eta_s + \beta_s)! / \beta_s!$, причем группируемые одночлены принимают при данной подстановке одинаковые значения. Отсюда получаем, что если мы запишем матрицу системы

$$\sum_{k=1}^{\varkappa} (\alpha_k e_{T_{\lambda(\cdot)}} f_k)(a) = 0, \quad a \in \Theta^n,$$

для неопределенных коэффициентов $\alpha_k \in F$ тождеств $\sum_{k=1}^{\varkappa} \alpha_k e_{T_{\lambda(\cdot)}} f_k$ и исключим заведомо нулевые строчки, то элементы такой матрицы будут линейными

комбинациями выражений $\prod_{s \in I} (n_s - \eta_s + \beta_s)! / \beta_s!$, где $0 \leq \eta_s, \beta_s < 2p$. Поделив каждую строчку на $\prod_{s \in I} (n_s - 2p)!$, мы получим матрицу, миноры которой являются многочленами от переменных n_s , $s \in I$. Один из миноров порядка $\varkappa$ в этой матрице при $(n_{m_1}, \dots, n_{m_\gamma}) = (n_{m_1}^0, \dots, n_{m_\gamma}^0)$ не равен нулю, т.е. не является тождественным нулем. Обозначим этот минор через P_0 . Выберем в F базис $(\mu_\eta)_{\eta \in \Lambda}$ над полем $\mathbb{Q}$. Пусть

$$P_0(n_{m_1}, \dots, n_{m_\gamma}) = \sum_{\eta \in \Lambda} P_\eta(n_{m_1}, \dots, n_{m_\gamma}) \mu_\eta,$$

$$P_\eta(n_{m_1}, \dots, n_{m_\gamma}) \in \mathbb{Q}[n_{m_1}, \dots, n_{m_\gamma}].$$

Среди $P_\eta(n_{m_1}, \dots, n_{m_\gamma})$ существует ненулевой многочлен. Обозначим его через $P(n_{m_1}, \dots, n_{m_\gamma})$. Тогда при $P(n_{m_1}, \dots, n_{m_\gamma}) \neq 0$ многочлены

$$e_{T_{\lambda(\cdot)}} f_1, \quad \dots, \quad e_{T_{\lambda(\cdot)}} f_\varkappa$$

линейно независимы по модулю тождеств. Отсюда

$$\dim e_{T_{\lambda(\cdot)}} B(n_0, n_1, \dots, n_N) = \varkappa.$$

ТЕОРЕМА 4. *Для обобщенных коразмерностей любой конечномерной ассоциативной алгебры A над полем F , $\text{char } F = 0$, справедлива гипотеза А. Ревега: существуют такие числа $C \in \mathbb{Q}_+$ и $t \in \mathbb{Z}_+$, что $gc_n(A) \sim Cn^t d^n$ при $n \rightarrow \infty$, где $d = PI \exp(A)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 3 в разложение модуля $B(n_0, n_1, \dots, n_N)$ входят неприводимые подмодули, отвечающие только тем диаграммам, число клеток в нижних строчках которых не превосходит $p - 1$. Число различных вариантов строения нижних строчек таких диаграмм конечно, а кратность подмодуля, отвечающего каждому набору диаграмм определяется по формуле п. 3) леммы 2, т.е. описывается леммой 5. Кроме того, $B(n_0, n_1, \dots, n_N) = 0$ при $n_0 \geq p$. Поэтому при $n > 4p(N + 1)$ выражение (4) можно превратить в сумму конечного числа слагаемых вида

$$\zeta_1(n) = \sum_{(n_{m_1}, \dots, n_{m_\gamma})} \binom{n}{n_1, \dots, n_N} \left(\dim e_{T_{\lambda(\cdot)}} B \left(n - \sum_{s=1}^N n_s, n_1, \dots, n_N \right) \right) \\ \times (\dim M_{\lambda(1)}) \cdots (\dim M_{\lambda(N)}).$$

Суммирование ведется по всем $n_{m_i} \geq 4p$, $\sum_{i=1}^\gamma n_{m_i} = n - \ell_1$, а множество $I = \{m_1, \dots, m_\gamma\}$, число ℓ_1 и значения $n_k \leq 4p$ для всех $k \notin I$ в конкретном слагаемом ζ_1 фиксированы. В силу теоремы 3 достаточно доказать, что всякое $\zeta_1(n) \sim Cn^t \gamma^n$, $C \in \mathbb{Q}_+$ и $t \in \mathbb{Z}_+$. Мы предполагаем, что в данном случае число $\varkappa$ из леммы 5 отлично от нуля, так как иначе $\zeta_1(n) = 0$.

По формуле крюков числа $\dim M_{\lambda(k)}$ при фиксированных нижних строчках диаграмм являются многочленами от n_k , поэтому

$$\zeta_1(n) = \sum_{(n_{m_1}, \dots, n_{m_\gamma})} \binom{n}{n_{m_1}, \dots, n_{m_\gamma}} P_1(n_{m_1}, \dots, n_{m_\gamma}) \dim e_{T_{\lambda(\cdot)}} B(\cdot),$$

$P_1 \in \mathbb{Q}[n_{m_1}, \dots, n_{m_\gamma}]$. Выражения $x!/(x-s)!$, где $s \in \mathbb{Z}_+$, образуют базис в $\mathbb{Q}[x]$, поэтому

$$P_1(n_{m_1}, \dots, n_{m_\gamma}) = \sum_{(s_1, \dots, s_\gamma)} \alpha_{s_1, \dots, s_\gamma} \frac{n_{m_1}! \cdots n_{m_\gamma}!}{(n_{m_1} - s_1)! \cdots (n_{m_\gamma} - s_\gamma)!}, \quad \alpha_{s_1, \dots, s_\gamma} \in \mathbb{Q}.$$

Подставим это в выражение для $\zeta_1(n)$ и, учитывая, что

$$\frac{n_{m_1}! \cdots n_{m_\gamma}!}{(n_{m_1} - s_1)! \cdots (n_{m_\gamma} - s_\gamma)!} \binom{n}{n_{m_1}, \dots, n_{m_\gamma}} = \binom{n - \ell_2}{n_{m_1} - s_1, \dots, n_{m_\gamma} - s_\gamma} \frac{n!}{(n - \ell_2)!},$$

где $\ell_2 = \ell_1 + \sum_{k=1}^\gamma s_k$, произведем в каждом из слагаемых замену переменных $(n_{m_i} - s_i) \mapsto n_{m_i}$. Тогда в силу леммы 5 функция $\zeta_1(n)$ есть конечная сумма выражений вида

$$\zeta_2(n) = P_2(n) \sum_{(n_{m_1}, \dots, n_{m_\gamma})} \binom{n - \ell_2}{n_{m_1}, \dots, n_{m_\gamma}} g(n_{m_1}, \dots, n_{m_\gamma}),$$

где $P_2 \in \mathbb{Q}[n]$, функция g принимает целые значения от нуля до $\varkappa$, причем при $P_3(n_{m_1}, \dots, n_{m_\gamma}) \neq 0$ ее значение равно $\varkappa$. Здесь $P_3 \in \mathbb{Q}[n_{m_1}, \dots, n_{m_\gamma}] \setminus \{0\}$ – фиксированный многочлен. Отбрасывая слагаемые порядка $o(\gamma^n)$, можно считать, что суммирование ведется по всем $n_{m_i} \geq 0$, $\sum_{i=1}^\gamma n_{m_i} = n - \ell_2$.

Заметим, что выражение

$$P_2(n) \sum_{(n_{m_1}, \dots, n_{m_\gamma})} \binom{n - \ell_2}{n_{m_1}, \dots, n_{m_\gamma}} \varkappa = \varkappa P_2(n) \gamma^{n - \ell_2}$$

имеет нужную асимптотику. Таким образом, для завершения доказательства достаточно показать, что

$$\tau(n) = \sum_{P_3(n_{m_1}, \dots, n_{m_\gamma})=0} \binom{n - \ell_2}{n_{m_1}, \dots, n_{m_\gamma}} = o(\gamma^n), \quad n \rightarrow \infty. \quad (8)$$

Тогда отсутствие слагаемых, отвечающих тем $(n_{m_1}, \dots, n_{m_\gamma})$, для которых $P_3(n_{m_1}, \dots, n_{m_\gamma}) = 0$ и, возможно, $g(n_{m_1}, \dots, n_{m_\gamma}) < \varkappa$, не повлияет на асимптотику выражения $\zeta_2(n)$.

Пусть $\deg P_3 = r$. При $\gamma = 1$ многочлен P_3 имеет конечное число корней. Обозначим через h_1 максимальный вещественный корень. Тогда $\tau(n) = 0$ для всех $n > h_1$. При $\gamma = 2$ существует такое $\hat{n} \in \mathbb{N}$, что при фиксированном $n \geq \hat{n}$ не более r пар (n_{m_1}, n_{m_2}) , $n_{m_1} + n_{m_2} = n - \ell_2$, удовлетворяют уравнению $P_3(n_{m_1}, n_{m_2}) = 0$. Учитывая, что самый большой биномиальный коэффициент в зависимости от четности числа $k \in \mathbb{N}$ равен либо $\binom{k}{k/2}$, либо $\binom{k}{(k-1)/2}$ и при $k \rightarrow \infty$ эквивалентен $2^k \sqrt{2}/\sqrt{\pi k}$, то формула (8) верна и при $\gamma = 2$.

Пусть теперь $\gamma \geq 3$. Выразим n_{m_γ} из равенства $\sum_{i=1}^\gamma n_{m_i} = n - \ell_2$. Положим $P_4(n, n_{m_1}, \dots, n_{m_{\gamma-1}}) = P_3(n_{m_1}, \dots, n_{m_\gamma})$. Тогда при фиксированном n и наборе $(n_{m_1}, \dots, n_{m_{\gamma-2}})$ уравнение $P_4(n, n_{m_1}, \dots, n_{m_{\gamma-1}}) = 0$ либо имеет не более r корней $n_{m_{\gamma-1}}$, либо его все его коэффициенты при степенях переменной $n_{m_{\gamma-1}}$ равны нулю. Если $n_{m_{\gamma-1}}$ входит в P_4 , то хотя бы один из этих коэффициентов, например, $P_5(n, n_{m_1}, \dots, n_{m_{\gamma-2}})$, не является тождественным нулем. Если $n_{m_{\gamma-1}}$

не входит в P_4 , то положим $P_5(n, n_{m_1}, \dots, n_{m_{\gamma-2}}) = P_4(n, n_{m_1}, \dots, n_{m_{\gamma-1}})$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \tau(n) \leq r \sum_{(n_{m_1}, \dots, n_{m_{\gamma-2}})} \max_{n_{m_{\gamma-1}}} \binom{n - \ell_2}{n_{m_1}, \dots, n_{m_{\gamma}}} \\ + \sum_{n_{m_{\gamma-1}}, P_5(n, n_{m_1}, \dots, n_{m_{\gamma-2}}) = 0} \binom{n - \ell_2}{n_{m_1}, \dots, n_{m_{\gamma}}}. \end{aligned}$$

Аналогично, в P_5 будем выражать $n_{m_{\gamma-2}}$ через $n, n_{m_1}, \dots, n_{m_{\gamma-3}}$. Опять будет либо не более r корней, либо все коэффициенты многочлена $P_5(n, n_{m_1}, \dots, n_{m_{\gamma-2}})$ при степенях переменной $n_{m_{\gamma-2}}$ обратятся в нуль. Если один из этих коэффициентов не тождественный нуль, то положим P_6 равным этому коэффициенту. В противном случае P_5 не зависит от $n_{m_{\gamma-2}}$ и тогда положим $P_6 = P_5$. Точно так же поступаем и с P_6 и т.д. Заметим, что каждый следующий многочлен будет зависеть от меньшего числа переменных. В конце концов коэффициенты будут зависеть только от n , т.е. при достаточно больших n они нигде не будут обращаться в нуль. Отсюда

$$\begin{aligned} \tau(n) \leq r \sum_{j=1}^{\gamma-1} \sum_{(n_{m_1}, \dots, n_{m_{j-1}}, n_{m_{j+1}}, \dots, n_{m_{\gamma-1}})} \max_{n_{m_j}} \binom{n - \ell_2}{n_{m_1}, \dots, n_{m_{\gamma}}} \\ = r(\gamma - 1) \sum_{(n_{m_2}, \dots, n_{m_{\gamma-1}})} \max_{n_{m_1}} \binom{n - \ell_2}{n_{m_1}, \dots, n_{m_{\gamma}}}. \end{aligned}$$

Поэтому, полагая $k = n - \ell_2 - \sum_{j=2}^{\gamma-1} n_{m_j}$ и группируя слагаемые с общим k , получим, что

$$\tau(n) \leq r(\gamma - 1) \sum_{k=0}^{n-\ell_2} b_k, \quad (9)$$

где

$$b_k = \binom{n - \ell_2}{k} (\gamma - 2)^{n-\ell_2-k} \max_{n_{m_1}} \binom{k}{n_{m_1}}.$$

Выясним, при каких k выполнено неравенство $b_{k+1} \geq b_k$. В силу того, что

$$b_k = \begin{cases} (\gamma - 2)^{n-\ell_2-k} \frac{(n - \ell_2)!}{(n - \ell_2 - k)! (k/2)! (k/2)!} & \text{при } k = 2s, \\ (\gamma - 2)^{n-\ell_2-k} \frac{(n - \ell_2)!}{(n - \ell_2 - k)! ((k+1)/2)! ((k-1)/2)!} & \text{при } k = 2s + 1, \end{cases}$$

при $k = 2s$ условие

$$\frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{n - \ell_2 - k}{(\gamma - 2)(k/2 + 1)} \geq 1$$

равносильно условию

$$k \leq \frac{2}{\gamma} (n - \ell_2) - 2 \frac{\gamma - 2}{\gamma},$$

а при $k = 2s + 1$ условие

$$\frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{n - \ell_2 - k}{(\gamma - 2)(k + 1)/2} \geq 1$$

равносильно условию

$$k \leq \frac{2}{\gamma}(n - \ell_2) - \frac{\gamma - 2}{\gamma}.$$

Заметим, что на отрезке

$$\left[\frac{2(n - \ell_2)}{\gamma} - \frac{2(\gamma - 2)}{\gamma}; \frac{2(n - \ell_2)}{\gamma} - \frac{\gamma - 2}{\gamma} \right]$$

содержится не более одного целого числа. Пусть $\nu = \lceil 2(n - \ell_2)/\gamma - 2(\gamma - 2)/\gamma \rceil$. Если $\nu = 2s + 1 < 2(n - \ell_2)/\gamma - (\gamma - 2)/\gamma$, $s \in \mathbb{Z}$, то положим $k_0 = \nu + 1$, иначе положим $k_0 = \nu$. Тогда $b_i < b_j$ при $i < j \leq k_0$ и $b_i \geq b_j$ при $k_0 \leq i < j$.

Пусть $k = k(n)$ – такая функция, что $|k - \alpha n| \leq \beta$ при $n \in \mathbb{N}$. Здесь $0 < \alpha < 1$ и $\beta > 0$ – фиксированные числа. Для $f \geq 0$ и $g > 0$ будем писать $f \lesssim g$, если $0 \leq \limsup(f/g) \leq 1$. Тогда

$$\begin{aligned} b_k &\sim \binom{n - \ell_2}{k} (\gamma - 2)^{n - \ell_2 - k} \frac{2^k \sqrt{2}}{\sqrt{\pi k}} = \frac{(n - \ell_2)!}{(n - \ell_2 - k)! k!} (\gamma - 2)^{n - \ell_2 - k} \frac{2^k \sqrt{2}}{\sqrt{\pi k}} \\ &\sim \sqrt{\frac{2\pi(n - \ell_2)}{2\pi(n - \ell_2 - k) \cdot 2\pi k}} \cdot \frac{(n - \ell_2)^{n - \ell_2}}{(n - \ell_2 - k)^{n - \ell_2 - k} k^k} (\gamma - 2)^{n - \ell_2 - k} \frac{2^k \sqrt{2}}{\sqrt{\pi k}} \\ &\lesssim \frac{1}{\pi \sqrt{(1 - \alpha)\alpha n}} \cdot \frac{n^{n - \ell_2} (\gamma - 2)^{(1 - \alpha)n - \ell_2 + \beta}}{((1 - \alpha)n - \beta)^{n - \ell_2 - k} (\alpha n - \beta)^k} \frac{2^{\alpha n + \beta}}{\sqrt{\alpha n - \beta}} \\ &\sim \frac{1}{\pi \sqrt{(1 - \alpha)\alpha n}} \cdot \frac{(\gamma - 2)^{(1 - \alpha)n - \ell_2 + \beta}}{((1 - \alpha) - \beta/n)^{n - \ell_2 - k} (\alpha - \beta/n)^k} \frac{2^{\alpha n + \beta}}{\sqrt{\alpha n}} \\ &\lesssim \frac{2^\beta (\gamma - 2)^{\beta - \ell_2}}{\pi \alpha n \sqrt{1 - \alpha}} \\ &\quad \times \frac{((\gamma - 2)^{1 - \alpha} 2^\alpha)^n}{(1 - \alpha)^{(1 - \alpha)n - \ell_2 + \beta} (1 - \beta/((1 - \alpha)n))^{(1 - \alpha)n} \alpha^{\alpha n + \beta} (1 - \beta n/\alpha)^{\alpha n}} \\ &\sim \frac{\delta(\alpha, \beta)}{n} \left(\left(\frac{\gamma - 2}{1 - \alpha} \right)^{1 - \alpha} \left(\frac{2}{\alpha} \right)^\alpha \right)^n, \end{aligned}$$

где

$$\delta(\alpha, \beta) = \frac{(2e^2)^\beta (\gamma - 2)^{\beta - \ell_2}}{\pi \alpha^{\beta + 1} (1 - \alpha)^{\beta - \ell_2 + 1/2}} > 0.$$

Аналогично,

$$b_k \gtrsim \frac{\delta(\alpha, -\beta)}{n} \left(\left(\frac{\gamma - 2}{1 - \alpha} \right)^{1 - \alpha} \left(\frac{2}{\alpha} \right)^\alpha \right)^n.$$

В силу того, что

$$\left| k_0 - \frac{2n}{\gamma} \right| \leq \frac{2\ell_2}{\gamma} + 3 = \beta_1,$$

получаем, что

$$\delta\left(\frac{2}{\gamma}, -\beta_1\right) \frac{\gamma^n}{n} \lesssim b_{k_0} \lesssim \delta\left(\frac{2}{\gamma}, \beta_1\right) \frac{\gamma^n}{n}.$$

Зафиксируем число μ , $0 < \mu < \min(2/\gamma, 1 - 2/\gamma)$, и положим $k_+ = k_0 + \lfloor \mu n \rfloor$, $k_- = k_0 - \lfloor \mu n \rfloor$. Тогда

$$\left| k_+ - \left(\frac{2}{\gamma} + \mu \right) n \right| \leq \frac{2\ell_2}{\gamma} + 4, \quad \left| k_- - \left(\frac{2}{\gamma} - \mu \right) n \right| \leq \frac{2\ell_2}{\gamma} + 4.$$

Исследуем зависимость основания степенной функции в формуле для b_k от параметра α :

$$\begin{aligned} \left(\left(\frac{\gamma-2}{1-\alpha} \right)^{1-\alpha} \left(\frac{2}{\alpha} \right)^\alpha \right)' &= (e^{(1-\alpha)(\ln(\gamma-2)-\ln(1-\alpha))+\alpha(\ln 2-\ln \alpha)})' \\ &= (-\ln(\gamma-2) + \ln(1-\alpha) + \ln 2 - \ln \alpha) e^{(1-\alpha)(\ln(\gamma-2)-\ln(1-\alpha))+\alpha(\ln 2-\ln \alpha)}. \end{aligned}$$

При $\alpha < 2/\gamma$ основание растет, при $\alpha > 2/\gamma$ убывает. Отсюда $b_{k_+} = o(b_{k_0})$ и $b_{k_-} = o(b_{k_0})$ при $n \rightarrow \infty$.

Оценивая каждое слагаемое в (9) сверху, получим, что

$$\begin{aligned} \tau_1(n) &\leq r(\gamma-1)(2[\mu n]b_{k_0} + (n-\ell_2+1)b_{k_+} + (n-\ell_2+1)b_{k_-}) \\ &\lesssim 2r(\gamma-1)\delta\left(\frac{2}{\gamma}, \beta_1\right) \cdot \mu\gamma^n \end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$ для всех $0 < \mu < \min(2/\gamma, 1-2/\gamma)$. Таким образом, $\tau_1(n) = o(\gamma^n)$ и $\zeta_1(n)$ имеет требуемую асимптотику.

Список литературы

- [1] A. Giambruno, M. Zaicev, *Polynomial identities and asymptotic methods*, Math. Surveys Monogr., **122**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.
- [2] A. Berele, A. Regev, “Asymptotic behaviour of codimensions of p. i. algebras satisfying Capelli identities”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **360**:10 (2008), 5155–5172.
- [3] V. Drensky, “Relations for the cocharacter sequences of T -ideals”, *Proceedings of the International Conference on Algebra, Part 2* (Novosibirsk, 1989), Contemp. Math., **131**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992, 285–300.
- [4] А. С. Гордиенко, “Гипотеза Реева и кохарактеры тождеств ассоциативных алгебр PI-экспоненты 1 и 2”, *Матем. заметки*, **83**:6 (2008), 815–824; англ. пер.: A. S. Gordienko, “The Regev conjecture and cocharacters for identities of associative algebras of PI-exponent 1 and 2”, *Math. Notes*, **83**:5–6 (2008), 744–752.
- [5] K. I. Beidar, W. S. Martindale, A. V. Mikhalev, *Rings with generalized identities*, Monogr. Textbooks Pure Appl. Math., **196**, Dekker, New York, 1996.
- [6] A. Regev, “Codimensions and trace codimensions of matrices are asymptotically equal”, *Israel J. Math.*, **47**:2–3 (1984), 246–250.

А. С. Гордиенко (A. S. Gordienko)

Механико-математический факультет Московского
государственного университета им. М. В. Ломоносова
E-mail: gordienko_a_s@mail.ru

Поступила в редакцию
25.06.2008 и 10.07.2009