Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. Л. Козлов, В. А. Чатырко, Топологические группы преобразований и бикомпакты Дугунджи, *Матем. сб.*, 2010, том 201, номер 1, 103–128

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm6387>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 17:45:27

УДК 515.122.4+515.122.536

К. Л. Козлов, В. А. Чатырко

Топологические группы преобразований и бикомпакты Дугунджи

Присутствие на пространстве алгебраической структуры, согласованной с его топологией, налагает в ряде случаев весьма сильные ограничения на свойства самого пространства. В работе выявляются условия, которым должны удовлетворять действия, чтобы фазовое пространство было d -пространством (бикомпактом Дугунджи). Проводимое исследование позволяет существенно расширить круг G -пространств, являющихся d -пространствами (бикомпактами Дугунджи). Показано, что реализация всех известных авторам случаев, когда G -пространство (топологическая группа, ее факторпространство) является d -пространством, осуществляется с использованием эквивариантных отображений.

Библиография: 39 названий.

Ключевые слова: G -пространство, топологическая группа, бикомпакт Дугунджи, d -пространство, равномерная структура.

§ 1. Введение

Понятие бикомпакта Дугунджи, введенное А. Пелчинским [1], оказалось весьма полезным и привело к появлению новых методов в общей топологии. Так, Р. Хейдон [2] показал, что всякий бикомпакт Дугунджи является диадическим бикомпактом, класс которых П. С. Александров определил как непрерывные образы обобщенных канторовых дисконтинуумов. А используемое им представление произвольного бикомпакта Дугунджи в виде предела трансфинитного обратного спектра, короткие проекции которого открыты и имеют метризуемые ядра, показывает, что любая бикомпактная топологическая группа является бикомпактом Дугунджи в силу наличия ее разложения в ряд Ли, построенного Л. С. Понтрягиным. Дальнейшее развитие спектральный метод исследования бикомпактов получил в работах Е. В. Щепина [3]–[5]. Анализ характеристики бикомпактов Дугунджи, предложенный Щепиным [3], позволил В. В. Успенскому [6] определить d -пространства (od -пространства) как классы не бикомпактных пространств, соответствующих классу бикомпактов Дугунджи. Введенное понятие позволило рассматривать с единой точки зрения топологические группы, произведения пространств со счетной сетью и бикомпакты Дугунджи.

Еще в конце 50-х годов XX века Л. Н. Ивановский [7] и В. И. Кузьминов [8], отвечая на вопрос П. С. Александрова, установили, что пространство бикомпактной топологической группы является диадическим бикомпактом. Позже

Работа выполнена при поддержке Шведской Королевской академии наук. Работа первого автора поддержана Министерством образования и науки Российской Федерации (грант № РНП 2.1.1.7988, “Современная дифференциальная геометрия, топология и их приложения”).

М. М. Чобан [9] доказал, что всякий G_δ -бикомпакт в произвольной топологической группе или факторпространстве почти метризуемой группы по ее замкнутой подгруппе является диадическим. Б. А. Пасынков [10] усилил результаты Чобана, установив, что бикомпакты в рассмотренных случаях являются бикомпактами Дугунджи.

Как эти, так и целая серия других фактов показывают, что присутствие на пространстве алгебраической структуры, согласованной с его топологией, налагает в ряде случаев весьма сильные ограничения на свойства самого пространства: в частности, то, что всякая топологическая группа или ее факторпространство являются G -пространствами (действие группы на себе левыми сдвигами), а при непрерывном и транзитивном действии бикомпактной группы фазовое пространство является диадическим бикомпактом, послужило основой для постановки А. В. Архангельским [11] следующей общей задачи. Пусть на топологическом пространстве непрерывно действует топологическая группа из некоторого класса. Как это сказывается на свойствах пространства? Им же была высказана и конкретная гипотеза: если на бикомпакте непрерывно и транзитивно действует σ -компактная группа, то этот бикомпакт диадичен. Дальнейшие исследования, связанные в первую очередь с выделением классов групп, транзитивные действия которых гарантируют, что фазовое пространство является d -пространством (od -пространством), привели к следующим результатам.

Любая топологическая группа – od -пространство [6]; бикомпактное факторпространство группы по равномерной [12] подгруппе – бикомпакт Дугунджи [13].

Факторпространство $\aleph_0$ -уравновешенной группы [14] – od -пространство [6]; в частности, если оно бикомпактно, то является бикомпактом Дугунджи [15], если псевдокомпактно, то его стоун-чеховская бикомпактификация – бикомпакт Дугунджи [6].

Псевдокомпактное G -пространство с транзитивным действием $\aleph_0$ -ограниченной группы [16] – d -пространство, а его стоун-чеховская бикомпактификация – бикомпакт Дугунджи [6]; в частности, если оно бикомпактно, то является бикомпактом Дугунджи [15].

Все рассматриваемые транзитивные действия обладают тем свойством, что они фактически определяют топологию фазового пространства. Целью настоящей работы и стало изучение действий, которые названы *открытыми* (d -открытыми). В частности, показано, что в случае этих специальных действий можно, во-первых, рассматривать лишь эквивариантные отображения при построении необходимых систем согласованных отображений и, во-вторых, класс групп, непрерывные d -открытые действия которых гарантируют, что фазовое пространство является d -пространством (бикомпактом Дугунджи), может быть расширен до класса $\aleph_0$ -уравновешенных групп. Класс $\aleph_0$ -уравновешенных групп содержит $\aleph_0$ -ограниченные группы, группы с инвариантным базисом, метризуемые группы. Отметим, что транзитивное действие метризуемой группы на бикомпакте не гарантирует, что он является бикомпактом Дугунджи. Это тривиальным образом вытекает из существования однородного не диадического бикомпакта (например, пространства “две стрелки Александрова”).

Если не оговорено противное, то все рассматриваемые пространства предполагаются тихоновскими, а отображения – непрерывными. Для подмножества A

множества $\text{int } A$, $\text{cl } A$ являются его внутренностью и замыканием соответственно. Счетность множества означает также и не более чем счетность. Через $H < G$ обозначаем замкнутую подгруппу топологической группы G .

Под действием группы G на множестве X понимается отображение $\alpha: G \times X \rightarrow X$ такое, что $\alpha(e, x) = x$, $\alpha(g, \alpha(h, x)) = \alpha(gh, x)$ для любых $x \in X$, $g, h \in G$ (e – единица группы G). Через $\alpha_x: G \rightarrow X$, $x \in X$, и $\alpha^g: X \rightarrow X$, $g \in G$, обозначим отображения, определенные по правилам $\alpha_x(g) = \alpha(g, x) = \alpha^g(x)$. Если ясно, о каком действии идет речь, то будем писать $\alpha(g, x) := gx$. Для $S \subset G$ и $Y \subset X$ положим $SY = \{gx : g \in S, x \in Y\}$. Для семейства подмножеств $\gamma = \{O_\alpha : \alpha \in A\}$ и $g \in G$ положим $g\gamma = \{gO_\alpha : \alpha \in A\}$. Покрытие $\gamma = \{O_\alpha : \alpha \in A\}$ инвариантно, если $g\gamma = \gamma$. Семейство покрытий $\Gamma = \{\gamma_s : s \in S\}$ называется *инвариантным*, если $g\gamma_s \in \Gamma$ для любых $s \in S$, $g \in G$. Для покрытия $\gamma = \{O_\alpha : \alpha \in A\}$ множества Y и отображения $f: X \rightarrow Y$ положим $f^{-1}\gamma = \{f^{-1}O_\alpha : \alpha \in A\}$.

Для топологической группы G через $N_G(e)$ обозначается семейство открытых окрестностей ее единицы. Действием топологической группы G на пространстве X называем действие группы G на множестве X , при котором отображение $\alpha^g: X \rightarrow X$ непрерывно (гомеоморфизм) при любом $g \in G$. Под (раздельно) непрерывным действием топологической группы G на пространстве X понимается (раздельно) непрерывное действие $\alpha: G \times X \rightarrow X$ топологической группы G на пространстве X . Отметим, что раздельная непрерывность действия эквивалентна непрерывности отображений α_x и α^g при любых $x \in X$ и $g \in G$ соответственно. Пространство X с фиксированным непрерывным действием $\alpha: G \times X \rightarrow X$ топологической группы G называется *G-пространством*.

Понятия инвариантного подмножества, G -тихоновости, G -расширения имеются в [17]–[20]. Отображение $f: X \rightarrow Y$ пространств X, Y с действием группы G называется *эквивариантным*, если $f(gx) = gf(x)$ для любых $x \in X$, $g \in G$ (тем самым, эквивариантность определена не только для отображений G -пространств).

Следующая лемма переносит на случай действия утверждение леммы 1 из [21].

ЛЕММА 1. Для действия $\alpha: G \times X \rightarrow X$ и любых множеств $S \subset G$ и $Y \subset X$ выполнено

$$S \text{cl } Y \subset \text{cl}(SY), \quad S \text{int } Y \subset \text{int}(SY).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in S \text{cl } Y$. Тогда $x = ht$, где $h \in S$, $t \in \text{cl } Y$. Так как отображение $\alpha^h: X \rightarrow X$ непрерывно, то для любой окрестности V_x точки x существует окрестность V_t точки t такая, что $\alpha^h(V_t) \subset V_x$. Поэтому существует точка $t' \in V_t \cap Y$ такая, что $ht' \in V_x$. Значит, $x \in \text{cl}(SY)$. Первое включение доказано. Второе включение очевидно, так как $S \text{int } Y \subset SY$ и $S \text{int } Y$ – открытое подмножество X . Лемма 1 доказана.

Равномерные структуры вводятся через семейства покрытий. Необходимые сведения о равномерностях можно найти в [22], [23].

Пусть $f: X \rightarrow Y$ – эквивариантное отображение пространств с действием группы G . Действие на Y обозначим через α_Y . Рассмотрим отношение эквивалентности $E(f)$ на X , определенное его разложением на множества $f^{-1}(y)$, $y \in Y$.

ЛЕММА 2. На факторпространстве $X/E(f)$ определено действие группы G , при котором естественные факторотображение $q: X \rightarrow X/E(f)$ и уплотнение $h: X/E(f) \rightarrow Y$ эквивариантны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим отображение $\alpha_E: G \times X/E(f) \rightarrow X/E(f)$ по правилу $\alpha_E(g, x) = h^{-1}\alpha_Y(g, h(x))$. В силу биективности h его задание корректно, и выполняются условия действия группы на множестве. Так как отображение f эквивариантно, то из определения действия на множестве $X/E(f)$ вытекает эквивариантность отображений q и h как отображений множеств с действием группы.

Легко проверить, что отображение q удовлетворяет свойству

$$gq^{-1}(Z) = q^{-1}(gZ)$$

для любых $g \in G$, $Z \subset X/E(f)$ (так как $x \in gq^{-1}(Z) \iff g^{-1}x \in q^{-1}(Z) \iff q(g^{-1}x) \in Z \iff q(x) \in gZ \iff x \in q^{-1}(gZ)$). Поэтому для любых $g \in G$ и открытого множества $O \subset X/E(f)$ множество gO открыто, что эквивалентно непрерывности отображений α_E^g , $g \in G$. Лемма 2 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если эквивариантное отображение f G -пространства X открыто и бикompактно (прообраз каждой точки бикompактен) или совершенно, то легко показать, что действие на факторпространстве $X/E(f) = f(X)$ непрерывно (см. [21; лемма 6] в случае совершенности f). Тем самым, факторпространство бикompактного G -пространства по отношению эквивалентности, определенному его разложением на прообразы точек при произвольном эквивариантном отображении, является G -пространством.

§ 2. Открытые (d -открытые) действия

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Действие $\alpha: G \times X \rightarrow X$ назовем:

- *открытым*, если для любых $x \in X$ и $O \in N_G(e)$ имеем $x \in \text{int}(Ox)$;
- *d -открытым*, если для любых $x \in X$ и $O \in N_G(e)$ имеем $x \in \text{int}(\text{cl}(Ox))$;
- *слабо d -открытым*, если для любых $x \in X$ и $O \in N_G(e)$ существует точка $y \in X$ такая, что $x \in \text{int}(\text{cl}(Oy))$.

Открытые действия Я. ван Милл называет *микротранзитивными* (см. [24]). Действие $\alpha: G \times X \rightarrow X$ *d -открыто в точке $x \in X$* , если для любой окрестности $O \in N_G(e)$ имеем $x \in \text{int}(\text{cl}(Ox))$. В [21; определение 1] точки d -открытости названы *точками почти открытости действия*.

Напомним, что непрерывное отображение $f: X \rightarrow Y$ называется *d -открытым*, если для любого открытого в X множества O имеем $f(O) \subset \text{int}(\text{cl}(f(O)))$. Следующее утверждение показывает, что В. В. Успенским в [15], [6] рассматривались непрерывные d -открытые действия.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Открытость (d -открытость) непрерывного действия $\alpha: G \times X \rightarrow X$ эквивалентна открытости (d -открытости) отображений $\alpha_x: G \rightarrow X$, $x \in X$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть действие открыто (d -открыто), $x \in X$, множество O открыто в группе G . Для любого $g \in O$ имеем $Og^{-1}gx = Ox$ и $Og^{-1} \in N_G(e)$.

Поэтому $gx \in \text{int}(Og^{-1}gx) = \text{int}(Ox)$ (соответственно $gx \in \text{int}(\text{cl}(Og^{-1}gx)) = \text{int}(\text{cl}(Ox))$) и, следовательно, $\alpha_x(O) \subset \text{int}(\alpha_x(O))$ (соответственно $\alpha_x(O) \subset \text{int}(\text{cl}(\alpha_x(O)))$).

Если отображение α_x открыто (d -открыто), то для любого $O \in N_G(e)$ имеем $\alpha_x(O) = \text{int}(\alpha_x(O))$ (соответственно $\alpha_x(O) \subset \text{int}(\text{cl}(\alpha_x(O)))$). Поэтому $x \in \text{int}(Ox)$ (соответственно $x \in \text{int}(\text{cl}(Ox))$). Утверждение 1 доказано.

Следующий вопрос связан с вопросом 2 из [25].

ВОПРОС 1. Всегда ли в случае слабо d -открытого (непрерывного) действия $\alpha: G \times X \rightarrow X$ существует такая точка $x \in X$, что отображение α_x d -открыто?

Следующее утверждение показывает, что нет необходимости специально рассматривать открытые (d -открытые) раздельно непрерывные действия.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *d -открытое раздельно непрерывное действие непрерывно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что действие α непрерывно в том и только том случае, если оно непрерывно в точках $(e, x) \in G \times X$, $x \in X$, и непрерывны отображения α^g , $g \in G$. Поэтому требуется проверить лишь непрерывность действия в точках $(e, x) \in G \times X$, $x \in X$.

Так как отображения $\alpha_x: G \rightarrow X$, $x \in X$, непрерывны, то для любой окрестности O произвольной точки $x \in X$ существует окрестность $V \in N_G(e)$ такая, что $\text{cl}(Vx) \subset O$. Из d -открытости раздельно непрерывного действия α имеем $x \in \text{int}(\text{cl}(Vx))$. Пусть окрестность $W \in N_G(e)$ такая, что $W^{-1} = W$ и $W^2 \subset V$. Тогда $\text{int}(\text{cl}(Wx))$ является окрестностью точки x , и, используя лемму 1, имеем

$$W \text{int}(\text{cl}(Wx)) \subset \text{int}(\text{cl}(W^2x)) \subset \text{int}(\text{cl}(Vx)) \subset O.$$

Тем самым, непрерывность действия доказана. Утверждение 2 доказано.

ВОПРОС 2. Будет ли слабо d -открытое раздельно непрерывное действие непрерывным?

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Очевидно, что открытые непрерывные действия являются непрерывными d -открытыми, в свою очередь являющимися непрерывными слабо d -открытыми. В [25] показано, что при открытом непрерывном действии фазовое пространство является прямой суммой открыто-замкнутых подмножеств, каждое из которых гомеоморфно факторпространству действующей группы по некоторой замкнутой подгруппе. Если непрерывное действие слабо d -открыто или d -открыто, то фазовое пространство X является прямой суммой открыто-замкнутых подмножеств, каждое из которых является замыканием орбиты некоторой точки в первом и произвольной точки во втором случае (т.е. непрерывный взаимно однозначный образ факторпространства действующей группы по некоторой замкнутой подгруппе всюду плотен в каждом из подмножеств).

Разложения, определенные в замечании 2, назовем *компонентами действия*.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если действие на X слабо d -открыто, то для любого $O \in N_G(e)$ семейство $\gamma_O = \{\text{int}(\text{cl}(Ox)) : x \in X\}$ является покрытием X .

Если орбита любой точки пространства X с действием группы G всюду плотна (в частности, если действие d -открыто и имеет одну компоненту), то семейство $\varphi_W = \{gW : g \in G\}$, где W – открытое подмножество X , является инвариантным покрытием X .

Дадим характеристику d -открытых действий.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Легко видеть, что действие d -открыто в точке x , если выполнено одно из следующих эквивалентных условий:

- для любого $O \in N_G(e)$ существует окрестность U точки x такая, что множество $Ox \cap U$ всюду плотно в U ;
- для любого $O \in N_G(e)$ существует окрестность U точки x такая, что для любого непустого открытого подмножества $W \subset U$ существует $g \in O$, для которого $x \in gW$.

ЛЕММА 3. Пусть действие на X d -открыто (слабо d -открыто), $V, O \in N_G(e)$, $VV^{-1}V \subset O$. Тогда для любого $x \in X$ $\text{St}(x, \gamma_V) \subset \text{int}(\text{cl}(Ox))$ (соответственно существует $z \in X$ такая, что $\text{St}(x, \gamma_V) \subset \text{int}(\text{cl}(Oz))$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Приведем доказательство в случае слабо d -открытого действия (его очевидная модификация пригодна для случая d -открытого действия). Пусть $z \in X$ такая, что $x \in \text{int}(\text{cl}(Vz))$. Если $x \in \text{int}(\text{cl}(Vy))$, то $Vy \cap \text{int}(\text{cl}(Vz)) \neq \emptyset$ (так как Vy плотно в $\text{cl}(Vy)$, $\text{int}(\text{cl}(Vz))$ – окрестность x и $x \in \text{cl}(Vy)$). По лемме 1 имеем

$$Vy \subset VV^{-1}\text{int}(\text{cl}(Vz)) \subset \text{int}(\text{cl}(VV^{-1}Vz)) \subset \text{int}(\text{cl}(Oz))$$

и, тем самым, $\text{int}(\text{cl}(Vy)) \subset \text{int}(\text{cl}(Oz))$. Значит, $\text{St}(x, \gamma_V) \subset \text{int}(\text{cl}(Oz))$. Лемма 3 доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Действие на пространстве X d -открыто тогда и только тогда, когда для любых $O \in N_G(e)$ и $x \in X$ существует окрестность U точки x такая, что $U \subset \{gW : g \in O\}$ для любого непустого открытого подмножества $W \subset U$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность следует из замечания 4.

Если $O \in N_G(e)$, $O^{-1} = O$ и $V \in N_G(e)$ такая, что $V^{-1} = V$ и $V^3 \subset O$, то по лемме 3 имеем $\text{St}(x, \gamma_V) \subset \text{int}(\text{cl}(Ox))$ для любой точки $x \in X$. Для $O \in N_G(e)$ и $x \in X$ положим $U = \text{int}(\text{cl}(Vx))$. Пусть W – открытое подмножество U и $y \in U$. Так как $U \subset \text{St}(y, \gamma_V) \subset \text{cl}(Oy)$, то существует элемент $g \in O$ такой, что $gy \in W$, т.е. для любой точки $y \in U$ существует $g \in O$ такой, что $y \in gW$. Предложение 1 доказано.

ЛЕММА 4. Пусть действие на пространстве X d -открыто. Тогда для любых $O, V \in N_G(e)$ и $x \in X$, если окрестность $U \in N_G(e)$ такая, что $U^{-1} = U$, $U^2 \subset O$, то имеем

$$\text{cl}(Ux) \subset \bigcup \{g \text{int}(\text{cl}(Vx)) : g \in O\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что $Ux \subset \bigcup \{g \text{int}(\text{cl}(Vx)) : g \in U\}$. Пусть $y \in \text{cl}(Ux)$. Тогда $Uy \cap \bigcup \{g \text{int}(\text{cl}(Vx)) : g \in U\} \neq \emptyset$ (в противном случае окрестность $\text{int}(\text{cl}(Uy))$ точки y не пересекалась бы с Ux) и существуют $h, g \in U$ такие, что $hy \in g \text{int}(\text{cl}(Vx))$. Тем самым, $y \in h^{-1}g \text{int}(\text{cl}(Vx))$. Лемма 4 доказана.

Дадим характеристику d -открытых эквивариантных отображений G -пространства с d -открытым действием.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $f: X \rightarrow Y$ – эквивариантное отображение G -пространства X с открытым (d -открытым) действием на пространство Y с действием группы G . Тогда следующие условия эквивалентны:

- (а) действие на Y открыто (d -открыто);
- (б) отображение f открыто (d -открыто).

Если действие на X открыто, то условия (а) и (б) в формулировке с открытостью также эквивалентны следующему условию:

- (с) f – факторотображение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем выполнение импликации (а) $\implies$ (б). Пусть W – произвольное открытое подмножество X , $x \in W$ и $y = f(x)$. Для доказательства открытости (d -открытости) отображения f достаточно показать, что $y \in \text{int}(f(W))$ (соответственно $y \in \text{int}(\text{cl}(f(W)))$). В силу непрерывности действия на X существует окрестность $V \in N_G(e)$ такая, что $Vx \subset W$. Тогда из эквивариантности отображения f имеем $Vy \subset f(W)$ (и $\text{cl}(Vy) \subset \text{cl}(f(W))$). Поэтому из открытости (d -открытости) действия на Y имеем $y \in \text{int}(Vy) \subset \text{int}(f(W))$ (соответственно $y \in \text{int}(\text{cl}(Vy)) \subset \text{int}(\text{cl}(f(W)))$).

Докажем выполнение импликации (б) $\implies$ (а). Пусть $y \in Y$, $V \in N_G(e)$ и $y = f(x)$. Тогда из открытости (d -открытости) действия на X имеем $x \in \text{int}(Vx)$ (соответственно $x \in \text{int}(\text{cl}(Vx))$). Поэтому из открытости (d -открытости) и эквивариантности отображения f имеем $y = f(x) \in f(\text{int}(Vx)) \subset \text{int}(f(Vx)) = \text{int}(Vy)$ (соответственно $y = f(x) \in f(\text{int}(\text{cl}(Vx))) \subset \text{int}(\text{cl}(f(\text{int}(\text{cl}(Vx)))) \subset \text{int}(\text{cl}(f(\text{cl}(Vx)))) = \text{int}(\text{cl}(f(Vx))) = \text{int}(\text{cl}(Vy))$).

Если действие на X открыто, то нужно лишь доказать выполнение импликации (с) $\implies$ (б). Для этого достаточно доказать, что множество $f^{-1}f(W)$ открыто для произвольного открытого подмножества W пространства X . Пусть $x \in f^{-1}f(W)$. Тогда существуют $y \in W$ и $V \in N_G(e)$ такие, что $f(x) = f(y)$ и $Vy \subset W$. Из эквивариантности отображения f имеем $Vx \subset f^{-1}f(W)$. Действие на X открыто, поэтому $x \in \text{int}(Vx) \subset f^{-1}f(W)$. Тем самым, открытость множества $f^{-1}f(W)$ доказана. Предложение 2 доказано.

§ 3. Равномерные структуры на пространствах с действием групп

Говоря о псевдоравномерности на пространстве X , имеем в виду, что ее базу образуют открытые покрытия, или, что эквивалентно, топология, порождаемая псевдоравномерностью, слабее исходной топологии.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Пусть ρ – непрерывная псевдометрика на пространстве X . Тогда (см., например, [22; задача 4.2.I]) определено отношение эквивалентности $E(\rho)$ на X : $xE(\rho)y$ в том и только том случае, если $\rho(x, y) = 0$; на множестве классов эквивалентности $X/E(\rho)$ пространства X по отношению $E(\rho)$ определена метрика $\bar{\rho}([x]_{E(\rho)}, [y]_{E(\rho)}) = \rho(x, y)$ (будем обозначать это метрическое пространство через $X_{E(\rho)}$) и определено равномерно непрерывное отображение X в $X_{E(\rho)}$.

Если $\mathcal{U}$ – псевдоравномерность на X , то на X определено отношение $E(\mathcal{U})$: $xE(\mathcal{U})y$ в том и только том случае, если для любого покрытия $v \in \mathcal{U}$ существует элемент $V \in v$ такой, что $x, y \in V$. Так как любая псевдоравномерность на пространстве X может быть задана семейством непрерывных псевдометрик ρ_α , $\alpha \in A$ (см. [22; теорема 8.1.10]), то в силу замечания 5 отношение $E(\mathcal{U})$ является отношением эквивалентности; класс эквивалентности

$[x]_{\mathcal{U}} = \bigcap \{ \text{St}(x, v) : v \in \mathcal{U} \}$ точки $x \in X$ замкнут; на множестве классов эквивалентности $X/E(\mathcal{U})$ пространства X по отношению $E(\mathcal{U})$ определена равномерность $\overline{\mathcal{U}}$, определяемая семейством псевдометрик $\bar{\rho}_\alpha$, $\alpha \in A$. Будем обозначать через $X_{E(\mathcal{U})}$ множество $X/E(\mathcal{U})$ в топологии, индуцированной равномерностью $\overline{\mathcal{U}}$. Заметим, что равномерность $\overline{\mathcal{U}}$ – сильнейшая из равномерностей на $X/E(\mathcal{U})$, в которой естественное отображение $p: X \rightarrow X/E(\mathcal{U})$ является равномерно непрерывным (см. [23]).

Следуя [26], псевдоравномерность $\mathcal{U}$ на G -пространстве X назовем *инвариантной*, если семейство $\mathcal{U}$ инвариантно. В частности, если базу псевдоравномерности образуют инвариантные покрытия, то она инвариантна.

ЛЕММА 5. Пусть топология (не обязательно тихоновская) на множестве X с действием α группы G индуцирована инвариантной псевдоравномерностью $\mathcal{U}$. Тогда отображения $\alpha^g: X \rightarrow X$, $g \in G$, непрерывны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть множество O открыто в X и $y \in gO$, где $g \in G$. Для $x = g^{-1}y \in O$ существует покрытие $v \in \mathcal{U}$ такое, что $\text{St}(x, v) \subset O$. Тогда $gv \in \mathcal{U}$ и $\text{St}(y, gv) \subset gO$ (для $V \in v$ имеем $V \in \text{St}(x, v)$ в том и только том случае, если $gV \in \text{St}(y, gv)$). Тем самым, множество gO открыто, что эквивалентно непрерывности отображений $\alpha^g: X \rightarrow X$, $g \in G$. Лемма 5 доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Если $\mathcal{U}$ – инвариантная псевдоравномерность на пространстве X с действием группы G , то:

- (i) на $X_{E(\mathcal{U})}$ и факторпространстве $X/E(\mathcal{U})$ определены действия группы G ;
- (ii) отображение $p: X \rightarrow X_{E(\mathcal{U})}$ и факторотображение $q: X \rightarrow X/E(\mathcal{U})$ эквивариантны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $[x]_{\mathcal{U}} = \bigcap \{ \text{St}(x, v) : v \in \mathcal{U} \}$ – точка множества $X/E(\mathcal{U})$, $g \in G$. Положим $g[x]_{\mathcal{U}} = [gx]_{\mathcal{U}}$. Проверим корректность определенного действия (т.е. если $[x]_{\mathcal{U}} = [y]_{\mathcal{U}}$, то $[gx]_{\mathcal{U}} = [gy]_{\mathcal{U}}$ при $g \in G$). Для этого достаточно показать, что если $y \in \text{St}(x, v)$ для любого $v \in \mathcal{U}$, то $gy \in \text{St}(gx, v)$ для любого $v \in \mathcal{U}$. Предположим, что существует покрытие $\omega \in \mathcal{U}$ такое, что $gy \notin \text{St}(gx, \omega)$. Так как псевдоравномерность $\mathcal{U}$ инвариантна, то $g^{-1}\omega \in \mathcal{U}$. Тогда $y \notin \text{St}(x, g^{-1}\omega)$. Тем самым, корректность определения действия на множестве $X/E(\mathcal{U})$ проверена. Эквивариантность факторотображения множества X на $X/E(\mathcal{U})$ вытекает из определения действия на $X/E(\mathcal{U})$.

Так как равномерность $\overline{\mathcal{U}}$ – сильнейшая из равномерностей на множестве $X/E(\mathcal{U})$, в которой естественное отображение $p: X \rightarrow X/E(\mathcal{U})$ является равномерно непрерывным, то она инвариантна. Из леммы 5 следует непрерывность определенного выше действия на пространстве $X_{E(\mathcal{U})}$.

Справедливость оставшихся утверждений предложения следует из леммы 2. Предложение 3 доказано.

Для семейства $\mathcal{O} \subset N_G(e)$ его подсемейство $\mathcal{B}$ назовем *базой*, если для любого $O \in \mathcal{O}$ существует $U \in \mathcal{B}$ такое, что $U \subset O$. Весом семейства $\mathcal{O}$ назовем $\min \{ |\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ – база семейства } \mathcal{O} \}$.

Следующее предложение тесно связано с теоремой 3 из [21].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть действие на X слабо d -открыто, а семейство $\mathcal{O} \subset N_G(e)$ таково, что:

- (i) для любых $O, U \in \mathcal{O}$ существует $V \in \mathcal{O}$ такое, что $V \subset O \cap U$;
- (ii) для любого $O \in \mathcal{O}$ существует $U \in \mathcal{O}$ такое, что $U^2 \subset O$ и $U^{-1} \subset O$.

Тогда семейство покрытий $\gamma_{\mathcal{O}} = \{\text{int}(\text{cl}(Ox)) : x \in X\}$, $O \in \mathcal{O}$, является базой псевдоравномерности $\mathcal{U}_{\mathcal{O}}$ на множестве X . При этом вес псевдоравномерности $\mathcal{U}_{\mathcal{O}}$ не превосходит веса семейства $\mathcal{O}$, а топология $\tau_{\mathcal{O}}$ (не обязательно тихоновская), индуцируемая псевдоравномерностью $\mathcal{U}_{\mathcal{O}}$, слабее топологии пространства X .

Если семейство $\mathcal{O}$ дополнительно к условиям (i) и (ii) удовлетворяет следующему условию:

(iii) для любых $O \in \mathcal{O}$ и $g \in G$ существует $V \in \mathcal{O}$ такое, что $gVg^{-1} \subset O$, то псевдоравномерность $\mathcal{U}_{\mathcal{O}}$ инвариантна и X в топологии $\tau_{\mathcal{O}}$ есть G -пространство (не обязательно тихоновское).

Если дополнительно к условиям (i) и (ii) действие удовлетворяет следующему условию:

- (*) для любых двух различных точек x, y пространства X существует элемент $O \in \mathcal{O}$ такой, что x и y не принадлежат одному элементу покрытия $\gamma_{\mathcal{O}}$,

то $\mathcal{U}_{\mathcal{O}}$ – равномерность на X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{B}$ – база семейства $\mathcal{O}$ той же мощности, что и вес $\mathcal{O}$. В доказательстве того, что семейство $\gamma_{\mathcal{U}} = \{\text{int}(\text{cl}(Ux)) : x \in X\}$, $U \in \mathcal{B}$, является базой псевдоравномерности $\mathcal{U}_{\mathcal{O}}$, нетривиальным является лишь проверка того, что для любого $U \in \mathcal{B}$ существует $V \in \mathcal{B}$ такое, что γ_V сильно звездно вписано в γ_U .

Используя свойство (ii) семейства $\mathcal{O}$ и определение его базы, строятся: $W' \in \mathcal{B}$ такое, что $W'^2 \subset U$; $W'' \in \mathcal{B}$ такое, что $W''^2 \subset W'$; $W \in \mathcal{B}$ такое, что $W^2 \subset W''$ и $W^{-1} \subset W''$. Тогда $WW^{-1}W \subset W''W''W'' \subset W'W' \subset U$.

По лемме 3 покрытие γ_W звездно вписано в γ_U .

Аналогичным образом для покрытия γ_W можно найти звездно вписанное в него покрытие γ_V , $V \in \mathcal{B}$, которое (см., например, [22; лемма 5.1.15]) сильно звездно вписано в γ_U . Очевидно, что вес $\mathcal{U}_{\mathcal{O}}$ не превосходит веса семейства $\mathcal{O}$.

То, что топология $\tau_{\mathcal{O}}$ слабее исходной топологии на X , вытекает из того, что база псевдоравномерности $\mathcal{U}_{\mathcal{O}}$ состоит из открытых покрытий пространства X .

Если выполнено условие (iii), то для $O \in \mathcal{O}$ и $g \in G$ пусть $V \in \mathcal{O}$ такая, что $Vg \subset gO$. Поскольку $\gamma_V = \gamma_{Vg}$ (так как $\{\text{int}(\text{cl}(Vx)) : x \in X\} = \{\text{int}(\text{cl}(Vgx)) : x \in X\}$) и $g\gamma_O = \gamma_{gO}$ (соответственно $g\{\text{int}(\text{cl}(Ox)) : x \in X\} = \{\text{int}(\text{cl}(gOx)) : x \in X\}$), то из включения $\text{int}(\text{cl}(Vgx)) \subset \text{int}(\text{cl}(gOx))$, $x \in X$, следует, что γ_V вписано в покрытие $g\gamma_O$. Тем самым, $g\gamma_O \in \mathcal{U}_{\mathcal{O}}$ и псевдоравномерность $\mathcal{U}_{\mathcal{O}}$ инвариантна.

Отметим, что действие группы G на множестве X с топологией $\tau_{\mathcal{O}}$ непрерывно в точках $(e, x) \in G \times X$, $x \in X$. Действительно, из определения топологии $\tau_{\mathcal{O}}$ имеем, что для любой окрестности O произвольной точки $x \in X$ существует $V \in \mathcal{O}$ такая, что $\text{St}(x, \gamma_V) \subset O$. Пусть $W \in \mathcal{O}$ такая, что $W^2 \subset V$. Тогда по лемме 1 $W\text{St}(x, \gamma_W) \subset \text{St}(x, \gamma_V)$, т.е. для $W \in N_G(e)$ и U (внутренности в топологии $\tau_{\mathcal{O}}$ множества $\text{St}(x, \gamma_W)$) имеем $x \in U$ и $WU \subset O$.

Поэтому если выполнено условие (iii), то остается проверить лишь непрерывность отображений $\alpha^g : X \rightarrow X$, $g \in G$, которая в силу леммы 5 будет следовать из инвариантности псевдоравномерности $\mathcal{U}_{\mathcal{O}}$.

Если действие удовлетворяет условию (*), то очевидно, что $\mathcal{U}_\theta$ – равномерность на X . Предложение 4 доказано.

Так как на бикомпактном пространстве существует единственная согласованная с топологией равномерность, то из предложения 4 получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. Если X – бикомпактное пространство со слабо d -открытым действием, семейство $\mathcal{O}$ удовлетворяет условиям (i) и (ii), а действие удовлетворяет условию (*) предложения 4, то X – бикомпактное G -пространство.

Подгруппу H группы G J. Poncet назвал *presque invariant* [27], М. М. Чобан назвал *равномерной* [12], а W. Roelcke, S. Dierolf назвали *neutral* [28], если выполняется следующее условие:

(*) для любой $O \in N_G(e)$ существует $V \in N_G(e)$ такая, что $VH \subset HO$.

Так как $(VH)^{-1} = HV^{-1}$, то условие (*) эквивалентно следующему условию:

(*)' для любой $O \in N_G(e)$ существует $V \in N_G(e)$ такая, что $HV \subset OH$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Любые открытая, нормальная, вполне ограниченная подгруппы группы и любая подгруппа группы с инвариантным базисом являются равномерными (см. [28]).

Отметим, что подгруппа группы с инвариантным базисом и бикомпактная подгруппа произвольной группы удовлетворяют следующему более сильному, чем (*), условию:

(**) для любого $O \in N_G(e)$ существует $V \in N_G(e)$ такая, что $gVg^{-1} \subset O$ для любого $g \in H$.

Приведем доказательство этого условия в случае бикомпактной группы. Из непрерывности операций на топологической группе для любых $O \in N_G(e)$ и $g \in H$ следует, что существуют окрестность $U_g \subset G$ точки g и $V_g \in N_G(e)$ такие, что $U_g V_g U_g^{-1} \subset O$. Из семейства $\{U_g : g \in H\}$, покрывающего бикомпакт H , выделим конечное подсемейство $\{U_{g_i} : i = 1, \dots, k\}$, покрывающее H . Тогда для $V = \bigcap \{V_{g_i} : i = 1, \dots, k\}$, очевидно, выполнено $gVg^{-1} \subset O$ для любого $g \in H$.

ЛЕММА 6. Пусть H – равномерная подгруппа G . Тогда семейство $N_G(H) = \{OH : O \in N_G(e)\}$ удовлетворяет условиям (i) и (ii) предложения 4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выполнение условия (i) вытекает из очевидного включения $(O \cap V)H \subset OH \cap VH$, верного для любых подмножеств группы G .

Для $O, U \in N_G(e)$ таких, что $U^2 \subset O$, пусть $V \in N_G(e)$ удовлетворяет условиям: $V \subset U$; $HV \subset UH$; $VH \subset HO^{-1}$. Тогда имеем $(VH)^2 \subset VUH \subset OH$ и $(VH)^{-1} = HV^{-1} \subset OH$. Лемма 6 доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть $H < G$ и подсемейство $\mathcal{O} \subset N_G(H)$ удовлетворяет условиям (i) и (ii) предложения 4. Тогда семейство $\varphi_O = \{gq(O) : g \in G\}$, $O \in \mathcal{O}$, покрытий факторпространства $X = G/H$, где $q : G \rightarrow G/H$ – факторотображение, есть база инвариантной псевдоравномерности $\mathcal{V}_\mathcal{O}$ на G -пространстве X . При этом вес псевдоравномерности $\mathcal{V}_\mathcal{O}$ не превосходит веса семейства $\mathcal{O}$, а топология $\tau_\mathcal{O}$ (не обязательно тихоновская), индуцируемая псевдоравномерностью $\mathcal{V}_\mathcal{O}$, слабее топологии пространства X .

В частности, если H – равномерная подгруппа, то $\mathcal{V}_H = \mathcal{V}_{N_G(H)}$ – инвариантная равномерность на пространстве X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетривиальным при доказательстве того, что $\mathcal{V}_\theta$ – псевдоравномерность, является лишь проверка условия, что в любое покрытие из $\mathcal{V}_\theta$ можно сильно звездно вписать покрытие из $\mathcal{V}_\theta$. Для любого $O \in \theta$ существует $U \in \theta$ такое, что $UU^{-1}U \subset O$. Тогда $\text{St}(gU, q^{-1}\varphi_U) \subset gO$ при всех $g \in G$ (доказательство см., например, в [22; пример 8.1.17]). Заметим, что $q^{-1}\varphi_O$ – покрытие G и $qq^{-1}\varphi_O = \varphi_O$ для любых $O \in \theta$. Поэтому $\text{St}(gq(U), \varphi_U) \subset gq(O)$ при всех $g \in G$. То, что топология τ_θ слабее исходной топологии на X , вытекает из того, что база псевдоравномерности $\mathcal{V}_\theta$ состоит из открытых покрытий пространства X . Ее инвариантность очевидна.

Пусть H – равномерная подгруппа G . Тогда, принимая во внимание лемму 6, получаем, что $\mathcal{V}_H$ – инвариантная псевдоравномерность. Для различных точек $gH, hH \in X$ существует $O' \in N_G(e)$ такая, что $O' \cap g^{-1}hH = \emptyset$ (рассматриваются подмножества G). Легко показать, что $O'H \cap g^{-1}hH = \emptyset$. Пусть $O \in N_G(H)$ такая, что $O^{-1}O \subset O'H$ (существует по лемме 6). Тогда если существует $k \in G$ такое, что $kO \cap gH \neq \emptyset$ и $kO \cap hH \neq \emptyset$ (и, тем самым, $O \supset k^{-1}gH$ и $O \supset k^{-1}hH$), то $k^{-1}g \in O$ и $k^{-1}h \in O$. Тем самым, $g^{-1}h \in O^{-1}O \subset O'H$. Но $O'H \cap g^{-1}hH = \emptyset$. Полученное противоречие доказывает, что $\mathcal{V}_H$ – инвариантная равномерность на множестве X .

Остается показать, что любое открытое множество W в пространстве X является открытым и в топологии τ_H , порожденной равномерностью $\mathcal{V}_H$. Пусть $x \in W$. Для точки $y \in q^{-1}x$ существует окрестность $O \in N_G(e)$ такая, что $Oy \subset q^{-1}W$. Так как $(q^{-1}W)H = q^{-1}W$, то $O(q^{-1}x) \subset q^{-1}W$. Для $V \in N_G(e)$ такого, что $V'' \subset y^{-1}Oy$, $(V'H)^2 \subset V''H$ и $(VH)^{-1} \subset V'H$, $V \subset V'$, имеем: если $gVH \cap q^{-1}x \neq \emptyset$ (тем самым, $y \in gVH$), то $gVH \subset y(V'H)^2 \subset yV''H \subset OyH \subset q^{-1}W$ (так как $g \in yHV^{-1} \subset yV'H$). Тем самым, $\text{St}(q^{-1}x, q^{-1}\varphi_{VH}) \subset q^{-1}W$. Так как все множества являются полными прообразами множеств из X , то $\text{St}(x, \varphi_{VH}) \subset W$, т.е. точка x принадлежит внутренности множества W в топологии τ_H . Предложение 5 доказано.

ВОПРОС 3. Можно ли в предложении 5 фактически используемую открытость действия ослабить до d -открытости?

§ 4. Вполне ограниченные действия и бикомпактные G -расширения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Действие на пространстве X назовем *вполне ограниченным*, если для любого непустого открытого множества $W \subset X$ семейство $\{gW : g \in G\}$ является покрытием пространства X , из которого можно выбрать конечное подпокрытие.

Действие на пространстве X назовем *равномерно локально вполне ограниченным*, если:

- (а) для любых $O \in N_G(e)$ и $x \in X$ существует окрестность U_x точки x такая, что для любого непустого открытого подмножества $W \subset U_x$ семейство $\{gW : g \in O\}$ является покрытием U_x , из которого можно выбрать конечное подпокрытие (отметим, что, тем самым, по предложению 1 действие d -открыто);
- (б) покрытие $\{U_x : x \in X\}$ есть элемент равномерности $\mathcal{U}_{N_G(e)}$ (см. предложение 4).

Перечислим некоторые свойства вполне ограниченных и равномерно локально вполне ограниченных действий.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Если действие на пространстве X вполне ограничено, то орбита любой точки пространства X всюду плотна в нем.

Непрерывное d -открытое действие на бикompактном пространстве, имеющее одну компоненту, вполне ограничено.

Действие на эквивариантном образе пространства с вполне ограниченным действием вполне ограничено.

Равномерно локально вполне ограниченное действие является d -открытым.

Непрерывное d -открытое действие на бикompактном пространстве является равномерно локально вполне ограниченным (в силу предложения 1 и единственности равномерности на бикompакте).

Топологическая группа, являющаяся счетным произведением не дискретных топологических групп в ящичной топологии (см. [29; гл. 3, задача Ц]), действующая сама на себе левыми сдвигами, является примером G -пространства с открытым действием, которое (в силу того, что не выполнено условие (а) определения 2) не является равномерно локально вполне ограниченным.

Действие локально бикompактной не вполне ограниченной группы на себе левыми сдвигами является примером G -пространства с открытым действием, которое равномерно локально вполне ограничено по лемме 4 в силу своей локальной бикompактности, но не вполне ограничено.

ЛЕММА 7. *d -открытое действие на пространстве X является равномерно локально вполне ограниченным тогда и только тогда, когда для любого $O \in N_G(e)$ существует $U \in N_G(e)$ такая, что для любых $V \in N_G(e)$ и $x \in X$ семейство $\{g \operatorname{int}(\operatorname{cl}(Vx)) : g \in O\}$ является покрытием множества Ux , из которого можно выбрать конечное подпокрытие.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость очевидна. Для доказательства достаточности пусть $O \in N_G(e)$ и $x \in X$ произвольные. По условию леммы существует $U \in N_G(e)$ такая, что $U^{-1} = U$, $U \subset O$, и для любых $V \in N_G(e)$ семейство $\{g \operatorname{int}(\operatorname{cl}(Vx)) : g \in O\}$ является покрытием множества Ux , из которого можно выбрать конечное подпокрытие. В частности, для $V' \in N_G(e)$ такой, что $\operatorname{cl}(V'x) \subset \operatorname{int}(\operatorname{cl}(Vx))$, существуют $g_i \in O$, $i = 1, \dots, k$, такие, что $Ux \subset \bigcup \{g_i \operatorname{int}(\operatorname{cl}(V'x)) : i = 1, \dots, k\}$. Тем самым, $\operatorname{int}(\operatorname{cl}(Ux)) \subset \bigcup \{g_i \operatorname{cl}(V'x) : i = 1, \dots, k\} \subset \bigcup \{g_i \operatorname{int}(\operatorname{cl}(Vx)) : i = 1, \dots, k\}$ и, значит, для любой $V \in N_G(e)$ существуют $g_i \in O$, $i = 1, \dots, k$, такие, что $\operatorname{int}(\operatorname{cl}(Ux)) \subset \bigcup \{g_i \operatorname{int}(\operatorname{cl}(Vx)) : i = 1, \dots, k\}$.

В качестве окрестности точки x возьмем $\operatorname{int}(\operatorname{cl}(Ux))$, и пусть $W \subset \operatorname{int}(\operatorname{cl}(Ux))$ – открытое множество. Тогда найдутся $g \in U$, $V \in N_G(e)$ такие, что $\operatorname{int}(\operatorname{cl}(Vx)) \in gW$. Для $V \in N_G(e)$ существуют $g_i \in O$, $i = 1, \dots, k$, такие, что $\operatorname{int}(\operatorname{cl}(Ux)) \subset \bigcup \{g_i \operatorname{int}(\operatorname{cl}(Vx)) : i = 1, \dots, k\}$. Но $g_i \operatorname{int}(\operatorname{cl}(Vx)) \subset g_i gW$, $i = 1, \dots, k$, где $g \in U$. Тем самым, $\operatorname{int}(\operatorname{cl}(Ux)) \subset \bigcup \{g_i gW : i = 1, \dots, k\}$, т.е. $\operatorname{int}(\operatorname{cl}(Ux)) \subset \bigcup \{h_i W : i = 1, \dots, k\}$, где $h_i \in O^2$, $i = 1, \dots, k$. Очевидно, что $\{\operatorname{int}(\operatorname{cl}(Ux)) : x \in X\} \in \mathcal{U}_{N_G(e)}$. В силу произвольности $O \in N_G(e)$ достаточность доказана. Лемма 7 доказана.

d -открытость вполне ограниченного действия сохраняется при эквивариантных отображениях.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть X – G -пространство с вполне ограниченным d -открытым действием и $f : X \rightarrow Y$ – эквивариантное отображение на пространство Y с действием группы G . Тогда отображение f d -открыто, действие на Y d -открыто и вполне ограничено.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно предложению 2 и замечанию 7 достаточно доказать, что действие на пространстве Y d -открыто.

Пусть $y \in Y$, $O \in N_G(e)$. Возьмем произвольную точку $x \in f^{-1}y$ и окрестность $V \in N_G(e)$ такую, что $V = V^{-1}$, $V^2 \subset O$. В силу полной ограниченности и d -открытости действия на X из покрытия $\{g \operatorname{int}(\operatorname{cl}(Vx)) : g \in G\}$ пространства X можно выбрать конечное подпокрытие $\{g_i \operatorname{int}(\operatorname{cl}(Vx)) : i = 1, \dots, n\}$. Тогда $\{f(g_i(\operatorname{cl}(Vx))) = g_i f(\operatorname{cl}(Vx)) : i = 1, \dots, n\}$ – конечное покрытие пространства Y . Существует $j \leq n$ такое, что $\operatorname{int}(\operatorname{cl}(g_j f(\operatorname{cl}(Vx)))) \neq \emptyset$ (иначе семейство множеств $\{g_i f(\operatorname{cl}(Vx)) : i = 1, \dots, n\}$ не покрывало бы Y , так как каждое из них было бы нигде не плотно в Y). Так как g_j – гомеоморфизм пространства Y (поэтому $\operatorname{int}(\operatorname{cl}(g_j f(\operatorname{cl}(Vx)))) = g_j \operatorname{int}(\operatorname{cl}(f(\operatorname{cl}(Vx))))$), то и $\operatorname{int}(\operatorname{cl}(f(\operatorname{cl}(Vx)))) \neq \emptyset$. В силу эквивариантности и непрерывности отображения f имеем $f(\operatorname{cl}(Vx)) \subset \operatorname{cl}(Vy)$. Поэтому $\operatorname{int}(\operatorname{cl}(Vy)) \neq \emptyset$. Так как Vy всюду плотно в $\operatorname{cl}(Vy)$, то существует элемент $h \in V$ такой, что $hy \in \operatorname{int}(\operatorname{cl}(Vy))$. Тогда $y \in h^{-1} \operatorname{int}(\operatorname{cl}(Vy)) = \operatorname{int}(\operatorname{cl}(h^{-1}Vy)) \subset \operatorname{int}(\operatorname{cl}(V^2y)) \subset \operatorname{int}(\operatorname{cl}(Oy))$. Тем самым, доказана d -открытость действия на Y . Предложение 6 доказано.

ВОПРОС 4. Можно ли в предложении 6 отказаться от условия d -открытости действия?

Если на тихоновском пространстве X непрерывно действует топологическая группа G , то действие может быть продолжено на некоторые бикомпактные расширения X , которые называются бикомпактными G -расширениями. Если семейство бикомпактных G -расширений непусто, то существует максимальное бикомпактное G -расширение $\beta_G X$ (см. [17], [30]). Напомним, что если X – G -пространство со слабо d -открытым действием, то оно G -тихоновское (см. [25]). Более того, $\beta_G X$ – бикомпактификация Самюэля по равномерности $\mathcal{U}_{N_G(e)}$ (см. [21]).

ЛЕММА 8. Если X – G -пространство с d -открытым действием, то для любого $O \in N_G(e)$ существует $V \in N_G(e)$ такая, что

$$\operatorname{cl}_{\beta_G X}(Vx) \subset \operatorname{int}_{\beta_G X}(\operatorname{cl}_{\beta_G X}(Ox))$$

при любом $x \in X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как

$$x \in \beta_G X \setminus \operatorname{cl}_{\beta_G X}(X \setminus \operatorname{int}_X(\operatorname{cl}_X(Ox))) \subset \operatorname{int}_{\beta_G X}(\operatorname{cl}_{\beta_G X}(Ox))$$

для любого $x \in X$, то для доказательства леммы достаточно показать, что существуют такая окрестность $V \in N_G(e)$, что $\operatorname{cl}_X(Vx) \cap (X \setminus \operatorname{int}_X(\operatorname{cl}_X(Ox))) = \emptyset$ для любого $x \in X$, и такая (см., например, [31; теорема 4.3]) G -равномерная функция, принимающая значения $\leq 1/4$ на $\operatorname{cl}_X(Vx)$ и $\geq 1/2$ на $X \setminus \operatorname{int}_X(\operatorname{cl}_X(Ox))$ для каждого $x \in X$.

Используя [22; теорему 8.2.3] и предложение 4, легко видеть, что существуют $V \in N_G(e)$ и равномерно непрерывная псевдометрика ρ на X с равномерностью $\mathcal{U}_{N_G(e)}$ такие, что $\operatorname{St}(x, \gamma_V) \subset \{y \in X : \rho(x, y) \leq 1/4\}$ и $\{y \in X : \rho(x, y) \leq 1/2\} \subset \operatorname{int}_X(\operatorname{cl}_X(Ox))$ для любого $x \in X$. Тогда функция $f_x(y) = \rho(x, y)$ G -равномерна и $f_x(y) \leq 1/4$ при $y \in \operatorname{cl}_X(Vx)$, $f_x(y) \geq 1/2$ при $y \in X \setminus \operatorname{int}_X(\operatorname{cl}_X(Ox))$ для каждого $x \in X$. Лемма 8 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Если X – G -пространство с d -открытым действием, то $x \in \text{int}_{\beta_G X}(\text{cl}_{\beta_G X}(Ox))$ для любых $O \in N_G(e)$ и $x \in X$, т.е. действие на $\beta_G X$ d -открыто в точках X .

ЛЕММА 9. Если X – G -пространство с d -открытым действием и равномерность $\mathcal{U}_{N_G(e)}$ вполне ограничена, то для любых $O \in N_G(e)$ и $y \in \beta_G X$ существует $x \in X$ такая, что $y \in \text{int}_{\beta_G X}(\text{cl}_{\beta_G X}(Ox))$, т.е. действие на $\beta_G X$ слабо d -открыто.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого $O \in N_G(e)$ по лемме 8 существует $V \in N_G(e)$ такая, что $\text{cl}_{\beta_G X}(Vx) \subset \text{int}_{\beta_G X}(\text{cl}_{\beta_G X}(Ox))$ для любого $x \in X$.

Так как равномерность $\mathcal{U}_{N_G(e)}$ вполне ограничена, то из покрытия γ_V пространства X можно выбрать конечное подпокрытие $\text{int}_X(\text{cl}_X(Vx_i))$, $i = 1, \dots, k$. Тогда $\beta_G X = \text{cl}_{\beta_G X}(\bigcup\{\text{cl}_X(Vx_i) : i = 1, \dots, k\}) = \bigcup\{\text{cl}_{\beta_G X}(Vx_i) : i = 1, \dots, k\}$. Тем самым, существует индекс $i \in \{1, \dots, k\}$ такой, что $y \in \text{cl}_{\beta_G X}(Vx_i) \subset \text{int}_{\beta_G X}(\text{cl}_{\beta_G X}(Ox_i))$. Лемма 9 доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Если X – G -пространство с равномерно локально вполне ограниченным действием и вполне ограниченной равномерностью $\mathcal{U}_{N_G(e)}$, то действие на $\beta_G X$ равномерно локально вполне ограничено.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу замечания 7 достаточно доказать, что действие на $\beta_G X$ d -открыто. Согласно замечанию 8 необходимо проверить d -открытость действия в точках нароста $\beta_G X \setminus X$. Так как действие на X равномерно локально вполне ограничено, то по лемме 7 для $O \in N_G(e)$ (считаем, не ограничивая общности рассуждений, что $O^{-1} = O$) пусть $U \in N_G(e)$ такая, что $U \subset O$, и для любых $V \in N_G(e)$ и $x \in X$ семейство $\{g \text{int}(\text{cl}(Vx)) : g \in O\}$ является покрытием множества Ux , из которого можно выбрать конечное подпокрытие.

Для $y \in \beta_G X \setminus X$ пусть существующая по лемме 9 точка $x \in X$ такая, что $y \in \text{int}_{\beta_G X}(\text{cl}_{\beta_G X}(Ux))$. Если показать, что $O^2 y$ всюду плотно в $\text{int}_{\beta_G X}(\text{cl}_{\beta_G X}(Ux))$, то будем иметь $y \in \text{int}_{\beta_G X}(\text{cl}_{\beta_G X}(O^2 y))$, что и требуется доказать в силу произвольности $O \in N_G(e)$. Покажем, что для любой $V \in N_G(e)$ существует элемент $g \in O$ такой, что $gy \in \text{int}_{\beta_G X}(\text{cl}_{\beta_G X}(Vx))$. Тогда для любого открытого $W \subset \text{int}_{\beta_G X}(\text{cl}_{\beta_G X}(Ux))$ будет существовать $g \in O^2$ такой, что $gy \in W$ (напомним, что Ux всюду плотно в $\text{int}_{\beta_G X}(\text{cl}_{\beta_G X}(Ux))$ и действие непрерывно на $\beta_G X$).

Для $V \in N_G(e)$ пусть $V' \in N_G(e)$ (существующая по лемме 8) такая, что $\text{cl}_{\beta_G X}(V'x) \subset \text{int}_{\beta_G X}(\text{cl}_{\beta_G X}(Vx))$. Пусть $g_i \in O$, $i = 1, \dots, k$, такие, что $Ux \subset \bigcup\{g_i \text{int}_X(\text{cl}_X(V'x)) : i = 1, \dots, k\}$. Тогда $y \in \text{cl}_{\beta_G X}(Ux) \subset \bigcup\{g_i(\text{cl}_{\beta_G X}(V'x)) : i = 1, \dots, k\} \subset \bigcup\{g_i \text{int}_{\beta_G X}(\text{cl}_{\beta_G X}(Vx)) : i = 1, \dots, k\}$, т.е. существует $g_i \in O$ такой, что $g_i^{-1}y \in \text{int}_{\beta_G X}(\text{cl}_{\beta_G X}(Vx))$. Предложение 7 доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Пусть G – группа гомеоморфизмов интервала $X = (0, 1)$, сохраняющих естественный порядок его точек, т.е. подобных отображений, в топологии равномерной сходимости. Тогда легко показать (см. [32]), что X – G -пространство с открытым действием, равномерность $\mathcal{U}_{N_G(e)}$ вполне ограничена и продолжение действия на $\beta_G X = [0, 1]$ слабо d -открыто, но не d -открыто. Так как X локально бикомпактно, то действие удовлетворяет условию (а), но не удовлетворяет условию (б) определения 2.

Из предложения 7 и того, что все точки d -открытости действия в $\beta_G X \setminus X$ принадлежат любому бикомпактному G -расширению X (см. [21; теорема 1]), получаем

СЛЕДСТВИЕ 2. Если X – G -пространство с равномерно локально вполне ограниченным действием и вполне ограниченной равномерностью $\mathcal{U}_{N_G(e)}$, то $\beta_G X$ – единственное бикомпактное G -расширение пространства X .

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Если X – G -тихоновское пространство с вполне ограниченным действием, то действие на любом его бикомпактном G -расширении вполне ограничено.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя замечание 7, достаточно показать, что действие на $\beta_G X$ вполне ограничено. Пусть W – открытое подмножество $\beta_G X$. Существует функция $f: \beta_G X \rightarrow \mathbb{I}$ такая, что $f^{-1}(0, 1] \subset W$ и $f^{-1}(1) \neq \emptyset$. Для $h = f|_X$ множество $W' = h^{-1}(1/2, 1]$ – открытое непустое подмножество X . Так как действие на X вполне ограничено, то существуют $g_i \in G$, $i = 1, \dots, k$, такие, что $X = \bigcup \{g_i W' : i = 1, \dots, k\} = \bigcup \{(g_i h)^{-1}(1/2, 1] : i = 1, \dots, k\}$. Тогда $\beta_G X = \bigcup \{\text{cl}_{\beta_G X}(g_i W') : i = 1, \dots, k\} = \bigcup \{g_i \text{cl}_{\beta_G X} W' : i = 1, \dots, k\}$ (так как X всюду плотно в $\beta_G X$). При этом $g_i \text{cl}_{\beta_G X} W' = \text{cl}_{\beta_G X}(g_i h)^{-1}(1/2, 1] \subset (g_i f)^{-1}(1/2, 1] \subset g_i W$, $i = 1, \dots, k$. Тем самым, $\beta_G X = \bigcup \{g_i W : i = 1, \dots, k\}$. Утверждение 3 доказано.

ВОПРОС 5. Когда d -открытое действие на G -пространстве X продолжается до d -открытого действия на $\beta_G X$? В частности, можно ли в предложении 7 условие равномерной локальной вполне ограниченности действия заменить на вполне ограниченность d -открытого действия, имеющего одну компоненту?

§ 5. Действия $\aleph_0$ -уравновешенных групп

Непрерывная функция $f: X \rightarrow \mathbb{I} = [0, 1]$, определенная на G -пространстве X , называется G -равномерной (см., например, [17]), если для любого $\varepsilon > 0$ существует $O \in N_G(e)$ такая, что $|f(x) - f(gx)| < \varepsilon$ для любых $x \in X$, $g \in O$.

ЗАМЕЧАНИЕ 10. Пусть $f: X \rightarrow \mathbb{I}$ – G -равномерная функция и $O_n \in N_G(e)$ такая, что $|f(x) - f(gx)| < 1/n$ для любых $x \in X$, $g \in O_n$, $n \in \mathbb{N}$. Можно считать, что $O_n = O_n^{-1}$ и $O_{n+1}^2 \subset O_n$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда $H = \bigcap \{O_n : n \in \mathbb{N}\}$ является замкнутой типа G_δ подгруппой и $f(x) = f(gx)$ для любых $x \in X$, $g \in H$, т.е. любая G -равномерная функция имеет счетный тип в смысле Щепина (см. [33]).

ЛЕММА 10. Пусть $f: X \rightarrow \mathbb{I}$ – G -равномерная функция на G -пространстве X со слабо d -открытым действием; счетное семейство $\mathcal{O} = \{O_n : n \in \mathbb{N}\}$ таково, что $|f(x) - f(gx)| < 1/n$ для любых $x \in X$, $g \in O_n$, $n \in \mathbb{N}$, причем $O_n = O_n^{-1}$ и $O_{n+1}^2 \subset O_n$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда f равномерно непрерывна относительно псевдоравномерности $\mathcal{W}_{\mathcal{O}}$, определяемой в предложении 4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем $|f(x) - f(gx)| < 1/(3n)$ для любых $x \in X$, $g \in O_{3n}$. Поэтому если $x, y \in \text{int}(\text{cl}(O_{3n}z))$ для некоторого $z \in X$, то $|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(z)| + |f(z) - f(y)| \leq 1/(3n) + 1/(3n) < 1/n$ (второе нестрогое неравенство следует из непрерывности f и всюду плотности $O_{3n}z$ в $\text{cl}(O_{3n}z)$). Тем самым, равномерная непрерывность доказана. Лемма 10 доказана.

На множестве $M(X)$ функций из G -пространства X в отрезок $\mathbb{I}$ (не обязательно непрерывных) определено естественное действие $\alpha': G \times M(X) \rightarrow M(X)$ по правилу $\alpha'(g, f(x)) = f(g^{-1}x)$. Легко проверить (см., например, [17]), что

если f – G -равномерная функция, то для любого $g \in G$ функция gf также G -равномерна и ограничение действия α' на подмножество G -равномерных функций в топологии равномерной сходимости является непрерывным.

Для любой функции $f: X \rightarrow \mathbb{I}$ выполнено $g(f^{-1}(0, 1]) = (gf)^{-1}(0, 1]$ (так как $x \in g(f^{-1}(0, 1]) \iff g^{-1}x \in f^{-1}(0, 1] \iff f(g^{-1}x) > 0 \iff (gf)(x) > 0 \iff x \in (gf)^{-1}(0, 1]$).

Напомним, что топологическая группа G называется $\aleph_0$ -уравновешенной (см. [14]) или группой с квазинвариантным базисом (см. [34]), если для каждого элемента $O \in N_G(e)$ существует такое счетное семейство $\mathcal{O}$ элементов $N_G(e)$, что для любого $g \in G$ найдется $V \in \mathcal{O}$, для которого $gVg^{-1} \subset O$.

ЛЕММА 11. Пусть X – G -пространство и действующая группа G $\aleph_0$ -уравновешена. Тогда для любой G -равномерной функции существует счетное семейство $\mathcal{O} \subset N_G(e)$, удовлетворяющее условиям (i)–(iii) предложения 4, такое, что для любых $\varepsilon > 0$ и $g \in G$ существует $O \in \mathcal{O}$, для которого $|(gf)(x) - (gf)(hx)| < \varepsilon$ для любых $h \in O$, $x \in X$ (т.е. для любого $g \in G$ функция gf равномерно непрерывна на X с псевдоравномерностью $\mathcal{U}_{\mathcal{O}}$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $U_n \in N_G(e)$ такое, что $|f(x) - f(hx)| < 1/n$ для любых $h \in U_n$, $x \in X$, $n \in \mathbb{N}$.

Так как группа $\aleph_0$ -уравновешена, то для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует счетное семейство U_i^n , $i \in \mathbb{N}$, такое, что $U_1^n \subset U_n$, $U_{i+1}^n \subset U_i^n$, $i \in \mathbb{N}$, и для любого $g \in G$ существует $i(g) \in \mathbb{N}$, для которого $g^{-1}U_{i(g)}^n g \subset U_n$. Заметим, что для $h \in U_{i(g)}^n$ имеем $f(g^{-1}hx) = f(tg^{-1}x)$ для некоторого $t \in U_n$. Но $|f(y) - f(ty)| < 1/n$ для любых $t \in U_n$, $y \in X$, в частности для $y = g^{-1}x$. Значит, $|(gf)(x) - (gf)(hx)| < 1/n$ для любых $x \in X$, $h \in U_{i(g)}^n$.

Положим $O_1 = U_1$. Последовательно построим множества O_n такие, что $O_n^2 \subset O_{n-1}$, $O_n^{-1} \subset O_{n-1}$, $O_n \subset \bigcap \{U_k^j : j = 1, \dots, n-1, j+k=n\}$.

Тогда несложно проверить, что счетное семейство $\mathcal{O} = \{O_i : i \in \mathbb{N}\}$ удовлетворяет условиям (i)–(iii) предложения 4, и, тем самым, для любых $\varepsilon > 0$ и $g \in G$ существует $O \in \mathcal{O}$, для которого $|(gf)(x) - (gf)(hx)| < \varepsilon$ для любых $h \in O$, $x \in X$. Лемма 11 доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Пусть X – G -пространство с d -открытым действием $\aleph_0$ -уравновешенной группы. Тогда для любых $T \subset G$ и открытого подмножества $W \subset X$ существует открытое в X подмножество $W' \subset W$ такое, что семейство $\{gW' : g \in T\}$ является нормальным покрытием своего тела $\bigcup \{gW' : g \in T\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как пространство X является G -тихоновским, то положим $W' = f^{-1}(0, 1] \subset W$, где f – G -равномерная функция. Для доказательства предложения достаточно найти метризуемое пространство M и отображения $\psi: X \rightarrow M$ и $f_g: M \rightarrow \mathbb{I}$ такие, что $f_g \circ \psi = gf$ (см., например, [22; упражнение 5.4.H, (c)]), $g \in T$.

По лемме 11 существует счетное семейство $\mathcal{O} \subset N_G(e)$, удовлетворяющее условиям (i)–(iii) предложения 4, такое, что для любых $\varepsilon > 0$ и $g \in G$ существует $O \in \mathcal{O}$, для которого $|(gf)(x) - (gf)(hx)| < \varepsilon$ для любых $h \in O$, $x \in X$. Вес семейства $\mathcal{O}$ счетен, поэтому вес псевдоравномерности $\mathcal{U}_{\mathcal{O}}$, определяемой в предложении 4, также счетен, и можно считать, что она порождается псевдометрикой ρ на X . По замечанию 5 определено непрерывное отображение $\psi: X \rightarrow X_{E(\rho)}$ в метрическое пространство $M = X_{E(\rho)}$ с метрикой $\bar{\rho}$.

Легко проверить, что если $\rho(x, y) = 0$, то $gf(x) = gf(y)$ для любого $g \in G$. Поэтому для любого $g \in T$ определены функции $f_g: M \rightarrow \mathbb{I}$ (по правилу $f_g([x]_{E(\rho)}) = f(x)$) и $f_g \circ \psi = gf$.

Из леммы 10 следует, что для любых $\varepsilon > 0$ и $g \in G$ существует $\delta > 0$ такое, что если $\rho(x, y) < \delta$, то $|gf(x) - gf(y)| < \varepsilon$. Значит, функции $f_g: M \rightarrow \mathbb{I}$, $g \in T$, являются (равномерно) непрерывными. Предложение 8 доказано.

ЛЕММА 12. Пусть X – псевдокомпактное G -пространство с d -открытым действием $\aleph_0$ -уравновешенной группы. Тогда действие равномерно локально вполне ограничено.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу псевдокомпактности X у действия конечное число компонент. Не ограничивая общности рассуждений, считаем, что компонента одна.

По лемме 4 для $U \in N_G(e)$ такого, что $U^{-1} = U$, $U^2 \subset O$, имеем $\text{cl}(Ux) \subset \bigcup \{g \text{int}(\text{cl}(Vx)) : g \in O\}$ для любых $x \in X$, $V \in N_G(e)$. Так как пространство X G -тихоновское, то существуют $V' \in N_G(e)$ и G -равномерная функция f такие, что $\text{int}(\text{cl}(V'x)) \in W = f^{-1}(0, 1] \subset \text{int}(\text{cl}(Vx))$.

Из предложения 8 следует, что семейство $\{gW : g \in O\}$ является нормальным покрытием $\text{cl}(Ux)$. Множество $\text{cl}(Ux)$ является канонически замкнутым ($Ux \subset \text{int}(\text{cl}(Ux)) \subset \text{cl}(Ux)$) и поэтому псевдокомпактным. Значит, из его покрытия $\{g \text{int}(\text{cl}(Vx)) : g \in O\}$ можно выбрать конечное подпокрытие. Очевидно, что $\{\text{int}(\text{cl}(Ux)) : x \in X\} \in \mathcal{U}_{N_G(e)}$. Лемма 12 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3. d -открытое действие $\aleph_0$ -уравновешенной группы, имеющее одну компоненту, на псевдокомпактном G -пространстве является вполне ограниченным.

§ 6. Действия метризуемых и почти метризуемых групп

ТЕОРЕМА 1. Пусть действие на X слабо d -открыто и существует счетное семейство $\mathcal{O} \subset N_G(e)$, удовлетворяющее условиям (i), (ii) и (*) предложения 4. Тогда:

- (i) X в топологии $\tau_{\mathcal{O}}$ метризуемо (тем самым, X субметризуемо);
- (ii) если X – псевдокомпактное пространство, то X – компактное G -пространство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $\mathcal{O} = \{O_i : i \in \mathbb{N}\}$, где $O_i^{-1} = O_i$, $O_{i+1}^2 \subset O_i$, $i \in \mathbb{N}$. По предложению 4 семейство $\mathcal{U}_{\mathcal{O}}$ является равномерностью со счетной базой на X и X в индуцированной ею топологии $\tau_{\mathcal{O}}$ метризуемо (см., например, [22; теорема 8.1.21]), тем самым, X субметризуемо.

Так как субметризуемое псевдокомпактное пространство метризуемо (см. [35]), то X – компакт. Остается сослаться на следствие 1. Теорема 1 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть действие на X слабо d -открыто и счетное семейство $\mathcal{O} \subset N_G(e)$ удовлетворяет условиям (i)–(iii) и (*) предложения 4.

Тогда X в топологии $\tau_{\mathcal{O}}$ – метризуемое G -пространство. В частности, если X – G -пространство со слабо d -открытым действием метризуемой группы, то X – метризуемое G -пространство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 1 пространство X в топологии τ_θ метризуемо, а действие непрерывно по предложению 4.

Если X – G -пространство со слабо d -открытым действием метризуемой группы, а θ – счетная база семейства $N_G(e)$, то из непрерывности действия следует, что для любых двух различных точек x, y пространства X существует окрестность $O \in \theta$ такая, что x и y не принадлежат одному элементу покрытия γ_O . Остается показать, что топология τ_θ совпадает с топологией на пространстве X .

По предложению 4 нужно лишь показать, что любое открытое множество O в пространстве X является открытым и в топологии τ_θ . Пусть $x \in O$, а открытые множества $W \subset O$, $V, U \in \theta$ такие, что $x \in W$, $V^2 \subset U$, $V^{-1} \subset U$, $\text{cl}(UW) \subset O$. Тогда если $x \in \text{int}(\text{cl}(Vz))$, то существует $t \in V$ такой, что $tz \in W$. Поэтому $\text{cl}(Vz) \subset \text{cl}(V^2W) \subset \text{cl}(UW) \subset O$. Тем самым, показано, что $\text{St}(x, \gamma_V) \subset O$, т.е. любая точка открытого в X множества O является внутренней точкой O в топологии τ_θ . Следствие 4 доказано.

Если действие на пространстве X слабо d -открыто и H – равномерная подгруппа G , то по семейству $N_G(H)$, определенному в лемме 6, на X согласно предложению 4 строится псевдоравномерность, которую обозначим $\mathcal{U}_H$.

ЛЕММА 13. Пусть X – G пространство с d -открытым действием и H – равномерная подгруппа G . Тогда $[x]_{\mathcal{U}_H} = \text{cl}(Hx)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что для любых $x \in X$ и $O \in N_G(H)$ имеем $Hx \subset \text{St}(x, \gamma_O)$. Пусть $O = UH$, где $U \in N_G(e)$, и $V \in N_G(e)$ такое, что $HV \subset UH$. Отметим, что $VH \in N_G(H)$. Так как $x \in \text{St}(x, \gamma_{VH})$, то, используя лемму 1, имеем $Hx \subset H \text{St}(x, \gamma_{VH}) \subset \text{St}(x, \gamma_{HVH}) \subset \text{St}(x, \gamma_{UH}) \subset \text{St}(x, \gamma_O)$. Тем самым, $Hx \subset [x]_{\mathcal{U}_H} = \bigcap \{\text{St}(x, v) : v \in \mathcal{F}\}$, а в силу замкнутости последнего множества имеем $\text{cl}(Hx) \subset [x]_{\mathcal{U}_H}$.

Предположим, что существует $y \in [x]_{\mathcal{U}_H} \setminus \text{cl}(Hx)$. Достаточно показать, что существует окрестность $U \in N_G(H)$ такая, что $y \notin \text{cl}(Ux)$. Тогда из леммы 3 вытекает существование $W \in N_G(H)$ такой, что $\text{St}(x, \gamma_W) \subset \text{cl}(Ux)$; тем самым, $y \notin \text{St}(x, \gamma_W)$.

Так как действие непрерывно и $y \notin \text{cl}(Hx)$, то существует $O \in N_G(e)$ такая, что $O^{-1} = O$, и $\text{cl}(O^2y) \cap \text{cl}(Hx) = \emptyset$. Так как действие d -открыто, то множество $H \text{int}(\text{cl}(O^2y))$ открыто, содержит Hy и $H \text{int}(\text{cl}(O^2y)) \cap \text{cl}(Hx) = \emptyset$ (так как $\text{int}(\text{cl}(O^2y)) \cap \text{cl}(Hx) = \emptyset$, а $H \text{cl}(Hx) = \text{cl}(Hx)$).

Пусть $V \in N_G(e)$ такая, что $VH \subset HO$, $V = V^{-1}$, $V \subset O$. Покажем, что

$$\text{int}(\text{cl}(Vx)) \cap H \text{int}(\text{cl}(Vy)) = \emptyset.$$

Пусть пересечение непусто. Так как множество Vx плотно в открытом множестве $\text{int}(\text{cl}(Vx))$, а $\text{int}(\text{cl}(Vx)) \cap H \text{int}(\text{cl}(Vy))$ открыто в $\text{int}(\text{cl}(Vx))$, то существует $g \in V$ такой, что $gx \in H \text{int}(\text{cl}(Vy))$. Поэтому $x \in g^{-1}H \text{int}(\text{cl}(Vy)) \subset HO \text{int}(\text{cl}(Vy))$. Имеем

$$HO \text{int}(\text{cl}(Vy)) \subset H \text{int}(\text{cl}(OVy)) \subset H \text{int}(\text{cl}(O^2y)).$$

Но мы имеем $H \text{int}(\text{cl}(O^2y)) \cap \text{cl}(Hx) = \emptyset$. Полученное противоречие показывает, что $\text{int}(\text{cl}(Vx)) \cap H \text{int}(\text{cl}(Vy)) = \emptyset$.

Имеем

$$H \text{int}(\text{cl}(Vx)) \cap H \text{int}(\text{cl}(Vy)) = \emptyset$$

(так как $\text{int}(\text{cl}(Vx)) \cap H \text{int}(\text{cl}(Vy)) = \emptyset$, а $H^2 \text{int}(\text{cl}(Vy)) = H \text{int}(\text{cl}(Vy))$). Множество $H \text{int}(\text{cl}(Vy))$ открыто, поэтому $\text{cl}(H \text{int}(\text{cl}(Vx))) \cap H \text{int}(\text{cl}(Vy)) = \emptyset$. Так как $Vx \subset \text{int}(\text{cl}(Vx))$, то $\text{cl}(HVx) \cap H \text{int}(\text{cl}(Vy)) = \emptyset$.

Пусть $U = V'H \in N_G(H)$, где $V' \in N_G(e)$ таково, что $V'H \subset HV$. Тогда $y \notin \text{cl}(Ux)$. Лемма 13 доказана.

ВОПРОС 6. Можно ли в условиях леммы 13 ослабить действие до слабо d -открытого? А если дополнительно потребовать, чтобы подгруппа H удовлетворяла условию $(\star\star)$?

ЛЕММА 14. Пусть X – G пространство с d -открытым действием, H – равномерная подгруппа G и $\text{cl}(Hx)$ – бикомпакт для некоторой точки $x \in X$. Тогда для любой базы $\mathcal{B}$ семейства $N_G(H)$ множества $\text{int}(\text{cl}(Wx))$, $W \in \mathcal{B}$, образуют базу $\text{cl}(Hx)$ в X и характер $\text{cl}(Hx)$ в X не превосходит веса семейства $N_G(H)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{B}$ – база семейства $N_G(H)$. Так как по лемме 6 семейство $N_G(H)$ удовлетворяет условиям (i) и (ii) предложения 4, то им удовлетворяет и база $\mathcal{B}$.

Пусть O – произвольная окрестность множества $\text{cl}(Hx)$. Для любой точки $y \in \text{cl}(Hx)$ существуют ее окрестность V_y в X и открытое множество $U_y \in N_G(e)$ такие, что $U_y V_y \subset O$. Из семейства $\{V_y : y \in \text{cl}(Hx)\}$, покрывающего бикомпакт $\text{cl}(Hx)$, выделим конечное подсемейство $\{V_i : i = 1, \dots, k\}$, покрывающее $\text{cl}(Hx)$. Тогда для $U = \bigcap \{U_i : i = 1, \dots, k\}$, очевидно, выполнено $U \text{cl}(Hx) \subset O$. Так как $H \text{cl}(Hx) = \text{cl}(Hx)$, то $UH \text{cl}(Hx) \subset O$. Также можно считать, что $\text{cl}(UH \text{cl}(Hx)) \subset O$ (в силу того, что всегда вместо O можно взять окрестность O' множества $\text{cl}(Hx)$ такую, что $\text{cl}(Hx) \subset O' \subset \text{cl} O' \subset O$). Тем самым, $\text{cl}(UH \text{cl}(Hx)) = \text{cl}(UHx) \subset O$. Так как $UH \in N_G(H)$, то существует $W \in \mathcal{B}$ такая, что $W \subset UH$. Имеем $\text{cl}(Hx) \subset \text{int}(\text{cl}(Wx)) \subset O$ (так как $[x]_{\mathcal{U}_H} = \text{cl}(Hx)$ по лемме 13; $[x]_{\mathcal{U}_H} = \bigcap \{\text{St}(x, \gamma_V) : V \in \mathcal{B}\}$, и из леммы 3 вытекает, что для $W \in \mathcal{B}$ существует $W' \in \mathcal{B}$ такое, что $\text{St}(x, \gamma_{W'}) \subset \text{int}(\text{cl}(Wx))$). Тем самым, показано, что семейство $\text{int}(\text{cl}(Wx))$, $W \in \mathcal{B}$, образует базу $\text{cl}(Hx)$ в X . Лемма 14 доказана.

Если H – бикомпактная подгруппа G , то семейство $N_G(H)$ образует базу окрестностей H в G и для G -пространства X множества $Hx \subset X$, $x \in X$, бикомпактны. Поэтому из леммы 14 и замечания 6 получаем

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть X – G пространство с d -открытым действием, H – бикомпактная подгруппа. Тогда для любой точки $x \in X$ характер множества Hx в X не превосходит характера H в G .

ЛЕММА 15. Пусть ρ – псевдометрика на пространстве X , семейство окрестностей $O_n(x) = \{y \in X : \rho(x, y) < 1/n\}$, $n \in \mathbb{N}$, образует базу множеств $[x]_{E(\rho)}$ в X , $x \in X$. Тогда на $X/E(\rho)$ фактортопология τ совпадает с топологией $\tau_{\bar{\rho}}$, индуцируемой метрикой $\bar{\rho}$ (см. замечание 5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как фактортопология τ на $X/E(\rho)$ сильнее топологии $\tau_{\bar{\rho}}$, индуцируемой метрикой $\bar{\rho}$, то требуется лишь показать, что любое открытое в топологии τ множество $O \subset X/E(\rho)$ открыто и в топологии $\tau_{\bar{\rho}}$.

Пусть точке $[x]_{E(\rho)} \in O$ соответствует класс эквивалентности $[x]_{E(\rho)} \subset X$, а $\pi : X \rightarrow X/E(\rho)$ – факторотображение. Тогда $[x]_{E(\rho)} \subset \pi^{-1}(O)$. По условию существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $[x]_{E(\rho)} \subset O_n \subset \pi^{-1}(O)$. Значит, $[x]_{E(\rho)} \in \{[y]_{E(\rho)} \in X/E(\rho) : \bar{\rho}(x, y) < 1/n\} \subset O$. Лемма 15 доказана.

Напомним, что топологическая группа называется *почти метризуемой* (см. [36]), если в ней имеется бикомпакт счетного характера; пространство X называется *почти метризуемым* (см. [10]), если на нем так непрерывно действует бикомпактная группа G , что пространство орбит X/G метризуемо. Дадим обобщение теоремы 1 из [10].

ТЕОРЕМА 2. Пусть X – G -пространство с d -открытым действием почти метризуемой группы. Тогда X – почти метризуемое пространство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть H – бикомпактная подгруппа счетного характера в G (см. [36; лемма 2]). Вес семейства $N_G(H)$ счетен, поэтому вес псевдоравномерности $\mathcal{U}_H$, определяемой в предложении 4, также счетен, и можно считать, что она порождается псевдометрикой ρ (см., например, [22; теорема 8.1.21]). По лемме 13 $[x]_{E(\rho)} = Hx$ и Hx – бикомпакт. По лемме 14 множества $O_n(x) = \{y \in X : \rho(x, y) < 1/n\}$, $n \in \mathbb{N}$, образуют счетную базу множества $[x]_{E(\rho)}$ в X , $x \in X$. По лемме 15 факторпространство $X/E(\rho)$ метризуемо. Остается заметить, что факторпространство $X/E(\rho)$ совпадает с факторпространством X/H – пространством орбит по действию бикомпактной группы H на X . Теорема 2 доказана.

ВОПРОС 7. Можно ли в условиях теоремы 2 ослабить d -открытость действия до слабой d -открытости?

§ 7. d -пространства (od -пространства) и бикомпакты Дугунджи

Напомним определение od -пространства (d -пространства) из [6], следуя изложению из [37].

Для пространства X система $L = \{f_\alpha, f_{\beta\alpha}; A\}$, состоящая из частично упорядоченного множества A , непрерывных сюръективных отображений f_α пространства X , $\alpha \in A$, и отображений $f_{\beta\alpha}: f_\beta(X) \rightarrow f_\alpha(X)$, $\alpha, \beta \in A$, $\alpha < \beta$, называется *согласованной системой* непрерывных отображений на X , если:

- (i) диагональное произведение $\Delta\{f_\alpha \in L\}: X \rightarrow \Pi\{f_\alpha(X) : \alpha \in A\}$ является вложением;
- (ii) $f_\alpha = f_{\beta\alpha} \circ f_\beta$, $\alpha, \beta \in A$, $\alpha < \beta$.

Согласованная система отображений L называется:

- *открытой* (d -открытой), если все отображения f_α , $\alpha \in A$, открыты (d -открыты);
- *эквивариантной*, если X – G -пространство и все отображения f_α , $\alpha \in A$, эквивариантны;
- *слабо мультипликативной*, если для любого $B \subset A$ существует $\beta = \sup B$ в A такое, что диагональное произведение $\Delta\{f_{\beta\alpha} : \alpha \in B\}$ инъективно;
- μ -*системой*, если диагональное произведение $\Delta\{f_\alpha \in L : f_\alpha(X) \text{ субметризуемо}\}$ является вложением.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 (см. [6]). Топологическое пространство называется *od-пространством* (d -пространством), если существует согласованная открытая (соответственно d -открытая) слабо мультипликативная μ -система непрерывных отображений на пространстве X .

Классы бикомпактных od - и d -пространств совпадают с классом бикомпактов Дугунджи (см. [6; предложение 2]), а бикомпактификация Стоуна–Чеха βX пространства X есть бикомпакт Дугунджи в том и только том случае, если X – псевдокompактное d -пространство (см. [6; предложение 4]).

ЛЕММА 16. *Сумма $X = \bigoplus \{X_s : s \in S\}$ d -пространств (od -пространств) X_s , $s \in S$, является d -пространством (соответственно od -пространством).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для пространства X_s существует согласованная открытая (d -открытая) слабо мультипликативная μ -система $L_s = \{f_\alpha, f_{\beta\alpha}; A_s\}$ непрерывных отображений. Пусть $A = \Pi\{A_s : s \in S\}$ – частично упорядоченное множество с порядком $\alpha = \{\alpha_s : s \in S\} \leq \beta = \{\beta_s : s \in S\}$, если $\alpha_s \leq \beta_s$, $s \in S$; $f_\alpha = \bigoplus \{f_{\alpha_s} : s \in S\}$ (сумма отображений определена, например, в [22; упражнение 2.2.E]); $f_{\beta\alpha} = \bigoplus \{f_{\beta_s\alpha_s} : s \in S\}$, если $\alpha < \beta$. Очевидно, система отображений $L = \{f_\alpha, f_{\beta\alpha}; A\}$ является согласованной и открытой (d -открытой); утверждение об открытости имеется, например, в [22; упражнение 2.2.E].

Для любого $B = \{\beta^t = \{\beta_s^t : s \in S\} : t \in T\} \subset A$ существуют $\alpha_s = \sup\{\beta_s^t : t \in T\}$, $s \in S$. Тогда $\alpha = \{\alpha_s : s \in S\} = \sup B$. Так как диагональные произведения $\Delta\{f_{\alpha_s\beta_s^t} : t \in T\}$, $s \in S$, инъективны, то инъективна и их сумма. Значит, система отображений слабо мультипликативна. Так как сумма субметризуемых пространств субметризуема, то L – μ -система. Тем самым, X – пространство (od -пространство). Лемма 16 доказана.

Пусть $\mathcal{F}$ – семейство эквивариантных факторотображений G -пространства X . Положим $f \geq h$, $f, h \in \mathcal{F}$, если существует $p_{fh} : f(X) \rightarrow h(X)$ такое, что $p_{fh} \circ f = h$. Отметим, что в этом случае отображение $p = p_{fh}$ эквивариантно. Действительно, пусть $y = f(x) \in f(X)$ и $g \in G$. Для доказательства равенства $p(gy) = gp(y)$ достаточно показать, что $h^{-1}(p(gy)) = h^{-1}(gp(y))$. Последнее равенство вытекает из следующего: $h^{-1}(p(gy)) = h^{-1}(p(g(f(x)))) = h^{-1}(p(f(gx))) = h^{-1}(h(gx)) = h^{-1}(gh(x)) = h^{-1}(g(p(f(x)))) = h^{-1}(g(p(y)))$. После отождествления отображений $f, h \in \mathcal{F}$ таких, что $f \geq h$ и $h \geq f$ (отношение эквивалентности на $\mathcal{F}$), семейство классов эквивалентности (будем его также обозначать $\mathcal{F}$) становится частично упорядоченным множеством.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. *Пусть X – G -пространство со слабо d -открытым действием, удовлетворяющим следующему свойству:*

- (s) *для любых точки x и ее окрестности W существует такое (счетное) семейство $\mathcal{O}_{xW} \subset N_G(e)$, удовлетворяющее условиям (i)–(iii) предложения 4, для которого существует $O \in \mathcal{O}_{xW}$ и $\text{St}(x, \gamma_O) \cap (X \setminus W) = \emptyset$.*

Тогда для семейства $\mathcal{F}$ эквивариантных факторотображений X семейство $L = \{f \in \mathcal{F}; p_{fh}, f, h \in \mathcal{F}, f \geq h; \mathcal{F}\}$ является согласованной слабо мультипликативной эквивариантной системой (соответственно μ -системой) отображений на X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предложению 4 псевдоравномерность $\mathcal{U}_{xW} = \mathcal{U}_{\mathcal{O}_{xW}}$, где $x \in X$ и W – ее окрестность, является инвариантной. По предложению 3 на факторпространстве $X/E(\mathcal{U}_{xW})$ определено действие группы G , и факторотображение $q : X \rightarrow X/E(\mathcal{U}_{xW})$ эквивариантно. При этом $q(x) \notin \text{cl } q(X \setminus W)$. Кроме того, если семейство $\mathcal{O}_{xW}$ счетно, то из предложения 3 вытекает, что пространство $X/E(\mathcal{U}_{xW})$ субметризуемо. Поэтому семейство эквивариантных

факторотображений (чьи образы субметризуемы) разделяет точки и замкнутые множества пространства X . Тем самым, используя теорему о диагональном отображении (см., например, [22; теорема 2.3.20]), получаем, что L – согласованная эквивариантная система (соответственно μ -система) отображений на X .

Из эквивариантности диагонального произведения эквивариантных отображений следует ее слабая мультипликативность. Предложение 9 доказано.

Везде ниже свойство (s) рассматривается с условием счетности.

ТЕОРЕМА 3. Пусть X – G -пространство с открытым действием, удовлетворяющим свойству (s). Тогда X – od -пространство с согласованной слабо мультипликативной эквивариантной открытой μ -системой отображений.

Если дополнительно X – бикомпакт, то X – бикомпакт Дугунджи.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предложению 9 для семейства $\mathcal{F}$ эквивариантных факторотображений X семейство $L = \{f \in \mathcal{F}; p_{fh}, f, h \in \mathcal{F}, f \geq h; \mathcal{F}\}$ является согласованной слабо мультипликативной эквивариантной μ -системой отображений на X . Из предложения 2 следует, что любое эквивариантное факторотображение на X открыто. Тем самым, система L открыта и X – od -пространство.

Заключительное утверждение теоремы следует из [6; предложение 2]. Теорема 3 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 6. Пусть X – G -пространство с открытым действием $\aleph_0$ -уравновешенной группы. Тогда X – od -пространство. Если дополнительно X – бикомпакт, то X – бикомпакт Дугунджи.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как пространство X является G -тихоновским (см. [25]), то для любых точки $x \in X$ и ее окрестности W существует G -равномерная функция f такая, что $f(x) \notin \text{cl } f(X \setminus W)$. По лемме 11 существует счетное семейство $\mathcal{O} \subset N_G(e)$, удовлетворяющее условиям (i)–(iii) предложения 4, такое, что для любого $g \in G$ функция gf равномерно непрерывна на X с равномерностью $\mathcal{U}_{\mathcal{O}}$. Значит, существует $O \in \mathcal{O}$ такое, что $\text{St}(x, \gamma_O) \cap (X \setminus W) = \emptyset$. По теореме 3 X – od -пространство. Следствие 6 доказано.

Принимая во внимание замечание 2, видим, что следствие 6 обобщает предложение 9 из [6] (и теорему 2 из [15]), где, в частности, утверждается, что факторпространство (соответственно бикомпактное факторпространство) $\aleph_0$ -уравновешенной группы является od -пространством (соответственно бикомпактом Дугунджи).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. Пусть H – равномерная подгруппа G , $X = G/H$. Тогда для семейства $\mathcal{F}$ эквивариантных факторотображений X семейство $L = \{f \in \mathcal{F}; p_{fh}, f, h \in \mathcal{F}, f \geq h; \mathcal{F}\}$ является согласованной слабо мультипликативной эквивариантной μ -системой отображений на X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения топологии τ_H следует, что для любых $x \in X$ и ее окрестности W существует $O(x, W) \in N_G(H)$ такое, что

$$\text{St}(x, \varphi_{O(x, W)}) \subset W.$$

Так как H – равномерная подгруппа G , то существует такое стандартным образом построенное счетное семейство $\mathcal{O}_{xW}$ элементов $N_G(H)$, удовлетворяющее условиям (i)–(ii) предложения 4, что $O(x, W) \in \mathcal{O}_{xW}$. При этом псевдоравномерность $\mathcal{V}_{xW} = \mathcal{V}_{\mathcal{O}_{xW}}$ со счетной базой является инвариантной. По

предложению 3 на факторпространстве $X/E(\mathcal{V}_{xW})$ определено действие группы G , и факторотображение $q: X \rightarrow X/E(\mathcal{V}_{xW})$ эквивариантно. При этом $q(x) \notin \text{cl } q(X \setminus W)$. Также по предложению 3 пространство $X/E(\mathcal{V}_{xW})$ субметризуемо. Поэтому семейство эквивариантных факторотображений, чьи образы субметризуемы, разделяет точки и замкнутые множества пространства X . Тем самым, используя теорему о диагональном отображении (см., например, [22; теорема 2.3.20]), получаем, что L – согласованная эквивариантная μ -система отображений на X .

Из эквивариантности диагонального произведения эквивариантных отображений следует ее слабая мультипликативность. Предложение 10 доказано.

Принимая во внимание лемму 16, замечание 2 и предложения 10, 2, получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 4. Пусть X – G -пространство с открытым действием и любая компонента действия гомеоморфна факторпространству по равномерной подгруппе. Тогда X – od -пространство. В частности, если X – бикомпакт, то X – бикомпакт Дугунджи.

Принимая во внимание замечание 2, видим, что теорема 4 обобщает результат из [13], где, в частности, утверждается, что бикомпактное факторпространство группы по равномерной подгруппе является бикомпактом Дугунджи.

СЛЕДСТВИЕ 7. Факторпространство G/K топологической группы G по ее произвольной равномерной подгруппе K является od -пространством. В частности, любая топологическая группа является od -пространством (см. [6]). Бикомпактная топологическая группа – бикомпакт Дугунджи.

ТЕОРЕМА 5. Пусть X – G -пространство с вполне ограниченным d -открытым действием, удовлетворяющим свойству (s). Тогда X – d -пространство с согласованной слабо мультипликативной эквивариантной d -открытой μ -системой отображений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предложению 9 на G -пространстве X существует согласованная слабо мультипликативная эквивариантная μ -система. По предложению 6 любое эквивариантное отображение на X является d -открытым. Поэтому согласованная система будет d -открытой. Теорема 5 доказана.

Из теоремы 5, замечаний 2, 7 и следствия 3 получаем

СЛЕДСТВИЕ 8. Пусть X – бикомпактное (псевдокомпактное) G -пространство с d -открытым действием $\aleph_0$ -уравновешенной группы. Тогда X – бикомпакт Дугунджи (соответственно d -пространство).

ЗАМЕЧАНИЕ 11. Так как транзитивное непрерывное действие $\aleph_0$ -ограниченной группы на пространстве со свойством Бэра d -открыто (см. [6; лемма 9]), то из следствия 8 вытекают результаты В. В. Успенского из [15], [6].

В [10; теорема 6] утверждается, что бикомпактное почти метризуемое пространство – бикомпакт Дугунджи.

ВОПРОС 8. Является ли почти метризуемое пространство d -пространством?

Из предложения 7 и следствий 2, 8 получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 6. Пусть X – G -пространство с равномерно локально вполне ограниченным действием $\aleph_0$ -уравновешенной группы и вполне ограниченной равномерностью $\mathcal{U}_{N_G(e)}$. Тогда единственное бикомпактное G -расширение $\beta_G X$ – бикомпакт Дугунджи и X – d -пространство (так как всюду плотное подмножество d -пространства является d -пространством; см. [6]).

Так как псевдокомпактное пространство G_δ -плотно в любой своей бикомпактификации, то из результата М. Г. Ткаченко [38; следствие 2] о C -вложенности G_δ -плотного подмножества κ -метризуемого пространства (см. [4]), леммы 12 и теоремы 6 получаем

СЛЕДСТВИЕ 9. Пусть X – псевдокомпактное G -пространство с d -открытым действием $\aleph_0$ -уравновешенной группы. Тогда $\beta_G X = \beta X$ – бикомпакт Дугунджи.

Следствие 9 обобщает результаты В. В. Успенского – теоремы 2, 3 из работы [6]. В связи со следствием 9 интересен следующий вопрос.

ВОПРОС 9. Существует ли псевдокомпактное G -пространство X с d -открытым действием, для которого $\beta_G X \neq \beta X$?

Отметим, что в [39] приведен пример псевдокомпактного G -тихоновского пространства X , для которого $\beta_G X \neq \beta X$.

ЗАМЕЧАНИЕ 12. Действие вполне ограниченной (в частности, псевдокомпактной) группы G на себе левыми сдвигами является равномерно локально вполне ограниченным. Тем самым, $\beta_G G$, где G – вполне ограниченная группа, есть бикомпакт Дугунджи. В этом случае $\beta_G G$ – бикомпактная группа, являющаяся пополнением G по Вейлю (по правой равномерности). (Напомним, что других бикомпактных G -расширений нет.)

Список литературы

- [1] А. Пелчинский, *Линейные продолжения, линейные усреднения и их применения к линейной топологической классификации пространств непрерывных функций*, Мир, М., 1970; пер. с англ.: A. Pelczyński, *Linear extensions, linear averagings, and their applications to linear topological classification of spaces of continuous functions*, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.), **58**, 1968.
- [2] R. Haydon, “On a problem of Pelczyński: Milutin spaces, Dugundji spaces and AE ($0 - \dim$)”, *Studia Math.*, **52**:1 (1974), 23–31.
- [3] Е. В. Щепин, “Топология предельных пространств несчетных обратных спектров”, *УМН*, **31**:5 (1976), 191–226; англ. пер.: E. V. Shchepin, “Topology of limit spaces of uncountable inverse spectra”, *Russian Math. Surveys*, **31**:5 (1976), 155–191.
- [4] Е. В. Щепин, “О κ -метризуемых пространствах”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **43**:2 (1979), 442–478; англ. пер.: E. V. Ščepin, “On κ -metrizable space”, *Math. USSR-Izv.*, **14**:2 (1980), 407–440.
- [5] Е. В. Щепин, “Функторы и несчетные степени компактов”, *УМН*, **36**:3 (1981), 3–62; англ. пер.: E. V. Shchepin, “Functors and uncountable powers of compacta”, *Russian Math. Surveys*, **36**:3 (1981), 1–71.
- [6] В. В. Успенский, “Топологические группы и компакты Дугунджи”, *Матем. сб.*, **180**:8 (1989), 1092–1118; англ. пер.: V. V. Uspenskii, “Topological groups and Dugundji compacta”, *Math. USSR-Sb.*, **67**:2 (1990), 555–580.

- [7] Л. Н. Ивановский, “Об одной гипотезе П. С. Александра”, *Докл. АН СССР*, **123**:5 (1958), 785–786.
- [8] В. И. Кузьминов, “О гипотезе П. С. Александра в теории топологических групп”, *Докл. АН СССР*, **125**:4 (1959), 727–729.
- [9] М. М. Чобан, “Топологическое строение подмножеств топологических групп и их факторпространств”, *Мат. исследования*, **8**, № 4, Штиинца, Кишинев, 1973, 111–156.
- [10] Б. А. Пасынков, “О пространствах с бикомпактной группой преобразований”, *Докл. АН СССР*, **231**:1 (1976), 39–42; англ. пер.: B. A. Pasynkov, “On spaces with a compact group of transformations”, *Soviet Math. Dokl.*, **17**:6 (1976), 1522–1526.
- [11] А. В. Архангельский, “Топологическая однородность. Топологические группы и их непрерывные образы”, *УМН*, **42**:2 (1987), 69–105; англ. пер.: A. V. Arkhangel'skii, “Topological homogeneity. Topological groups and their continuous images”, *Russian Math. Surveys*, **42**:2 (1987), 83–131.
- [12] М. М. Чобан, “Редукционные теоремы о существовании непрерывных сечений. Сечения над подмножествами факторпространств топологических групп”, *Топологические структуры и алгебраические системы*, Штиинца, Кишинев, 1977, 117–163.
- [13] S. Hernández, M. Sanchis, “Dugundji spaces in the coset space G/H ”, *Papers on general topology and applications* (Flushing, NY, 1992), Ann. New York Acad. Sci., **728**, New York Acad. Sci., New York, 1994, 262–268.
- [14] А. В. Архангельский, “Классы топологических групп”, *УМН*, **36**:3 (1981), 127–146; англ. пер.: A. V. Arkhangel'skii, “Classes of topological groups”, *Russian Math. Surveys*, **36**:3 (1981), 151–174.
- [15] В. В. Успенский, “Компактные факторпространства топологических групп и спектры Хейдона”, *Матем. заметки*, **42**:4 (1987), 594–602; англ. пер.: V. V. Uspenskii, “Compact factor spaces of topological groups and Haydon spectra”, *Math. Notes*, **42**:4 (1987), 827–831.
- [16] И. И. Гуран, “О топологических группах, близких к группам Линделёфа”, *Докл. АН СССР*, **256**:6 (1981), 1305–1307; англ. пер.: I. I. Guran, “On topological groups close to being Lindelöf”, *Soviet Math. Dokl.*, **23**:1 (1981), 173–175.
- [17] С. А. Антонян, Ю. М. Смирнов, “Универсальные объекты и бикомпактные расширения для топологических групп преобразований”, *Докл. АН СССР*, **257**:3 (1981), 521–526; англ. пер.: S. A. Antonyan, Yu. M. Smirnov, “Universal objects and compact extensions for topological transformation groups”, *Soviet Math. Dokl.*, **23**:2 (1981), 279–284.
- [18] R. S. Palais, “The classification of G -spaces”, *Mem. Amer. Math. Soc.*, 1960, № 36, 1–72.
- [19] J. de Vries, *Topological transformation groups. 1. A categorical approach*, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1975.
- [20] J. de Vries, “On the existence of G -compactifications”, *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.*, **26**:3 (1978), 275–280.
- [21] К. Л. Козлов, В. А. Чатырко, “О бикомпактных G -расширениях”, *Матем. заметки*, **78**:5 (2005), 695–709; англ. пер.: K. L. Kozlov, V. A. Chatyrko, “On G -compactifications”, *Math. Notes*, **78**:5–6 (2005), 649–661.
- [22] Р. Энгелькинг, *Общая топология*, Мир, М., 1986; пер. с англ.: R. Engelking, *General topology*, Polish Scientific Publ., Warsaw, 1977.
- [23] J. R. Isbell, *Uniform spaces*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1964.
- [24] J. van Mill, “Homogeneous spaces and transitive actions by Polish groups”, *Israel J. Math.*, **165**:1 (2008), 133–159.
- [25] V. A. Chatyrko, K. L. Kozlov, “The maximal G -compactifications of G -spaces with special actions”, *Proc. 9-th Prague Topological Symposium* (Prague, 2001), Topol. Atlas, North Bay, ON, 2002, 15–21.

- [26] М. Г. Мегрелишвили, “Эквивариантные пополнения и бикомпактные расширения”, *Сообщ. АН ГССР*, **115**:1 (1984), 21–24.
- [27] J. Poncet, “Une classe d’espace homogènes possédant une mesure invariante”, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, **238** (1954), 553–554.
- [28] W. Roelcke, S. Dierolf, *Uniform structures on topological groups and their quotients*, McGraw-Hill, New York, 1981.
- [29] Дж. Л. Келли, *Общая топология*, Наука, М., 1981; пер. с англ.: J. L. Kelley, *General topology*, Van Nostrand, Toronto–New York–London, 1955.
- [30] J. de Vries, “ G -spaces: compactifications and pseudocompactness”, *Topology theory and applications* (Eger, 1983), Colloq. Math. Soc. János Bolyai, **41**, North-Holland, Amsterdam, 1985, 655–666.
- [31] N. Antonyan, S. Antonyan, “Free G -spaces and maximal equivariant compactifications”, *Ann. Mat. Pura Appl.* (4), **184**:3 (2005), 407–420.
- [32] V. Chatyrko, K. Kozlov, *Dimension of maximal equivariant compact extensions*, Preprint LiTH-MAT-R-2001-11, Linköping University, 2001.
- [33] Е. В. Щепин, “Вещественные функции и канонические множества в тихоновских произведениях и топологических группах”, *УМН*, **31**:6 (1976), 17–27; англ. пер.: E. V. Shchepin, “Real functions and canonical sets in Tikhonov products and topological groups”, *Russian Math. Surveys*, **31**:6 (1976), 17–27.
- [34] Г. И. Кац, “Изоморфное отображение топологических групп в прямые произведения групп, удовлетворяющих первой аксиоме счетности”, *УМН*, **8**:6 (1953), 107–113.
- [35] Н. В. Величко, “Заметка о перистых пространствах”, *Czechoslovak Math. J.*, **25**:1 (1975), 8–19.
- [36] Б. А. Пасынков, “Почти метризуемые топологические группы”, *Докл. АН СССР*, **161**:2 (1965), 281–284; англ. пер.: B. A. Pasynkov, “Almost metrizable topological groups”, *Soviet Math. Dokl.*, **6**:2 (1965), 404–408.
- [37] B. A. Pasynkov, “On the relative cellularity of Lindelöf subspaces of topological groups”, *Topology Appl.*, **57**:2–3 (1994), 249–258.
- [38] М. Г. Ткаченко, “The notion of σ -tightness and C -embedded subspaces of products”, *Topology Appl.*, **15**:1 (1983), 93–98.
- [39] A. Sokolovskaya, “ G -compactifications of pseudocompact G -spaces”, *Topology Appl.*, **155**:4 (2008), 342–346.

К. Л. Козлов (K. L. Kozlov)

Механико-математический факультет
 Московского государственного университета
 им. М. В. Ломоносова
E-mail: kkozlov@mech.math.msu.su

Поступила в редакцию

26.06.2008 и 03.07.2009

В. А. Чатырко (V. A. Chatyrko)

Linköping University, Sweden
E-mail: vitiija@mai.liu.se