Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Н. Туляков, Разностные уравнения с базисами степенного роста, возмущенные спектральным параметром, *Матем. сб.*, 2009, том 200, номер 5, 129–158

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm6393>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 06:52:44

УДК 517.929+517.538.3+517.538.6

Д. Н. Туляков

Разностные уравнения с базисами степенного роста, возмущенные спектральным параметром

В работе исследуются асимптотики решений степенного роста рекуррентных соотношений со спектральным параметром. Введен некоторый класс рекуррентных соотношений, все базисные решения которого имеют степенной рост. Рекуррентные соотношения этого класса линейно возмущаются спектральным параметром, и для решений новых рекуррентных соотношений доказаны асимптотики, равномерные по спектральному параметру, взятому в соответствующих масштабах. Полученные теоремы применены к получению новых локальных асимптотик для ортогональных и совместно ортогональных многочленов в окрестностях концевых точек носителей весов ортогональности.

Библиография: 14 названий.

Ключевые слова: асимптотика решений рекуррентных соотношений, локальные асимптотики ортогональных и совместно ортогональных многочленов, теоремы Пуанкаре, Перрона, Биркгофа–Трыгинского.

§ 1. Введение

1.1. Постановка задачи. Рассматриваются разностные уравнения со спектральным параметром x

$$\mathcal{Q}(n, x)[\vec{q}] = 0, \quad (1.1)$$

$$\text{где } \mathcal{Q}(n, x)[\vec{q}] := f(n)xq_{n+r} + \sum_{i=0}^k a_i(n)q_{n+i}, \quad 0 \leq r < k, \quad \vec{q} := \{q_n\}_{n=0}^{\infty}.$$

Разумеется, элементы последовательности $\vec{q}$, удовлетворяющей (1.1), зависят от x , поэтому, говоря об элементах решений (1.1), мы используем обозначение $q_n(x)$.

Коэффициенты $\{a_i(n)\}_{i=0}^k$ таковы, что при $x = 0$ уравнение (1.1) имеет базис из решений степенного роста, поэтому

$$\mathcal{Q}(n, 0)[\vec{q}] = 0 \implies q_n(0) \sim \sum_j n^{\beta_j} p_j(\ln n), \quad \beta_j \in \mathbb{C}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (1.2)$$

Работа выполнена при поддержке Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-3906.2008.1), Программы РАН “Современные проблемы теоретической математики” и Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00179).

где сумма по j конечна, $p_j \neq 0$ – некоторые полиномы. Целью настоящей работы является получение асимптотик решения (1.1), (1.2), равномерных в “масштабированных” окрестностях точки $x = 0$ спектрального параметра

$$q_n(x) \sim ?, \quad x \in \Omega_n \subset \mathbb{C}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Степенной рост вида (1.2) характерен для решений разностных уравнений (1.1) в концевых точках непрерывного спектра. Например, ортогональные многочлены, удовлетворяющие трехчленному рекуррентному соотношению, имеют такой порядок роста в конце носителя веса ортогональности. То же справедливо и для некоторых совместно ортогональных многочленов, удовлетворяющих рекуррентным соотношениям более высокого порядка.

В настоящей работе решаются две задачи.

Во-первых, мы получаем условия на коэффициенты $\{a_i(n)\}_{i=0}^k$ разностного уравнения $\mathcal{Q}(n, 0)[\vec{q}] = 0$, которые гарантируют существование базиса из k решений степенно-логарифмического роста (см. ниже теорему 1.1). Этот результат аналогичен классическим теоремам Пуанкаре и Перрона (см. [1]–[4]), которые устанавливают существование базиса решений быстрого (экспоненциального) роста. Отметим также цикл работ Биркгофа–Трыжинского (см. [5]–[7]), в которых для любых полиномиальных по n коэффициентов $\{a_i(n)\}_{i=0}^k$ разностного уравнения $\mathcal{Q}(n, 0)[\vec{q}] = 0$ доказывается существование голоморфных по n базисных решений, допускающих представление в виде асимптотических по n рядов. В отличие от этих результатов наши условия на коэффициенты $\{a_i(n)\}_{i=0}^k$ имеют асимптотический характер (как и в теоремах Пуанкаре–Перрона).

Во-вторых, переходя от разностного уравнения $\mathcal{Q}(n, 0)[\vec{q}] = 0$ к уравнению (1.1) со спектральным параметром при условии на коэффициент $f(n) = n^\lambda(C + o(n^{-\varepsilon_1}))$, мы распространяем асимптотику (1.2) решения в точке $x = 0$ с одной точки на масштабируемые окрестности: значение масштабированной спектральной переменной $z := xn^{k+\lambda}$ принадлежит компактам $K \subset \mathbb{C}$. Асимптотика имеет вид

$$q_n(x) \sim \sum_j n^{\beta_j} \sum_{i=0}^{\deg(p_j)} F_{ji}(z) \ln^i n, \quad z \in K \Subset \mathbb{C},$$

здесь $F_{ji}(z)$ – решения уравнений гипергеометрического типа (детали см. ниже в теореме 1.2). Эта асимптотика является центральным результатом статьи, который обобщает прежние работы [8], [9], также посвященные продолжениям по спектральной переменной слабо растущих асимптотик из точки в окрестность (детали см. в п. 1.4). Стоит, однако, отметить, что такой способ получения асимптотик не единственно возможный. Иногда удается найти достаточно точную глобальную асимптотику, из которой локальная асимптотика может быть выведена как следствие. Одной из последних работ в этом направлении является [10].

В п. 1.2 приводятся основные обозначения и соглашения, используемые в статье. Затем в пп. 1.3, 1.4 даются точные формулировки результатов статьи

(теоремы 1.1, 1.2) и проводится их обсуждение. Наконец, в п. 1.5 мы формулируем результаты применения теоремы 1.2 к конкретным рекуррентным соотношениям, определяющим ортогональные и совместно ортогональные многочлены.

Следующие параграфы посвящены доказательству сформулированных во введении результатов: в § 2 приведено доказательство теоремы 1.1, в § 3 – доказательство теоремы 1.2 и в § 4 – доказательство теорем о локальной асимптотике ортогональных и совместно ортогональных многочленов.

Автор выражает благодарность профессору А.И. Аптекареву за полезные советы и обсуждения в процессе работы над этой статьей.

1.2. Обозначения и соглашения. На всем протяжении настоящей работы без дополнительных пояснений будут использованы следующие обозначения и соглашения по ним.

Символом T будет обозначаться *оператор сдвига* аргумента на 1. По соглашению оператор действует на все вхождения символа n в области действия оператора и не действует на все остальные символы аргументов и переменных. Символом Δ обозначен *оператор разности вперед*, т.е. формально $\Delta = T - 1$ (здесь 1 – тождественный оператор).

Для биномиальных коэффициентов используется обозначение $\binom{k}{i}$, при этом без дополнительных оговорок допускается его использование для случаев $k, i \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Его значением в случае $0 \leq i \leq k$ является

$$C_k^i = \frac{k!}{(k-i)!i!},$$

а в остальных случаях 0. Формально это значение $\text{Res}_{z=0}((1+z)^k/z^{i+1})$.

Через $(x)_k$ обозначается так называемый *символ Похгаммера*. В случае общего положения $(x)_k := \Gamma(x+k)/\Gamma(x)$. Для $k \in \mathbb{N}_0$ $(x)_k = \prod_{i=0}^{k-1} (x+i)$. При возникновении неопределенностей значением $(x)_k$ считается значение аналитической функции $(z)_k$ при ее мероморфном продолжении в точку $z = x$.

Символом $J_\alpha(x)$ обозначается значение функции Бесселя.

Суммы без обозначения границ, как в (1.2), считаются конечными суммами (переменная суммирования во всех встречающихся случаях – это j).

Будем говорить, что величины ϕ_n *допускают выделение главного члена* $f_1(n)$ порядка $f(n)$ и писать $\phi_n \sim f_1(n)$, если $\phi_n = f_1(n) + o(f(n))$ и при этом главный член f_1 и порядок f согласованы:

$$\begin{aligned} \phi_n \sim f_1(n) : \quad \phi_n &= f_1(n) + o(f(n)), \\ f_1(n) &= O(f(n)), \quad f(N) = O\left(\max_{M \leq n \leq N} f_1(n)\right), \quad M = o(N). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Для монотонных выражений степенного роста это равносильно обычной эквивалентности $\simeq$, означающей, что отношение левой и правой частей стремится к 1.

Наконец, символ $\prod$ мы будем использовать не только для произведения выражений, но и для произведения операторов. В силу некоммутативности принято соглашение, что множители, соответствующие большему индексу, расположены левее и поэтому применяются позже, чем множители с меньшим индексом. Таким образом,

$$\left(\prod_{i=1}^2 L_i\right)f = L_2(L_1(f)), \quad \left(\prod_{i=1}^k L_i\right)^{-1} = \prod_{i=-k}^{-1} (L_{-i})^{-1}.$$

Как обычно, значение пустого числового произведения принимается равным 1, а значение пустого произведения операторов – равным оператору 1 (тождественному оператору).

Будут использованы также следующие полезные формулы:

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^k (uv) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \left(\frac{d}{dx}\right)^i (u) \left(\frac{d}{dx}\right)^{k-i} (v), \quad (a+b)_k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (a)_i (b)_{k-i}. \quad (1.4)$$

Первая из них (правило Лейбница) может быть доказана индукцией по k , а вторая (формула бинома для символа Похгаммера) получается из первой применением ее к произведению $x^{-a}x^{-b}$ в точке $x = 1$.

1.3. Рекуррентные соотношения с базисами степенного роста. В этом пункте мы формулируем результат, характеризующий некоторый класс разностных уравнений таких, что существует базис их решений со степенным ростом (при $n \rightarrow \infty$). А именно, опишем асимптотические свойства коэффициентов разностных уравнений, гарантирующих существование таких базисов.

ТЕОРЕМА 1.1. *Рекуррентное соотношение вида*

$$\sum_{i=0}^k a_i(n) q_{n+i} = 0, \quad a_k(n) \equiv 1, \quad a_0(n) \neq 0, \quad (1.5)$$

коэффициенты которого удовлетворяют асимптотическим условиям (с некоторыми $c_j \in \mathbb{C}$)

$$A_j(n) := \sum_{i=0}^k \binom{i}{j} a_i(n) = (-n)^{j-k} (c_j + o(n^{-\varepsilon})), \quad 0 < \varepsilon < 1, \quad (1.6)$$

имеет решения со степенным поведением на бесконечности. А именно, для каждого комплексного α , являющегося корнем многочлена $E(\alpha)$:

$$\alpha : \quad E(\alpha) := \sum_{i=0}^k (-\alpha)_i c_i = 0, \quad (1.7)$$

существует последовательность $\{q_n\}$, которая удовлетворяет соотношению (1.5) и имеет асимптотику

$$q_n \sim n^\alpha \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Если α – кратный корень, то существует решение с асимптотикой

$$q_n \sim n^\alpha \ln^{s-1} n \quad (1.8)$$

для каждого натурального s от 1 до кратности α . Всего получается k различных асимптотик, и набор решений с такими асимптотиками образует базис решений соотношения (1.5). Кроме того, базисные решения гладко меняются в следующем смысле:

$$|\Delta^j [q_n - n^\alpha \ln^{s-1} n]| = o(n^{\operatorname{Re}(\alpha) - j - \delta}) \quad \forall \delta < \varepsilon, \quad j = 0, \dots, k. \quad (1.9)$$

Сделаем несколько замечаний, касающихся формулировки теоремы 1.1.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Поясним возникновение условия (1.6) и уравнения (1.7). Рекуррентное соотношение (1.5) тождественными преобразованиями (с помощью операторов сдвига и разности) приводится к виду

$$\sum_{i=0}^k a_i(n) T^i q_n = \sum_{i=0}^k a_i(n) (\Delta + 1)^i q_n = \sum_{i=0}^k a_i(n) \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \Delta^j q_n = \sum_{j=0}^k A_j(n) \Delta^j q_n. \quad (1.10)$$

Теперь, подставляя в правую часть $q_n = n^\alpha$ и $A_j = (-n)^{j-k} c_j$, после сокращения на $n^{\alpha-k}$ и отбрасывания членов с отрицательными степенями n получим выражение (1.7) для многочлена $E(\alpha)$. Отметим, что многочлен $E(\alpha)$ является аналогом характеристического многочлена в упоминаемой выше теореме Пуанкаре–Перрона (т.е. многочлена с коэффициентами – пределами коэффициентов разностного уравнения (1.5)). Мы фиксируем порядок корней $\{\alpha_i\}_{i=0}^{k-1}$ по возрастанию их действительной части:

$$E(t) = \sum_{i=0}^k c_i \cdot (-t)_i = \prod_{i=0}^{k-1} (-t + \alpha_i), \quad \operatorname{Re}(\alpha_i) \leq \operatorname{Re}(\alpha_j) \quad \text{при } i < j. \quad (1.11)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Поясним смысл используемого понятия последовательности. Мы считаем последовательность $\{q_n\}$ гладкой (гладкой k -го порядка), если у нее можно выделить главный (в определенном смысле) член асимптотики и применение к обеим частям асимптотической формулы оператора разности (до k -го порядка) оставляет асимптотическую формулу верной. Главный член может иметь сложное выражение, в котором для некоторых n могут происходить сокращения.

Таким образом, в условиях теоремы 1.1 гладкость решений $\{q_n\}$ равна k : гладкость $k - 1$ обеспечивается выбором пространства последовательностей, а гладкость k получается автоматически из соотношения (1.5) и асимптотических условий (1.6).

1.4. Асимптотика спектральных возмущений. В этом пункте мы сформулируем и обсудим основной результат настоящей работы – теорему о локальной асимптотике решений степенного роста при введении в разностное уравнение спектрального параметра. Справедлива

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть рекуррентное соотношение вида (1.5), (1.6) модифицировано с помощью параметра x , линейно возмущающего r -й коэффициент, $0 \leq r < k$:

$$f(n)xq_{n+r}(x) + \sum_{i=0}^k a_i(n)q_{n+i}(x) = 0, \quad f(n) = n^\lambda(C + o(n^{-\varepsilon_1})), \quad C \neq 0, \quad (1.12)$$

при этом (в силу теоремы 1.1 такое представление обязательно существует)

$$q_n(0) = \sum_j n^{\beta_j} p_j(\ln n) + o(n^b), \quad (1.13)$$

где p_j – некоторые многочлены степени ν_j , β_j – корни многочлена $E(t)$ (1.11) кратности $\geq \nu_j + 1$ с (одинаковыми) действительными частями $\operatorname{Re}(\beta_j) = b$, а параметр λ в (1.12) подчинен условию

$$b + \lambda + k > B, \quad B = \operatorname{Re}(\alpha_{k-1}). \quad (1.14)$$

Тогда для $x = zn^{-\lambda-k}$ с равномерными по $z \in K \Subset \mathbb{C}$ оценками верно равенство

$$q_n = \sum_j n^{\beta_j} \sum_{i=0}^{\nu_j} y_{ji}(1) \ln^i n + o(n^b), \quad (1.15)$$

где y_{ji} – решения уравнения

$$\left[Cz t^{\lambda+k} + \prod_{j=0}^{k-1} \left(t \frac{d}{dt} - \alpha_j \right) \right] y(t) = 0, \quad (1.16)$$

удовлетворяющие краевым условиям

$$y_{ji}(t) = \frac{t^{\beta_j}}{i!} p_j^{(i)}(\ln t) + o(t^B) \quad \text{при } t \rightarrow 0. \quad (1.17)$$

Неравенство (1.14) обеспечивает единственность выбора y_{ji} .

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. Дифференциальное уравнение (1.16) относится к гипергеометрическому типу и имеет частные решения, представимые через обобщенную гипергеометрическую функцию ${}_pF_q$:

$${}_pF_q([a_1, \dots, a_p]; [b_1, \dots, b_q]; x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \cdots (a_p)_n}{n! (b_1)_n \cdots (b_q)_n} x^n.$$

Если все α_m различны, то в граничных условиях (1.17) зависимость от индекса i пропадает и мы имеем решения

$$\begin{aligned} y_m(t) &= t^{\alpha_m} {}_1F_k \left([1]; \left[1 + \frac{\alpha_m - \alpha_0}{\lambda + k}, \dots, 1 + \frac{\alpha_m - \alpha_{k-1}}{\lambda + k} \right]; \frac{-Czt^{\lambda+k}}{(\lambda + k)^k} \right) \\ &= t^{\alpha_m} {}_0F_{k-1} \left([]; \left[1 + \frac{\alpha_m - \alpha_i}{\lambda + k} \right]_{i \neq m}; \frac{-Czt^{\lambda+k}}{(\lambda + k)^k} \right) = t^{\alpha_m} (1 + o(t^{\lambda+k-\varepsilon})), \end{aligned} \quad (1.18)$$

совокупность которых образует базис (здесь мы используем обозначение $[] := [\emptyset]$ для пустого набора). В случае совпадений некоторых из α_i между собой

написанные решения тоже начнут совпадать. Тогда нужно присоединить соответствующие производные ${}_0F_{k-1}$ по совпадающим индексам. Реальная необходимость такого присоединения возникает, если среди многочленов p_j есть не константы.

Первые общие результаты о локальной асимптотике ортогональных полиномов были получены в работе А. И. Аптекарева [8] (случай отрезка) и в работе автора [9]. Можно показать (и мы сделаем это ниже), что найденные в [9] асимптотические формулы при небольшом уменьшении порядка остатка получаются применением результатов настоящей работы к случаю трехчленных рекуррентных соотношений, т.е. к случаю $k = 2$. В то же время результаты работы [8] описывают случай рекуррентных соотношений, у которых решения в точке имеют гладкость на 1 меньше. Возможно, дальнейшие исследования позволят обобщить результаты настоящей работы в сторону уменьшения гладкости решений $\{q_n\}$, но для большинства приложений такое ограничение несущественно.

Ниже приводятся формулировки теорем из работ [8], [9] с некоторыми переобозначениями и показывается, что в предположении о достаточной гладкости эти результаты выводятся из результатов настоящей работы.

ТЕОРЕМА А (см. [8; теорема 1]). Пусть $\{q_n(x)\}$ – ортонормированная система многочленов по мере dm из класса мер, определяемого поведением рекуррентных коэффициентов:

$$b_n q_{n+1}(x) + a_n q_n(x) + b_{n-1} q_{n-1}(x) = x q_n(x),$$

так что

$$b_n \rightarrow \frac{1}{2}, \quad a_n \rightarrow 0,$$

и пусть¹

$$\frac{q_{n+1}(1)}{q_n(1)} = 1 + \frac{\alpha + \frac{1}{2}}{n} + \theta_n, \quad \alpha > -1, \quad \sum_n |\theta_n| < \infty.$$

Тогда

$$n^{-(\alpha+1/2)} q_n \left(1 - \frac{z^2}{2n^2} \right) = \frac{J_\alpha(z)}{z^\alpha} + o(1)$$

при $n \rightarrow \infty$ равномерно на компактах z -плоскости.

Для случаев, когда $\theta_n = o(n^{-1-\varepsilon})$, утверждение теоремы А может быть получено из утверждения теоремы 1.2.

ТЕОРЕМА В (см. [9; теорема 1]). Пусть последовательность полиномов $\{q_n(x)\}_{n=0}^\infty$ удовлетворяет рекуррентным соотношениям

$$q_{n+1}(x) = (x - b_n)q_n(x) - d_n q_{n-1}(x), \quad n \in \mathbb{N}, \quad q_0 = 1, \quad q_1 = x - b_0, \quad (1.19)$$

с условием на коэффициенты

$$b_n = cn^{2\beta}(1 + \bar{o}(1)) \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad c \neq 0, \quad (1.20)$$

¹Здесь формулировка теоремы А приведена с исправленной опечаткой в остаточном члене, имеющейся в оригинале статьи.

и пусть дополнительно известно, что последовательность значений в нуле $\{q_n(0)\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяет условию

$$-\frac{b_n q_n(0)}{q_{n+1}(0)} = 2 - \frac{2\alpha + 1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right). \quad (1.21)$$

Если параметры α и β удовлетворяют неравенствам

$$\beta < 1, \quad \alpha > \beta - 1, \quad (1.22)$$

то для отношения полиномов вблизи точки 0 справедливо представление

$$\frac{q_{n+1}(cn^{2\beta-2}z)}{q_n(cn^{2\beta-2}z)} = \frac{q_{n+1}(0)}{q_n(0)} \left(1 + \frac{1}{n} f_n(z)\right),$$

и в этом представлении имеется сходимость $f_n(z) \rightarrow f(z)$ в сферической метрике равномерно на компактах $K \subset \mathbb{C}$. Функция $f(z)$ имеет явный вид

$$f(z) = \sqrt{2z} J_{\alpha/(1-\beta)+1} \left(\frac{\sqrt{2z}}{1-\beta} \right) / J_{\alpha/(1-\beta)} \left(\frac{\sqrt{2z}}{1-\beta} \right). \quad (1.23)$$

Пусть $\{q_n\}$ удовлетворяют условию теоремы В с заменой остаточных членов в условиях (1.20) и (1.21) на $o(n^{-\varepsilon})$ и $o(n^{-1-\varepsilon})$ соответственно. Определим величины Q_n , K_n : $q_n(x) = q_n(0)Q_{n+1}(x)$, K_n есть величина в левой части (1.21). Тогда соотношение (1.19) превратится в

$$Q_{n+2}(x) - K_n \left(1 - \frac{x}{b_n}\right) Q_{n+1}(x) + \frac{d_n q_{n-1}(0)}{q_{n+1}(0)} Q_n(x) = 0.$$

Из определения Q_n получаем, что $Q_n(0) = 1$ для всех n , поэтому сумма всех коэффициентов написанного соотношения равна 0. С учетом этого соотношение на Q_n принимает вид

$$[Q_{n+2}(x) - 2Q_{n+1}(x) + Q_n(x)] + (2 - K_n)[Q_{n+1}(x) - Q_n(x)] + \frac{K_n x}{b_n} Q_{n+1}(x) = 0,$$

или

$$\Delta^2 Q_n(x) + (2 - K_n) \Delta Q_n(x) + \frac{K_n x}{b_n} Q_{n+1}(x) = 0,$$

где

$$K_n = 2 - \frac{2\alpha + 1}{n} + o(n^{-1-\varepsilon}), \quad b_n = cn^{2\beta}(1 + o(n^{-\varepsilon})).$$

Теперь соотношение на Q_n имеет вид (1.12), и по теореме 1.2 с учетом свойства гладкости имеем

$$\begin{aligned} Q_n(zn^{2\beta-2}) &= {}_0F_1 \left([]; \left[1 + \frac{\alpha}{1-\beta} \right]; \frac{-zt^{2-2\beta}}{2c(1-\beta)^2} \right) \Big|_{t=1} + o(1), \\ Q_{n+1}(zn^{2\beta-2}) - Q_n(zn^{2\beta-2}) &= \frac{1}{n} \frac{d}{dt} {}_0F_1 \left([]; \left[1 + \frac{\alpha}{1-\beta} \right]; \frac{-zt^{2-2\beta}}{2c(1-\beta)^2} \right) \Big|_{t=1} + o\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Связь функций Бесселя с гипергеометрическими функциями

$$x^{-\nu} J_{\nu}(x) = \frac{2^{-\nu}}{\Gamma(\nu+1)} {}_0F_1\left(\begin{matrix} \\ \end{matrix}; [\nu]; \frac{-x^2}{2}\right)$$

доказывает соотношение (1.23), если выполняется неравенство (1.14). Для данного случая это неравенство имеет вид $2\alpha + 2 - 2\beta > \max(0, 2\alpha)$, что совпадает с условиями (1.22).

1.5. Примеры применения теоремы 1.2. В этом пункте мы сформулируем новые результаты, полученные применением общей теоремы 1.2 к конкретным системам ортогональных и совместно ортогональных многочленов. Начнем с одной системы ортогональных многочленов с очень интересным поведением меры ортогональности на стыке непрерывной и дискретной составляющих.

ТЕОРЕМА 1.3. Пусть система многочленов $\{Q_n\}$ определена рекуррентными соотношениями ($n \in \mathbb{N}$, $b, s \in \mathbb{R}$)

$$Q_0(x) = 1, \quad Q_1(x) = x - b, \quad Q_{n+1}(x) = xQ_n(x) - \frac{n^2 + s^2}{4n^2 - 1}Q_{n-1}(x). \quad (1.24)$$

Тогда:

1) многочлены $\{Q_n\}$ ортогональны относительно меры $d\lambda(x)$, состоящей из непрерывной компоненты $w(x)dx$ на $(-1, 1)$

$$w(x) = \frac{1}{\pi} \frac{s \operatorname{sh}(\pi s)}{(s^2 + b^2) \operatorname{ch}(\pi s) + (s^2 - b^2) \cos(2s \operatorname{arctg} x) - 2bs \sin(2s \operatorname{arctg} x)}, \quad (1.25)$$

а вне $(-1, 1)$ мера λ имеет счетное число масс: в точке X_k расположена масса M_k для всех $k \in \mathbb{Z}$, где

$$X_k = \operatorname{cth}\left(\frac{\pi k}{s} + \frac{1}{s} \operatorname{arctg} \frac{s}{b}\right), \quad M_k = \frac{1}{(s^2 + b^2) \operatorname{sh}^2\left(\frac{\pi k}{s} + \frac{1}{s} \operatorname{arctg} \frac{s}{b}\right)};$$

2) справедливы следующие асимптотические формулы в окрестности ± 1 (равномерно по $z \in K \Subset \mathbb{C}$):

$$\begin{aligned} Q_n\left(1 - \frac{z}{n^2}\right) &= \frac{\sqrt{\pi n}}{2^n} \left[\frac{s + ib}{2s} \left(\frac{2n^2}{z}\right)^{is/2} J_{is}(\sqrt{2z}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{s - ib}{2s} \left(\frac{2n^2}{z}\right)^{-is/2} J_{-is}(\sqrt{2z}) + o(1) \right], \\ Q_n\left(\frac{z}{n^2} - 1\right) &= \frac{\sqrt{\pi n}}{(-2)^n} \left[\frac{s - ib}{2s} \left(\frac{2n^2}{z}\right)^{is/2} J_{is}(\sqrt{2z}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{s + ib}{2s} \left(\frac{2n^2}{z}\right)^{-is/2} J_{-is}(\sqrt{2z}) + o(1) \right]. \end{aligned}$$

Выражение (1.25) для весовой функции $w(x)$ может быть преобразовано к виду

$$w(x) = \frac{1}{\pi} \frac{s \operatorname{sh}(\pi s)}{(s^2 + b^2) [\operatorname{ch}(\pi s) - \cos(2s \operatorname{arctg} x - 2 \operatorname{arctg} \frac{s}{b})]}.$$

Обратим внимание на поведение веса $w(x)$ в концевых точках своего носителя. Например, при $x \rightarrow +1$

$$w(x) \sim \frac{C_1}{C_2 - \cos(s \ln(1-x) + C_3)},$$

т.е. точка $x = +1$ является предельной точкой как дискретных масс меры ортогональности, так и промежутков монотонности плотности непрерывной части меры (осциллирующей между горизонтальными прямыми $y = C_1/(C_2 \pm 1)$). Следующие примеры касаются локальной асимптотики совместно ортогональных многочленов.

В работе [11] В. А. Калягиным были рассмотрены многочлены $\{P_n\}$, где $\deg(P_n) = 2n$, совместно ортогональные относительно веса

$$w(x) := |x|^p(1+x)^{\gamma_1}(1-x)^{\gamma_2}, \quad \gamma_1, \gamma_2, p > -1, \quad (1.26)$$

на каждом из отрезков $\Delta_1 := [-1, 0]$ и $\Delta_2 := [0, 1]$:

$$\int_{\Delta_i} P_n(x) x^\nu w(x) dx = 0, \quad \nu = 0, \dots, n, \quad i = 1, 2. \quad (1.27)$$

Интересной спецификой этих многочленов является то, что плотность меры распределения их нулей имеет сингулярность вида $|1/x^{(2/3)}|$ в начале координат. Такое необычное распределение нулей потребовало решения вопроса о локальной асимптотике многочленов $\{P_n\}$ в окрестности точки $x = 0$. Справедлива

ТЕОРЕМА 1.4. Пусть система многочленов $\{P_n\}$ определена соотношениями ортогональности (1.27) с весовой функцией (1.26). Тогда справедливы следующие асимптотические формулы в окрестности начала координат (равномерно по $z \in K \subseteq \mathbb{C}$):

$$P_n\left(\frac{z}{n\sqrt{n}}\right) = \frac{n^p}{\Gamma(p+1)} {}_0F_2\left(\left[\right]; \left[\frac{p+1}{2}, \frac{p+2}{2}\right]; \frac{-z^2}{4}\right) + o(n^p).$$

Аналогичный результат можно получить и для совместно ортогональных многочленов, обобщающих полиномы Лагерра. Эти многочлены ранее были рассмотрены В. Н. Сорокиным в [12]. Их можно определить с помощью формулы Родрига

$$\Lambda_n(r, p, x) = \frac{\exp(x^r)}{n! x^p} \left(\frac{d}{dx}\right)^n [x^{n+p} \exp(-x^r)],$$

из которой выводится явный вид рекуррентных соотношений, к которым в свою очередь можно применить теорему 1.2 и получить (детали см. в п. 4.3) следующие асимптотики:

$$\Lambda_n\left(r, p, \frac{z}{n}\right) = \frac{n^p}{\Gamma(p+1)} {}_0F_r\left(\left[\right]; \left[\frac{p+1}{r}, \dots, \frac{p+r}{r}\right]; \frac{-z^r}{r^r}\right) + o(n^p),$$

что согласуется с результатами из работы [12].

§ 2. Доказательство теоремы 1.1

Начнем доказательство теоремы со следующей основной леммы.

ЛЕММА 2.1. Пусть имеется соотношение (1.5) с условием (1.6) и числа α_i для $0 \leq i \leq k-1$ определены соотношением

$$P(t) = \sum_{i=0}^k c_i \cdot (t)_i = \prod_{i=0}^{k-1} (t + \alpha_i), \quad \operatorname{Re}(\alpha_i) \leq \operatorname{Re}(\alpha_j) \quad \text{при } i < j. \quad (2.1)$$

Тогда существует единственное решение $\{q_n\}$ уравнения (1.5) с асимптотическими свойствами

$$\Delta^j [q_n - (n)_{\alpha_0}] = o(n^{\operatorname{Re}(\alpha_0)-j}), \quad j = 0, \dots, k-1, \quad n \rightarrow \infty.$$

При этом

$$\Delta^j [q_n - (n)_{\alpha_0}] = o(n^{\operatorname{Re}(\alpha_0)-j-\varepsilon}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2.1. При доказательстве этой леммы нам потребуется несколько технических лемм.

ЛЕММА 2.2. Разностное уравнение

$$\left(\Delta - \frac{\beta - i}{n + i} \right) y_n = f_n$$

в классе последовательностей $y = \{y_n\}$, удовлетворяющих условиям на рост $|y_n| = o(n^{\operatorname{Re}(\beta)-i})$, имеет единственное решение для таких правых частей $f = \{f_n\}$, что ряд $\sum |f_n| n^{i-\operatorname{Re}(\beta)-1}$ сходится. Решение имеет следующий явный вид:

$$y_n = - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(n+i)_{m+1}}{(n+\beta)_{m+1}} f_{n+m}. \quad (2.2)$$

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Если $b < \operatorname{Re}(\beta)$ и для некоторого $c > 0$ $|f_n| < cn^{b-i-1}$, то существует $N = N(i, \beta)$ такое, что $\forall n > N$ $|y_n| < 2cn^{b-i}/(\operatorname{Re}(\beta) - b)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2.2. Формальной подстановкой явного вида решения в уравнение можно убедиться в сокращении лишних слагаемых и равенстве левой и правой частей. Условия роста на f обеспечивают абсолютную сходимость рядов, поэтому действия с ними законны. Следовательно, мы доказали существование решения и формулу для одного из решений. Построенное решение принадлежит нужному классу, поскольку $n^{\operatorname{Re}(\beta)-i}|y_n|$ мажорируется остатком абсолютно сходящегося ряда и поэтому стремится к 0. Наконец, единственность решения основана на следующем. Во-первых, класс последовательностей с заданным ростом замкнут относительно линейных операций. Во-вторых, уравнение линейное, поэтому разность двух различных решений есть нетривиальное решение однородного уравнения. В-третьих, легко найти, что такое решение имеет вид $y_n = \operatorname{const}(\Gamma(n+\beta)/\Gamma(n+i))$ и не лежит в нужном классе.

Лемма 2.2 доказана.

С помощью операторов сдвига и разности левая часть соотношения (1.5) может быть переписана в виде (см. (1.10))

$$\sum_{i=0}^k a_i(n) T^i q_n = \sum_{i=0}^k a_i(n) (\Delta + 1)^i q_n = \sum_{i=0}^k a_i(n) \sum_{j=0}^k \binom{i}{j} \Delta^j q_n = \sum_{j=0}^k A_j(n) \Delta^j q_n.$$

Определим коэффициенты $\tilde{A}_j(n)$ с помощью равенств

$$A_j(n) = \frac{(-1)^{k-j} c_j}{(n+j)_{k-j}} - \tilde{A}_j(n).$$

Тогда

$$\tilde{A}_j(n) = o(n^{j-k-\varepsilon}). \quad (2.3)$$

В новых обозначениях соотношение (1.5) можно представить в форме уравнения

$$\sum_{j=0}^k \frac{(-1)^{k-j} c_j}{(n+j)_{k-j}} \Delta^j q_n = \sum_{j=0}^k \tilde{A}_j(n) \Delta^j q_n.$$

В силу приведенной ниже леммы будет понятно, что разностный оператор в его левой части можно представить в виде произведения разностных операторов первого порядка.

ЛЕММА 2.3. *Разностный оператор с коэффициентами при Δ^i , пропорциональными $1/(n+i)_{k-i}$, представим в виде произведения разностных операторов из леммы 2.2. А именно, всякий раз, когда наборы чисел $\{b_i\}_{i=0}^k$ и $\{\beta_i\}_{i=0}^{k-1}$ таковы, что служат для представления одного и того же полинома от t , разностные операторы, построенные с их помощью, совпадают между собой, как записано в следующем утверждении:*

$$\forall t \quad \prod_{i=0}^{k-1} (t + \beta_i) = \sum_{i=0}^k b_i \cdot (t)_i \iff \prod_{i=0}^{k-1} \left(\Delta - \frac{\beta_i - i}{n + i} \right) = \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^{k-i} b_i}{(n+i)_{k-i}} \Delta^i.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, найдем результат действия этого оператора на последовательность $(n)_{-t}$, считая t целым отрицательным числом с достаточно большим модулем. Получим

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=0}^k \frac{(-1)^{k-i} b_i}{(n+i)_{k-i}} \Delta^i \right) (n)_{-t} &= \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} b_i \left(\prod_{j=0}^{i-1} (-t-j) \right) \frac{(n+i)_{-t-i}}{(n+i)_{k-i}} \\ &= \left(\sum_{i=0}^k (-1)^k b_i \cdot (t)_i \right) (n+k)_{-t-k} = \left((-1)^k \prod_{i=0}^{k-1} (t + \beta_i) \right) (n+k)_{-t-k} \\ &= \prod_{i=0}^{k-1} \left(\Delta - \frac{\beta_i - i}{n + i} \right) (n)_{-t}. \end{aligned}$$

Последовательности $\{(n)_{-t}\}_{n=1}^{\infty}$ для $-t \in \mathbb{N}$ линейно независимы между собой. Выбирая k различных среди них, получим совпадение действий двух разностных операторов k -го порядка на k линейно независимых последовательностей. Значит, эти разностные операторы совпадают.

Лемма 2.3 доказана.

Таким образом, мы можем записать рекуррентное соотношение (1.5) в виде следующего уравнения:

$$\prod_{i=0}^{k-1} \left(\Delta - \frac{\alpha_i - i}{n + i} \right) q_n = \sum_{j=0}^k \tilde{A}_j(n) \Delta^j q_n. \quad (2.4)$$

Покажем, что при условиях (2.1), (2.3) уравнение (2.4) имеет единственное решение q_n с нужными асимптотическими свойствами. Запишем решение в виде

$$q_n = (n)_{\alpha_0} + \tilde{q}_n,$$

где $\tilde{q}$ лежит в пространстве

$$L := \{y = \{y_n\} : |\Delta^i y_n| = o(n^{\operatorname{Re}(\alpha_0) - i}), \quad i = 0, \dots, k-1\},$$

и найдем $\tilde{q}$ методом итераций. На каждом шаге итерационное уравнение

$$\prod_{i=0}^{k-1} \left(\Delta - \frac{\alpha_i - i}{n + i} \right) [(n)_{\alpha_0} + y_n^{(s+1)}] = \sum_{j=0}^k \tilde{A}_j(n) \Delta^j [(n)_{\alpha_0} + y_n^{(s)}],$$

или

$$\prod_{i=0}^{k-1} \left(\Delta - \frac{\alpha_i - i}{n + i} \right) y_n^{(s+1)} = \sum_{j=0}^k \tilde{A}_j(n) \Delta^j y_n^{(s)} + \sum_{j=0}^k \tilde{A}_j(n) \Delta^j [(n)_{\alpha_0}], \quad (2.5)$$

решается с помощью леммы 2.2, примененной k раз. Если $y^{(s)} \in L$, то правая часть имеет порядок $o(n^{\operatorname{Re}(\alpha_0) - k - \varepsilon})$, и так как для всех i имеем $\operatorname{Re}(\alpha_i) \geq \operatorname{Re}(\alpha_0)$, то лемма 2.2 применима, а следствие 2.1 дает оценку на решение. Получаем, что для j от 0 до k верна оценка

$$\prod_{i=0}^{j-1} \left(\Delta - \frac{\alpha_i - i}{n + i} \right) y_n^{(s+1)} = o(n^{\operatorname{Re}(\alpha_0) - j - \varepsilon}). \quad (2.6)$$

Рассмотрим полиномы $\prod_{i=0}^{j-1} (t + \alpha_i)$ от t для $j = 0, \dots, k$. Это полиномы степени j со старшим коэффициентом 1, поэтому любой полином степени не выше k можно представить как их линейную комбинацию. Выразим таким образом полиномы $(t)_j$ и применим лемму 2.2. Получаем, что существуют такие числа d_{jm} , $0 \leq m \leq j \leq k$, что

$$(t)_j = \sum_{m=0}^j d_{jm} \prod_{i=0}^{m-1} (t + \alpha_i) \implies \Delta^j = \sum_{m=0}^j \frac{(-1)^{j-m} d_{jm}}{(n+m)_{j-m}} \prod_{i=0}^{m-1} \left(\Delta - \frac{\alpha_i - i}{n + i} \right).$$

В силу (2.6) $\Delta^j y_n^{(s+1)} = o(n^{\operatorname{Re}(\alpha_0) - j - \varepsilon})$ и поэтому $y^{(s+1)} \in L$.

Итак, один шаг итерации – аффинное отображение $L \mapsto L$. Заметим, что условия $|\Delta^i y_n^{(s)}| = o(n^{\operatorname{Re}(\alpha_0) - i})$ влекут условия $\Delta^j y_n^{(s+1)} = o(n^{\operatorname{Re}(\alpha_0) - j - \varepsilon})$, что означает установление асимптотического разложения $y_n^{(s)}$ в процессе итерации и свидетельствует о свойстве сжимаемости для достаточно больших индексов

последовательности. Анализ вида явной формулы (2.2) показывает, что y с индексом n зависит от f с индексами $k = n + m \geq n$, поэтому корректно ставить задачу для последовательностей с отрезанной начальной частью, т.е. с индексами $n \geq n_0$ для произвольного фиксированного $n_0 \in \mathbb{N}$, и решения задач с разными n_0 согласованы. То же самое верно для уравнений (2.4) и (2.5).

Любое решение уравнения (2.4) (или (1.5), что равносильно) для индексов $n \geq n_0$ можно однозначно продолжить на меньшие индексы в силу неравенства $a_0(n) \neq 0$. Поэтому нам достаточно показать, что существует достаточно большое $N \in \mathbb{N}$, для которого отображение (2.5) для последовательностей $\{y_n\}_{n=N}^\infty$ будет вполне сжимающим на пространстве L , снабженном нормой $\|y\| = \max_{0 \leq i \leq k} \sup_n |\Delta^i y_n|$. В качестве N можно взять

$$N = 2 \max_{0 \leq j \leq k} \left(N(j, \alpha_j), \sum_{m=0}^j |d_{jm}| \frac{2^{k-m} \sum_{i=0}^k \max_n |\tilde{A}_i(n) n^{k-i+\varepsilon}|}{\prod_{i=m}^{k-1} (\operatorname{Re}(\alpha_i - \alpha_0) + \varepsilon)} \right)^{1/\varepsilon}.$$

Лемма 2.1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1. Теорема доказывается индукцией по k . Для случая $k = 1$ (база) результат теоремы равносильен результату леммы 2.1 для $k = 1$. В общем случае лемма 2.1 позволяет строить одно из решений рекуррентного соотношения (1.5). Этого достаточно для того, чтобы сделать индуктивный переход. В самом деле, пусть разностное уравнение (1.5) порядка k имеет решение y_n , построенное с помощью леммы 2.1, и будем считать, что для уравнений порядка $< k$ теорема 1.1 уже доказана. Сделаем подстановку $q_n = y_n z_n$:

$$\sum_{i=0}^k a_i(n) y_{n+i} z_{n+i} = 0,$$

т.е.

$$\sum_{j=0}^k A_j(n) \Delta^j (y_n z_n) = 0.$$

Оператор разности от произведения раскрывается по формуле типа правила Лейбница:

$$\Delta uv = (\Delta u)v + (Tu)\Delta v.$$

Отсюда индукцией по k получаем формулу для раскрытия Δ^k от произведения, аналогичную (1.4) (напомним, что T и Δ коммутируют):

$$\Delta^k uv = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (T^i \Delta^{k-i} u) \Delta^i v. \quad (1.4')$$

Отдельно проверяется, что для $k = 0$ формула тоже подходит.

Проделав подстановку и смену порядка суммирования, получим

$$\sum_{i=0}^k \sum_{j=i}^k \binom{j}{i} (T^i \Delta^{j-i} y_n) A_j(n) \Delta^i z_n = 0. \quad (2.7)$$

Учитывая, что y_n является одним из решений (1.5), получим, что новое уравнение имеет $z_n \equiv 1$ в качестве одного из решений. Следовательно, коэффициент при $\Delta^0 z_n$ равен 0 для всех n , поэтому уравнение (2.7) можно переписать в виде

$$y_{n+k} \sum_{i=1}^k B_i(n) \Delta^i z_n = 0, \quad \text{где} \quad B_i(n) = \sum_{j=i}^k \binom{j}{i} \frac{T^i \Delta^{j-i} y_n}{T^k y_n} A_j(n).$$

Множитель y_{n+k} был искусственно вынесен, чтобы оказалось, что $B_k(n)$ равно

$$A_k(n) = a_k(n) \equiv 1.$$

Обозначив $\Delta z_n = v_n$, получим на $\{v_n\}$ разностное уравнение порядка $k-1$.

Покажем, что его коэффициенты удовлетворяют условиям (1.6), что позволит нам воспользоваться предположением индукции и написать асимптотики $k-1$ линейно независимых решений $\{v_n\}$. Роль k при этом выполняет $k-1$, роль A_i выполняет B_{i+1} . Будем обозначать через $\tilde{c}_i$ константы, аналогичные c_i (доказав, что они существуют, и найдя их), а через $\tilde{P}(t)$ будем обозначать аналог характеристического полинома $P(t)$. В силу леммы 2.1 имеем

$$\begin{aligned} y_n &= (n)_{\alpha_0} + o(n^{\operatorname{Re}(\alpha_0)-\varepsilon}), \\ T^i \Delta^j y_n &= T^i (\Delta^j [(n)_{\alpha_0}] + o(n^{\operatorname{Re}(\alpha_0)-j-\varepsilon})) \\ &= (-1)^j (-\alpha_0)_j (n+i)_{\alpha_0-j} + o((n+i)^{\operatorname{Re}(\alpha_0)-j-\varepsilon}) \\ &= n^{\alpha_0-j} [(-1)^j (-\alpha_0)_j + o(n^{-\varepsilon})]. \end{aligned}$$

Поэтому $B_i(n)$ имеет асимптотику

$$\begin{aligned} B_i(n) &= \sum_{j=i}^k \binom{j}{i} \frac{n^{\alpha_0-j+i} [(-1)^{j-i} (-\alpha_0)_{j-i} + o(n^{-\varepsilon})]}{n^{\alpha_0} [1 + o(n^{-\varepsilon})]} \frac{[(-1)^{k-j} c_j + o(n^{-\varepsilon})]}{n^{k-j}} \\ &= (-n)^{i-k} [\tilde{c}_i + o(n^{-\varepsilon})], \quad \text{где} \quad \tilde{c}_i = \sum_{j=i}^k \binom{j}{i} (-\alpha_0)_{j-i} c_j. \end{aligned}$$

Теперь найдем $\tilde{P}(t)$, помня, что порядок соотношения для v_n равен $k-1$ и коэффициент при $\Delta^i v_n$ равен $B_{i+1}(n)$. Пользуясь формулами (1.4), имеем

$$\begin{aligned} \tilde{P}(t) &= \sum_{i=0}^{k-1} \tilde{c}_{i+1} \cdot (t)_i \\ \Rightarrow \quad t \tilde{P}(t+1) &= \sum_{i=1}^k \tilde{c}_i t \cdot (t+1)_{i-1} = -\tilde{c}_0 + \sum_{j=0}^k \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} (-\alpha_0)_{j-i} c_j \cdot (t)_i \\ &= -\tilde{c}_0 + \sum_{j=0}^k c_j \cdot (t - \alpha_0)_j = -\tilde{c}_0 + P(t - \alpha_0) \\ &= -\tilde{c}_0 + \prod_{i=0}^{k-1} (t + \alpha_i - \alpha_0) \\ \Rightarrow \quad \tilde{c}_0 &= 0; \quad \tilde{P}(t) = \prod_{i=1}^{k-1} (t + \alpha_i - \alpha_0 - 1). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Мы нашли $\tilde{P}(t)$, а дополнительно полученное равенство $\tilde{c}_0 = 0$ – это простое следствие того факта, что в (2.7) коэффициент при $\Delta^0 z_n$ обнуляется и возможен переход к v_n .

Таким образом, по предположению индукции всякое решение уравнения

$$\sum B_{i+1}(n) \Delta^i v_n = 0$$

есть линейная комбинация $k-1$ базисных решений, асимптотика которых имеет вид

$$v_n = n^\alpha (\ln^{s-1} n) [1 + o(n^{-\varepsilon})], \quad \text{где } (\alpha, s) \text{ такие, что } \tilde{P}(t) \dot{=} (t + \alpha)^s. \quad (2.9)$$

Из (2.8) и (2.1) следует, что возможные значения α равны

$$\alpha_i - \alpha_0 - 1, \quad \operatorname{Re}(\alpha) = \operatorname{Re}(\alpha_i - \alpha_0 - 1) \geq -1,$$

а s принимает значения от 1 до кратности $-\alpha_i$ в полиноме $P(t)$, за исключением случая, когда $\alpha_i = \alpha_0$. В этом случае $\alpha = -1$, но верхняя граница для s уменьшается на 1. Найдём базис для z_n . Для удобства выберем комбинации решений (2.9), которые хорошо суммировать. Случаи $\alpha = -1$ и $\alpha \neq -1$ рассматриваются отдельно:

$$\Delta z_n = v_n \implies z_n = \text{const} + \sum_m^{n-1} v_m.$$

Выберем v_n :

$$\begin{aligned} (\alpha = -1) \quad v_n &= \frac{s}{n} (\ln^{s-1} n) [1 + o(n^{-\varepsilon})] \implies z_n = (\ln^s n) [1 + o(n^{-\varepsilon})]; \\ (\alpha \neq -1) \quad v_n &= n^\alpha ((\alpha + 1) \ln^{s-1} n + (s - 1) \ln^{s-2} n) [1 + o(n^{-\varepsilon})] \\ &\implies z_n = n^{\alpha+1} (\ln^{s-1} n) [1 + o(n^{-\varepsilon} \ln n)]. \end{aligned}$$

Вместе с решением $z_n = 1$ однородного уравнения получаем k линейно независимых решений, т.е. полный базис. Возвращаясь к q_n по формуле $q_n = y_n z_n$, получим следующие асимптотики:

$$\begin{aligned} q_n &= n^{\alpha_0} [1 + o(n^{-\varepsilon})] \cdot n^{\alpha+1} (\ln^{s-1} n) [1 + o(n^{-\varepsilon} \ln n)] \\ &= n^{\alpha_i} (\ln^{s-1} n) [1 + o(n^{-\varepsilon} \ln n)], \quad P(t) \dot{=} (t + \alpha_i)^s. \end{aligned}$$

Соответствие между степенью логарифма и кратностью корня характеристического полинома $P(-t)$ получается таким, как указано, для обоих случаев: $\alpha_i = \alpha_0$ и $\alpha_i \neq \alpha_0$. Свойство гладкости не нарушается при суммировании (переход $v_n \mapsto z_n$) и при перемножении (переход $z_n \mapsto q_n$). Последнее проверяется снова по формуле (1.4'). Таким образом, мы завершим индуктивный переход, если на каждом шаге будем слегка уменьшать ε , чтобы избавиться от лишнего логарифма в $o(\cdot)$.

Теорема 1.1 доказана.

§ 3. Доказательство теоремы 1.2

Основные моменты доказательства теоремы 1.2 – использование результата теоремы 1.1 и сравнение с непрерывной системой. Остальное представляет собой аккуратные оценивания и суммирование, не содержащие принципиальных трудностей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.2. Построим векторные рекуррентные соотношения первого порядка, эквивалентные рассматриваемым соотношениям (1.5) и (1.12). Для этого возьмем последовательность векторов $\vec{u}(n)$ со следующими координатами:

$$u_i(n) = (n)_i \Delta^i q_n$$

для $i = 0, \dots, k-1$. Через u_k будем обозначать величины, построенные по той же формуле, но они не будут являться компонентами векторов $\vec{u}$. Мы можем найти линейный оператор, переводящий $\vec{u}(n)$ в $\vec{u}(n+1)$. Действительно, для i от 0 до $k-1$

$$u_i(n+1) = (n+1)_i T \Delta^i q_n = \frac{n+i}{n} (n)_i (\Delta+1) \Delta^i q_n = \frac{n+i}{n} u_i(n) + \frac{1}{n} u_{i+1}(n),$$

т.е.

$$\vec{u}(n+1) = \left[E + \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 1 & 1 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ & & & & k-1 \end{pmatrix} \right] \vec{u}(n) + \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ u_k(n) \end{pmatrix}.$$

Осталось при помощи рекуррентного соотношения выразить u_k через $u_0, \dots, u_{k-1}$. Для невозмущенного соотношения (1.5), что равносильно $x = 0$ в (1.12), имеем

$$\begin{aligned} u_k(n)|_{x=0} &= -(n)_k \sum_{i=0}^{k-1} A_i(n) \Delta^i q_n = - \sum_{i=0}^{k-1} (n+i)_{k-i} A_i(n) u_i(n) \\ &= ((-1)^{k-1} c_0, \dots, c_{k-1}) \vec{u}(n) + o(n^{-\varepsilon} |\vec{u}(n)|). \end{aligned}$$

Общий случай соотношения (1.12) отличается дополнительным слагаемым:

$$\begin{aligned} u_k(n) &= ((-1)^{k-1} c_0, \dots, c_{k-1}) \vec{u}(n) + o(n^{-\varepsilon} |\vec{u}(n)|) - (n)_k f(n) x T^r q_n \\ &= ((-1)^{k-1} c_0, \dots, c_{k-1}) \vec{u}(n) \\ &\quad - f(n) x \left((n)_k \binom{r}{0}, (n+1)_{k-1} \binom{r}{1}, \dots, (n-k+1)_1 \binom{r}{k-1} \right) \vec{u}(n) \\ &\quad + o(n^{-\varepsilon} |\vec{u}(n)|). \end{aligned}$$

Дальнейшая схема доказательства в общих чертах повторяет изложенную в работе автора [9]. Фиксируем число N и компакт $K \subset \mathbb{C}$ и рассматриваем соотношение (1.12) для n от 0 до N , считая x равным $zN^{-\lambda-k}$, $z \in K$. Для малых n производим сравнение с соотношением (1.5), для больших – с подходящей непрерывной системой. Сравнение производится при помощи следующей простой леммы.

ЛЕММА 3.1. Пусть имеются две рекуррентные векторные последовательности $\{\vec{v}_n\}$ и $\{\vec{w}_n\}$ одинаковой размерности, заданные соотношениями

$$\vec{v}_{n+1} = S_n^{(1)} \vec{v}_n, \quad \vec{w}_{n+1} = S_n^{(2)} \vec{w}_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

где $S_n^{(1)}$ и $S_n^{(2)}$ — линейные операторы. Тогда $|\vec{w}_n - \vec{v}_n|$ не превосходит

$$\left[|\vec{w}_1 - \vec{v}_1| + \sum_{m=1}^{n-1} |(S_m^{(2)} - S_m^{(1)}) \vec{v}_m| \exp \left(\sum_{j=1}^m (1 - \|S_j^{(2)}\|) \right) \right] \exp \left(\sum_{j=1}^{n-1} (\|S_j^{(2)}\| - 1) \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, оценим разность:

$$|\vec{w}_{n+1} - \vec{v}_{n+1}| = |S_n^{(2)} \vec{w}_n - S_n^{(1)} \vec{v}_n| \leq \|S_n^{(2)}\| |\vec{w}_n - \vec{v}_n| + |(S_n^{(2)} - S_n^{(1)}) \vec{v}_n|.$$

Применив неравенство $xe^{1-x} \leq 1$ для $\|S_n^{(2)}\|$, по индукции получим нужное неравенство.

Лемма 3.1 доказана.

Пусть далее $\vec{u}_n$ обозначают векторы $\vec{u}(n)$, построенные по решениям соотношения (1.5), а $\vec{U}_n$ обозначают векторы, построенные по решениям соотношения (1.12) с теми же начальными условиями. Из вышеизложенного следует, что для $\vec{u}, \vec{U}$ верны соотношения

$$\vec{u}_{n+1} = \left(E + \frac{1}{n} L_n^{(1)} \right) \vec{u}_n, \quad \vec{U}_{n+1} = \left(E + \frac{1}{n} L_n^{(2)} \right) \vec{U}_n, \quad (3.1)$$

где

$$(L_n^{(1)})_{ij} = \begin{cases} i, & 0 \leq i = j < k-1, \\ 1, & 0 \leq i < k-1, j = i+1, \\ -(n+j)_{k-j} A_j(n), & 0 \leq j < k-1 = i, \\ k-1 - (n+k-1) A_{k-1}(n), & i = j = k-1, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$(L_n^{(2)})_{ij} = (L_n^{(1)})_{ij} - \begin{cases} 0, & 0 \leq i < k-1, \\ \binom{r}{j} (n+j)_{k-j} f(n)x, & i = k-1. \end{cases}$$

Матрица $L_n^{(1)}$ имеет предел при $n \rightarrow \infty$. Обозначив предел L , найдем его компоненты:

$$L_n^{(1)} \rightarrow L, \quad \text{где } (L)_{ij} = \begin{cases} i, & 0 \leq i = j < k-1, \\ 1, & 0 \leq i < k-1, j = i+1, \\ (-1)^{k-1-j} c_j, & 0 \leq j < k-1 = i, \\ k-1 + c_1, & i = j = k-1, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

и подсчитаем его характеристический многочлен, разложив по последней строке:

$$\begin{aligned}\det(tE - L) &= (-1)^k \det(L - tE) = (-1)^k \left[(-t)_k + \sum_{j=0}^{k-1} c_j \cdot (-t)_{k-j} \right] \\ &= (-1)^k P(-t) = \prod_{i=0}^{k-1} (t - \alpha_i).\end{aligned}$$

Известно, что для любого линейного оператора существует базис, в котором матрица этого оператора сколь угодно близка к диагональной (с собственными числами на диагонали). В таком базисе норма оператора $E + \frac{1}{n}L$ будет близка к $\max_i |1 + \frac{1}{n}\alpha_i| = 1 + \frac{1}{n} \operatorname{Re}(\alpha_{k-1}) + o(\frac{1}{n})$. То есть для любого $\delta > 0$ существует такое $n_0 \in \mathbb{N}$ и такой базис, что в евклидовой векторной норме $|\cdot|_\delta$, связанной с этим базисом, для соответствующей операторной нормы $\|\cdot\|_\delta$ верна оценка

$$\forall n > n_0 \quad \left\| E + \frac{1}{n} L_n^{(1)} \right\|_\delta < 1 + \frac{\operatorname{Re}(\alpha_{k-1}) + \delta}{n} = 1 + \frac{B + \delta}{n}.$$

Применим к $\vec{u}_n$ и $\vec{U}_n$ лемму 3.1 для нормы $|\cdot|_\delta$. Имеем

$$\begin{aligned}|(L_n^{(2)} - L_n^{(1)})\vec{u}_n|_\delta &= |(n)_k f(n) x q_{n+r}| |\vec{e}_{k-1}|_\delta = O(|x| n^{k+\lambda+b} \ln^p n), \\ \|L_n^{(2)} - L_n^{(1)}\|_\delta &= |f(n)x| \left\| \vec{e}_{k-1} \left((n)_k \binom{r}{0}, (n+1)_{k-1} \binom{r}{1}, \dots, (n-k+1)_1 \binom{r}{k-1} \right) \right\|_\delta,\end{aligned}$$

откуда

$$\left\| E + \frac{1}{n} L_n^{(2)} \right\|_\delta < 1 + \frac{B + \delta}{n} + \frac{1}{n} \|L_n^{(2)} - L_n^{(1)}\|_\delta = 1 + \frac{B + \delta + O(|x| n^{k+\lambda})}{n},$$

где $\vec{e}_i$, $0 \leq i < k$, – стандартные базисные вектор-столбцы, $p = \max_j \deg(p_j)$. Константы в $O(\cdot)$ зависят от δ .

Возьмем $x = zN^{-\lambda-k}$. В силу (1.14) $\lambda + k > B - b = \operatorname{Re}(\alpha_{k-1} - \alpha_j) \geq 0$. Тогда

$$\begin{aligned}|\vec{U}_n - \vec{u}_n| &= O(|\vec{U}_n - \vec{u}_n|_\delta) < O(1) \exp \left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{B + \delta + O(|zN^{-\lambda-k}| j^{k+\lambda})}{j} \right) \\ &\times \left[\sum_{m=1}^{n-1} \frac{O(|zN^{-\lambda-k}| m^{k+\lambda+b} \ln^p m)}{m} \exp \left(- \sum_{j=1}^m \frac{B + \delta + O(|zN^{-\lambda-k}| j^{k+\lambda})}{j} \right) \right] \\ &= \frac{|z|}{N^{k+\lambda}} O \left(n^{B+\delta} \exp \left[O \left(|z| \left(\frac{n}{N} \right)^{k+\lambda} \right) \right] \right) \\ &\times \sum_{m=1}^{n-1} m^{k+\lambda+b-B-\delta-1} \exp \left[O \left(|z| \left(\frac{m}{N} \right)^{k+\lambda} \right) \right] \ln^p m.\end{aligned}$$

Так как $z \in K \subseteq \mathbb{C}$, то $|z|$ ограничен константой. Из неравенства (1.14) для достаточно малых $\delta > 0$ $k + \lambda + b > B + \delta$. Примем $n = N^{1-\delta}$, $N \rightarrow \infty$. В этом случае

$$|\vec{U}_n - \vec{u}_n| = O\left(\left(\frac{n}{N}\right)^{k+\lambda} n^b \ln^p n\right) = O(N^{-(k+\lambda)\delta} |\vec{u}_n|).$$

Для $N^{1-\delta} < n \leq N$ производим сравнение с непрерывной системой, параметр которой $t = n/N$. Уравнение модельной непрерывной системы получим формальной заменой разности на производную и переходом к пределу:

$$\frac{d}{dt} \vec{U}_{Nt} \approx N(\vec{U}_{Nt+1} - \vec{U}_{Nt}) = \frac{1}{t} L_{Nt}^{(2)} \vec{U}_{Nt} = \frac{1}{t} (L - Cz t^{k+\lambda} \vec{e}_{k-1} \vec{e}_0^* + o(n^{-\varepsilon})) \vec{U}_{Nt}.$$

Возникает вопрос: какова величина ошибки при такой замене на одном шаге преобразования $n \rightarrow n + 1$, т.е. преобразования $t \rightarrow t + N^{-1}$?

ЛЕММА 3.2. Пусть матричная функция $M(t)$ есть решение следующей задачи с гладким матричным коэффициентом F :

$$\frac{d}{dt} M(t) = F(t)M(t), \quad M(t_1) = E.$$

Тогда для $t_2 > t_1$, $\int_{t_1}^{t_2} \|F(t)\| dt < 1$, верна оценка

$$\|M(t_2) - E - (t_2 - t_1)F(t_1)\| < 2(t_2 - t_1)^2 \max_{[t_1; t_2]} \|F'(t) + F^2(t)\|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, сначала грубо оценим $\|M\|$. Норма матрицы – непрерывная функция ее элементов, а элементы имеют производные. По неравенству треугольника получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|M(t)\| &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\|M(t + \Delta t)\| - \|M(t)\|}{\Delta t} \leq \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\|M(t + \Delta t) - M(t)\|}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\|F(t)M(t)\Delta t + o(\Delta t)\|}{\Delta t} = \|F(t)M(t)\| \leq \|F(t)\| \|M(t)\| \\ \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \ln(\|M(t)\|) &\leq \|F(t)\| \quad \Rightarrow \quad \forall t > t_1 \quad \|M(t)\| \leq \exp\left(\int_{t_1}^t \|F(s)\| ds\right). \end{aligned}$$

Поэтому для $t \in [t_1; t_2]$ верно $\|M(t)\| < e$. Теперь оценим нужную нам разность, сделав тождественные преобразования:

$$\begin{aligned} M(t_2) - E - (t_2 - t_1)F(t_1) &= \int_{t_1}^{t_2} M'(s) ds - \int_{t_1}^{t_2} F(t_1)M(t_1) ds \\ &= \int_{t_1}^{t_2} [F(s)M(s) - F(t_1)M(t_1)] ds = \int_{t_1}^{t_2} ds \int_{t_1}^s [F(t)M(t)]' dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} ds \int_{t_1}^s [F'(t) + F^2(t)]M(t) dt. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|M(t_2) - E - (t_2 - t_1)F(t_1)\| < e \max_{[t_1; t_2]} \|F'(t) + F^2(t)\| \int_{t_1}^{t_2} ds \int_{t_1}^s dt.$$

Интегралы вычисляются явно, $e < 4$.

Лемма 3.2 доказана.

Пусть $\vec{Y}(t)$ есть решение непрерывной системы

$$\frac{d}{dt} \vec{Y}(t) = \frac{1}{t} (L - Czt^{\lambda+k} \vec{e}_{k-1} \vec{e}_0^*) \vec{Y}(t).$$

Обозначим через y компоненту $\vec{Y}$ с индексом 0: $y(t) = Y_0(t) = \vec{e}_0^* \vec{Y}(t)$. Для i от 1 до $k-1$ мы имеем равенства $tY'_{i-1}(t) = Y_i(t) + (i-1)Y_{i-1}(t)$, откуда по индукции $Y_i(t) = t^i y^{(i)}(t)$. Наконец, уравнение на последнюю компоненту даст нам соотношение $t^k y^{(k)}(t) = -Czt^{\lambda+k} y(t) - \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{k-i} c_i t^i y^{(i)}(t)$, которое после тождественных преобразований приводится к виду (1.16). Приняв во внимание замечание 1.1, получаем, что если $P(t)$ делится на $(t + \beta_j)^{1+\deg(p_j)}$, то среди всех α_i есть по крайней мере $1 + \deg(p_j)$ одинаковых и равных β_j , поэтому уравнение (1.16) действительно имеет решения, ведущие себя при $t \rightarrow 0$ как $t^{\beta_j} p_j^{(i)}(\ln t) + O(t^{\operatorname{Re}(\beta_j + \lambda + k)} \ln^{k-1} t)$, что доказывает существование всех y_{ji} . Единственность следует из того, что решение (1.16) с асимптотикой $o(t^B)$ может быть лишь тривиальным. Кроме того, $y_{ji}(t)$ аналитически зависят от t в разрезанной окрестности 0, поэтому остаточный член можно дифференцировать.

Построим решение

$$y(t) = \sum_j \sum_{i=0}^{\deg(p_j)} (N^{\beta_j} \ln^i N) y_{ji}(t),$$

сформируем соответствующий вектор $\vec{Y}(t)$ и сравним $\vec{U}_n$ и $\vec{Y}(n/N)$ для n от $N^{1-\delta}$ до N . Здесь мы вновь используем норму $\|\cdot\|_\delta$ и лемму 3.2.

Прежде всего заметим, что в силу теоремы 1.1 остаточный член в (1.14) можно улучшить: существует $\tilde{\varepsilon} > 0$ такое, что остаток в (1.14) имеет вид $o(n^{b-\tilde{\varepsilon}})$, и такой же порядок имеют величины $n^s \Delta^s [q_n(0) - \sum_j n^{\beta_j} p_j(\ln n)]$ для $s = 1, \dots, k-1$. Для этого достаточно подчинить $\tilde{\varepsilon}$ условиям $\tilde{\varepsilon} < \varepsilon$, $\tilde{\varepsilon} < \min\{b - \operatorname{Re}(\alpha_i) \mid \operatorname{Re}(\alpha_i) < b\}$. Поэтому для $n = N^{1-\delta}$ имеем

$$\begin{aligned} \left| \vec{Y}\left(\frac{n}{N}\right) - \vec{U}_n \right|_\delta &< |\vec{U}_n - \vec{u}_n|_\delta + o(n^{b-\tilde{\varepsilon}}) + O\left(N^b \left(\frac{n}{N}\right)^{b+k+\lambda} \ln^p N \ln^{k-1} \frac{n}{N}\right) \\ &+ O(1) \sum_{s=0}^{k-1} \sum_j \left| N^{\beta_j} \left[t^s \left(\frac{d}{dt} \right)^s t^{\beta_j} \sum_{i=0}^{\deg(p_j)} p_j^{(i)}(\ln t) \frac{\ln^i N}{i!} \right] \right|_{t=n/N} - n^s \Delta^s [n^{\beta_j} p_j(\ln n)] \\ &= |\vec{U}_n - \vec{u}_n|_\delta + O(1) \sum_{s=0}^{k-1} \sum_j \left| N^{\beta_j} \left[t^s \left(\frac{d}{dt} \right)^s t^{\beta_j} p_j(\ln Nt) \right] \right|_{t=n/N} - n^s \Delta^s [n^{\beta_j} p_j(\ln n)] \\ &+ o(n^{b-\tilde{\varepsilon}}) + o\left(n^b \left(\frac{n}{N}\right)^{k+\lambda} \ln^{p+k} N\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= O\left(n^b \left(\frac{n}{N}\right)^{k+\lambda} \ln^p n\right) + O(n^{b-2} \ln^p n) + o(n^{b-\tilde{\varepsilon}}) + o\left(n^b \left(\frac{n}{N}\right)^{k+\lambda} \ln^{p+k} N\right) \\
&= o(n^{b-\tilde{\varepsilon}}) + o\left(n^b \left(\frac{n}{N}\right)^{B+\delta}\right).
\end{aligned}$$

По лемме 3.2

$$Y\left(\frac{n+1}{N}\right) = \left[E + \frac{1}{n} \left(L - Cz \left(\frac{n}{N}\right)^{\lambda+k} \vec{e}_{k-1} \vec{e}_0^*\right) + O(n^{-2})\right] Y\left(\frac{n}{N}\right).$$

Определим для единообразия $L_n^{(3)}$ так, что $Y\left(\frac{n+1}{N}\right) = (E + \frac{1}{n} L_n^{(3)}) Y\left(\frac{n}{N}\right)$. Имеем

$$\begin{aligned}
\|L_m^{(2)} - L_m^{(3)}\|_\delta &< \left| (m)_k f(m)x - Cz \left(\frac{m}{N}\right)^{k+\lambda} \right| \|\vec{e}_{k-1} \vec{e}_0^*\|_\delta + O\left(\frac{1}{m}\right) \\
&\quad + \sum_j |(m+j)_{k-j} A_j(m) - (-1)^{k-j} c_j| \|\vec{e}_j \vec{e}_0^*\|_\delta \\
&= o\left(m^{-\varepsilon_1} \left(\frac{m}{N}\right)^{k+\lambda}\right) + o(m^{-\varepsilon}).
\end{aligned}$$

При необходимости ε_1 можно уменьшить, поэтому считаем, что $\varepsilon_1 > 0$, но $b + k + \lambda > B + \delta + \varepsilon_1$. Тогда по лемме 3.1 имеем

$$\begin{aligned}
|Y(1) - \vec{U}_N|_\delta &< \left[o(n^{b-\tilde{\varepsilon}}) + o\left(n^b \left(\frac{n}{N}\right)^{B+\delta}\right) + \sum_{m=n}^{N-1} \frac{1}{m} \left[o\left(m^{-\varepsilon_1} \left(\frac{m}{N}\right)^{k+\lambda}\right) + o(m^{-\varepsilon}) \right] \right. \\
&\quad \times \sum_{i=0}^p (N^b \ln^i N) O\left(\left(\frac{m}{N}\right)^b \ln^{p-i} \frac{m}{N}\right) \exp\left(-\sum_{j=n}^m \frac{B + \delta + O(|zN^{-\lambda-k}|j^{k+\lambda})}{j}\right) \Big] \\
&\quad \times \exp\left(\sum_{j=n}^{N-1} \frac{B + \delta + O(|zN^{-\lambda-k}|j^{k+\lambda})}{j}\right).
\end{aligned}$$

Продолжаем упрощения:

$$\begin{aligned}
|Y(1) - \vec{U}_N|_\delta &< \left[o(n^{b-\tilde{\varepsilon}}) + o\left(n^b \left(\frac{n}{N}\right)^{B+\delta}\right) \right. \\
&\quad + \sum_{m=n}^{N-1} \frac{O(\ln^p N)}{m} \left[o\left(m^{b-\varepsilon_1} \left(\frac{m}{N}\right)^{k+\lambda}\right) + o(m^{b-\varepsilon}) \right] \left(\frac{n}{m}\right)^{B+\delta} \\
&\quad \times \exp\left(O\left[\left(\frac{m}{N}\right)^{k+\lambda} - \left(\frac{n}{N}\right)^{k+\lambda}\right]\right) \left(\frac{N}{n}\right)^{B+\delta} \exp\left(O\left[1^{k+\lambda} - \left(\frac{n}{N}\right)^{k+\lambda}\right]\right) \Big] \\
&< \left[o(n^b) + o\left(n^{b-\tilde{\varepsilon}} \left(\frac{N}{n}\right)^{B+\delta}\right) + \sum_{m=n}^{N-1} \frac{O(\ln^p N)}{m} \left[o\left(m^{b-\varepsilon_1} \left(\frac{m}{N}\right)^{k+\lambda}\right) + o(m^{b-\varepsilon}) \right] \right. \\
&\quad \times \left(\frac{N}{m}\right)^{B+\delta} \exp(O(1)) \Big] \exp(O(1)),
\end{aligned}$$

что в итоге дает

$$\begin{aligned}
 |Y(1) - \vec{U}_N|_\delta &< o(n^b) + o\left(n^{b-\tilde{\varepsilon}}\left(\frac{N}{n}\right)^{B+\delta}\right) \\
 &\quad + o(N^{b-\varepsilon_1} \ln^p N) + o\left(n^{b-\varepsilon}\left(\frac{N}{n}\right)^{B+\delta} \ln^p N\right) \\
 &< o(N^{\max(b(1-\delta), b-\tilde{\varepsilon}+(B-b+\tilde{\varepsilon}+\delta)\delta, b-\varepsilon_1, b-\varepsilon+(B-b+\varepsilon+\delta)\delta)} \ln^p N) \stackrel{?}{=} o(N^b).
 \end{aligned}$$

Так как $\tilde{\varepsilon} < \varepsilon$, то для выполнения последнего равенства необходимо, чтобы выполнялось неравенство $\delta(B - b + \tilde{\varepsilon} + \delta) < \tilde{\varepsilon}$, что для достаточно малого δ выполняется. Следовательно, для $x = zN^{-k-\lambda}$, $z \in K \Subset \mathbb{C}$, при $N \rightarrow \infty$ верна оценка $|y(1) - q_N| = o(N^b)$. В последнем утверждении присутствует символ N и отсутствует символ n . Переобозначив N через n , получим утверждение теоремы.

Заметим, что одновременно, как и в теореме 1.1, мы доказали гладкость последовательности q_n : $|y^{(s)}(1)/(n)_s - \Delta^s q_n| = o(n^{b-s})$ для $s = 0, \dots, k-1$.

Теорема 1.2 доказана.

§ 4. Локальные асимптотики ортогональных и совместно ортогональных многочленов

4.1. Асимптотика ортогональных многочленов в окрестности предельной точки масс меры и осцилляций веса. В работе [9] наряду с основным результатом об исследовании асимптотики (цитированная выше теорема В) затрагивался вопрос о соотношении между исходными данными в этой теореме и более привычными исходными данными в виде рекуррентных коэффициентов. Отмечалось, что, во-первых, из асимптотики рекуррентных соотношений для ортогональных полиномов можно найти значение α^2 (см. (1.21)), но нельзя выбрать знак α ; во-вторых, возможны ортогональные системы, для которых формально найденная величина α^2 отрицательна, т.е. в каком-то смысле им соответствует чисто мнимое α (пример именно такой системы описан в формулировке теоремы 1.3, доказательство которой мы проведем в этом пункте). Всюду в этом пункте под i подразумевается мнимая единица.

Пусть b и s – произвольные вещественные числа. Рассмотрим ортогональную систему $\{Q_n\}$, порожденную рекуррентными соотношениями ($n \in \mathbb{N}$)

$$Q_{n+1}(x) = xQ_n(x) - \frac{n^2 + s^2}{4n^2 - 1}Q_{n-1}(x), \quad \begin{cases} Q_0(x) = 1, \\ Q_1(x) = x - b. \end{cases} \quad (4.1)$$

Полиномы этой системы можно выразить через аналитическое продолжение классических полиномов Якоби по параметрам. Благодаря этому можно явно вычислить меру ортогональности для рассматриваемой системы. Локальное поведение $Q_n(x)$ в окрестности ± 1 можно получить из теоремы 1.2.

Рассмотрим ортогональную систему

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x - b, \quad P_{n+1}(x) = xP_n(x) - \frac{n^2 - \nu^2}{4n^2 - 1}P_{n-1}(x), \quad n \in \mathbb{N},$$

для $\nu \in (-1; 1)$. Сравнение с формулами для классических полиномов Якоби показывает, что $P_n = P_n^{(\nu, -\nu)}$ при $b = -\nu$ и $P_n = P_n^{(-\nu, \nu)}$ при $b = \nu$, где $P^{(\alpha, \beta)}$ – полиномы Якоби с единичным старшим коэффициентом. Отсюда получим, что для произвольного b полиномы $P_n(x)$ и соответствующие полиномы второго рода $\tilde{P}_n(x)$ выражаются линейно через $P_n^{(\nu, -\nu)}$ и $P_n^{(-\nu, \nu)}$, а интересующие нас полиномы Q_n получаются из P_n аналитическим продолжением по параметру ν до значения $\nu = is$. Имеем

$$\begin{cases} P_n(x) = \frac{\nu - b}{2\nu} P_n^{(\nu, -\nu)}(x) + \frac{\nu + b}{2\nu} P_n^{(-\nu, \nu)}(x), \\ \tilde{P}_n(x) = \frac{1}{2\nu} P_n^{(\nu, -\nu)}(x) - \frac{1}{2\nu} P_n^{(-\nu, \nu)}(x), \end{cases}$$

следовательно,

$$Q_n(x) = \frac{is - b}{2is} P_n^{(is, -is)}(x) + \frac{is + b}{2is} P_n^{(-is, is)}(x). \quad (4.2)$$

Обозначим через μ (вероятностную) меру для полиномов Якоби $P_n^{(\nu, -\nu)}$, через $\lambda^{(\nu)}$ – меру ортогональности полиномов P_n , а через λ – интересующую нас меру ортогональности Q_n . Как известно (см. [13]), первые $2n$ коэффициентов разложения в ∞ отношения полиномов второго рода и ортогональных полиномов равны степенным моментам, а ряд из степенных моментов соответствует преобразованию Коши меры ортогональности. У мер ортогональности компактные носители, а значит, их преобразования Коши аналитические в окрестности бесконечно удаленной точки. Степенные моменты рационально выражаются через рекуррентные коэффициенты. Следовательно, $\widehat{\lambda^{(\nu)}}$ аналитически зависит от ν и $\widehat{\lambda} = \widehat{\lambda^{(is)}}$. Для нахождения связи между $\widehat{\mu}$ и $\widehat{\lambda^{(\nu)}}$ учтем, что $\tilde{P}_n$ являются полиномами второго рода как для $P_n^{(\nu, -\nu)}$, так и для P_n , а $\widehat{\mu}$ вычисляется методами контурного интегрирования, так как сумма параметров Якоби для этого случая есть целое число. Итак, для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{P_n^{(\nu, -\nu)}(z) - P_n^{(-\nu, \nu)}(z)}{(\nu - b)P_n^{(\nu, -\nu)}(z) + (\nu + b)P_n^{(-\nu, \nu)}(z)} &= \widehat{\lambda^{(\nu)}}(z) + O(z^{-2n-1}), \\ \frac{P_n^{(\nu, -\nu)}(x) - P_n^{(-\nu, \nu)}(x)}{2\nu P_n^{(\nu, -\nu)}(x)} &= \widehat{\mu}(z) + O(z^{-2n-1}) \\ &= \frac{\sin \pi \nu}{2\pi \nu} \int_{-1}^1 \frac{(1-x)^\nu (1+x)^{-\nu} dx}{z-x} + O(z^{-2n-1}) \\ &= \frac{1}{2\nu} \left(1 - \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^\nu \right) + O(z^{-2n-1}). \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что

$$\widehat{\lambda^{(\nu)}}(z) = \frac{(z+1)^\nu - (z-1)^\nu}{(\nu - b)(z+1)^\nu + (\nu + b)(z-1)^\nu}. \quad (4.3)$$

Осуществив аналитическое продолжение (4.3) по ν до значения $\nu = is$ и приводя к виду, не содержащему мнимую единицу явно, получим

$$\hat{\lambda}(z) = \frac{\sin(\frac{s}{2} \ln(\frac{z+1}{z-1}))}{s \cos(\frac{s}{2} \ln(\frac{z+1}{z-1})) - b \sin(\frac{s}{2} \ln(\frac{z+1}{z-1}))} = \frac{1}{s \operatorname{ctg}(s \operatorname{arcctg} z) - b}. \quad (4.4)$$

Теперь, зная $\hat{\lambda}$, мы можем определить меру ортогональности λ по формуле Стильгеса–Перрона (см., например, [13]). Точки ветвления $\hat{\lambda}$ равны ± 1 , на разрезе $[-1, 1]$ функция $\hat{\lambda}$ ограничена всюду, кроме концов разреза, в области $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ единственные особенности – полюсы. Поэтому непрерывная составляющая меры ортогональности λ расположена на интервале $(-1, 1)$, а дискретная составляющая на этом интервале отсутствует. Вне $(-1, 1)$ мера λ имеет счетное число масс, положение и величина которых определяются полюсами и вычетами $\hat{\lambda}$: в точке X_k расположена масса M_k для всех $k \in \mathbb{Z}$, где

$$X_k = \operatorname{cth}\left(\frac{\pi k}{s} + \frac{1}{s} \operatorname{arctg} \frac{s}{b}\right), \quad M_k = \frac{1}{(s^2 + b^2) \operatorname{sh}^2(\frac{\pi k}{s} + \frac{1}{s} \operatorname{arctg} \frac{s}{b})}.$$

Плотность непрерывной части λ находим через скачок $\hat{\lambda}$:

$$\begin{aligned} w(x) &= \frac{\hat{\lambda}(x - 0i) - \hat{\lambda}(x + 0i)}{2\pi i} \\ &= \frac{s \operatorname{ctg}(\frac{\pi is}{2} + s \operatorname{arctg} x) - s \operatorname{ctg}(-\frac{\pi is}{2} + s \operatorname{arctg} x)}{2\pi i [s \operatorname{ctg}(\frac{\pi is}{2} + s \operatorname{arctg} x) - b] [s \operatorname{ctg}(-\frac{\pi is}{2} + s \operatorname{arctg} x) - b]} \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{s \operatorname{sh}(\pi s)}{(s^2 + b^2) \operatorname{ch}(\pi s) + (s^2 - b^2) \cos(2s \operatorname{arctg} x) - 2bs \sin(2s \operatorname{arctg} x)}. \end{aligned}$$

Отдельного исследования требует вопрос о наличии массы в точках ± 1 . Для этого надо проверить сходимость ряда

$$\sum_n |Q_n(\pm 1)|^2 \prod_{k=1}^n \frac{4k^2 - 1}{k^2 + s^2}.$$

Расходимость ряда равносильна отсутствию массы. В силу формулы (4.2) и известных формул для значений полиномов Якоби в концах носителя получим для $Q_n(\pm 1)$ формулы

$$\begin{aligned} Q_n(1) &= \frac{s - ib}{2s} \frac{\Gamma(n - is + 1)\Gamma(\frac{1}{2})}{2^n \Gamma(n + \frac{1}{2})\Gamma(1 - is)} + \frac{s + ib}{2s} \frac{\Gamma(n + is + 1)\Gamma(\frac{1}{2})}{2^n \Gamma(n + \frac{1}{2})\Gamma(1 + is)}, \\ Q_n(-1) &= \frac{s - ib}{2s} \frac{\Gamma(n + is + 1)\Gamma(\frac{1}{2})}{(-2)^n \Gamma(n + \frac{1}{2})\Gamma(1 + is)} + \frac{s + ib}{2s} \frac{\Gamma(n - is + 1)\Gamma(\frac{1}{2})}{(-2)^n \Gamma(n + \frac{1}{2})\Gamma(1 - is)}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Поскольку $2^n |Q_n(\pm 1)|$ не стремится к 0, ряды расходятся, следовательно, массы в точках ± 1 отсутствуют. Тем самым, мера ортогональности λ полностью описана.

Теперь воспользуемся формулой (4.5) и теоремой 1.2 для получения асимптотики $Q_n(x)$ в окрестности точек ± 1 . Фиксируем $\tilde{x}$ и примем $q_n(\tilde{x}) = (\pm 2)^n Q_n(x)$, $x = \pm(1 - \tilde{x})$. Тогда из (4.1) получим соотношение для $q_n(\tilde{x})$ вида (1.12):

$$q_{n+2}(\tilde{x}) - 2(1 - \tilde{x})q_{n+1}(\tilde{x}) + \frac{4(n+1)^2 + 4s^2}{4(n+1)^2 - 1} q_n(\tilde{x}) = 0.$$

Видно, что $\tilde{x}$ играет роль спектрального параметра. Находим значения входных параметров теоремы 1.2 (см. формулы (1.12) и (1.6), (2.1)):

$$\begin{aligned} k = 2, \quad c_0 = s^2 + \frac{1}{4}, \quad c_1 = 0, \quad c_2 = 1, \quad C = 2, \quad \lambda = 0 \\ \Rightarrow \quad P(t) = t(t+1) + s^2 + \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \alpha_{0,1} = \frac{1}{2} \pm is, \quad \operatorname{Re}(\alpha_0) = \operatorname{Re}(\alpha_1) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Из формулы (4.5) получаем асимптотику невозмущенной последовательности. Имеем:

$$\begin{aligned} \text{для } x = 1 \quad q_n &= \frac{(s+ib)\sqrt{\pi}}{2s\Gamma(1+is)} n^{1/2+is} + \frac{(s-ib)\sqrt{\pi}}{2s\Gamma(1-is)} n^{1/2-is} + o(1); \\ \text{для } x = -1 \quad q_n &= \frac{(s-ib)\sqrt{\pi}}{2s\Gamma(1+is)} n^{1/2+is} + \frac{(s+ib)\sqrt{\pi}}{2s\Gamma(1-is)} n^{1/2-is} + o(1). \end{aligned}$$

Отсюда видно, что слагаемые главных членов асимптотики q_n имеют степенные порядки с действительной частью $1/2$, и таких порядков два. Таким образом,

$$\begin{aligned} b = \frac{1}{2} = B, \quad \beta_1 = \frac{1}{2} + is, \quad p_1(x) \equiv \frac{(s \pm ib)\sqrt{\pi}}{2s\Gamma(1+is)}, \\ \beta_2 = \frac{1}{2} - is, \quad p_2(x) \equiv \frac{(s \mp ib)\sqrt{\pi}}{2s\Gamma(1-is)}. \end{aligned}$$

Верхний знак выбирается на правом конце, нижний – на левом. Поскольку $p_{1,2}$ – константы, то решений вида (1.18) достаточно (см. замечание 1.3). Получим решения

$$\begin{aligned} y_{10}(t) &= p_1 t^{\beta_1} {}_0F_1\left(\left[\right]; \left[1 + \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}\right]; \frac{-zt^2}{2}\right), \quad y_{10}(1) = p_1 {}_0F_1\left(\left[\right]; [1+is]; \frac{-z}{2}\right), \\ y_{20}(t) &= p_2 t^{\beta_2} {}_0F_1\left(\left[\right]; \left[1 + \frac{\beta_2 - \beta_1}{2}\right]; \frac{-zt^2}{2}\right), \quad y_{20}(1) = p_2 {}_0F_1\left(\left[\right]; [1-is]; \frac{-z}{2}\right), \end{aligned}$$

откуда, учитывая связь гипергеометрических функций с функциями Бесселя, имеем

$$\begin{aligned} y_{10}(1) &= \frac{(s \pm ib)\sqrt{\pi}}{2s} \left(\frac{2}{z}\right)^{is/2} J_{is}(\sqrt{2z}), \\ y_{20}(1) &= \frac{(s \mp ib)\sqrt{\pi}}{2s} \left(\frac{2}{z}\right)^{-is/2} J_{-is}(\sqrt{2z}). \end{aligned}$$

Подставив эти формулы в (1.15) и учитывая связь q_n и Q_n , окончательно получим следующие асимптотические формулы в окрестности ± 1 :

$$\begin{aligned} Q_n\left(1 - \frac{z}{n^2}\right) &= \frac{\sqrt{\pi n}}{2^n} \left[\frac{s+ib}{2s} \left(\frac{2n^2}{z}\right)^{is/2} J_{is}(\sqrt{2z}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{s-ib}{2s} \left(\frac{2n^2}{z}\right)^{-is/2} J_{-is}(\sqrt{2z}) + o(1) \right], \\ Q_n\left(\frac{z}{n^2} - 1\right) &= \frac{\sqrt{\pi n}}{(-2)^n} \left[\frac{s-ib}{2s} \left(\frac{2n^2}{z}\right)^{is/2} J_{is}(\sqrt{2z}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{s+ib}{2s} \left(\frac{2n^2}{z}\right)^{-is/2} J_{-is}(\sqrt{2z}) + o(1) \right]. \end{aligned}$$

4.2. Совместно ортогональные многочлены Якоби.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.4. Ограничимся случаем $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ в (1.26). Полиномы, совместно ортогональные относительно веса $|x|^p$ на каждом из отрезков $[-1, 0]$ и $[0, 1]$, могут быть заданы явно с помощью формулы Родрига (см. [11]):

$$P_n(x) = \frac{1}{n!} x^{-p} D^n (x^{n+p} (1-x^2)^n), \quad \text{где } D - \text{оператор } \frac{d}{dx}. \quad (4.6)$$

С их помощью (также см. [14]) можно получить рекуррентные соотношения для P_n и значения $P_n(0)$. Рекуррентные соотношения для P_n с нормировкой согласно (4.6) имеют вид

$$\begin{aligned} &(n+1)(2n+p+2)(2n+p+1)(3n+p)(3n+p-1)(3n+p-3)P_{n+1} \\ &= ((3n+p+1)(3n+p-3)(36n^4+48pn^3+48n^3+27p^2n^2+45pn^2+6n^2 \\ &\quad +8p^3n+15p^2n+pn-6n+p^4+2p^3-p^2-2p) \\ &\quad -x^2(3n+p+3)(3n+p+2)(3n+p+1)(3n+p)(3n+p-1)(3n+p-3))P_n \\ &\quad -2n(3n+p+3)(54n^4+90pn^3-45n^3+60p^2n^2-60pn^2-24n^2 \\ &\quad +18p^3n-27p^2n-21pn+15n+2p^4-4p^3-5p^2+7p)P_{n-1} \\ &\quad +4n(n-1)(n+p-1)(3n+p+3)(3n+p+2)(3n+p)P_{n-2}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

При $x = 0$ соотношение (4.7) имеет три линейно независимых решения, одно из которых – это $\{P_n(0)\}$. Обозначим два других $\{S_n^{(1)}(0)\}$, $\{S_n^{(2)}(0)\}$. Первое решение находится явно из (4.6). Также оказывается возможным подобрать и два других, что можно использовать для получения локальной асимптотики функций второго рода как других решений уравнения (4.7):

$$P_n(0) = \frac{(n+p)!}{n!p!}, \quad S_n^{(1)}(0) = \frac{n!}{(n+\frac{p}{2})!}, \quad S_n^{(2)}(0) = \frac{(n+1)!}{(n+\frac{p-1}{2})!}.$$

Проще всего получить локальную асимптотику $P_n(x)$: это делается непосредственным применением теоремы 1.2. Роль спектрального параметра играет x^2 . Сначала в соотношении (4.7) сдвинем индекс $n \mapsto n+2$ и разделим на

коэффициент при P_{n+3} , затем найдем асимптотику коэффициентов до порядка $O(n^{-4})$, чтобы убедиться в выполнении условий (1.6) и найти c_j :

$$\begin{aligned} a_0 &= -1 + \frac{3}{2n} + \frac{3p^2 - 9p - 49}{12n^2} + \frac{-18p^3 - 24p^2 + 262p + 823}{72n^3} + O(n^{-4}), \\ a_1 &= 3 - \frac{3}{n} + \frac{3p^2 + 9p + 104}{12n^2} - \frac{18p^3 + 123p^2 + 287p + 1820}{72n^3} + O(n^{-4}), \\ a_2 &= -3 + \frac{3}{2n} - \frac{6p^2 + 55}{12n^2} + \frac{18p^3 + 201p^2 + 25p + 997}{72n^3} + O(n^{-4}). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} k &= 3, \quad c_0 = \frac{p^2(p-3)}{4}, \quad c_1 = \frac{-3p^2 + 3p - 2}{4}, \quad c_2 = -\frac{3}{2}, \quad c_3 = 1, \\ \prod(t + \alpha_i) &= (t)_3 - \frac{3}{2}(t)_2 - \frac{3p(p-1) + 2}{4}(t)_1 + \frac{p^2(p-3)}{4} \\ &= (t+p)\left(t - \frac{p}{2}\right)\left(t - \frac{p-3}{2}\right), \\ C &= \frac{27}{4}, \quad \lambda = 0, \quad b = p, \quad B = \max\{\operatorname{Re}(\alpha_i)\} = \max\left(\frac{3-p}{2}, p\right). \end{aligned}$$

Отсюда условие (1.14) равносильно $p > -1$, поэтому получаем асимптотическую формулу, верную для $p > -1$:

$$P_n\left(\frac{z}{n\sqrt{n}}\right) = \frac{n^p}{\Gamma(p+1)_0} F_2\left([\cdot]; \left[\frac{p+1}{2}, \frac{p+2}{2}\right]; \frac{-z^2}{4}\right) + o(n^p).$$

Теорема 1.4 доказана.

4.3. Совместно ортогональные многочлены Лагерра. В работе В. Н. Сорокина [12] исследовались полиортогональные многочлены с r ортогональностями ($r \in \mathbb{N}$), обобщающие многочлены Лагерра (им соответствует случай $r = 1$). В работе [12] было показано, что для любой борелевской меры μ , у которой $\operatorname{supp}(\mu) \subset [0; \infty)$, бесконечное число точек роста и все моменты конечны, задача о нахождении знаменателей совместных диагональных аппроксимаций Паде для системы функций $\hat{\mu}(\varepsilon_j z)$, $\varepsilon_j = \exp(2\pi i \frac{j}{r})$, i – мнимая единица, $j = 0, 1, \dots, r-1$, имеет единственное решение (т.е. все диагональные индексы нормальны), а в случае меры с плотностью $d\mu(x) = x^p \exp(-x^r) dx$, $x \in \mathbb{R}_+$ ($p > -1$), для знаменателей выполняется формула типа Родрига, которая служит отправной точкой для получения сильной асимптотики:

$$\Lambda_n(r, p, x) = \frac{\exp(x^r)}{n! x^p} \left(\frac{d}{dx}\right)^n [x^{n+p} \exp(-x^r)]. \quad (4.8)$$

Покажем, что локальная асимптотика полиномов Λ_n может быть получена из результатов настоящей работы. Для этого сначала выведем из (4.8) рекуррентные соотношения. Во-первых, можно выделить множитель x отдельно: $(xF)^{(n)} = xF^{(n)} + nF^{(n-1)}$, откуда

$$\Lambda_n(r, p, x) = \Lambda_n(r, p-1, x) + \Lambda_{n-1}(r, p, x). \quad (4.9)$$

Во-вторых, можно раскрыть одно дифференцирование явно. Получим

$$n\Lambda_n(r, p, x) = (n + p)\Lambda_{n-1}(r, p, x) - rx^r\Lambda_{n-1}(r, p + r, x). \quad (4.10)$$

Формулы (4.9) и (4.10) справедливы для натуральных n и для произвольных p , так как правая часть формулы (4.8) для них определена, хотя совместно ортогональными будут являться только полиномы со вторым аргументом $p > -1$. Для всех p имеем $\Lambda_0(r, p, x) = 1$. Поэтому мы можем формально доопределить $\Lambda_n = 0$ для отрицательных n и считать, что (4.9) и (4.10) справедливы для всех целых n . Преобразуем и скомбинируем их так, чтобы получить формулу, куда входят полиномы с одинаковым значением параметра p :

$$\begin{cases} \Delta\Lambda_{n-1}(r, p, x) = \Lambda_n(r, p - 1, x), \\ n\Delta\Lambda_{n-1}(r, p, x) = p\Lambda_{n-1}(r, p, x) - rx^r\Lambda_{n-1}(r, p + r, x) \end{cases} \\ \Rightarrow n\Delta^{r+1}\Lambda_{n-r-1}(r, p + r, x) = p\Delta^r\Lambda_{n-r-1}(r, p + r, x) - rx^r\Lambda_{n-1}(r, p + r, x).$$

Деля переобозначения, получим следующую рекуррентную формулу и начальные условия:

$$\begin{aligned} (n + r + 1)\Delta^{r+1}\Lambda_n(r, p, x) &= (p - r)\Delta^r\Lambda_n(r, p, x) - rx^r\Lambda_{n+r}(r, p, x), \\ \Lambda_0(r, p, x) &= 1, \quad \Lambda_{-r}(r, p, x) = \dots = \Lambda_{-1}(r, p, x) = 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Значения в точке $x = 0$ следующие:

$$\Lambda_n(r, p, 0) = \binom{n + p}{n} = \frac{(p + 1)_n}{n!} \simeq \frac{n^p}{\Gamma(p + 1)}.$$

Роль спектрального параметра играет величина x^r , прочие входные данные теоремы 1.2 имеют следующий вид (см. (1.12), (1.6), (2.1)):

$$\begin{aligned} k &= r + 1, \quad c_k = 1, \quad c_r = p - r, \quad c_{r-1} = \dots = c_0 = 0, \quad C = r, \quad \lambda = -1 \\ \Rightarrow P(t) &= (t)_{r+1} + (p - r)(t)_r = (t + p)(t)_r \\ \Rightarrow \{\alpha_i\} &= \{0, \dots, r - 1, p\}, \quad b = p, \quad B = \max\{\operatorname{Re}(\alpha_i)\} = \max(r - 1, p), \end{aligned}$$

поэтому условие (1.14) эквивалентно $p > -1$, и мы имеем

$$\Lambda_n\left(r, p, \frac{z}{n}\right) = \frac{n^p}{\Gamma(p + 1)} {}_0F_r\left([\cdot]; \left[\frac{p + 1}{r}, \dots, \frac{p + r}{r}\right]; \frac{-z^r}{r^r}\right) + o(n^p),$$

что согласуется с результатами работы [12].

Список литературы

- [1] H. Poincaré, “Sur les Equations Linéaires aux Différentielles Ordinaires et aux Différences Finies”, *Amer. J. Math.*, **7**:3 (1885), 203–258.
- [2] O. Perron, “Über einen Satz des Herrn Poincaré”, *J. Reine Angew. Math.*, **136** (1909), 17–37.
- [3] O. Perron, “Über die Poincarésche lineare Differenzengleichung”, *J. Reine Angew. Math.*, **137** (1910), 6–64.

- [4] А. О. Гельфонд, *Исчисление конечных разностей*, 2-е изд., ГИФМЛ, М., 1959; нем. пер. 1-го изд.: А. О. Gel'fond, *Differenzenrechnung*, VEB, Berlin, 1958.
- [5] D. G. Birkhoff, "General theory of linear difference equations", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **12**:2 (1911), 243–284.
- [6] D. G. Birkhoff, W. J. Trjitzinsky, "Analytic theory of singular difference equations", *Acta Math.*, **60**:1 (1933), 1–89.
- [7] D. G. Birkhoff, "Formal theory of irregular linear difference equations", *Acta Math.*, **54**:1 (1930), 205–246.
- [8] А. И. Аптекарев, "Асимптотика ортогональных многочленов в окрестности концов интервала ортогональности", *Матем. сб.*, **183**:5 (1992), 43–62; англ. пер.: А. И. Aptekarev, "Asymptotics of orthogonal polynomials in a neighborhood of the endpoints of the interval of orthogonality", *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, **76**:1 (1993), 35–50.
- [9] Д. Н. Туляков, "О локальной асимптотике отношения ортогональных полиномов в окрестности крайней точки носителя меры ортогональности", *Матем. сб.*, **192**:2 (2001), 139–160; англ. пер.: D. N. Tulyakov, "Local asymptotics of the ratio of orthogonal polynomials in the neighbourhood of an end-point of the support of the orthogonality measure", *Sb. Math.*, **192**:2 (2001), 299–321.
- [10] С. П. Суетин, "О сильной асимптотике многочленов, ортогональных относительно комплексного веса", *Матем. сб.*, **200**:1 (2009), 81–96.
- [11] В. А. Калягин, "Об одном классе полиномов, определяемых двумя соотношениями ортогональности", *Матем. сб.*, **110**(152):4(12) (1979), 609–627; англ. пер.: V. A. Kaljagin, "On a class of polynomials defined by two orthogonality relations", *Math. USSR-Sb.*, **38**:4 (1981), 563–580.
- [12] В. Н. Сорокин, "Обобщение классических ортогональных многочленов и сходимость совместных аппроксимаций Паде", Тр. сем. им. И. Г. Петровского, **11**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1986, 125–165; англ. пер.: V. N. Sorokin, "A generalization of classical orthogonal polynomials and the convergence of simultaneous Pade approximants", *J. Soviet Math.*, **45**:6 (1989), 1461–1499.
- [13] Н. И. Ахиезер, *Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею*, Физматгиз, М., 1961; англ. пер.: N. I. Akhiezer, *The classical moment problem and some related questions in analysis*, Hafner, New York; Oliver & Boyd, Edinburgh–London, 1965.
- [14] V. Kaliaguinea, A. Ronveaux, "On an system of "classical" polynomials of simultaneous orthogonality", *J. Comput. Appl. Math.*, **67**:2 (1996), 207–217.

Д. Н. Туляков (D. N. Tulyakov)
Институт прикладной математики
им. М. В. Келдыша РАН
E-mail: dnt@mail.nnov.ru

Поступила в редакцию
14.07.2008 и 24.02.2009