Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Н. Попов, О модулях над кольцом многочленов, получаемых из представлений конечномерных ассоциативных алгебр, *Матем. сб.*, 2002, том 193, номер 3, 115–134

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm639>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 14:08:59

УДК 512.715/717+512.552.22

О. Н. Попов

О модулях над кольцом многочленов, получаемых из представлений конечномерных ассоциативных алгебр

В работе конструкция коэн-маколеевых модулей над кольцом многочленов, возникшая при исследовании уравнений Коши–Фуэте, обобщается с кватернионов на произвольные конечномерные ассоциативные алгебры. Показывается, что для некоторого класса алгебр получающиеся модули являются коэн-маколеевыми и над совершенным полем этот класс нельзя расширить. Кроме того, устанавливаются некоторые свойства этой конструкции. Для этого класса алгебр также найдены различные инварианты получающихся модулей.

Библиография: 9 названий.

В статье [1] при исследовании кватернионно-дифференцируемых функций многих переменных возник следующий модуль над кольцом многочленов: $\mathcal{M}_n = R^4 / \langle A_n \rangle$, где A_n – матрица $U_1 | \dots | U_n, \langle A_n \rangle$ – подмодуль, порожденный ее столбцами,

$$U_i = \begin{pmatrix} x_i & y_i & z_i & t_i \\ -y_i & x_i & t_i & -z_i \\ -z_i & -t_i & x_i & y_i \\ -t_i & z_i & -y_i & x_i \end{pmatrix},$$

$R = \mathbb{k}[\{x_i, y_i, z_i, t_i\}_{i=1}^n], \mathbb{k}$ – поле.

Авторы показали, что проективная размерность этого модуля равна $2n - 1$, и вывели отсюда, что являя размерность пучка кватернионно-дифференцируемых функций n переменных тоже равна $2n - 1$ [1; теорема 3.1] и что когомологии этого пучка, начиная с $(2n - 1)$ -й, на любом открытом подмножестве в $\mathbb{H}^n$ зануляются [1; следствие 3.4].

Авторы вычисляли проективную размерность при помощи формулы Ауслендера–Буксбаума (предложение 0.1.5), а не построением резольвенты, так как этот путь они считали слишком сложным. Необходимая для применения формулы Ауслендера–Буксбаума глубина (определение 0.1.3) этого модуля, равная $2n + 1$, вычислялась в [1] посредством явного (при помощи базисов Грёбнера) предъявления $\mathcal{M}_n$ -последовательности (определение 0.1.1). В статье также была найдена размерность Крулля $\mathcal{M}_n$, для чего рассматривалось касательное пространство к носителю этого модуля в $\mathbb{C}^{4n} = \text{Spec } R$ для $\mathbb{k} = \mathbb{C}$. Таким образом была доказана коэн-маколеевость этого модуля, т.е. равенство размерности Крулля и глубины (определение 0.1.6).

В статье [2] авторы продолжили исследования этого модуля с помощью базисов Грёбнера, найдя (градуированные) числа Бетти, ряд Гильберта и кратность $\mathcal{M}_n$ (мы напомним определения этих понятий в п. 0.5).

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-01144).

В [1] матрица A_n получилась из системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных, задающей кватернионно-дифференцируемые функции, транспонированием и заменой операторов частных производных по переменным на сами переменные. Однако можно заметить (ср. [2; введение]), что матрица U_i есть матрица левого умножения на $x_i - y_i i - z_i j - t_i k$ в базисе $1, i, j, k$. Такой взгляд на матрицу A_n позволил, как заметил Е. С. Голод, полностью понять структуру модуля $\mathcal{M}_n$, в частности его проективной резольвенты. Комплексифицируем алгебру кватернионов. Так как при замене базиса в алгебре матрица U_i заменяется на сопряженную и в ней происходит линейная замена переменных, то структура модуля $\mathcal{M}_n$ от этого не изменится. Поэтому изоморфизм $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong M_2(\mathbb{C})$ (где $M_2(\mathbb{C})$ – матричная алгебра) позволяет в базисе из матричных единиц приписать матрице U_i вид

$$\begin{pmatrix} a_i & b_i & 0 \\ c_i & d_i & 0 \\ 0 & 0 & a_i & b_i \\ & & c_i & d_i \end{pmatrix},$$

т.е. $\mathcal{M}_n = \mathcal{M}'_n \oplus \mathcal{M}'_n$, где $\mathcal{M}'_n$ – фактор R^2 по столбцам общей $(2 \times 2n)$ -матрицы. А про $\mathcal{M}'_n$ известно [3], что это коэн-маколеев модуль проективной размерности $2n - 2 + 1 = 2n - 1$ и что его минимальная резольвента – это комплекс Игона–Норкотта (называемый в [4] комплексом Буксбаума–Рима). Такое описание резольвенты позволяет упростить доказательства основных результатов из [2], см. §3 настоящей статьи.

Отсюда возникло следующее обобщение этой задачи. Пусть A – конечномерная ассоциативная алгебра с единицей над полем $\mathbb{k}$ с базисом $e_1, \dots, e_d$, а $\rho: A \rightarrow M_m(\mathbb{k})$ – ее матричное представление, отвечающее A -модулю M , $\dim_{\mathbb{k}} M = m$. Зададим натуральное l и рассмотрим кольцо многочленов $R = \mathbb{k}[x_{11}, \dots, x_{dl}]$ и модуль $F_l(M)$ над ним, являющийся фактормодулем свободного R -модуля R^m по подмодулю, порожденному столбцами матриц $\text{Id}_j = \sum_i \rho(e_i) x_{ij}$, $j = 1, \dots, l$. Мы исследуем вопрос о коэн-маколеевости и размерности модулей $F_l(M)$ и их аннуляторов. В настоящей работе доказывается

ТЕОРЕМА 1. Пусть либо $l = 1$, либо $A = \bigoplus_i S_i \otimes_{Z(S_i)} K_i$, где S_i – простые алгебры над $\mathbb{k}$, $Z(S_i)$ – их центры, а K_i – конечномерные коммутативные алгебры над соответствующими $Z(S_i)$, $\dim_{Z(S_i)} S_i = n_i^2$. Тогда

- 1) $F_l(\cdot)$ есть точный вполне строгий функтор из категории конечномерных A -модулей в категорию градуированных R -модулей и однородных гомоморфизмов степени 0;
- 2) если $l = 1$ или $n_i = n$ для всех i , то функтор $F_l(\cdot)$ переводит конечномерные A -модули в коэн-маколеевы R -модули проективной размерности $(l-1)n + 1$ (равной 1 при $l = 1$);
- 3) при $l = 1$ для любого M аннулятор $F_l(M)$ – главный идеал.

СЛЕДСТВИЕ 1. В условиях теоремы 1 функтор $F_l(\cdot)$ переводит неразложимые конечномерные A -модули в коэн-маколеевы R -модули.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1. Неразложимый модуль M является модулем над одним из слагаемых вида $S_i \otimes_{Z(S_i)} K_i$, и конструкция $F_l(M)$ над A отличается от конструкции над слагаемым только лишними переменными в кольце, а для одного слагаемого n_i постоянно.

Введем несколько определений, удобных для формулировки обратной теоремы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Конечномерная ассоциативная алгебра с единицей над полем $\mathbb{k}$ называется

- *K-алгеброй*, если найдется такое $l > 1$, что функтор $F_l(\cdot)$ переводит конечномерные неразложимые A -модули в коэн-маколеевы;
- *O-алгеброй*, если найдется такое $l > 1$, что функтор $F_l(\cdot)$ точен;
- *T-алгеброй*, если найдется такое $l > 1$, что для любого конечномерного A -модуля M модуль $F_l(M)$ коэн-маколеев.

Следующее частичное обращение теоремы 1 демонстрирует естественность ограничений, налагаемых на алгебру при $l > 1$.

ТЕОРЕМА 2. *O-алгебры и T-алгебры над совершенным полем $\mathbb{k}$ исчерпываются прямыми суммами указанного в условии теоремы 1 вида, при этом у T-алгебр все n_i одинаковы.*

Полученная при доказательстве теоремы 1 информация о минимальной резольвенте модулей $F_l(M)$ (лемма 1.8) позволяет найти различные инварианты этих модулей и, в частности, передоказать и обобщить основные результаты статьи [2]:

ТЕОРЕМА 3. *Пусть в условиях теоремы 1 все n_i одинаковы и равны n . Тогда для любого A -модуля M инварианты $F_l(M)$ получаются умножением на $\dim_{\mathbb{k}} M/n$ из инвариантов $F_l(P)$ для простого $\bar{A}$ -модуля P , где $\bar{A} = A \otimes_{\mathbb{k}} \bar{\mathbb{k}}$ — $\bar{\mathbb{k}}$ -алгебра, $\bar{\mathbb{k}}$ — алгебраическое замыкание $\mathbb{k}$. А инварианты модуля $F_l(P)$ имеют следующие значения:*

- числа Бетти $b_0 = n$, $b_1 = ln$, $b_i = \binom{ln}{n+i-1} \binom{n+i-3}{n-1}$ при $i \geq 2$, сосредоточенные в степени $0, 1, n+i-1$ соответственно;
- коэн-маколеев $\min t = b_{(l-1)n+1} = \binom{ln-2}{n-1}$;
- ряд Гильберта

$$F_l(P)(t) = (1-t)^{(l-1)n+1-\dim R} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{ln}{i} (n-i)t^i(1-t)^{n-1-i};$$

- кратность $e = \binom{ln}{n-1}$.

Назовем возможные направления дальнейшей работы. Во-первых, было бы интересно получить из комплекса Игона–Норкотта, являющегося минимальной резольвентой модуля $\mathcal{M}_n$ из [1], явную ациклическую резольвенту для пучка ква-тернионно-дифференцируемых функций и с ее помощью дать для теоремы 3.1 и следствия 3.4 из [1] аналитические доказательства, которых не хватает авторам. Во-вторых, отрицательный ответ на вопрос, может ли модуль M , для которого $F_l(M)$ коэн-маколеев, обладать подфактором N , для которого $F_l(N)$ не коэн-маколеев, был бы полезен при попытках избавиться от условия совершенства в теореме 2, а также при исследовании свойств алгебры, над которой есть строгий модуль M с коэн-маколеевым $F_l(M)$. В-третьих, было бы интересно доказать аналог теоремы 2 для K -алгебр хотя бы над алгебраически замкнутым полем.

Параграф 0 содержит предварительные сведения, а следующие параграфы посвящены доказательству теорем с соответствующими номерами.

Автор хотел бы поблагодарить Е. С. Голода за постоянное внимание и поучительные замечания и Е. А. Котельникову, воодушевившую его заняться научной работой, а также рецензента за упрощение некоторых рассуждений.

§0. Предварительные сведения

0.1. Глубина и коэн-маколеевость. В статье используются градуированные версии этих понятий, аналогичные локальным, рассмотренным в [5], где глубина называется гомологической коразмерностью.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0.1.1 [4; гл. 17, с. 423], [5; гл. IV, А.4, M -последовательность]. Пусть R – нётерово коммутативное кольцо, M – R -модуль. Последовательность $a_1, \dots, a_n \in R$ называется M -регулярной, если $(a_1, \dots, a_n)M \neq M$ и для i от 1 до n умножение на a_i в модуле $M/(a_1, \dots, a_{i-1})M$ инъективно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 0.1.2 [4; теорема 17.4]. Пусть I – идеал в R и $IM \neq M$. Тогда все максимальные (т.е. непродолжаемые) M -регулярные последовательности в I имеют одну и ту же длину.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0.1.3 [4; 17.2, с. 429], [5; гл. IV, А.4, определение 6]. В условиях предыдущего предложения длина $\text{depth}(I, M)$ любой максимальной M -регулярной последовательности называется *глубиной* M относительно I .

При рассмотрении глубины градуированных модулей над кольцом многочленов относительно идеала всех многочленов без свободного члена мы будем опускать указание идеала.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 0.1.4 [3; теорема 16.11], [4; предложение 18.4, следствие 18.6], [5; гл. IV, А.4, предложение 6 и далее]. Для любого конечнопорожденного R -модуля M имеем:

- 1) $\text{depth}(I, M) \leq \dim M$, где $\dim M$ – размерность Крулля;
- 2) $\text{depth}(I, M) = \min\{i : \text{Ext}_R^i(N, M) \neq 0\}$, где N – конечнопорожденный модуль с носителем, равным замкнутому множеству, определенному идеалом I , так что при замене идеала I на его радикал глубина не меняется;
- 3) $\text{depth}(I, M \oplus N) = \min\{\text{depth}(I, M), \text{depth}(I, N)\}$;
- 4) в короткой точной последовательности $0 \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow P \rightarrow 0$ $\text{depth}(I, N) \geq \min\{\text{depth}(I, M), \text{depth}(I, P)\}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 0.1.5 (формула Ауслендера–Буксбаума [5; гл. IV, Г.1, предложение 17], [4; упражнение 19.8]). Для градуированного модуля M над кольцом многочленов R $\text{depth } M + \text{pd } M = \dim R$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0.1.6 ([5; гл. IV, Б], см. также [4; гл. 18, с. 451]). Модуль M над R называется *коэн-маколеевым*, если для любого максимального идеала $\mathfrak{m}$ в R $\text{depth}(\mathfrak{m}, M) = \dim M$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 0.1.7 [3; предложение 16.20]. Пусть M – градуированный модуль над кольцом многочленов R . Тогда M коэн-маколеев, если и только если $\text{depth } M = \dim M$ (глубина берется в однородном максимальном идеале).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 0.1.8 [5; гл. IV, Б.1]. Пусть M коэн-маколеев. Тогда

- 1) последовательность $a_1, \dots, a_s$ M -регулярна, если и только если $M/(a_1, \dots, a_s)M \neq 0$ и $\dim M/(a_1, \dots, a_s)M = \dim M - s$;
- 2) если последовательность $a_1, \dots, a_s$ M -регулярна, то $M/(a_1, \dots, a_s)M$ – коэн-маколеев модуль.

0.2. Комплекс Игона–Норкотта.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0.2.1 [3; 2.С, $\mathcal{D}_1(g)$], [4; А2.6.1, с. 600, $\mathcal{C}^1$, комплекс Буксбаума–Рима]. Комплексом Игона–Норкотта номер 1, построенным по $(g \times f)$ -матрице $\varphi = (\varphi_{ij})$, задающей гомоморфизм свободных модулей $\varphi: F \rightarrow G$, ранги которых обозначены соответствующими маленькими буквами, называется комплекс

$$0 \rightarrow F_k \xrightarrow{\varphi_k} \dots \xrightarrow{\varphi_2} F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0$$

свободных модулей, где $k = f - g + 1$, $F_0 = G$, $F_1 = F$, $F_i = \bigwedge^{g+i-1}(F) \otimes S^{i-2}(G)$ при $i \geq 2$, а дифференциалы устроены следующим образом. Пусть $f_1, \dots, f_f$ и $g_1, \dots, g_g$ – базисы F и G соответственно, тогда

$$\varphi_1(f_j) = \sum \varphi_{ij} g_i, \quad \varphi_2(f_{j_0} \wedge \dots \wedge f_{j_g}) = \sum_{k=0}^g (-1)^k M_{j_0 \dots \widehat{j_k} \dots j_g} f_{j_k},$$

где $M_{j_1 \dots j_g}$ – $(g \times g)$ -минор матрицы φ , состоящий из столбцов $j_1, \dots, j_g$ в указанном порядке, а

$$\begin{aligned} & \varphi_i(f_{j_0} \wedge \dots \wedge f_{j_{g+i-2}} \otimes g_{i_1} \dots g_{i_{i-2}}) \\ &= \sum_{k=0}^{g+i-2} (-1)^k \sum_{k'=1}^{i-2} \varphi_{i_{k'} j_k} f_{j_0} \wedge \dots \wedge \widehat{f_{j_k}} \wedge \dots \wedge f_{j_{g+i-2}} \otimes g_{i_1} \dots \widehat{g_{i_{k'}}} \dots g_{i_{i-2}}. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 0.2.2. В [4] определены аналогичные комплексы со всеми целыми номерами, но нам понадобится только этот частный случай.

Для таких комплексов имеется следующий критерий точности.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 0.2.3 ([3; теорема 16.15], см. также [6; теорема], [4; гл. 20.3]). Пусть R – коммутативное нётерово кольцо, $M \neq 0$ – конечнопорожденный R -модуль,

$$\mathbb{A} = (0 \longrightarrow F_k \xrightarrow{\varphi_k} F_{k-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0)$$

– комплекс конечнопорожденных свободных R -модулей. Положим

$$r(j) := \sum_{i=j}^k (-1)^{i-j} \operatorname{rk} F_i$$

– ранг (т.е. порядок максимального ненулевого минора) φ_j в случае, когда этот комплекс точен. Обозначим через $I_r(\varphi)$ идеал, порожденный всеми $(r \times r)$ -минорами матрицы φ . Тогда $\mathbb{A} \otimes_R M$ точен, если и только если для всех j от 1 до k $I_{r(j)}(\varphi_j)$ содержит M -последовательность длины j или $I_{r(j)}(\varphi_j)M = M$.

Для комплекса Игона–Норкотта этот критерий заметно упрощается следующим фактом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 0.2.4 [4; теорема A2.10 b]. Для любой матрицы φ в соответствующем комплексе Игона–Норкотта ранг φ_j не превосходит $r(j)$, а идеал $I_{r(j)}\varphi_j$ миноров ранга $r(j)$ в φ_j лежит в идеале $I_m(\varphi)$ максимальных миноров φ и имеет его своим радикалом.

Таким образом, чтобы доказать точность комплекса вида $\mathbb{A} \otimes_R M$, где $\mathbb{A}$ – комплекс Игона–Норкотта, достаточно проверить, что в $I_m(\varphi)$ содержится M -последовательность длины $f - g + 1$: тогда по предложениям 0.2.4 и 0.1.4 это выполнено для всех $I_{r(j)}(\varphi_j)$ и можно применить предложение 0.2.3.

0.3. Разложение конечномерных алгебр в прямую сумму. Конечномерная ассоциативная алгебра A разлагается как левый модуль над собой в прямую сумму неразложимых левых идеалов [7; теорема 14.2], после чего разложение в прямую сумму подалгебр получается из этого группировкой слагаемых [7; §§ 54, 55]. А именно два таких идеала a и b называются *связанными* [7; определение 55.1], если существует цепочка неразложимых левых идеалов $a = a_1, a_2, \dots, a_n = b$ такая, что любые два соседних идеала имеют общий композиционный фактор. Прямые суммы классов связности – блоки – образуют неразложимые двусторонние идеалы в A , в прямую сумму которых она разлагается, и эти идеалы однозначно определены [7; теорема 55.2].

Мы применим этот результат в случае, когда неразложимые модули над алгеброй имеют лишь 1 тип композиционных факторов. Тогда каждый блок имеет лишь 1 тип композиционных факторов, т.е. алгебра разлагается в прямую сумму алгебр, каждая из которых имеет лишь 1 простой модуль.

0.4. Простые и сепарабельные алгебры.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 0.4.1 [7; теорема 68.1]. Пусть S – простая алгебра, K – ее центр, а L – расширение поля K . Тогда $S \otimes_K L$ – простая алгебра с центром L .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 0.4.2 [7; следствие 69.8]. Пусть A – конечномерная алгебра над $\mathbb{k}$, M – полупростой A -модуль, а L – конечное сепарабельное расширение $\mathbb{k}$. Тогда $M \otimes_{\mathbb{k}} L$ – полупростой $A \otimes_{\mathbb{k}} L$ -модуль.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0.4.3 [7; определение 71.1]. Полупростая конечномерная алгебра над полем называется *сепарабельной*, если она остается полупростой при любом расширении основного поля.

ЗАМЕЧАНИЕ 0.4.4. Любая полупростая алгебра над совершенным полем (т.е. в условиях теоремы 2) сепарабельна, так как по теореме 69.4 из [7] она остается полупростой при любом конечном (сепарабельном) расширении, а значит, и при переходе к алгебраическому замыканию, так как иначе нильрадикал будет определен над некоторым конечным расширением. Значит, над алгебраическим замыканием исходного поля эта алгебра изоморфна прямой сумме матричных алгебр, а по теореме 71.2 из [7] алгебра, изоморфная прямой сумме матричных алгебр над некоторым расширением основного поля, сепарабельна. Поэтому нижеследующие свойства сепарабельных алгебр применимы в §2.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 0.4.5 (теорема Веддерберна–Мальцева [7; теорема 72.19]). Пусть B – конечномерная алгебра над полем и алгебра $B/\text{rad } B$ сепарабельна.

Тогда в B есть такая подалгебра S , что имеется разложение в полупрямую сумму $B = S \oplus \text{rad } B$.

ЗАМЕЧАНИЕ 0.4.6. Поскольку это полупрямая сумма, а $\text{rad } B$ нильпотентен, то нетрудно убедиться, что единица алгебры B содержится в S .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 0.4.7 [7; теорема 71.10]. Тензорное произведение полупростой и сепарабельной алгебр полупросто.

0.5. Инварианты модулей над коммутативными кольцами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0.5.1 (ср. [4; упражнение A3.18]). Пусть $R = \bigoplus_{i \geq 0} R_i$ — градуированное кольцо, $R_0 = \mathbb{k}$ — поле, $R_+ = \bigoplus_{i > 0} R_i$ — максимальный однородный идеал, $R[n]$ — свободный R -модуль со сдвигом градуировки (образующая имеет степень $-n$). Пусть M — конечнопорожденный градуированный R -модуль. Известно [4; 19.1, теорема 20.2], что тогда существует единственная свободная резольвента $\cdots \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ над R такая, что $F_i = \bigoplus_j R[-j]^{b_{ij}}$, гомоморфизмы — однородные степени 0 и $d(F_i) \subset R_+ F_{i-1}$. Градуированные числа Бетти градуированного модуля M — это b_{ij} , числа Бетти — это $b_i = \sum_j b_{ij} = \dim_{\mathbb{k}} \text{Tor}_i^R(\mathbb{k}, M)$. Если для некоторого i $b_{ij} = 0$ для всех $j \neq j_i$, то будем говорить, что i -е число Бетти сосредоточено в степени j_i .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0.5.2 [4; упражнения 10.12, 10.13]. Ряд Гильберта $M(t)$ градуированного модуля M — это $\sum \dim_{\mathbb{k}} M_i t^i$. Тогда $M(t) = p(t)/(1-t)^{\dim M}$, где $p(t)$ — многочлен и $p(1) \neq 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0.5.3. Кратность модуля M (относительно R_+) — это $e = p(1)$. Нетрудно проверить, что для градуированных модулей это число совпадает с определенным в [5; гл. V, A.2] и [4; 12.1].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0.5.4 (ср. [4; упражнение 21.14]). Коэн-маколеев тип коэн-маколеева модуля M — это $t(M) = \dim_{\mathbb{k}} \text{Ext}_R^{\text{depth } M}(\mathbb{k}, M)$, где $\mathbb{k} = R/R_+$ как R -модуль.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 0.5.5. Над кольцом многочленов R имеем $t(M) = b_{\text{pd}_R} M$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Над регулярным кольцом

$$\text{Tor}_i^R(\mathbb{k}, M) \cong \text{Ext}_R^{\dim R - i}(\mathbb{k}, M)$$

[5; гл. IV, Г.1, следствие к теореме 5], и по формуле Ауслендера–Буксбаума получаем требуемое.

§1. Доказательство теоремы 1

Сначала опишем $M \mapsto F_l(M)$ как функтор. Пусть A — конечномерная ассоциативная алгебра с единицей, M — конечномерный A -модуль. Пусть также $\{e_i\}$ — $\mathbb{k}$ -базис A , A^l — прямое произведение алгебры A на себя l раз, рассматриваемое как алгебраическое многообразие (аффинное пространство),

$$R = \mathbb{k}[A^l] = S^*((A^*)^l) = \mathbb{k}[\{x_{ij} : i \in [1, \dim_{\mathbb{k}} A], j \in [1, l]\}]$$

– его координатное кольцо, где S^* обозначает симметрическую алгебру векторного пространства, а x_{ij} – коэффициент при e_i в j -м множителе A^l . Положим

$$\tilde{A} = R \otimes_{\mathbb{k}} A; \quad \text{Id}_j = \sum_{i=1}^{\dim A} x_{ij} \otimes e_i \in \tilde{A}$$

– общие элементы алгебры A , т.е. образы единичного оператора $\text{Id} \in A^* \otimes_{\mathbb{k}} A$ при отображении $A^* \otimes_{\mathbb{k}} A$ в $\tilde{A}$, индуцированным вложением A^* как j -го слагаемого в $(A^*)^l \subset S^*((A^*)^l) = R$, $\tilde{M} = R \otimes_{\mathbb{k}} M$ – $\tilde{A}$ -модуль. Тогда

$$F_l(M) = \tilde{M}/(\text{Id}_1, \dots, \text{Id}_l)\tilde{M} = F_l(A) \otimes_{\tilde{A}} \tilde{M},$$

откуда видно, что $F_l(\cdot)$ есть аддитивный $\mathbb{k}$ -линейный точный справа функтор из категории A -модулей в категорию градуированных R -модулей, где градуировка на $F_l(M)$ задается следующим образом. Градуировка R и рассмотрение модуля M как сосредоточенного в степени 0 задают градуировку на $\tilde{M}$, относительно которой $(\text{Id}_1, \dots, \text{Id}_l)\tilde{M}$ является однородным R -подмодулем, так что эта градуировка индуцирует градуировку фактормодуля $F_l(M)$.

Заметим, что слой соответствующего $F_l(M)$ пучка на A^l над точкой $(a_1, \dots, a_l)$ есть векторное пространство $M/(a_1, \dots, a_l)M$.

1.1.1. Случай $l = 1$. Будем обозначать Id_1 просто через Id .

ЛЕММА 1.1. *Для любого A -модуля M последовательность R -модулей*

$$0 \longrightarrow \tilde{M} \xrightarrow{\text{Id} \cdot} \tilde{M} \longrightarrow F_1(M) \longrightarrow 0$$

точна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $F_1(M) = \tilde{M}/\text{Id} \tilde{M}$ и нужно проверить лишь точность в самом левом члене, т.е. отсутствие ядра у Id на $\tilde{M}$. Покажем это от противного: пусть $x \in \tilde{M}$ – ненулевой элемент Ker Id . Тогда $(\det \text{Id})x = 0$, а так как $\tilde{M}$ – свободный R -модуль, а R – кольцо многочленов, значит, $\det \text{Id} = 0$. Но, подставив вместо переменных x_i такие $c_i \in \mathbb{k}$, что $\sum c_i e_i = 1_A$, мы получим, что $\det \text{Id}(c_1, \dots, c_{\dim A}) = \det 1_M = 1$, значит, $\det \text{Id} \neq 0$. Противоречие.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. На самом деле, мы сейчас проверили частный случай критерия точности из предложения 0.2.3, а также доказали, что $\det \text{Id}$ – регулярный элемент в $\text{ann } F_1(M)$. Значит, $\dim F_1(M) \leq \dim R - 1$, но наша точная последовательность – минимальная резольвента $F_1(M)$ над R , следовательно, по предложению 0.1.5 $F_1(M)$ – коэн-маколеев модуль и $\text{pd}_R M = 1$, т.е. п. 2) теоремы 1 доказан.

Докажем точность $F_1(\cdot)$. Пусть $\mathcal{C} = (0 \longrightarrow \tilde{A} \xrightarrow{\text{Id} \cdot} \tilde{A} \longrightarrow 0)$ – свободная резольвента $F_1(A)$ над $\tilde{A}$ (по лемме 1.1), тогда для любого A -модуля M

$$H_i(\mathcal{C} \otimes_{\tilde{A}} \tilde{M}) = \text{Tor}_i^{\tilde{A}}(F_1(A), \tilde{M}),$$

а

$$\mathcal{C} \otimes_{\tilde{A}} \tilde{M} = (0 \longrightarrow \tilde{M} \xrightarrow{\text{Id} \cdot} \tilde{M} \longrightarrow 0),$$

откуда по лемме 1.1 для любого M $\mathrm{Tor}_1^{\tilde{A}}(F_1(A), \tilde{M}) = 0$. Теперь для любой точной последовательности (ТП) A -модулей $0 \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow P \rightarrow 0$ имеем ТП

$$0 \rightarrow \tilde{M} \rightarrow \tilde{N} \rightarrow \tilde{P} \rightarrow 0 \text{ и} \\ 0 = \mathrm{Tor}_1^{\tilde{A}}(F_1(A), \tilde{P}) \rightarrow F_1(A) \otimes_{\tilde{A}} \tilde{M} \rightarrow F_1(A) \otimes_{\tilde{A}} \tilde{N} \rightarrow F_1(A) \otimes_{\tilde{A}} \tilde{P} \rightarrow 0,$$

что нам и требовалось.

Докажем, что $F_1(\cdot)$ – вполне строгий функтор в градуированную категорию. Минимальная резольвента $F_1(M)$ над R имеет вид

$$0 \longrightarrow \tilde{M} \xrightarrow{\mathrm{Id} \cdot} \tilde{M} \longrightarrow F_1(M) \longrightarrow 0,$$

и любой однородный гомоморфизм R -модулей $\varphi: F_1(M) \rightarrow F_1(N)$ продолжается до однородного гомоморфизма их минимальных резольвент:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \tilde{M} & \xrightarrow{\mathrm{Id} \cdot} & \tilde{M} & \longrightarrow & F_1(M) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \tilde{g} & & \downarrow \tilde{f} & & \downarrow \varphi \\ 0 & \longrightarrow & \tilde{N} & \xrightarrow{\mathrm{Id} \cdot} & \tilde{N} & \longrightarrow & F_1(N) \longrightarrow 0 \end{array}.$$

Гомоморфизмы свободных модулей $\tilde{f}$ и $\tilde{g}$ задаются матрицами над R , а так как эти гомоморфизмы – однородные степени 0, то матрицы, на самом деле, – над $\mathbb{k}$, т.е. $\tilde{f}$ и $\tilde{g}$ получились из гомоморфизмов векторных пространств $f, g: M \rightarrow N$. Из коммутативности диаграммы имеем $\tilde{f} \circ \mathrm{Id} = \mathrm{Id} \circ \tilde{g}$. Подставив в Id набор $a_i: \sum a_i e_i = 1_A$, получим $f = g$, а подставив всевозможные другие наборы, получим, что $f \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$. Так как $F_1(f) = \varphi$, то отображение пространств гомоморфизмов сюръективно. Так как при выборе базиса в $\tilde{M}$ и опускании его в $\mathbb{k}$ -базис $F_1(M)/\mathfrak{m}F_1(M)$, где $\mathfrak{m} = (x_1, \dots, x_{\dim A})$, $\tilde{f}$ и $(R/\mathfrak{m}) \otimes \varphi$ задаются одной и той же матрицей, то матрицу f можно восстановить по φ и отображение пространств гомоморфизмов инъективно.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. Для неизоморфных M и N модули $F_1(M)$ и $F_1(N)$ неизоморфны даже без учета градуировки: однородная компонента степени 0 изоморфизма сама является изоморфизмом.

Докажем п. 3) теоремы 1. Сначала заметим, что при расширении основного поля минимальное число образующих аннулятора модуля сохраняется, и далее до конца доказательства п. 3) будем считать $\mathbb{k}$ алгебраически замкнутым.

ЛЕММА 1.4. Если M – простой A -модуль, то $\mathrm{ann} F_1(M)$ – простой главный идеал.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M – простой A -модуль, следовательно, M – модуль над простым слагаемым полупростого фактора алгебры A , т.е. модуль $\mathbb{k}^n$ над $M_n(\mathbb{k})$ согласно теории конечномерных ассоциативных алгебр [7], [8; гл. VIII]. Тогда $F_1(M) = R^n / \langle A \rangle$, где $A = (a_{ij})$, a_{ij} – независимые переменные. А для такого модуля известно, что так как $\det A$ неприводим, то $(\det A)$ прост и равен $\mathrm{ann} F_1(M)$ ($(\det A) \subset \mathrm{ann} F_1(M)$, $(\det A)$ – простой идеал высоты 1, а $\mathrm{pd}_R F_1(M) = 1 \Rightarrow \mathrm{ht} \mathrm{ann} F_1(M) \leq 1$).

Докажем п. 3) теоремы 1 индукцией по длине A -модуля M . Для $l(M) = 1$ это лемма 1.4. Если $l(M) > 1$, то найдется простой подмодуль $N \subset M$. Тогда по п. 2) теоремы 1 имеем ТП $0 \rightarrow F_1(N) \rightarrow F_1(M) \rightarrow F_1(P) \rightarrow 0$. Так как $l(P) < l(M)$, по предположению индукции $\text{ann } F_1(P) = (a)$ – главный идеал. Пусть $x \in \text{ann } F_1(M)$, тогда x аннулирует $F_1(P)$. Значит, $x = ay$, где y аннулирует $aF_1(M)$. А $aF_1(M)$ – это подмодуль в $F_1(N)$; если $aF_1(M) = 0$, то x аннулирует $F_1(M)$ тогда и только тогда, когда $x \in (a)$, и $\text{ann } F_1(M) = (a)$; если же $aF_1(M) \neq 0$, то $\text{Ass } aF_1(M) \subset \text{Ass } F_1(N)$. Но $\text{Ass } F_1(N) = \{(p)\}$, где $(p) = \text{ann } F_1(N)$, так как по п. 2) $F_1(N)$ – коэн-маколеев, так что $\text{Ass } F_1(N)$ совпадает с множеством минимальных простых идеалов над $\text{ann } F_1(N)$, а $\text{ann } F_1(N)$ прост. Тогда так как все ассоциированные с $aF_1(M)$ простые идеалы содержат его аннулятор, то $\text{ann } aF_1(M) \subset (p) = \text{ann } F_1(N)$, но $aF_1(M)$ – подмодуль $F_1(N)$ и поэтому $\text{ann } F_1(N) \subset \text{ann } aF_1(M)$. Значит, $\text{ann } aF_1(M) = (p)$. Итак, $\text{ann } F_1(M) = a \text{ann } aF_1(M) = (ap)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.5. Посмотрим, что будет с этой конструкцией при более общей постановке задачи. Мы рассматриваем представления линейного пространства $V = \langle e_1, \dots, e_d \rangle_{\mathbb{K}}$ с $1 = e_1$, т.е. с элементом, действующим в любом представлении тождественным оператором. Положим A равной свободной алгебре $\mathbb{K}\langle e_2, \dots, e_d \rangle$ и будем считать представления V A -модулями. При этом описание функтора $F_1(\cdot)$ останется таким же ($R = \mathbb{K}[V] = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_d]$) и так же пройдут доказательства первых двух пунктов теоремы 1, но то, что $\mathcal{C}$ – резольвента для $F_1(A)$, не следует из леммы 1.1, а получается рассмотрением младшей (относительно градуировки свободной алгебры A) однородной компоненты элемента $\text{Id } v$, равной младшей компоненте v , умноженной на x_1 .

Наличие единицы в доказательстве первых двух пунктов существенно. Например, если взять присоединенное представление неабелевой конечномерной алгебры Ли и построить по нему модуль, то он *не будет* коэн-маколеевым, а будет иметь размерность Крулля $\dim R$ и проективную размерность ≥ 2 : пусть A – наша алгебра Ли, тогда $\text{Id} \in \tilde{A}$, $F_1(A) = \tilde{A}/[\text{Id}, \tilde{A}]$, следовательно,

$$\tilde{A} \xrightarrow{[\text{Id}, \cdot]} \tilde{A} \longrightarrow F_1(A) \longrightarrow 0$$

– начало минимальной резольвенты $F_1(A)$ над R и она продолжается влево, так как $\text{Id} \in \text{Ker}[\text{Id}, \cdot]$. А $\dim F_1(A) = \dim R$, поскольку по замечанию рецензента $\text{supp } F_1(A)$ в $\mathbb{K}^{\dim A} \cong A$ есть $\{x \in A : A/[x, A] \neq 0\} = A$ в силу того, что $\forall x \in A$ $\dim_{\mathbb{K}} A - \dim_{\mathbb{K}} [x, A] = \dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}[x, \cdot] > 0$.

1.2. Случай $l > 1$. Сначала общие замечания о расширении полей.

ЛЕММА 1.6. 1) Функтор $F_l(\cdot)$ перестановочен с операцией расширения поля констант.

2) Модуль $F_l(M)$ будет коэн-маколеевым после расширения поля констант тогда и только тогда, когда он был коэн-маколеевым и до расширения.

3) Пункт 1) теоремы 1 выполняется после расширения поля, если и только если он выполнялся до расширения.

4) Если $\mathbb{K}$ -алгебра A является прямой суммой описанного в условии теоремы 1 вида, то таковой является и $\bar{\mathbb{K}}$ -алгебра $\bar{A} = A \otimes_{\mathbb{K}} \bar{\mathbb{K}}$, где $\bar{\mathbb{K}}$ – алгебраическое замыкание $\mathbb{K}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Очевидно из конструкции.

2) Заметим, что для каждого градуированного R -модуля D расширение поля сохраняет минимальную градуированную резольвенту D над R , а следовательно, размерности D : проективную и Крулля (функция Гильберта модуля есть эйлерова характеристика резольвенты по отношению к функции Гильберта), а значит, сохраняет и свойство быть или не быть коэн-маколеевым (по предложениям 0.1.5 и 0.1.7 D коэн-маколеев $\Leftrightarrow \text{pd } D + \dim D = \dim R$).

3) Переход к пространствам гомоморфизмов и гомологиям перестановочен с расширением основного поля.

4) Достаточно проверить утверждение для одного слагаемого, следя за сохранением n :

$$A \otimes_{\mathbb{k}} \bar{\mathbb{k}} = S \otimes_{Z(S)} (K \otimes_{\mathbb{k}} Z(S)) \otimes_{Z(S)} \bar{\mathbb{k}} = (S \otimes_{Z(S)} \bar{\mathbb{k}}) \otimes_{\bar{\mathbb{k}}} (K \otimes_{\mathbb{k}} \bar{\mathbb{k}})$$

— алгебра того же вида (первый множитель — по предложению 0.4.1). Сохранение n также следует из предложения 0.4.1.

Итак, достаточно доказать теорему 1 после перехода к алгебраическому замыканию поля и для одного слагаемого, так как модули над алгеброй — прямые суммы модулей над слагаемыми, и то же верно для коротких ТП и для гомоморфизмов. Но простые алгебры над алгебраически замкнутым полем — матричные, т.е. все S_i равны $M_n(\mathbb{k})$ и можно считать, что $A = M_n(\mathbb{k}) \otimes_{\mathbb{k}} K = M_n(K)$, K коммутативна. Так что достаточно доказать нашу теорему для алгебр вида $M_n(K)$, K коммутативна, над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{k}$, чему и будет посвящен остаток параграфа.

Заметим, что для $A = M_n(K)$ тензорное домножение на (A, K) - и (K, A) -бимодуль K^n задает эквивалентность категорий A -модулей и K -модулей. Опишем теперь функтор, сопоставляющий A -модулю M минимальную резольвенту $F_l(M)$ над R .

ОБОЗНАЧЕНИЯ 1.7. Кольцо R можно описать как $\mathbb{k}[\{x_{\alpha ij} : \alpha \in [1, \dim_{\mathbb{k}} K], i \in [1, n], j \in [1, ln]\}]$. Положим $R[T] = R[\{T_{ij} : i \in [1, n], j \in [1, ln]\}]$, $\varphi = (T_{ij})$ — $(n \times ln)$ -матрица, C — соответствующий φ комплекс Игона–Норкотта номер 1 (определение 0.2.1), $\tilde{K} = K \otimes_{\mathbb{k}} R$, $\text{Id}_{ij}^K = \sum_{\alpha} f_{\alpha} x_{\alpha ij} \in \tilde{K}$, где f_{α} — $\mathbb{k}$ -базис K . Пусть $\mathcal{K} = (\tilde{K}, \tilde{A})$ -бимодуль $\tilde{K}^n$. Заставив T_{ij} действовать на $\mathcal{K}$ эндоморфизмами Id_{ij}^K (коммутирующими, так как K коммутативна), зададим на $\mathcal{K}$ структуру $R[T]$ -модуля. Положим $\mathcal{C}$ равным $C \otimes_{R[T]} \mathcal{K}$ — комплексу проективных (как прямые суммы $\mathcal{K}$) правых $\tilde{A}$ -модулей.

Тогда $F_l(M) = H_0(\mathcal{C} \otimes_{\tilde{A}} \tilde{M})$ для любого M : это $\text{Coker}(\tilde{\mathcal{M}}^{ln} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}^n)$, где $\tilde{\mathcal{M}} = \mathcal{K} \otimes_{\tilde{A}} \tilde{M}$, и в R -базисах этот гомоморфизм задается блочной матрицей $\varphi = (\text{Id}_{ij}^K)$. Комплекс $\mathcal{C} \otimes_{\tilde{A}} \tilde{M} = C \otimes_{R[T]} \tilde{\mathcal{M}}$ является минимальным комплексом длины $(l-1)n+1$, он и будет минимальной резольвентой для $F_l(M)$, а $\mathcal{C}$ — проективной резольвентой $F_l(A)$ как правого $\tilde{A}$ -модуля по следующей лемме:

ЛЕММА 1.8. Для любого M и для любого $i > 0$ $H_i(\mathcal{C} \otimes_{\tilde{A}} \tilde{M}) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По критерию точности комплекса Игона–Норкотта (п. 0.2) надо лишь доказать, что в $I_n(\varphi)$ — идеале максимальных миноров матрицы φ — есть $\tilde{\mathcal{M}}$ -последовательность длины $(l-1)n+1$. Эта последовательность состоит, как

мы покажем, из миноров, соответствующих n столбцам, взятым подряд. $\widetilde{\mathcal{M}}$ – коэн-маколеев R -модуль, а значит, и коэн-маколеев $R[T]$ -модуль (как градуированный модуль над градуированным кольцом, где добавленные T_{ij} – тоже степени 1), так как размерность Крулля, определяемая по функции Гильберта градуировки, у $\widetilde{\mathcal{M}}$ над обоими кольцами одна и та же и максимальная однородная $\widetilde{\mathcal{M}}$ -последовательность в R будет таковой и в $R[T]$. А значит (предложение 0.1.8), регулярная $\widetilde{\mathcal{M}}$ -последовательность – это такая, при факторизации по которой размерность модуля уменьшается на ее длину.

$\widetilde{\mathcal{M}}$ – свободный R -модуль, и фактор $\widetilde{\mathcal{M}}$ по нашей последовательности – это фактор по столбцам матриц, являющихся соответствующими минорам суммами произведений Id_{ij}^K . Пусть f_1 – единица K . Упорядочим переменные $x_{\alpha ij}$ следующим образом: $x_{\alpha ij} > x_{\beta lm} \Leftrightarrow (i < l) \vee (i = l \ \& \ j < m) \vee (i = l \ \& \ j = m \ \& \ \alpha < \beta)$, и возьмем от этого deglex и “моном важнее места” в $\widetilde{\mathcal{M}}$.

Чему равны старшие члены наших столбцов соотношений при таком порядке? У матрицы, соответствующей $T_{i_1 j_1} \cdots T_{i_n j_n}$, каждый моном в каждом элементе есть $x_{\alpha_1 i_1 j_1} \cdots x_{\alpha_n i_n j_n}$ для каких-то α . Самый старший из таких мономов – $x_{1 i_1 j_1} \cdots x_{1 i_n j_n}$. Из того, что при подстановке $x_{2 ij} = \cdots = x_{(\dim K) ij} = 0$ получается матрица $x_{1 i_1 j_1} E \cdots x_{1 i_n j_n} E$, где E – единичная матрица, видно, что этот моном встречается во всех диагональных элементах, значит, во всех столбцах. Поэтому старшие члены столбцов матрицы, соответствующей $T_{i_1 j_1} \cdots T_{i_n j_n}$, – это столбцы матрицы $x_{1 i_1 j_1} \cdots x_{1 i_n j_n} E$.

Теперь мы видим, что если мы складываем два произведения, соответствующих различным наборам $(i_1 j_1, \dots, i_n j_n)$, то старшие члены различны и не сократятся, так что старшие члены столбцов матрицы, соответствующей минору из столбцов $j+1, \dots, j+n$, есть столбцы матрицы

$$\max_{\sigma \in S_n} x_{11(j+\sigma(1))} \cdots x_{1n(j+\sigma(n))} E = x_{11(j+1)} \cdots x_{1n(j+n)} E.$$

В самом деле, $x_{11(j+1)}$ – самая старшая из переменных, входящих в старшие члены, $x_{12(j+2)}$ – самая старшая из переменных, входящих в члены, содержащие $x_{11(j+1)}$, и т. д. Итак, старшие члены наших соотношений – это столбцы матриц $y_1 E, y_2 E, \dots, y_{(l-1)n+1} E$, где $y_i = x_{11 i} \cdots x_{1n(i+n-1)}$.

Так как подмодуль, порожденный старшими членами наших столбцов соотношений, лежит в модуле старших членов всего модуля соотношений, то размерность Крулля фактора $\widetilde{\mathcal{M}}$ по нашим соотношениям, равная размерности Крулля фактора $\widetilde{\mathcal{M}}$ по подмодулю старших членов всего модуля соотношений, не превосходит размерности Крулля фактора $\widetilde{\mathcal{M}}$ по старшим членам наших столбцов соотношений, т.е. модуля $\widetilde{\mathcal{M}}/(y_1, \dots, y_{(l-1)n+1})\widetilde{\mathcal{M}}$. Так как $\widetilde{\mathcal{M}}$ – свободный R -модуль, а y_i зависят от непересекающихся наборов переменных в R , то они образуют $\widetilde{\mathcal{M}}$ -последовательность, так что размерность Крулля модуля $\widetilde{\mathcal{M}}/(y_1, \dots, y_{(l-1)n+1})\widetilde{\mathcal{M}}$ на $(l-1)n+1$ меньше, чем у $\widetilde{\mathcal{M}}$, а размерность Крулля фактора по нашим столбцам соотношений по крайней мере на $(l-1)n+1$ меньше, чем у $\widetilde{\mathcal{M}}$. Но наши столбцы соотношений соответствуют факторизации $\widetilde{\mathcal{M}}$ по последовательности из $(l-1)n+1$ элементов кольца $R[T]$, так что по теореме Крулля о главном идеале размерность этого фактормодуля не может уменьшиться более, чем на $(l-1)n+1$. Значит, она уменьшилась ровно на столько, на сколько требовалось.

Итак, наш комплекс действительно является минимальной резольвентой для $F_l(M)$, а также $\forall \tilde{M} \quad \text{Tor}_1^{\tilde{A}}(F_l(A), \tilde{M}) = 0$. Теперь так же, как и для $l = 1$, можно доказать точность $F_l(\cdot)$:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow P \rightarrow 0 \text{ точна} &\Rightarrow \\ 0 \rightarrow \tilde{M} \rightarrow \tilde{N} \rightarrow \tilde{P} \rightarrow 0 \text{ точна} &\Rightarrow \\ 0 = \text{Tor}_1^{\tilde{A}}(F_l(A), \tilde{P}) \rightarrow F_l(A) \otimes_{\tilde{A}} \tilde{M} \rightarrow F_l(A) \otimes_{\tilde{A}} \tilde{N} \rightarrow F_l(A) \otimes_{\tilde{A}} \tilde{P} \rightarrow 0 \text{ точна.} \end{aligned}$$

Докажем коэн-маколеевость $F_l(M)$. Для этого можно аналогично построить регулярную последовательность в $\text{ann } F_l(M)$, но мы поступим иначе: воспользуемся индукцией по длине M . Если $\mathbb{k}$ алгебраически замкнуто и M прост, то $F_l(M)$ – это фактор свободного модуля по столбцам общей матрицы $n \times ln$, его коэн-маколеевость известна [4; приложение 2.6], [3]. Далее, пусть $l(M) > 1$ и $0 \rightarrow M_1 \rightarrow M \rightarrow M_2 \rightarrow 0$ – ТП A -модулей, где $l(M_i) < l(M)$. Тогда по предположению индукции $\dim M_i = \text{depth } M_i = \dim R - ((l-1)n+1)$, и по свойствам глубины и размерности Крулля (предложение 0.1.4, [5; гл. III, Б.1, гл. I, В.1, предложение 10]) $\dim M \leq \max_i \dim M_i$, $\text{depth } M \geq \min_i \text{depth } M_i$, т.е. $\dim M = \text{depth } M$ и M – тоже коэн-маколеев.

Докажем п. 1) теоремы 1. В силу эквивалентности категорий можно доказывать изоморфизм $\text{Hom}_K(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \cong \text{Homgr}_R^0(F_l(M), F_l(N))$, где $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ – соответствующие K -модули, а $\text{Homgr}_R^0(\cdot, \cdot)$ – однородные гомоморфизмы степени 0. Гомоморфизм модулей продолжается до гомоморфизма минимальных резольвент, нарисуем их начала:

$$\begin{array}{ccccccc} \tilde{\mathcal{M}}^{ln} & \xrightarrow{\varphi} & \tilde{\mathcal{M}}^n & \longrightarrow & F_l(M) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \\ \tilde{\mathcal{N}}^{ln} & \xrightarrow{\varphi} & \tilde{\mathcal{N}}^n & \longrightarrow & F_l(N) & \longrightarrow & 0 \end{array}.$$

Здесь f и g задаются блочными матрицами

$$(f_{ij}), (g_{ij}) = (h_{ij}), \quad f_{ij}, g_{ij} \in \text{Homgr}_R^0(\tilde{\mathcal{M}}, \tilde{\mathcal{N}}) = \text{Hom}_{\mathbb{k}}(\mathcal{M}, \mathcal{N}).$$

Имеем $\varphi f = g\varphi$, следовательно, $\sum_l g_{il} \text{Id}_{lj}^K = \sum_l \text{Id}_{il}^K f_{lj}$. Подставив в переменные такие значения, что

$$\text{Id}_{jj}^K = 1_K, \quad \text{Id}_{il}^K = 0 \quad \forall (i, l) \neq (j, j),$$

получим, что при $i \neq j$ $g_{ij} = 0$; сделав $\text{Id}_{ml}^K = 0 \quad \forall (m, l) \neq (i, j)$, получим $g_{ii} \text{Id}_{ij}^K = \text{Id}_{ij}^K f_{jj} \quad \forall i, j$ и далее, как в случае $l = 1$, получим, что $g_{ii} \in \text{Hom}_K(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ и что все g_{ii} равны, так что g_{ii} – это и есть нужный гомоморфизм $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.9. Пункт 3) теоремы 1 возник из надежды, что $R/\text{ann } F_l(M)$ коэн-маколеево и $F_l(M)$ – максимальный коэн-маколеев модуль над ним. Но это не так уже для $l = 2$ и стандартного представления алгебры диагональных (2×2) -матриц, где это кольцо имеет вид $\mathbb{k}[x_1, x_2, y_1, y_2]/(x_i y_j)$ и размерность Крулля равна 2, а после факторизации по регулярному элементу $x_1 - y_1$ элемент x_1 будет аннулировать всеми переменными.

§ 2. Доказательство теоремы 2

В этом параграфе поле $\mathbb{k}$ будем считать совершенным, а l – большим единицы.

2.1. Постоянство n .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Все простые факторы T -алгебры A имеют одинаковую размерность над своими центрами.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для простого модуля M над простым фактором S алгебры A $\text{pd } F_l(M) = (l-1)\sqrt{\dim_{Z(S)} S} + 1$ по п. 2) теоремы 1 (в кольце многочленов будут лишние переменные, соответствующие ядру факторизации, но элементы Id будут устроены так же), что зависит от размерности S над своим центром при $l > 1$. Поэтому если A имеет простые факторалгебры разной размерности над своими центрами и M_1, M_2 – простые модули над ними, то $F_l(M_1 \oplus M_2) = F_l(M_1) \oplus F_l(M_2)$ будет иметь размерность Крулля, равную максимуму размерностей Крулля $F_l(M_1)$ и $F_l(M_2)$ [5; гл. III, Б.1, гл. I, В.1, предложение 10], а глубину – минимуму (предложение 0.1.4) и не будет коэн-маколеевым.

2.2. Разложение в прямую сумму.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. *O -алгебра или T -алгебра A разлагается в прямую сумму алгебр, каждая из которых имеет только один простой модуль.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Начнем подготовку к доказательству. Сначала перейдем к алгебраически замкнутому полю.

ЛЕММА 2.3. *Пусть A – O -алгебра (T -алгебра) над $\mathbb{k}$. Тогда $\bar{A} := A \otimes_{\mathbb{k}} \bar{\mathbb{k}}$ – O -алгебра (соответственно T -алгебра) над $\bar{\mathbb{k}}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2.3. *Случай T -алгебры.* Покажем, что любой $\bar{A}$ -модуль является прямым слагаемым $\bar{A}$ -модуля, полученного из A -модуля расширением скаляров. Тогда из леммы 1.6, аддитивности $F_l(\cdot)$ и использованных выше утверждений о глубине и размерности Крулля прямых сумм будет следовать утверждение леммы. Пусть M – $\bar{A}$ -модуль, E – конечное расширение $\mathbb{k}$, над которым он уже определен (т.е. поле, содержащее все элементы матриц $\rho_M(e_i)$ для каких-то базисов A и M), и M_E – соответствующий модуль над $A \otimes_{\mathbb{k}} E$. Тогда M_E является конечным A -модулем и

$$M_E \otimes_{\mathbb{k}} \bar{\mathbb{k}} = M_E \otimes_E E \otimes_{\mathbb{k}} \bar{\mathbb{k}} = \bigoplus_{\varphi: E \rightarrow \bar{\mathbb{k}}} M_E \otimes_E \bar{\mathbb{k}},$$

где в каждом слагаемом структура левого E -модуля на $\bar{\mathbb{k}}$ задана соответствующим φ , и для φ , задающего исходный выбор E как подполя, порожденного матричными элементами, соответствующее слагаемое есть M , что нам и требовалось.

Случай O -алгебры. Пусть $\mathbb{A} = (0 \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow P \rightarrow 0)$ – ТП $\bar{A}$ -модулей, E – конечное расширение $\mathbb{k}$, над которым она определена, т.е. над которым определены модули и которое содержит матрицы гомоморфизмов в некоторых базисах, $\mathbb{A}_E$ – ТП модулей с нижним индексом E , определенных как в предыдущем абзаце. Зададим на $\bar{\mathbb{k}}$ структуру $E \otimes_{\mathbb{k}} \bar{\mathbb{k}}$ -алгебры очевидным образом ($E \subset \bar{\mathbb{k}}$ по построению). Тогда проектирование на нужное нам прямое слагаемое задается для каждого модуля тензорным домножением на $\bar{\mathbb{k}}$ над $E \otimes_{\mathbb{k}} \bar{\mathbb{k}}$ и

$$F_l^{\bar{A}}(\mathbb{A}) = (F_l^A(\mathbb{A}_E) \otimes_{\mathbb{k}} \bar{\mathbb{k}}) \otimes_{E \otimes_{\mathbb{k}} \bar{\mathbb{k}}} \bar{\mathbb{k}},$$

что является точной последовательностью, так как $F_l^A(\cdot)$ точен по условию, а последнее тензорное домножение производится над полупростой алгеброй и тоже точно.

Теперь над алгебраически замкнутым полем установим, что два разных простых модуля над O - или T -алгеброй не образуют нетривиальных расширений.

ЛЕММА 2.4. Пусть

$$0 \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow P \rightarrow 0 \quad (1)$$

– нерасщепляемая ТП A -модулей, где M и P – неизоморфные простые модули, а основное поле $\mathbb{k}$ алгебраически замкнуто. Тогда последовательность $0 \rightarrow F_l(M) \rightarrow F_l(N) \rightarrow F_l(P) \rightarrow 0$ не точна, и если M и P одинаковой размерности, то $F_l(N)$ – не коэн-маколеев.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем обозначать через $\rho_M: A \rightarrow \text{End}_{\mathbb{k}} M$ соответствующее модулю M представление алгебры A . Тогда, выбрав $\mathbb{k}$ -базис в N , соответствующий композиционному ряду (1), получим

$$\rho_N(A) \subset \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \right\}, \text{ где } \alpha \in M_{n_1}(\mathbb{k}), \beta \in M_{n_1 \times n_2}(\mathbb{k}), \gamma \in M_{n_2}(\mathbb{k})$$

$$\text{и } \rho_N(a) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \Rightarrow \rho_M(a) = \alpha, \rho_P(a) = \gamma.$$

Так как $M \not\cong P$ – простые, то $\rho_{M \oplus P}(A) = \text{End}_{\mathbb{k}} M \oplus \text{End}_{\mathbb{k}} P$, т.е. $\rho_N(A) \xrightarrow{p} \rho_M(A) \oplus \rho_P(A)$ – эпиморфизм; если бы он был изоморфизмом, то $\rho_N(A)$ была бы полупроста и N был бы прямой суммой простых модулей и тривиальным расширением, что противоречит условиям леммы. Значит,

$$\exists \beta \neq 0: \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \rho_N(A);$$

из того, как умножаются матрицы в $\rho_N(A)$, и эпиморфности p видно, что такие β образуют подпредставление в представлении $M_{n_1}(\mathbb{k}) \otimes M_{n_2}(\mathbb{k})^{\text{op}}$ на $M_{n_1 \times n_2}(\mathbb{k})$ умножениями слева и справа соответственно, а из неприводимости этого представления следует, что

$$\rho_N(A) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \right\}, \text{ где } \alpha \in M_{n_1}(\mathbb{k}), \beta \in M_{n_1 \times n_2}(\mathbb{k}), \gamma \in M_{n_2}(\mathbb{k}).$$

Поэтому

$$F_l(N) = \tilde{N} / \left\langle \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \right\rangle,$$

где A, B, C – общие матрицы соответствующих размеров, скажем, $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$, и $F_l(M) = \tilde{M} / \langle A \rangle$, $F_l(P) = \tilde{P} / \langle C \rangle$. Отсюда видно, что $\mathbb{M}$ -образ $F_l(M)$ в $F_l(N)$ – это

$$\tilde{M} / \tilde{M} \cap \left\langle \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Покажем, что

$$\widetilde{M} \cap \left\langle \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \right\rangle \neq \langle A \rangle. \quad (2)$$

Пусть $\sum M_j \varepsilon_j \in \langle \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{ln} \rangle_R$ – базисная сизигия на столбцы матрицы C . Тогда $\sum M_j b_j$ (где b_j – j -й столбец матрицы B) принадлежит левой части (2) и зависит только от b_{ij} и c_{ij} , так как в базисных сизигиях столбцов C M_j – это $(n \times n)$ -алгебраические дополнения в какой-то $(n \times (n+1))$ -подматрице C (здесь важно, что $l > 1$ и такие есть).

Итак, левая часть (2) строго больше правой и $\mathbb{M} \neq F_l(M)$, т.е. точность нарушается. Докажем, что если M и P одной размерности n над $\mathbb{k}$, то нарушается и коэн-маколеевость $F_l(N)$. Для этого докажем, что $\dim \mathbb{M} < \dim F_l(M)$, а для этого докажем, что $\text{ht ann } \mathbb{M} > \text{ht ann } F_l(M)$. Так как идеал, порожденный максимальными минорами A , прост, аннулирует $F_l(M)$ и имеет высоту равную $\text{pd}_R F_l(M)$ [3; замечание 2.12], то он совпадает с $\text{ann } F_l(M)$, так что $\text{ann } F_l(M)$ прост и достаточно показать, что $\text{ann } \mathbb{M} \not\supseteq \text{ann } F_l(M)$.

Возьмем $n-1$ столбец матрицы A и столбец $\sum M_j b_j$, тогда определитель этой $(n \times n)$ -матрицы лежит в $\text{ann } \mathbb{M} \setminus \text{ann } F_l(M)$, так как имеет по a_{ij} степень лишь $n-1$, в отличие от всех элементов $\text{ann } F_l(M)$. Итак, $\dim \mathbb{M} < \dim F_l(M)$. Из точной последовательности

$$0 \rightarrow \mathbb{M} \rightarrow F_l(N) \rightarrow F_l(P) \rightarrow 0$$

видим, что $\dim F_l(N) = \dim F_l(P) = \dim F_l(M)$, а $\text{depth } F_l(N) = \text{depth } \mathbb{M} \leq \dim \mathbb{M} < \dim F_l(M) = \dim F_l(N)$, т.е. $F_l(N)$ не является коэн-маколеевым.

Таким образом, если A – O - или T -алгебра над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{k}$, то разные простые A -модули не образуют нетривиальных расширений. Используя интерпретацию групп расширений по Йонедэ [9; § 7, п. 3], это можно переформулировать так: если $M \not\cong P$ – простые A -модули, то $\text{Ext}_A^1(P, M) = 0$. Отсюда индукцией по длине легко получается следующий факт: если M, N – A -модули без общих композиционных факторов, то $\text{Ext}_A^1(M, N) = 0$, т.е. нет нетривиальных расширений $0 \rightarrow N \rightarrow P \rightarrow M \rightarrow 0$.

Теперь перенесем этот факт на исходное совершенное поле. Пусть M, N – два неизоморфных простых A -модуля, E – конечное расширение $\mathbb{k}$, над которым определены все композиционные факторы соответствующих $\overline{A}$ -модулей. Тогда по предложению 0.4.2 соответствующие модули над $A \otimes_{\mathbb{k}} E$ разлагаются в прямые суммы простых, а в силу выбора E эти прямые слагаемые остаются простыми и над $\overline{\mathbb{k}}$. Итак, $\overline{M}$ и $\overline{N}$ – полупростые $\overline{A}$ -модули, $\text{Hom}_A(M, N) = 0$, значит, $\text{Hom}_{\overline{A}}(\overline{M}, \overline{N}) = 0$, следовательно, $\overline{M}$ и $\overline{N}$ не имеют общих композиционных факторов. По только что доказанному $\text{Ext}_{\overline{A}}^1(\overline{M}, \overline{N}) = 0$. Так как функтор Ext перестановочен с расширением основного поля, то и $\text{Ext}_A^1(M, N) = 0$. Снова делаем индукцию по длине и получаем наш факт.

Теперь докажем предложение 2.2. Сначала исследуем разложения модулей в прямую сумму:

ЛЕММА 2.5. *Если A – O - или T -алгебра, то любой A -модуль M представляется как $\bigoplus_P M_P$, где P пробегает неизоморфные простые A -модули, а все композиционные факторы в M_P изоморфны P .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2.5 проводим индукцией по длине $l(M)$. При $l(M) = 1$ M прост и равен M_M . Иначе возьмем в M максимальный подмодуль M' , $M/M' = P_0$, тогда $M' = \bigoplus_P M'_P$ и (замечено рецензентом) ТП

$$0 \rightarrow \bigoplus_{P \neq P_0} M'_P \rightarrow M \rightarrow M / \bigoplus_{P \neq P_0} M'_P \rightarrow 0$$

расщепляется, так как все композиционные факторы M типа $P \neq P_0$ лежат в первом члене, что и дает нам нужное разложение для M .

Так как любая конечномерная алгебра разлагается единственным образом в прямую сумму неразложимых алгебр и модули над ней – суммы модулей над слагаемыми, то каждое слагаемое в разложении T - или O -алгебры – T - или O -алгебра соответственно, и *далее до конца параграфа будем считать A неразложимой*. Тогда для O -или T -алгебр A из описания этого разложения в п. 0.3 и предыдущего абзаца видно, что над A есть ровно один простой модуль.

2.3. Выделение простого множителя. Здесь и далее под *локальной* алгеброй мы будем подразумевать не обязательно коммутативную алгебру, все необратимые элементы которой образуют двусторонний идеал.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6. 1) *Неразложимая O -алгебра A является T -алгеброй.*

2) *Неразложимая T -алгебра A представляется в виде $S \otimes_{Z(S)} K$, где S – простая алгебра, $Z(S)$ – ее центр, а K – локальная алгебра над $Z(S)$ с телом вычетов $Z(S)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Докажем индукцией по длине M , что $F_l(M)$ коэн-маколеев проективной размерности $(l-1)\sqrt{\dim_{Z(S)} S} + 1$ для того l , для которого функтор $F_l(\cdot)$ точен. Для простого модуля это верно по теореме 1, так как он является модулем над простой алгеброй S и добавленные переменные в конструкции не влияют на проективную резольвенту. Шаг индукции делается точно так же, как при доказательстве коэн-маколеевности в п. 1.2.

2) Шаг 1. Докажем, что в A есть простая подалгебра S , содержащая единицу алгебры A . По теореме Веддерберна–Мальцева (предложение 0.4.5 и замечание 0.4.6) в A есть подалгебра $S \cong A/\text{rad } A$, $A = S \oplus \text{rad } A$ и S содержит единицу алгебры A . Так как над A есть ровно один простой модуль, то S проста.

Шаг 2. Покажем, что $Z(S) \subset Z(A)$. Достаточно сделать это после перехода к алгебраическому замыканию поля, так как $Z(A) = A \cap Z(\bar{A})$. По доказанному выше $\bar{A}$ является T -алгеброй и разлагается в прямую сумму алгебр с единственным простым модулем. Так как поле алгебраически замкнуто, то полупростые факторы слагаемых – матричные алгебры и центр каждой из них – скаляры в соответствующем слагаемом, так что центр $\bar{S}$ – сумма скаляров по всем неразложимым слагаемым алгебры $\bar{A}$. Но центр каждого прямого слагаемого лежит в центре $\bar{A}$, так что центр $\bar{S}$ лежит в центре $\bar{A}$. Значит, A является $Z(S)$ -алгеброй.

Поэтому можно воспользоваться упражнением 2а) из [8; гл. VIII, §10]. Это упражнение утверждает, что если $S \subset A$ – конечномерная простая подалгебра L -алгебры A , содержащая единицу алгебры A , и $Z(S) = L$, то $A = S \otimes_{Z(S)} K$, где K – централизатор S в A .

Шаг 3. Теперь заметим, что если K_{ss} — полупростой фактор K , то $S \otimes_{Z(S)} K_{ss}$ — полупростой (по предложению 0.4.7) фактор A . Но полупростой фактор A равен S , так что $K_{ss} = Z(S)$. Итак, все ненулевые элементы K_{ss} обратимы, так что K — локальная алгебра.

2.4. Коммутативность второго множителя.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.7. *В условиях предложения 2.6 K коммутативна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что $S = M_n(\mathbb{k})$ и $K_{ss} = \mathbb{k}$: коммутативность достаточно доказать после расширения поля, а при расширении поля до $\overline{\mathbb{k}}$ алгебра K превращается в прямую сумму алгебр того же типа (так как A превратится в T -алгебру $M_n(K \otimes_{\mathbb{k}} \overline{\mathbb{k}})$) и достаточно доказать коммутативность каждого слагаемого.

ЛЕММА 2.8. *Пусть K — локальная алгебра с телом вычетов $\mathbb{k}$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда для любого $M_n(K)$ -модуля M*

$$\dim F_l(M) = \dim \mathbb{k}[(M_n(K))^l] - ((l-1)n + 1)$$

(здесь никакой коэн-маколеевости не предполагается).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2.8 проведем индукцией по длине: простой модуль есть $\mathbb{k}^n$ над $M_n(\mathbb{k})$, для него $F_l(\mathbb{k}^n)$ — коэн-маколеев проективной размерности $(l-1)n + 1$ по п. 2) теоремы 1, а по предложению 0.1.5 его размерность Крулля именно такова.

Далее, из ТП $0 \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow P \rightarrow 0$ получается ТП

$$F_l(N) \rightarrow F_l(M) \rightarrow F_l(P) \rightarrow 0,$$

откуда $\dim F_l(P) \leq \dim F_l(M) \leq \max\{\dim F_l(N), \dim F_l(P)\}$. По предположению индукции размерности Крулля $F_l(N)$ и $F_l(P)$ равны $\dim R - ((l-1)n + 1)$, значит, то же верно и для $\dim F_l(M)$.

ЛЕММА 2.9. *В условиях предыдущей леммы если $M_n(K)$ — T -алгебра, то и K — T -алгебра.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2.9. Пусть $M_n(K)$ — T -алгебра для параметра l , $\mathcal{M}$ — произвольный K -модуль, $M = \mathcal{M}^n$ — соответствующий $M_n(K)$ -модуль. Тогда в обозначениях 1.7 $F_l(M)$ есть фактор по столбцам блочной $(n \times ln)$ -матрицы (Id_{ij}^K) . Пусть f_1 — единица K . Рассмотрим последовательность $\mathbf{x} = (\{x_{1ii} - 1\}_{i=2}^n, \{x_{\alpha ii}\}_{i=2, \alpha=2}^{\dim_{\mathbb{k}} K}, \{x_{\alpha ij}\}_{i \geq 2, j \notin [2, n]}, \{x_{\alpha 1j}\}_{j=2}^n)$, т.е. такую, что после подстановки этих значений в переменные вышеуказанная матрица примет вид

$$\begin{pmatrix} \text{Id}_{11}^K & 0 & \cdots & 0 & \text{Id}_{1, n+1}^K & \cdots & \text{Id}_{1, ln}^K \\ 0 & 1 & & 0 & & & \\ \vdots & & \ddots & & & & \\ 0 & 0 & & 1 & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что фактор по столбцам получившейся матрицы есть $F_{l'}(\mathcal{M})$ для $l' = (l-1)n + 1$ и что $\mathbb{k}[(M_n(K))^l]/(\mathbf{x}) = \mathbb{k}[K^{l'}]$. То есть $F_{l'}(\mathcal{M}) = F_l(M)/\mathbf{x}F_l(M)$. Нам надо доказать, что $F_{l'}(\mathcal{M})$ — коэн-маколеев, а так как $F_l(M)$ коэн-маколеев

по условию, то по предложению 0.1.8 достаточно доказать, что $\dim F_{l'}(\mathcal{M}) = \dim F_l(M) - l(\mathbf{x})$. Но $\mathbf{x}$ – регулярная последовательность в $\mathbb{k}[(M_n(K))^l]$ длины $\dim \mathbb{k}[(M_n(K))^l] - \dim \mathbb{k}[K^{l'}]$, а так как по лемме 2.8

$$\dim F_l(M) = \dim \mathbb{k}[(M_n(K))^l] - l', \quad \dim F_{l'}(\mathcal{M}) = \dim \mathbb{k}[K^{l'}] - l',$$

то размерности такие, как надо, и K – T -алгебра для параметра l' .

ЛЕММА 2.10. *Пусть A – локальная T -алгебра с телом вычетов $\mathbb{k}$. Тогда A коммутативна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2.10. Пусть M – точное представление A . Выберем в M $\mathbb{k}$ -базис, соответствующий композиционному ряду, и докажем индукцией по $l(M)$, что два общих элемента алгебры A (от разных переменных) коммутируют, откуда и следует коммутативность.

Если $l(M) = 1$, то $\dim_{\mathbb{k}} M = 1$ и $A = \mathbb{k}$ коммутативна. Иначе это верно для $\rho_{M/M_1}(A)$ по предположению индукции, где M_1 – первый член композиционного ряда для M . Напишем коммутатор двух общих элементов $\rho_M(A)$:

$$\left[\begin{pmatrix} a_1 & C_1 \\ & \ddots & B_1 \\ 0 & & a_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & C_2 \\ & \ddots & B_2 \\ 0 & & a_2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & * \\ & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 \end{pmatrix},$$

где $*$ = $C_1 B_2 - C_2 B_1$, а ниже первой строки – нули в силу коммутативности $\rho_{M/M_1}(A)$.

Теперь если $C_1 B_2 - C_2 B_1 \neq 0$, то в первой строке есть ненулевой элемент – многочлен, не содержащий переменных a_i , и $F_l(M_1) = R/(a_1, \dots, a_l)$ факторизуется по нему при вложении в $F_l(M)$, следовательно, падает размерность Крулля образа $F_l(M_1)$ в $F_l(M)$, а значит, и глубина $F_l(M)$. Итак, $C_1 B_2 - C_2 B_1 = 0$ и два общих элемента алгебры A коммутируют.

Предложение 2.7 вытекает из последних двух лемм, а теорема 2 следует из доказанных в этом параграфе предложений, поскольку алгебры S из предложения 2.6 для разных неразложимых слагаемых A являются в точности всеми простыми факторами A .

§ 3. Доказательство теоремы 3

Сведение к модулю P . Во-первых, можно перейти к алгебраическому замыканию поля, так как все требуемые инварианты модуля $F_l(M)$ определяются структурой его минимальной резольвенты. Далее, ряд Гильберта и кратность являются аддитивными в коротких точных последовательностях в категории градуированных модулей, поэтому для $F_l(M)$ они в $\dim_{\mathbb{k}} M / \dim_{\mathbb{k}} P$ раз больше, чем для $F_l(P)$, а $\dim_{\mathbb{k}} P = n$. Для чисел Бетти, в частности (предложение 0.5.5) для коэн-маколеева типа, это следует из того, что в обозначениях 1.7 минимальная резольвента $F_l(M)$ есть $C \otimes_{R[T]} \mathcal{M}$, так что они в $\text{rk}_R \mathcal{M} = \dim_{\mathbb{k}} M / n$ раз превосходят ранги компонент C , и этот коэффициент равен единице для P . Таким образом, достаточно посчитать все инварианты для $H_0(C)$. Будем делать это для комплекса Игона–Норкотта, построенного по матрице $g \times f$, а потом подставим наши значения $f = ln, g = n$.

Числа Бетти для $F_l(P)$. Формулы непосредственно следуют из определения комплекса Игона–Норкотта.

Ряд Гильберта и кратность. Ряд Гильберта является аддитивной функцией на градуированных модулях, поэтому эйлерова характеристика минимальной резольвенты

$$0 \rightarrow F_k \rightarrow \cdots \rightarrow F_0 \rightarrow F_l(P) \rightarrow 0$$

модуля $F_l(P)$ относительно него равна нулю, т.е. $F_l(P)(t) = \sum_i (-1)^i F_i(t)$. Рассмотрим ряд Пуанкаре $P(s, t) = \sum_i s^i t^j b_{ij}$, где b_{ij} – градуированные числа Бетти $F_l(P)$, тогда $F_l(P)(t) = P(-1, t)/(1-t)^{\dim R}$. Имеем:

$$\begin{aligned} P(s, t) &= g + fst + \sum_{k=g+1}^f \binom{f}{k} \binom{k-2}{g-1} s^{k+1-g} t^k \\ &= (1 - (-s)^{1-g})(g + fst) + \frac{1}{(g-1)!} s^2 \left(\frac{\partial}{\partial s} \right)^{g-1} (s^{-2}(1+st)^f) \\ &= (1 - (-s)^{1-g})(g + fst) + (1+st)^{f-g+1} \sum_{k=0}^{g-1} \binom{f}{k} (g-k) t^k \left(-\frac{1}{s} - t \right)^{g-1-k}. \end{aligned}$$

Подставляя $s = -1$ и сокращая со знаменателем, получаем требуемое выражение. Подставляя в числитель $t = 1$, находим кратность.

Список литературы

1. Adams W. W., Loustaunau P., Palamodov V. P., Struppa D. C. Hartog's phenomenon for polyregular functions and projective dimension of related modules over a polynomial ring // Ann. Inst. Fourier. 1997. V. 47. № 2. P. 623–640.
2. Adams W. W., Loustaunau P. Analysis of the module determining the properties of regular functions of several quaternionic variables // Pacific J. Math. 2000. V. 196. № 1. P. 1–15.
3. Bruns W., Vetter U. Determinantal rings. Berlin: Springer-Verlag, 1988. (Lecture Notes in Math. V. 1327.)
4. Eisenbud D. Commutative algebra with a view toward algebraic geometry. Berlin: Springer-Verlag, 1995. (Grad. Texts in Math. V. 150.)
5. Серр Ж.-П. Локальная алгебра и теория кратностей // Математика. Сб. пер. 1963. Т. 7. № 5. С. 3–93.
6. Buchsbaum D. A., Eisenbud D. What makes a complex exact? // J. Algebra. 1973. V. 25. № 2. P. 259–268.
7. Кэртис Ч., Райнер И. Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. М.: Наука, 1969.
8. Бурбаки Н. Алгебра. Модули, кольца, формы. М.: Наука, 1966.
9. Бурбаки Н. Алгебра. Глава X. М.: Наука, 1987.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: popov@mcsmc.ru

Поступила в редакцию
24.05.2001