Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. П. Буланов, Циклические цепные экспоненты и степени с произвольными первыми показателями, *Матем. сб.*, 2010, том 201, номер 1, 25–58

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm6395>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 13:56:51

УДК 517.521.2+517.537

А. П. Буланов

Циклические цепные экспоненты и степени с произвольными первыми показателями

Цепная циклическая периода m экспонента

$$f(z) = e^{\lambda \alpha_1 z e^{\alpha_2 z e^{\dots}}} = \langle e^z; \lambda \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \alpha_1, \dots \rangle$$

с одним произвольным первым показателем $\lambda \alpha_1$ при разложении в точке $z = 0$ в степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} H^{(n)}(f) z^n$ имеет форму вида

$$H^{(n)}(f) = \lambda \alpha_1 \sum_{k_1 + \dots + k_m = n} \frac{n!}{k_1! \dots k_m!} (k_1 \alpha_2)^{k_2} (k_2 \alpha_3)^{k_3} \times \dots \times (k_{m-1} \alpha_m)^{k_m} [(k_m + \lambda) \alpha_1]^{k_1 - 1}.$$

Эта формула обобщается на любое количество произвольных первых показателей. Показывается, что решением системы дифференциальных уравнений первого порядка с рациональными правыми частями в некоторых случаях являются циклические цепные экспоненты с первыми показателями, не являющимися элементами циклической последовательности $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \alpha_1, \dots)$.

Библиография: 32 названия.

Ключевые слова: цепная экспонента, циклическая экспонента, цепная степень, циклическая степень, показатель степени, последовательность.

Введение

Функцию, определяемую формулой

$$f_s(x) = a_0 \psi_0(x), \quad \text{где } \psi_{k-1} = e^{a_k x \psi_k(x)}, \quad k = s, s-1, \dots, 2, 1, \quad \psi_s(x) = 1, \quad (1)$$

будем называть *цепной экспонентой кратности s* , а функцию

$$g_s(x) = a_0 \varphi_0(x), \quad \text{где } \varphi_{k-1} = x^{a_k \varphi_k(x)}, \quad k = s, s-1, \dots, 2, 1, \quad \varphi_s(x) = 1, \quad (2)$$

– *цепной степенью кратности s* . Для удобства эти функции будем записывать соответственно

$$f_s(x) = a_0 \cdot \langle e^x; a_1, a_2, \dots, a_s \rangle, \quad g_s(x) = a_0 \cdot \langle x; a_1, a_2, \dots, a_s \rangle. \quad (3)$$

Далее будем исходить из числовой последовательности $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, не имеющей нулевых элементов и удовлетворяющей условию

$$\overline{a} = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} |a_n| < \infty. \quad (4)$$

Формальные выражения

$$a_0 e^{a_1 x e^{a_2 x e^{\dots}}} = a_0 \cdot \langle e^x; a_1, a_2, \dots \rangle, \quad a_0 x^{a_1 x^{a_2 x^{\dots}}} = a_0 \cdot \langle x; a_1, a_2, \dots \rangle, \quad x > 0, \quad (5)$$

условимся называть соответственно *бесконечной цепной экспонентой* и *бесконечной цепной степенью*. В дальнейшем, где это не будет нарушать общности, будем полагать $a_0 = 1$.

Коэффициенты в последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ могут быть комплексными, а переменная x в формулах (1)–(5) может принимать комплексные значения z .

Последовательность $\{f_n(w)\}_{n=1}^{\infty}$, где $f_n(w)$ определяется формулой (1), может сходиться к предельной функции

$$f(w) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(w) = \langle e^w; a_1, a_2, \dots \rangle, \quad (6)$$

регулярной в некоторой области $F \subset \mathbb{C}$, а последовательность $\{g_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$, где $g_n(z)$ определяется формулой (2), может сходиться к предельной функции

$$g(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(z) = \langle z; a_1, a_2, \dots \rangle, \quad (7)$$

регулярной в некоторой области $G \subset \mathbb{C}$.

В работе [1] в 1778 г. Л. Эйлер доказал, что последовательность $x, x^x, x^{x^x}, \dots$ сходится на отрезке $[e^{-e}, e^{1/e}]$, причем ее предел в левой граничной точке этого отрезка равен $1/e$, а в правой равен e . Этот результат Л. Эйлера передоказывали в 1844 г. Г. Эйзенштейн [2], в 1873 г. Л. Зейдель [3]. В 1907 г. А. Карлссон [4] показал, что если

$$w \in \text{Kar} := \{w = te^{-t} : |t| < 1\}, \quad (8)$$

то последовательность

$$z = e^w, \quad z^z = e^{we^w}, \quad z^{z^z} = e^{we^{we^w}}, \quad \dots, \quad w \in \mathbb{C}, \quad (9)$$

сходится. Для вещественных значений w кардиоиды Кар (т.е. $w \in [-e, e^{-1}]$) соответствующие вещественные значения $x = \text{Re } z$ лежат на отрезке $[e^{-e}, e^{1/e}]$, а это есть упомянутый результат Л. Эйлера. В работе [5] И. Бейкер и П. Риппон доказали, что условие (8) является достаточным. Они также доказали, что последовательность (9) сходится в граничных точках кардиоиды Кар, если $w = te^{-t}$ и t есть n -й корень из единицы, и расходится почти всюду на границе ∂Kar (рис. 1).

В работах [6] и [7] рассматривались цепные степени и экспоненты с различными показателями. Приведем формулировки теорем в таком виде, как их представили И. Бейкер и П. Риппон в работе [8].

ТЕОРЕМА БЭРРОУ (D. F. Barrow, 1936). Пусть

$$[a_1] = a_1, \quad [a_1, a_2] = a_1^{a_2}, \quad [a_1, a_2, a_3] = a_1^{[a_2, a_3]}, \quad \dots \quad (10)$$

и $b_n = \ln a_n \in [-e, 1/e]$ для всех $n = 1, 2, \dots$. Тогда последовательность (10) сходится.

Рис. 1. Картионда Карлссона

ТЕОРЕМА ТРОНА (W.J. Thron, 1957). Пусть $b_n \in \{z : |z| \leq 1/e\}$ для всех $n = 1, 2, \dots$. Тогда последовательность

$$[e^{b_1}], \quad [e^{b_1}, e^{b_2}], \quad [e^{b_1}, e^{b_2}, e^{b_3}], \quad \dots \quad (11)$$

сходится.

В работе [9] была доказана теорема (см. ниже теорему 1) в условиях, когда от многозначного логарифма $\text{Ln } z$ берется лишь главная ветвь $\ln z$ (соответствующая $\ln 1 = 0$). Фигурирующая в формулировке область e^K на плоскости z есть проекция образа круга

$$K = \left\{ w : |w| < \frac{1}{e\bar{a}} \right\}, \quad (12)$$

лежащего на римановой поверхности логарифма при отображении $z = e^w$. Если $\bar{a} < 1/(e\pi)$, где $\bar{a}$ определяется формулой (4), то это отображение будет многолиственным.

Далее считаем, что P – комплексная плоскость z с разрезом по отрицательной части вещественной оси: $P = \{z : |\arg z| < \pi\}$.

ТЕОРЕМА 1. *Предельная функция*

$$g(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(z) \quad (13)$$

является регулярной в некоторой области G , причем $G \supset (P \cap e^K)$, где e^K – проекция образа круга K при отображении $z = e^w$.

Если не ограничиваться лишь главным значением $\ln z$ многозначного логарифма $\text{Ln } z$, то (см. [10]) теорему 1 следует сформулировать несколько иначе.

ТЕОРЕМА 2. *Предельная функция*

$$g(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(z) \quad (14)$$

регулярна в области G , причем $G \supset e^K$, где e^K – лежащий на римановой поверхности логарифма образ круга $K = \{w : |w| < 1/(e\bar{a})\}$ при отображении $z = e^w$.

В частном случае $\bar{a} \geq 1/(\pi e)$ отображение круга K функцией $z = e^w$ будет однолиственным и его образ e^K будет односвязной областью на плоскости z . В этом случае нет различия между теоремами 1 и 2.

Если $0 < \bar{a} < 1/(\pi e)$, то образ круга K будет располагаться на конечном числе листов римановой поверхности логарифма. В этом случае функция $g(z)$, определенная формулой (14), является многозначной.

Если же $\bar{a} = 0$, то круг K совпадает со всей конечной плоскостью w , $|w| < \infty$, а образ e^K совпадает со всей римановой поверхностью логарифма при многолистном отображении плоскости w функцией $z = e^w$. В этом случае функция $g(z)$ в теореме 2 является бесконечнозначной.

По теореме 2 предельная функция $f(w)$ является регулярной в некоторой области F , причем $F \supset K$. В частности, если $\bar{a} = 0$, то $f(w)$ сходится на всей конечной плоскости $\{w : |w| < \infty\}$.

При доказательстве теоремы 1 были привлечены числа Стирлинга 1-го рода s_n^k и 2-го рода S_n^k , которые определяются как коэффициенты из равенств

$$(t)_0 = t^0 = 1 = s_0^0 = S_0^0,$$

$$(t)_n = t(t-1) \cdots (t-n+1) = \sum_{k=0}^n s_n^k t^k, \quad t^n = \sum_{k=0}^n S_n^k (t)_k, \quad n > 0.$$

И были представлены разложения в степенные ряды предельных функций $g(z)$ в окрестности точки $z = 1$ и $f(w)$ в окрестности точки $w = 0$:

$$g(z) = \langle z; a_1, a_2, \dots \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(H)_n}{n!} (z-1)^n, \quad (H)_n = g^{(n)}(z)|_{z=1} = \sum_{k=0}^n s_n^k H^{(k)}, \quad (15)$$

$$f(w) = \langle e^w; a_1, a_2, \dots \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H^{(n)}}{n!} w^n, \quad (16)$$

где $H^{(n)} = f^{(n)}(w)|_{w=0} = H^{(n)}(a_1, \dots, a_n)$ есть форма порядка n от n коэффициентов (показателей),

$$H^{(n)} = \sum_{k_1+k_2+\dots+k_n=n} \frac{n!}{k_1! k_2! \cdots k_n!} a_1^{k_1} (a_2 k_1)^{k_2} (a_3 k_2)^{k_3} \cdots (a_n k_{n-1})^{k_n}. \quad (17)$$

Заметим, что в работе [9] (см. там определения (21) и (22) и равенства (23)) доказана лемма, которая связывает числами Стирлинга 1-го и 2-го рода производную $g^{(n)}(1)$ и форму $H^{(n)}$ в виде двух равенств, являющихся взаимно обратными соотношениями.

ЛЕММА 1. *Справедливы равенства*

$$g^{(n)}(1) = \sum_{k=0}^n s_n^{(k)} H^{(k)}, \quad H^{(n)} = \sum_{k=0}^n S_n^{(k)} g^{(k)}(1). \quad (18)$$

Если в определении $H^{(n)}$, в частности, положить $a_1 = a_2 = \dots = a_n = \dots = \bar{a} > 0$, то

$$H^{(n)}(\bar{a}) = (n+1)^{n-1} \bar{a}^n. \quad (17\bar{a})$$

Поэтому в этом частном случае радиус сходимости R степенного ряда (16) оценивается снизу радиусом сходимости $\bar{R}$ с помощью неравенства

$$R = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{H^{(n)}}{n!}} \right)^{-1} \equiv \frac{1}{eq} \geq \bar{R} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{H^{(n)}(\bar{a})}{n!}} \right)^{-1} = \frac{1}{e\bar{a}}. \quad (19)$$

Здесь возникает задача об оценке q в тех случаях, если $\underline{a} \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| < \bar{a}$.

В работе [10] величина q оценивалась в том случае, когда последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ состоит из элементов, принимающих поочередно лишь два значения, α и β . Исследование таких степеней и экспонент сводится к случаю, когда $\alpha = 1$ и $|\beta| > 1$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть в последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ $a_{2k} = 1$, $a_{2k+1} = \beta$, $k = 0, 1, 2, \dots$, $|\beta| > 1$, и пусть

$$q = \sqrt{|\beta|} \exp \left(\frac{2t^2}{1-t^2} \right),$$

где $t = t(\sqrt{|\beta|}) \in [0, 1)$ – решение уравнения

$$\sqrt{|\beta|} = \frac{1+t}{1-t} \exp \left(\frac{2t}{1-t^2} \right).$$

Тогда в теоремах 1 и 2 вместо $\bar{a}$ можно взять величину q .

В замечании 2 в работе [10] говорится, что в явном виде при $|\beta| \in [1, 2800]$ величину q можно оценить так:

$$q \leq \sqrt{|\beta|} \left[1 + \frac{1}{2} \ln |\beta| \cdot \frac{\sqrt{|\beta|} - 1}{\sqrt{|\beta|} + 1} \right], \quad 1 \leq |\beta| \leq 2800. \quad (20)$$

Отметим еще, что зависимость между радиусом сходимости $R = 1/(eq)$ и коэффициентом $\beta \geq 1$ простейшей циклической цепной экспоненты

$$e^{\beta w e^{w e^{\beta w e^{\dots}}}} = \langle e^w; \beta, 1, \beta, 1, \dots \rangle$$

представляется в параметрическом виде (рис. 2):

$$R = (\tau \exp \tau)^{-1}, \quad \beta = \tau^2 \exp \left(\frac{\tau^2 - 1}{\tau} \right), \quad 1 \leq \tau < \infty. \quad (21)$$

При $\beta \geq 1$ эти формулы следуют из результата теоремы 3

$$\frac{1}{R} = \sqrt{|\beta|} \exp \left(\frac{1+t^2}{1-t^2} \right), \quad \sqrt{\beta} = \frac{1+t}{1-t} \exp \left(\frac{2t}{1-t^2} \right)$$

с применением дробно-линейного преобразования $\tau = (1+t)/(1-t)$, $t \in [0, 1)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \frac{1+t}{1-t} \exp \left(\frac{2t}{1-t^2} + \frac{1+t^2}{1-t^2} \right) = \tau \exp(\tau), \\ \beta &= \left(\frac{1+t}{1-t} \right)^2 \exp \left(4t \frac{1-t}{(1-t)^2(1+t)} \right) = \tau^2 \exp \left(\frac{\tau^2 - 1}{\tau} \right). \end{aligned}$$

(см. также [11]).

Рис. 2. Зависимость радиуса сходимости R от коэффициента β

При $0 < \beta \leq 1$ исходную экспоненту $\langle e^w; \beta, 1, \beta, 1, \dots \rangle$ следует представить в виде $\langle e^{w'}; 1, \alpha, 1, \alpha, \dots \rangle$, где $\alpha = 1/\beta$, $w' = w\beta$. Тогда циклическая экспонента $\langle e^w; 1, \beta, 1, \beta, \dots \rangle = \langle e^{w'}; \alpha, 1, \alpha, 1, \dots \rangle$ имеет на комплексной плоскости w' радиус сходимости $R' = R\beta = R/\alpha$, который зависит от $\alpha \geq 1$ так же, как R от $\beta \geq 1$. В этом случае при $\tau \geq 1$ берем $R' = (\tau \exp(\tau))^{-1}$ и $\alpha = \alpha(\tau) = \tau^2 \exp((\tau^2 - 1)/\tau)$. Отсюда следует

$$R = R'\alpha = (\tau \exp(\tau))^{-1} \tau^2 \exp\left(\frac{\tau^2 - 1}{\tau}\right) = \tau \exp\left(-\frac{1}{\tau}\right),$$

$$\beta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\tau^2} \exp\left(-\tau + \frac{1}{\tau}\right).$$

Итак, при $0 < \beta \leq 1$ имеем параметрическую функцию

$$R = \tau \exp\left(-\frac{1}{\tau}\right), \quad \beta = \frac{1}{\tau^2} \exp\left(\frac{1 - \tau^2}{\tau}\right), \quad 1 \leq \tau < \infty. \quad (21a)$$

Заменим здесь букву τ буквой θ , $1 \leq \theta < \infty$, по формуле $\tau = 1/\theta$, а τ в свою очередь будет параметром; тогда $\tau \in (0; 1]$. Теперь в формулах (21a) подставим θ вместо τ . Имеем

$$R = \theta \exp\left(-\frac{1}{\theta}\right) = \frac{1}{\tau} \exp(-\tau), \quad \beta = \frac{1}{\theta^2} \exp\left(\frac{1 - \theta^2}{\theta}\right) = \tau^2 \exp\left(\frac{\tau^2 - 1}{\tau}\right),$$

$$0 < \tau \leq 1.$$

Таким образом, формулы (21) и (21a) можно объединить. Так, для $\beta \in (0; \infty)$ имеем функцию, заданную параметрически:

$$R = (\tau \exp \tau)^{-1}, \quad \beta = \tau^2 \exp\left(\frac{\tau^2 - 1}{\tau}\right), \quad 0 \leq \tau < \infty. \quad (21b)$$

При этом видно, что $R \rightarrow \infty$ при $\beta = 1/\alpha \rightarrow 0$.

Остается добавить, что экспоненты

$$\langle e^w; \beta, 1, \beta, 1, \dots \rangle, \quad \langle e^w; 1, \beta, 1, \beta, \dots \rangle$$

имеют по теореме Вейерштрасса (см. [12; ч. 1, гл. 3] и [9]) одну и ту же область сходимости.

Остановимся на некоторых теоремах упомянутой работы [8]. Основным результатом (обозначения: $[a_1] = a_1$, $[a_1, a_2] = a_1^{a_2}$, $[a_1, a_2, a_3] = a_1^{[a_2, a_3]}$, $\dots$, $b_k = \ln a_k$, $k = 1, 2, \dots$) является

ТЕОРЕМА БЕЙКЕРА–РИППОНА (J. N. Baker, P. J. Rippon, 1989). Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$. Тогда циклическая последовательность

$$[a_1], [a_1, a_2], \dots, [a_1, a_2, \dots, a_n], [a_1, a_2, \dots, a_n, a_1], \dots \quad (22)$$

$$(\text{или } [e^{b_1}], [e^{b_1}, e^{b_2}], \dots, [e^{b_1}, e^{b_2}, \dots, e^{b_n}], [e^{b_1}, e^{b_2}, \dots, e^{b_n}, e^{b_1}], \dots) \quad (22a)$$

сходится тогда и только тогда, когда существует единственное представление чисел b_k в виде

$$b_1 = t_1 e^{-t_2}, \quad b_2 = t_2 e^{-t_3}, \quad \dots, \quad b_n = t_n e^{-t_1},$$

где

$$|t_1 t_2 \dots t_n| \leq 1.$$

Одно из утверждений работы [8] заключается в том, что если $b_k > 0$ для всех $k = 1, 2, \dots, n$ (при этом некоторые b_k не равны $1/e$) и если

$$\left(\prod_{k=1}^n b_k \right)^{1/n} \geq \frac{1}{e}, \quad (23)$$

то последовательность (22a) расходится.

Любопытен еще следующий результат. Для $n \geq 7$ существуют такие числа $b_1, b_2, \dots, b_n > 0$, что условие

$$\frac{1}{n}(b_1 + b_2 + \dots + b_n) \leq \frac{1}{e} \quad (24)$$

выполняется, но последовательность (22a) расходится; однако для $n = 2$ условие

$$b_1, b_2 \geq 0, \quad \frac{1}{2}(b_1 + b_2) \leq \frac{1}{e} \quad (25)$$

для сходимости последовательности (22a) является достаточным.

Предварительно авторы работы [8] гипотетически замечают, что для $n = 3, 4, 5, 6$ условие (24) может быть достаточным для сходимости последовательности (22a).

При $n = 2$ последовательность (22a) запишем в виде

$$[e^{b_1}], [e^{b_1}, e^{b_2}], [e^{b_1}, e^{b_2}, e^{b_1}], [e^{b_1}, e^{b_2}, e^{b_1}, e^{b_2}], \dots \quad (26)$$

Если в левой части неравенства (23) взять $n = 2$, $w > 0$, $b_1 = \beta w$, $b_2 = w$ и $\sqrt{b_1 b_2} = w\sqrt{\beta}$, а в левой части неравенства (25) взять $(b_1 + b_2)/2 = w(1 + \beta)/2$, то последовательность (26) сходится при

$$w \leq \frac{2}{e(1 + \beta)} \quad (27)$$

и расходится при

$$w \geq \frac{1}{e\sqrt{\beta}}. \quad (28)$$

С другой стороны, по теореме 2 работы [10] (см. там замечание 2) последовательность (26) сходится, если $w \leq 1/(eq)$, где

$$q = \sqrt{\beta} \left[1 + \ln \beta \cdot \frac{\sqrt{\beta} - 1}{\sqrt{\beta} + 1} \right], \quad 1 \leq \beta \leq 2800. \quad (20a)$$

Если взять $\beta = 1 + \delta$ при малых $\delta > 0$ (и сравнить (27), (28) и (20a)), то для циклической (периода 2) экспоненты

$$e^{(1+\delta)we^{we^{(1+\delta)we^{we^{\dots}}}}} = \langle e^w; 1 + \delta, 1, 1 + \delta, 1, \dots \rangle \quad (29)$$

(в терминах Бейкера и Риппона $b_1 = (1 + \delta)w$, $b_2 = w$) мы получаем:

- 1) $(b_1 + b_2)/2 = w(1 + \delta/2) \leq 1/e$, т.е. при $w \leq 1/(e(1 + \delta/2))$ последовательность (26) сходится;
- 2) $\sqrt{b_1 b_2} = w\sqrt{1 + \delta} \geq 1/e$, т.е. при $w \geq 1/(e(1 + \delta/2 - \delta^2/8 + \bar{o}(\delta^2)))$ последовательность (26) расходится;
- 3) при $w \leq 1/(e(1 + \delta/2 - \delta^4/192 + \bar{o}(\delta^4)))$ последовательность (26) сходится.

Если взять $\beta = 2$, то $\sqrt{b_1 b_2} = \sqrt{1 \cdot \beta} = \sqrt{2}$ и $(b_1 + b_2)/2 = (1 + \beta)/2 = 1.5$. Циклическая цепная экспонента

$$f(w) = \langle e^w; 2, 1, 2, 1, \dots \rangle = e^{2we^{we^{2we^{we^{\dots}}}}} \quad (30)$$

расходится (по теореме 3 работы [8]), если $w = 1/(e\sqrt{2})$; сходится (по теореме Трона из [7]), если $w = 1/(e \cdot 2)$; сходится (по теореме 4 из [8]), если $w = 1/(e \cdot 1.5)$; а точка $w = 1/(eq)$, где $q = 1,43555360852326 \dots$ ($q = (1/e)\tau \cdot \exp \tau$, а τ – решение уравнения $2 = \tau^2 \exp((\tau^2 - 1)/\tau)$) является для экспоненты (30) граничной.

Рассматриваемые здесь цепные экспоненты и степени – это один из видов представления аналитической функции, восходящей к Л. Эйлеру, И. Ламберту, Д. Бернулли, Х. Гольдбаху. Оценивая количество публикаций и полученные в них результаты (см. [1]–[26]), можно отметить, что цепные степени и экспоненты вполне сопоставимы с широко известными теперь цепными дробями. В связи с этим следует сказать о некоторых результатах в теории представления аналитических функций цепными дробями и о их приложениях. Затем упомянем о некоторых приложениях теории цепных экспонент и степеней.

В работе А. А. Гончара [27] представлены результаты, полученные в 1969–1997 гг. Они относятся к теории сходимости аппроксимаций Паде и более общих процессов приближения функций, существенно расширяющих рамки классической теории непрерывных (цепных) дробей. Некоторые результаты получены им совместно с учениками (например, с Е. А. Рахмановым; см. [28]). Е. М. Никишиным в работе [29] была предложена схема решения обратной задачи рассеяния, основанная на асимптотических свойствах ортогональных многочленов и разложении аналитических функций в цепные дроби. В работе [30] Е. М. Никишин и А. Н. Аптекарев этот подход расширили до дискретных операторов

Штурма–Лиувилля в $l_2(C^N)$. Интерес к дискретному оператору Штурма–Лиувилля возник в связи с рядом задач математической физики (теория рассеяния, цепочки Тодда и Ленгмюра, аппроксимация дифференциального оператора Штурма–Лиувилля разностным, изучение спектров и т.д.; см. [30]–[32]).

С точки зрения истории вопроса о цепных степенях, экспонентах и их приложениях скажем вначале о переписке Д. Бернулли и Х. Гольдбаха о решении уравнения $x^y = y^x$ (см. [13], [14]).

Д. Бернулли в письме от 29 июня 1728 г. сообщил Х. Гольдбаху, что есть лишь одна пара целых чисел, удовлетворяющая уравнению $x^y = y^x$, именно $\{2; 4\}$, и что он нашел бесконечное множество пар, не являющихся целыми (broken numbers), которые удовлетворяют этому уравнению. Шесть месяцев спустя в ответном письме Х. Гольдбах сообщил следующее. Пусть $x^y = y^x$ и $y > x$, так что $y = xs$, $s > 1$. Тогда $x^{sx} = (sx)^x$, откуда $x^s = sx$, и получаем функцию, заданную параметрически:

$$x = s^{1/(s-1)}, \quad y = s^{s/(s-1)}. \quad (31)$$

Проблема Д. Бернулли имеет отношение к определению области сходимости цепной степени. Левая часть $r = x^{1/x}$ равенства $x^{1/x} = y^{1/y}$ при $1/e \leq x \leq e$ есть обратная функция относительно цепной степени $x = r^{r^{\dots}} \equiv \langle r; 1, 1, \dots \rangle$, $r \in [e^{-e}, e^{1/e}]$. В работе [1; разделы 13–15] (в собственных обозначениях) Л. Эйлер для нахождения интервала сходимости последовательности $r, r^r, r^{r^r}, \dots$ рассматривает два функциональных уравнения:

$$r^\varphi = \varphi, \quad r^\psi = \psi.$$

Одно и то же значение r в интервале $(1, e^{1/e})$ получается при различных значениях φ и ψ , которые связаны уравнением

$$\ln r = \frac{\ln \varphi}{\varphi} = \frac{\ln \psi}{\psi} \quad (\text{или} \quad r = \varphi^{1/\varphi} = \psi^{1/\psi}).$$

Далее, как у Д. Бернулли и Х. Гольдбаха, Эйлер полагает $\psi = p\varphi$ и получает в параметрической форме зависимость между φ и ψ через параметр p :

$$\varphi = p^{1/(p-1)}, \quad \psi = p^{p/(p-1)}.$$

При этом

$$\ln r = \frac{1}{p-1} p^{-1/(p-1)} \ln p.$$

Полагая $\omega = p - 1$, Эйлер получает максимальное предельное значение

$$\ln \bar{r} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{\omega} \ln(1 + \omega) \cdot (1 + \omega)^{-1/\omega} = \frac{1}{e}.$$

Если x и y различны, положительны и удовлетворяют равенству $x^y = y^x$, то пару $\{x; y\}$ называют *бернуллиевой парой*. Дж. Андерсон [15] сформулировал об этом следующее утверждение.

Множество значений функции $f(x) = x^{1/x}$ есть отрезок $[0, e^{1/e}]$; эта функция возрастает на $[0, e]$, убывает на $[e, \infty]$ и имеет абсолютный максимум

в точке $x = e$. Если $x \in [1, e]$, то существует единственное число $y > e$ такое, что $f(x) = f(y)$. Кроме того, множество $\{x; y\}$ является бернуллиевой парой тогда и только тогда, когда $x \neq y$ и $f(x) = f(y)$.

В [1; раздел 17], полагая $p = (n + 1)/n$, Л. Эйлер получает рациональные значения бернуллиевой пары

$$\varphi_n = \frac{(n+1)^n}{n^n}, \quad \psi_n = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}}. \quad (32)$$

Эта пара обладает свойством $\varphi_n < e < \psi_n$. И левая, и правая части дают одну последовательность значений

$$\ln r_n = \frac{n^{n+1}}{n+1} \ln \frac{n+1}{n} \rightarrow \frac{1}{e} \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$

С. Гурвиц в работе [16] показал, что каждая бернуллиева пара с рациональными значениями имеет форму (32).

О решении уравнения $x^y = y^x$ написано много статей. В работе И. Н. Галидакиса [17] имеются ссылки на следующих авторов: P. Franklin (1917), Y. S. Kupitz и H. Martini (2000), E. J. Moulton (1916), D. Sato (1972), H. L. Slobin (1931).

Функция Ламберта (ее обозначают $W(x)$) является обратной к функции $x = ye^y$ и представляется посредством цепной экспоненты в виде

$$y = x \cdot \langle e^x; -1, -1, \dots \rangle \stackrel{\text{def}}{=} W(x). \quad (33)$$

Эта функция получила широкое распространение (см. [22], [24], [25]).

Отметим, что И. Ламберт (J. H. Lambert; 1728–1777, Швейцария) принадлежит к числу крупных математиков, которые в XVIII веке безуспешно решали вопрос о параллельных Евклида, но в ходе своих исследований получили очень интересные результаты (четыреугольник Ламберта, 1766 г.). В теории чисел Ламберт в 1761 г. доказал, что π иррационально.

В статье А. Кноубела [18] (в разделе 2 на с. 238–239) говорится о применении степенных итераций в биохимии. В ферментативной кинематике изучается избирательное ускорение химических реакций, протекающих в живом организме, под влиянием ферментов (ферментативный катализ). За счет образования промежуточных комплексов фермента с субстратом достигается снижение энергетического барьера (энергии активации) и повышение скорости реакции (по сравнению с небиологическим катализом) вплоть до кратности 10^{10} – 10^{12} . Образование первичного фермент-субстратного комплекса дает выигрыш энергии, достаточный для ускорения процесса в целом. Представления о необходимости образования такого комплекса следовали из изучения зависимости скорости ферментативной реакции от концентрации фермента и субстрата, которая описывается в простейших случаях уравнением Мехэлиса–Ментен. В частности, исследуется действие ферментов, так называемых липазов, расщепляющих липиды (жиры и жироподобные вещества) в свиной печени на глицерин и жирные кислоты. Не вдаваясь в математические детали (в работе [19; с. 85–88, 102–105] имеется широкое толкование таких зависимостей и математических соотношений), скажем, что максимальный эффект достигается при соотношениях

$$\bar{x} = s^{1/(1-s)}, \quad \bar{y} = s^{s/(1-s)},$$

где $\bar{x}$, $\bar{y}$ – текущие концентрации субстратов, которые использованы в получении продуктов расщепления, s – константа, определяемая исключительно свойствами субстратов и ферментов. Таким образом, обратные величины $x = 1/\bar{x}$, $y = 1/\bar{y}$ связываются уравнением $x^y = y^x$, которое рассматривалось выше в параметрической форме (31), а сами концентрации удовлетворяют равенству $\bar{x}^{\bar{y}} = \bar{y}^{\bar{x}}$.

В работе [9] рассматривается вопрос о локальном приближении аналитической функции $f(z)$ в окрестности точки $z = 1$ посредством конечной цепной степени вида $a_0 \cdot \langle z; a_1, a_2, \dots, a_s \rangle$ и показан алгоритм нахождения последовательности $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ ее показателей.

Пусть $g(z)$ – функция, аналитическая в окрестности точки $z = 1$, причем $g(1) = 1$, $g'(1) \neq 0$. Этой функции поставим в соответствие последовательность форм $\{H^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$, каждая из которых определяется через производные $g^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots, n$, и числа Стирлинга 2-го рода по формуле (18):

$$H^{(n)}(g) = \sum_{k=0}^n S_n^{(k)} g^{(k)}(1), \quad n = 1, 2, \dots$$

С другой стороны, форма $H^{(n)}$ выражается через коэффициенты $a_1, a_2, \dots, a_n$ по формуле (17).

Если в сумме (17) выделить одно слагаемое, соответствующее комбинации $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 1$, то формулу (17) можно записать в виде

$$H^{(n)}(g) = n! a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n + \sum', \quad (34)$$

где под знаком суммы со штрихом отсутствуют слагаемые, имеющие множитель a_n . Поэтому рекуррентно и однозначно показатели a_n определяются по формуле

$$a_n = \frac{1}{n! a_1 a_2 \dots a_{n-1}} \left[\sum_{k=0}^n S_n^{(k)} g^{(k)}(1) - \sum' \right] \quad (35)$$

при условии, что ни один из показателей $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ не оказался равным нулю. Если же при последовательном определении a_k , $k = 1, 2, \dots, l-1, l$, окажется, что $a_l = 0$, то это может означать, что в окрестности точки $z = 1$ функция $g(z)$ является конечной цепной степенью вида $g(z) = \langle z; a_1, a_2, \dots, a_{l-1} \rangle$. По формуле (35), в частности, имеем

$$\begin{aligned} a_1 &= g'(1), \\ a_2 &= \frac{1}{2a_1} (g''(1) + g'(1) - a_1^2) = \frac{1}{2} \frac{1}{g'(1)} (g'(1) + g''(1) - (g'(1))^2), \\ a_3 &= \frac{1}{3! a_1 a_2} [g'''(1) + 3g''(1) + g'(1) - 6a_1^2 a_2 - 3a_1 a_2^2], \\ a_4 &= \frac{1}{4! a_1 a_2 a_3} [g^{(4)}(1) + 7g'''(1) + 6g''(1) + g'(1) \\ &\quad - a_1^4 - 12a_1^3 a_2 - 24a_1^2 a_2^2 - 24a_1^2 a_2 a_3 - 4a_1 a_2^3 - 24a_1 a_2^2 a_3 - 12a_1 a_2 a_3^2]. \end{aligned}$$

Если для локального приближения в окрестности точки $z = 1$ взять функцию

$$g_{s-1}(z) = a_0 \cdot \langle z; a_1, a_2, \dots, a_{s-1} \rangle,$$

то порядок ее касания к аналитической функции $g(z)$ в точке $z = 1$ равен $s - 1$. Отклонение выражается (асимптотически при $z \rightarrow 1$) через показатели $a_1, a_2, \dots, a_s$, а именно

$$g(z) - g_{s-1}(z) \sim a_0 a_1 a_2 \cdots a_s (z - 1)^s, \quad z \rightarrow 1. \quad (36)$$

Если же задана аналитическая функция $f(w)$ в окрестности точки $w = 0$, причем $f(0) = 1$, $f'(0) \neq 0$, то каждая форма из соответствующей последовательности $\{H^{(n)}(f)\}_{n=1}^{\infty}$ определяется равенством

$$H^{(n)}(f) = f^{(n)}(0), \quad n = 1, 2, \dots$$

Из представления $H^{(n)}(f)$ в виде (34) рекуррентно и однозначно определяются показатели по формуле

$$a_n = \frac{1}{n! a_1 a_2 \cdots a_{n-1}} \left[f^{(n)}(0) - \sum' \right] \quad (35a)$$

при условии, что ни один из показателей $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ не оказался равным нулю.

В частности, для аналитической функции $f(w) = e^{\gamma w e^{\delta w}}$ показатели a_1 и a_2 по формуле (35a) равны соответственно γ и δ , а показатель a_3 равен нулю. Несколько подробнее:

$$a_2 = \frac{1}{2! \gamma} [f''(0) - \gamma^2] = \frac{1}{2\gamma} [\gamma^2 + 2\gamma\delta - \gamma^2] = \delta.$$

Если для локального приближения аналитической функции $f(w)$ в окрестности точки $w = 0$ взять функцию $f_{s-1}(w) = a_0 \cdot \langle e^w; a_1, a_2, \dots, a_{s-1} \rangle$, то порядок ее касания к функции $f(w)$ в точке $w = 0$ равен $s - 1$. Асимптотически при $w \rightarrow 0$ отклонение выражается через показатели $a_1, a_2, \dots, a_s$ в виде

$$f(w) - f_{s-1}(w) \sim a_0 a_1 a_2 \cdots a_s w^s, \quad w \rightarrow 0. \quad (36a)$$

В гравитационной механике трансцендентное уравнение Кеплера

$$E - \varepsilon \sin E = M \quad (37)$$

имеет исключительное значение. Оно связывает эксцентрическую аномалию эллиптического движения E , среднюю аномалию M и эксцентриситет ε . Действительное движение тела по эллиптической орбите и его видимое движение по круговой орбите (определяемое углом E) являются неравномерными, т.е. его угловая скорость непостоянна. Однако мы можем приписать этим вращениям среднюю угловую скорость, выполнив усреднение за период. Тогда можно представить, что некоторая точка вращается равномерно со средней угловой скоростью по окружности и ее “видимое” положение определяется углом, который называется *средней аномалией* M . И. Кеплер впервые показал, что E и M всегда связаны уравнением (37). В работе [21] представлена полная новых открытий и драматизма история поиска точных и приближенных решений уравнения Кеплера и используемые при этом аналитические и численные методы.

В работе [22] представлена новая форма явного решения уравнения Кеплера, основанная на использовании гиперфункции Ламберта. Функция Ламберта $W(x)$ определяется посредством цепной экспоненты вида (33), а гиперфункция Ламберта $HW(\{f_i(x)\}_N; y)$ была введена И. Н. Галидакисом в [17] (см. также [20], [23]) как естественное обобщение функции Ламберта. Она предусматривает конкретный набор действительных опорных функций $\{f_i(x)\}_N$ (далее будем брать $N = 3$) и является обратной к функции

$$y = x \exp(f_1(x) \exp(f_2(x) \exp(f_3(x)))).$$

Эту функцию назовем *исходной*. Обратная к ней на первом шаге функция есть правая часть равенства

$$x = y \exp(-f_1(x) \exp(f_2(x) \exp(f_3(x)))).$$

На втором шаге следует вместо аргумента x под знаком функции f_i написать всю правую часть этого равенства. Тогда аргумент x окажется не ниже второго “этажа”. На каждом шаге аргумент x поднимается на один “этаж” выше. Таким образом, обобщение функции Ламберта ведет к обобщению понятия цепных экспонент.

Для решения уравнения Кеплера (37) представим его в экспоненциальном виде

$$E \exp \left[\ln \left(1 - \frac{\epsilon \sin E}{E} \right) \right] = M, \quad (38)$$

тогда его решение представляется гиперфункцией Ламберта с одной лишь опорной функцией $\ln(1 - \epsilon \sin x/x)$. Чтобы вывести из равенства (38) явное решение этого уравнения в форме гиперфункции Ламберта, для определения E сделаем несколько итераций, используя эту опорную функцию. Имеем

$$\begin{aligned} E_1(x) &= M \exp \left[-\ln \left(1 - \frac{\epsilon \sin x}{x} \right) \right] \stackrel{\text{def}}{=} M \exp[\text{I}], & E_1(M) &= E_1, \\ E_2(x) &= M \exp \left[-\ln \left(1 - \frac{\epsilon \sin \{M \exp[\text{I}]\}}{M \exp[\text{I}]} \right) \right] \stackrel{\text{def}}{=} M \exp[\text{II}], & E_2(M) &= E_2, \\ E_3(x) &= M \exp \left[-\ln \left(1 - \frac{\epsilon \sin \{M \exp[\text{II}]\}}{M \exp[\text{II}]} \right) \right] \stackrel{\text{def}}{=} M \exp[\text{III}], & E_3(M) &= E_3, \text{ и т.д.} \end{aligned}$$

Этот процесс можно продолжать неограниченно, и если существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = E$, то это решение запишем в форме гиперфункции Ламберта:

$$E = HW \left(\left\{ \ln \left(1 - \frac{\epsilon \sin x}{x} \right) \right\}_1; M \right).$$

Уравнение (37) имеет бесконечное число комплексных решений и одно искомое действительное. При вычислении E для конкретных ϵ и M проблема селекции ветвей решается путем выделения единственной вещественной ветви. В работе [20] разработана Марле-процедура, которая позволяет вычислять зависимость $E(M)$ при конкретных ϵ .

В § 1 рассматриваются цепные циклические экспоненты и степени с любым периодом $m > 1$ и произвольным первым показателем, в § 2 – с несколькими

произвольными первыми показателями. В § 3 доказывается одно комбинаторное тождество с использованием теоремы 4. В § 4 рассматриваются некоторые частные случаи систем дифференциальных уравнений 1-го порядка с рациональными правыми частями, решение которых представимо циклическими цепными экспонентами, рассмотренными в § 2.

§ 1. Форма циклической периода m цепной степени и цепной экспоненты с произвольным первым показателем

Пусть в последовательности

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad (39)$$

где

$$a_1 = \lambda\alpha_1, \quad a_2 = \alpha_2, \quad a_3 = \alpha_3, \quad \dots, \quad a_m = \alpha_m, \quad a_{ml+j} = \alpha_j, \quad (40)$$

$$j = 1, 2, \dots, m, \quad l = 1, 2, \dots,$$

величины $\lambda, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ отличны от нуля и

$$\bar{\alpha} = \max_{1 \leq j \leq m} |\alpha_j|. \quad (41)$$

Тогда последовательность (39) назовем *m-периодической* с произвольным первым коэффициентом $\lambda\alpha_1$. Другая последовательность

$$\{b_0, b_1, b_2, \dots, b_{m-1}, b_m, b_1, b_2, \dots, b_m, b_1, \dots\},$$

имеющая период m и произвольный первый коэффициент b_0 , эквивалентна последовательности (40). Это видно из обозначений

$$b_0 = \lambda\alpha_1, \quad b_j = \alpha_{j+1}, \quad j = 1, 2, \dots, m-1, \quad b_m = \alpha_1.$$

Соответствующие цепная степень и цепная экспонента будут циклическими и запишутся в наших обозначениях так:

$$g(z) = \langle z; \lambda\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \alpha_1, \dots \rangle, \quad (42)$$

$$f(w) = \langle e^w; \lambda\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \alpha_1, \dots \rangle. \quad (43)$$

Ряд Тейлора функции (42) с коэффициентами (39) в окрестности точки $z = 1$ представляется в виде (15), а функции (43) в точке $w = 0$ – в виде (16), где $H^{(n)}$ – формы n -й степени от n первых коэффициентов последовательности (39):

$$H^{(n)}(f) = \sum_{k_1 + \dots + k_n = n} \frac{n!}{k_1! \dots k_n!} k_1^{k_2} k_2^{k_3} \dots k_{n-1}^{k_n} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_n^{k_n}. \quad (44)$$

В зависимости от периода m количество слагаемых этой суммы можно существенно сократить, заменяя коэффициенты (39) коэффициентами (40).

Далее нам понадобятся функции

$$\bar{g}_k(z) = \langle z; a_{k+1}, a_{k+2}, \dots \rangle, \quad \bar{\bar{g}}_k(z) = a_k \bar{g}_k(z), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (45)$$

$$\bar{f}_k(w) = \langle e^w; a_{k+1}, a_{k+2}, \dots \rangle, \quad \bar{\bar{f}}_k(w) = a_k \bar{f}_k(w), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (46)$$

порожденные предельными функциями (6), (7), (42) и (43); $\bar{g}_0(z) \equiv g(z)$ и $\bar{f}_0(w) \equiv f(w)$. При этом так же, как и исходные функции $g(z)$ и $f(w)$, все предельные функции

$$\bar{g}_k(z) = \lim_{s \rightarrow \infty} \langle z; a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_{k+s} \rangle, \quad k = 1, 2, \dots,$$

по теореме 1 сходятся в некоторой области G и все предельные функции

$$\bar{f}_k(w) = \lim_{s \rightarrow \infty} \langle e^w; a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_{k+s} \rangle, \quad k = 1, 2, \dots,$$

сходятся в некоторой области F , которая содержит в себе круг (12). Нам понадобится лемма 7 из работы [9]; она будет использована при доказательстве теоремы 4 и будет нести основную нагрузку в доказательстве теоремы 5. Сформулируем ее с учетом введенных здесь обозначений.

ЛЕММА 2. *Справедливо равенство*

$$H^{(n)}(\bar{g}_k) \equiv H^{(n)}(\bar{f}_k) = H^{(0)}(\bar{f}_k) \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} H^{(n-j)}(\bar{f}_{k+1}^j), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (47)$$

ТЕОРЕМА 4. *Форма (17) цепной степени или экспоненты с циклической периода m последовательностью показателей (40) представима в виде*

$$\begin{aligned} H^{(n)}(\langle z; \lambda \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \alpha_1, \dots \rangle) \\ = \lambda \alpha_1 \sum_{k_1 + \dots + k_m = n} \frac{n!}{k_1! \dots k_m!} (k_1 \alpha_2)^{k_2} (k_2 \alpha_3)^{k_3} \dots (k_{m-1} \alpha_m)^{k_m} [(k_m + \lambda) \alpha_1]^{k_1 - 1}. \end{aligned} \quad (48)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Количество слагаемых S в сумме (17) равно 2^{n-1} , а в сумме (48) оно равно $C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + \dots + C_{n-1}^{m-1}$. В частности, если $m \geq n$, то $S = 2^{n-1}$, если $m = 2$, то $S = n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Пусть n – произвольное натуральное число, а индекс μ переменный: $1 \leq \mu \leq n$. Формула (48) справедлива для $n = \mu = 1$ и для $n = \mu = 2$ (в этих случаях $H^{(1)} = \lambda \alpha_1$ и $H^{(2)} = \lambda^2 \alpha_1^2 + 2\lambda \alpha_1 \alpha_2$). Допустим, что она верна и для $\mu = 3, 4, \dots, n-1$. Тогда, выразив $H^{(n)}$ посредством форм $H^{(0)}, H^{(1)}, \dots, H^{(n-1)}$, порожденных той же периодической последовательностью $\{a_k\}_{k=1}^\infty$, и получив тождество, докажем равенство (48) и для $\mu = n$.

В гипотетическом равенстве (48) форму $H^{(n)}(f)$ можно представить в виде многочлена от переменной λ :

$$H^{(n)}(f) = A_1 \lambda + A_2 \lambda^2 + \dots + A_\mu \lambda^\mu + \dots + A_{n-1} \lambda^{n-1} + A_n \lambda^n. \quad (49)$$

Среди всех слагаемых в сумме (48) есть лишь одно слагаемое, имеющее множитель λ^n . Оно соответствует комбинации значений

$$k_1 = n, \quad k_2 = k_3 = \dots = k_m = 0 \quad (50)$$

и равно $\alpha_1^n \lambda^n$. Мы получили отдельное значение A_n в последнем слагаемом многочлена (49):

$$A_n = \alpha_1^n, \quad A_n \lambda^n = H^{(0)}(\bar{f}_1^n). \quad (51)$$

Для определения “коэффициентов” A_μ полинома (49) зафиксируем натуральное число μ произвольно в пределах $1 \leq \mu \leq n-1$ и затем будем выделять в сумме (48) только те слагаемые, которые имеют множитель λ^μ . Вначале сумму, в которой суммирование ведется по всевозможным комбинациям $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$, представим в виде многократных сумм. Кстати сказать, кратность сумм определяется количеством различных индексов у переменных $k_1, k_2, \dots, k_m$, т.е. кратность равна $m-1$, но не m , так как есть связка $k_1 + k_2 + \dots + k_{m-1} + k_m = n$. Таким образом, в полученной многократной сумме под знаком последней суммы, где суммирование будет идти по k_{m-1} , число k_m заменяется разностью $k_m = n - (k_1 + k_2 + \dots + k_{m-1})$:

$$\begin{aligned}
 H^{(n)}(f) &= \lambda \alpha_1 \sum_{k_1=1}^n \frac{n!}{k_1!} \alpha_1^{k_1-1} \sum_{k_2=0}^{n-k_1} \frac{1}{k_2!} (k_1 \alpha_2)^{k_2} \sum_{k_3=0}^{n-k_1-k_2} \frac{1}{k_3!} (k_2 \alpha_3)^{k_3} \\
 &\quad \times \dots \times \sum_{k_{m-2}=0}^{n-k_1-k_2-\dots-k_{m-3}} \frac{1}{k_{m-2}!} (k_{m-3} \alpha_{m-2})^{k_{m-2}} \\
 &\quad \times \sum_{k_{m-1}=0}^{n-k_1-k_2-\dots-k_{m-2}} \frac{1}{k_{m-1}!} (k_{m-2} \alpha_{m-1})^{k_{m-1}} \\
 &\quad \times \frac{1}{(n - (k_1 + k_2 + \dots + k_{m-1}))!} (k_{m-1} \alpha_m)^{n - (k_1 + k_2 + \dots + k_{m-1})} \\
 &\quad \times [(n - (k_1 + k_2 + \dots + k_{m-1})) + \lambda]^{k_1-1} \\
 &= \lambda \alpha_1 \sum_{k_1=1}^n \frac{n!}{k_1!} \frac{\alpha_1^{k_1-1}}{(n-k_1)!} \sum_{k_2=0}^{n-k_1} \frac{(n-k_1)!}{k_2!} \frac{(k_1 \alpha_2)^{k_2}}{(n-k_1-k_2)!} \sum_{k_3=0}^{n-k_1-k_2} \frac{(n-k_1-k_2)!}{k_3!} \frac{(k_2 \alpha_3)^{k_3}}{(n-k_1-k_2-k_3)!} \\
 &\quad \times \dots \times \sum_{k_{m-2}=0}^{n-k_1-k_2-\dots-k_{m-3}} \frac{(n-k_1-k_2-\dots-k_{m-3})!}{k_{m-2}!} \frac{(k_{m-3} \alpha_{m-2})^{k_{m-2}}}{(n-k_1-k_2-\dots-k_{m-2})!} \\
 &\quad \times \sum_{k_{m-1}=0}^{n-k_1-k_2-\dots-k_{m-2}} \frac{(n-k_1-k_2-\dots-k_{m-2})!}{k_{m-1}!} \frac{(k_{m-2} \alpha_{m-1})^{k_{m-1}}}{(n-k_1-k_2-\dots-k_{m-1})!} \\
 &\quad \times (k_{m-2} \alpha_{m-1})^{k_{m-1}} (k_{m-1} \alpha_m)^{n - (k_1 + k_2 + \dots + k_{m-1})} \\
 &\quad \times [(n - (k_1 + k_2 + \dots + k_{m-1})) + \lambda]^{k_1-1} \\
 &= \lambda \alpha_1 \sum_{k_1=1}^n \binom{n}{k_1} \alpha_1^{k_1-1} \sum_{k_2=0}^{n-k_1} \binom{n-k_1}{k_2} (k_1 \alpha_2)^{k_2} \sum_{k_3=0}^{n-k_1-k_2} \binom{n-k_1-k_2}{k_3} (k_2 \alpha_3)^{k_3} \\
 &\quad \times \dots \times \sum_{k_{m-2}=0}^{n-k_1-k_2-\dots-k_{m-3}} \binom{n-k_1-k_2-\dots-k_{m-3}}{k_{m-2}} (k_{m-3} \alpha_{m-2})^{k_{m-2}} \\
 &\quad \times \sum_{k_{m-1}=0}^{n-k_1-k_2-\dots-k_{m-2}} \binom{n-k_1-k_2-\dots-k_{m-2}}{k_{m-1}} (k_{m-2} \alpha_{m-1})^{k_{m-1}} \\
 &\quad \times (k_{m-1} \alpha_m)^{n - (k_1 + k_2 + \dots + k_{m-1})} \\
 &\quad \times \left[k_m^{k_1-1} + \binom{k_1-1}{1} \lambda k_m^{k_1-2} + \dots + \binom{k_1-1}{\mu-1} \lambda^{\mu-1} k_m^{k_1-\mu} + \dots + \lambda^{k_1-1} \right].
 \end{aligned} \tag{52}$$

Для того чтобы слагаемые, которые в сумме составляют один член $A_\mu \lambda^\mu$ многочлена (49), имели множитель λ^μ , из последней суммы, заключенной в квадратных скобках (52), следует взять лишь одно слагаемое $\binom{k_1-1}{\mu-1} \lambda^{\mu-1} k_m^{k_1-\mu}$. Как видно из последнего слагаемого в этих квадратных скобках, натуральное число k_1 не может быть меньше μ . Отсюда следует, что первое суммирование по k_1 в правой части равенств (52) следует начинать не с $k_1 = 1$, а с $k_1 = \mu$. Представим k_1 в виде $k_1 = \mu + k_{m+1}$. А так как мы исключили из рассмотрения слагаемое (51), соответствующее комбинации (50), то суммирование слагаемых с множителями λ^μ , $\mu \neq n$, по номеру k_2 можно начинать не с $k_2 = 0$, а с номера $k_2 = 1$. Имеем

$$\begin{aligned}
 A_\mu \lambda^\mu &= \lambda^\mu \alpha_1^\mu \frac{n!}{\mu! (n-\mu)!} \sum_{k_{m+1}=0}^{n-\mu} \frac{(n-\mu)! \mu! \alpha_1^{k_{m+1}}}{(\mu+k_{m+1})! (n-\mu-k_{m+1})!} \\
 &\times \sum_{k_2=1}^{n-\mu-k_{m+1}} \frac{(n-\mu-k_{m+1})! ((\mu+k_{m+1})\alpha_2)^{k_2}}{k_2! (n-\mu-k_{m+1}-k_2)!} \\
 &\times \sum_{k_3=0}^{n-\mu-k_{m+1}-k_2} \frac{(n-\mu-k_{m+1}-k_2)! (k_2\alpha_3)^{k_3}}{k_3! (n-\mu-k_{m+1}-k_2-k_3)!} \\
 &\times \cdots \times \sum_{k_{m-2}=0}^{n-\mu-k_{m+1}-k_2-\cdots-k_{m-3}} \frac{(n-\mu-k_{m+1}-k_2-\cdots-k_{m-3})!}{k_{m-2}! (n-\mu-k_{m+1}-k_2-\cdots-k_{m-2})!} (k_{m-3}\alpha_{m-2})^{k_{m-2}} \\
 &\times \sum_{k_{m-1}=0}^{n-\mu-k_{m+1}-k_2-\cdots-k_{m-2}} \frac{(n-\mu-k_{m+1}-k_2-\cdots-k_{m-1})! (k_{m-2}\alpha_{m-1})^{k_{m-1}}}{k_{m-1}! (n-\mu-k_{m+1}-k_2-\cdots-k_{m-1})!} (k_{m-1}\alpha_m)^{k_m} \\
 &\times \left[\frac{(\mu-1+k_{m+1})!}{(\mu-1)! k_{m+1}!} k_m^{k_{m+1}} \right]. \tag{53}
 \end{aligned}$$

Здесь мы избавились от переменного номера k_1 и приобрели переменный номер k_{m+1} . Попытаемся свернуть эти многократные суммы одним символом суммирования по комбинациям с переменными номерами $k_2, k_3, \dots, k_m, k_{m+1}$ со связкой $k_2 + k_3 + \cdots + k_m + k_{m+1} = n - \mu$. Есть возможность сделать следующие преобразования некоторых сомножителей в этих суммах:

1) множитель $\alpha_1^{k_{m+1}}$ из под знака первой суммы переставим под знак последней суммы внутрь квадратных скобок в равенстве (53), и там будет множитель $(k_m \alpha_1)^{k_{m+1}}$;

2) множитель $(\mu-1)!$, стоящий в знаменателе дроби в квадратных скобках, переставим в знаменатель дроби, стоящей под знаком первой суммы, и сделаем сокращение $\mu! / (\mu-1)! = \mu$;

3) содержимое квадратных скобок представим в виде трех множителей

$$\left[\frac{1}{\mu+k_{m+1}} \frac{(\mu+k_{m+1})!}{k_{m+1}!} (k_m \alpha_1)^{k_{m+1}} \right]; \tag{54}$$

4) дробь $(\mu+k_{m+1})! / k_{m+1}!$ (средний множитель в квадратных скобках (54)) из-под знака последней суммы переставим под знак первой суммы (так как целое неотрицательное число $k_{m+1} = k_1 - \mu$ как переменный номер зависит лишь от переменного натурального k_1);

5) дробь $1/(\mu + k_{m+1})$ (левый множитель в квадратных скобках (54)) по тем же соображениям, что и в п. 4), переставим под знак второй суммы; под знаком последней суммы вместо квадратных скобок будет лишь множитель $(k_m \alpha_1)^{k_{m+1}}$, зависящий от переменного номера k_{m-1} , по которому производится суммирование слагаемых, записанных под знаком последней суммы;

6) множитель α_2 вынесем из-под знака второй суммы.

Теперь под знаком первой суммы будет

$$\mu \alpha_2 \frac{(n - \mu)!}{(k_{m+1} + \mu)! (n - \mu - k_{m+1})!} \frac{(k_{m+1} + \mu)!}{k_{m+1}!} = \binom{n - \mu}{k_{m+1}} \mu \alpha_2,$$

а под знаком второй суммы будет

$$\binom{n - \mu - k_{m+1}}{k_2} ((\mu + k_{m+1}) \alpha_2)^{k_2 - 1}.$$

Множественная сумма (53) с законно переставленными множителями представляется такой множественной суммой, которая сворачивается одним символом суммирования по всевозможным комбинациям переменных номеров $k_2, k_3, \dots, k_m, k_{m+1}$ со связкой $k_2 + k_3 + \dots + k_m + k_{m+1} = n - \mu$.

Имеем

$$\begin{aligned} A_\mu \lambda^\mu &= \lambda^\mu \alpha_1^\mu \binom{n}{\mu} \sum_{k_{m+1}=0}^{n-\mu} \binom{n-\mu}{k_{m+1}} \mu \alpha_2 \\ &\times \sum_{k_2=1}^{n-\mu-k_{m+1}} \binom{n-\mu-k_{m+1}}{k_2} ((\mu + k_{m+1}) \alpha_2)^{k_2-1} \\ &\times \sum_{k_3=0}^{n-\mu-k_{m+1}-k_2} \binom{n-\mu-k_{m+1}-k_2}{k_3} (k_2 \alpha_3)^{k_3} \times \dots \\ &\times \sum_{k_{m-2}=0}^{n-\mu-k_{m+1}-k_2-\dots-k_{m-3}} \binom{n-\mu-k_{m+1}-k_2-\dots-k_{m-3}}{k_{m-2}} (k_{m-3} \alpha_{m-2})^{k_{m-2}} \\ &\times \sum_{k_{m-1}=0}^{n-\mu-k_{m+1}-k_2-\dots-k_{m-2}} \binom{n-\mu-k_{m+1}-k_2-\dots-k_{m-2}}{k_{m-1}} \\ &\times (k_{m-2} \alpha_{m-1})^{k_{m-1}} (k_{m-1} \alpha_m)^{k_m} (k_m \alpha_1)^{k_{m+1}} \\ &= \lambda^\mu \alpha_1^\mu \binom{n}{\mu} \mu \alpha_2 \sum_{k_2+k_3+\dots+k_m+k_{m+1}=n-\mu} \frac{(n-\mu)!}{k_2! k_3! \dots k_m! k_{m+1}!} \\ &\times (k_2 \alpha_3)^{k_3} (k_3 \alpha_4)^{k_4} \dots (k_{m-1} \alpha_m)^{k_m} (k_m \alpha_1)^{k_{m+1}} [(\mu + k_{m+1}) \alpha_2]^{k_2-1}. \end{aligned} \quad (55)$$

Теперь мы обратимся к лемме 2. Предварительно заметим, что если $a_0 \neq 1$ и $f(w) = a_0 \cdot \langle e^w; a_1, a_2, \dots \rangle$, то форма $H^{(n)}(f^j)$ отличается от формы $H^{(n)}(f)$ лишь тем, что вместо a_0 следует брать a_0^j , а вместо a_1 надо ставить произведение $j a_1$. В остальном эти формы совпадают. В частности,

$$\begin{aligned} H^{(0)}((\bar{f}_k)^j) &= 1, & H^{(0)}((\bar{f}_k)^j) &= a_k^j, \\ H^{(1)}((\bar{f}_k)^j) &= a_k^j j a_{k+1}, & H^{(s)}((\bar{f}_k)^j) &= a_k^j H^{(s)}((\bar{f}_k)^j). \end{aligned}$$

Обратимся к функциям (45) и (46) (здесь $a_0 = 1$). По лемме 2 справедливо равенство

$$H^{(n)}(f) \equiv H^{(n)}(\bar{f}_0) \equiv H^{(n)}(\bar{\bar{f}}_0) = H^{(0)}(\bar{\bar{f}}_0) \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} H^{(n-j)}((\bar{\bar{f}}_1)^j). \quad (56)$$

Здесь

$$H^{(0)}(\bar{f}_0) = H^{(0)}(\bar{\bar{f}}_0) = 1, \quad (\bar{\bar{f}}_1(w))^j = \lambda^j \alpha_1^j e^{j\alpha_2 w \bar{f}_2(w)}. \quad (57)$$

Из равенств (56) и (57) видно, что величину $H^{(n)}(f)$ можно представить в виде многочлена от переменного λ :

$$H^{(n)}(f) = \sum_{j=1}^n B_j \lambda^j. \quad (58)$$

По индукции мы полагаем, что формула (48) справедлива для всех $\mu = 1, 2, \dots, n-1$, поэтому ее можно применить к каждому слагаемому в сумме (56). В частности, слагаемое с индексом $j = \mu$ запишется в виде

$$\begin{aligned} \binom{n}{\mu} H^{(n-\mu)}((\bar{\bar{f}}_1)^\mu) &= \binom{n}{\mu} \lambda^\mu \alpha_1^\mu \mu \alpha_2 \sum_{k_2+k_3+\dots+k_m+k_{m+1}=n-\mu} \frac{(n-\mu)!}{k_2! k_3! \dots k_m! k_{m+1}!} \\ &\times (k_2 \alpha_3)^{k_2} (k_3 \alpha_4)^{k_3} \dots (k_{m-1} \alpha_m)^{k_{m-1}} (k_m \alpha_1)^{k_m} [(\mu + k_{m+1}) \alpha_2]^{k_2-1} = B_\mu \lambda^\mu. \end{aligned} \quad (59)$$

Из этого представления видно, что те слагаемые (извлеченные из формы $H^{(n)}(f)$), которые имеют множитель λ^μ , сосредоточены лишь в одном члене суммы (56), имеющем индекс $j = \mu$. Все другие слагаемые формы $H^{(n)}(f)$, имеющие множитель λ^j , $j \neq \mu$, содержатся в формах $H^{(n-j)}((\bar{\bar{f}}_1)^j)$, $j \neq \mu$.

Сравнивая равенства (55) и (59), приходим к выводу, что $A_\mu = B_\mu$ и что равенство (48) справедливо не только для $\mu = 1, 2, \dots, n-1$, но и для $\mu = n$.

Теорема 4 доказана.

§ 2. Форма циклической периода m цепной экспоненты и цепной степени с произвольными первыми показателями

Пусть последовательность показателей $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ начиная с некоторого номера $\nu + 1$ является периодической, т.е. $a_n = \lambda_n$, $n = 1, 2, \dots, \nu$, $a_{\nu+ml+j} = \alpha_j$, $j = 1, 2, \dots, m$, $l = 0, 1, 2, \dots$. Наглядно представим ее как

$$\{a_n\}_{n=1}^\infty = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\nu, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \alpha_1, \dots\}. \quad (60)$$

Представим натуральное ν по форме $\nu = rm + s$, $r = 0, 1, 2, \dots$, $0 \leq s < m$. Вместо последовательности (60) может быть задана m -периодическая последовательность без единого произвольного коэффициента

$$\{b_n\}_{n=1}^\infty = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m, \beta_1, \dots\}. \quad (61)$$

Если при любом $k \geq \nu$ равны отрезки

$$\{a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_{k+m}\} \quad \text{и} \quad \{b_{k+1}, b_{k+2}, \dots, b_{k+m}\},$$

то, изменив по нашему произволу первые ν из коэффициентов последовательности (61) при помощи умножения на ненулевые произвольные числа $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_\nu$, мы можем получить исходную последовательность (60):

$$\begin{aligned} &\{\gamma_1\beta_1, \gamma_2\beta_2, \dots, \gamma_{m-1}\beta_{m-1}, \gamma_m\beta_m, \gamma_{m+1}\beta_1, \gamma_{m+2}\beta_2, \dots, \gamma_{2m-1}\beta_{m-1}, \\ &\quad \gamma_{2m}\beta_m, \gamma_{2m+1}\beta_1, \gamma_{2m+2}\beta_2, \dots, \gamma_{rm-1}\beta_{m-1}, \gamma_{rm}\beta_m, \gamma_{rm+1}\beta_1, \\ &\quad \gamma_{rm+2}\beta_2, \dots, \gamma_{rm+s-1}\beta_{s-1}, \gamma_\nu\beta_s, \beta_{s+1}, \dots, \beta_{m-1}, \beta_m, \beta_1, \beta_2, \dots\}, \end{aligned} \quad (62)$$

где

$$\begin{aligned} &\beta_1 = \alpha_{m-s+1}, \quad \beta_2 = \alpha_{m-s+2}, \quad \dots, \quad \beta_{s-1} = \alpha_{m-1}, \quad \beta_s = \alpha_m, \\ &\beta_{s+1} = \alpha_1, \quad \beta_{s+2} = \alpha_2, \quad \dots, \quad \beta_{m-1} = \alpha_{m-s-1}, \quad \beta_m = \alpha_{m-s}; \\ &\gamma_1 = \frac{\lambda_1}{\alpha_{m-s+1}}, \quad \gamma_2 = \frac{\lambda_2}{\alpha_{m-s+2}}, \quad \dots, \quad \gamma_{m-1} = \frac{\lambda_{m-1}}{\alpha_{m-s-1}}, \quad \gamma_m = \frac{\lambda_m}{\alpha_{m-s}}, \\ &\gamma_{m+1} = \frac{\lambda_{m+1}}{\alpha_{m-s+1}}, \quad \gamma_{m+2} = \frac{\lambda_{m+2}}{\alpha_{m-s+2}}, \quad \dots, \quad \gamma_{2m-1} = \frac{\lambda_{2m-1}}{\alpha_{m-s-1}}, \quad \gamma_{2m} = \frac{\lambda_{2m}}{\alpha_{m-s}}, \\ &\gamma_{2m+1} = \frac{\lambda_{2m+1}}{\alpha_{m-s+1}}, \quad \gamma_{2m+2} = \frac{\lambda_{2m+2}}{\alpha_{m-s+2}}, \quad \dots, \quad \gamma_{rm-1} = \frac{\lambda_{rm-1}}{\alpha_{m-s-1}}, \quad \gamma_{rm} = \frac{\lambda_{rm}}{\alpha_{m-s}}, \\ &\gamma_{rm+1} = \frac{\lambda_{rm+1}}{\alpha_{m-s+1}}, \quad \gamma_{rm+2} = \frac{\lambda_{rm+2}}{\alpha_{m-s+2}}, \quad \dots, \\ &\gamma_{rm+s-1} = \gamma_{\nu-1} = \frac{\lambda_{rm+s-1}}{\alpha_{m-s-1}}, \quad \gamma_\nu = \frac{\lambda_\nu}{\alpha_m}. \end{aligned}$$

Соответствующая последовательности (60) цепная степень представляется в виде

$$g(z) = z^{a_1 z^{a_2 z^{\dots}}} \equiv \langle z; a_1, a_2, \dots \rangle = \langle z; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\nu, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \alpha_1, \dots \rangle. \quad (63)$$

Назовем эту функцию *цепной степенью* с m -периодической последовательностью коэффициентов, имеющей ν первых произвольных коэффициентов, или, короче, *цепной циклической степенью* с произвольными первыми показателями. То же здесь можно сказать и об экспоненте

$$f(w) = \langle e^w; a_1, a_2, \dots \rangle = \langle e^w; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\nu, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \alpha_1, \dots \rangle. \quad (64)$$

Среди последовательностей $\{a_n\}_{n=k}^\infty$, $k = 1, 2, \dots$ (так же, как и среди соответствующих цепных степеней в последовательности $\{\bar{g}_k(z)\}_{k=0}^\infty$, где $\bar{g}_k(z) = \langle z; a_{k+1}, a_{k+2}, \dots \rangle$, $\bar{g}_0(z) = g(z)$, $\bar{g}_{k-1}(z) = z^{\bar{g}_k(z)} = z^{a_k \bar{g}_k(z)}$), первые их члены до номера ν , как видно из (63) и (64), имеют произвольные коэффициенты $a_1 = \lambda_1$, $a_2 = \lambda_2$, $\dots$, $a_\nu = \lambda_\nu$.

В частности, цепная степень

$$\bar{g}_{\nu-1}(z) = \langle z; \lambda_\nu, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \alpha_1, \dots \rangle = \langle z; \gamma_1\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_m, \beta_1, \dots \rangle, \quad (65)$$

где $\gamma_1 = \lambda_\nu/\alpha_m$, $\beta_1 = \alpha_m$, $\beta_2 = \alpha_1$, $\beta_3 = \alpha_2$, $\dots$, $\beta_m = \alpha_{m-1}$, имеет лишь один первый произвольный показатель λ_ν или $\gamma_1\beta_1$, и правая часть равенства (65) представлена в виде (42), в котором она используется в теореме 4.

Исходная цепная циклическая степень (63) (или цепная циклическая экспонента (64)) с произвольными первыми коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\nu$ по лемме 2 имеет форму

$$\begin{aligned} H^{(n)}(g) &= H^{(n)}(\bar{g}_0) = \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} H^{(n-j)}((\bar{g}_1)^j) = \sum_{k_1=0}^{n-1} \binom{n}{k_1} H^{(k_1)}((\bar{g}_1)^{n-k_1}) \\ &= \sum_{k_1=0}^{n-1} \binom{n}{k_1} \lambda_1^{n-k_1} H^{(k_1)}((\bar{g}_1)^{n-k_1}). \end{aligned}$$

Первые два слагаемых последней суммы являются просто одночленами:

$$\begin{aligned} \binom{n}{0} \lambda_1^n H^{(0)}((\bar{g}_1)^n) &= \lambda_1^n H^{(0)}(\langle z; n\lambda_2, \dots, \lambda_\nu, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \alpha_1, \dots \rangle) = \lambda_1^n, \\ \binom{n}{1} \lambda_1^{n-1} H^{(1)}((\bar{g}_1)^{n-1}) &= n\lambda_1^{n-1} H^{(1)}(\langle z; (n-1)\lambda_2, \dots, \lambda_\nu, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \alpha_1, \dots \rangle) \\ &= n\lambda_1^{n-1}(n-1)\lambda_2. \end{aligned}$$

Применяя вторично лемму 2 к каждому слагаемому (начиная с номера $k_1 = 1$) суммы

$$\begin{aligned} H^{(n)}(\bar{g}_0) &= \lambda_1^n + \sum_{k_1=1}^{n-1} \binom{n}{k_1} \lambda_1^{n-k_1} \\ &\quad \times H^{(k_1)}(\langle z; (n-k_1)\lambda_2, \dots, \lambda_\nu, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \alpha_1, \dots \rangle), \end{aligned}$$

получим двукратную сумму

$$\begin{aligned} H^{(n)}(g) &= \lambda_1^n + \sum_{k_1=1}^{n-1} \binom{n}{k_1} \lambda_1^{n-k_1} \sum_{k_2=0}^{k_1-1} \binom{k_1}{k_2} H^{(k_2)}((\bar{g}_2)^{k_1-k_2}) \\ &= \lambda_1^n + \sum_{k_1=1}^{n-1} \binom{n}{k_1} \lambda_1^{n-k_1} \sum_{k_2=0}^{k_1-1} \binom{k_1}{k_2} [(n-k_1)\lambda_2]^{k_1-k_2} H^{(k_2)}((\bar{g}_2)^{k_1-k_2}) \\ &= \lambda_1^n + \sum_{k_1=1}^{n-1} \binom{n}{k_1} \lambda_1^{n-k_1} \left\{ [(n-k_1)\lambda_2]^{k_1} + \sum_{k_2=1}^{k_1-1} \binom{k_1}{k_2} [(n-k_1)\lambda_2]^{k_1-k_2} \right. \\ &\quad \left. \times H^{(k_2)}(\langle z; (k_1-k_2)\lambda_3, \lambda_4, \dots, \lambda_\nu, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \alpha_1, \dots \rangle) \right\}. \quad (69) \end{aligned}$$

Продолжая замену формы под знаком внутренней суммы в правой части равенства (69) с использованием леммы 2 ν раз, получим равенство

$$\begin{aligned} H^{(n)}(g) &= \lambda_1^n + \sum_{k_1=1}^{n-1} \binom{n}{k_1} \lambda_1^{n-k_1} \left\{ [(n-k_1)\lambda_2]^{k_1} + \sum_{k_2=1}^{k_1-1} \binom{k_1}{k_2} [(n-k_1)\lambda_2]^{k_1-k_2} \right. \\ &\quad \times \left\{ [(k_1-k_2)\lambda_3]^{k_2} + \sum_{k_3=1}^{k_2-1} \binom{k_2}{k_3} [(k_1-k_2)\lambda_3]^{k_2-k_3} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \cdots \times \left\{ [(k_{\nu-2} - k_{\nu-1})\lambda_\nu]^{k_{\nu-1}} + \sum_{k_\nu=1}^{k_{\nu-1}-1} \binom{k_{\nu-1}}{k_\nu} [(k_{\nu-2} - k_{\nu-1})\lambda_\nu]^{k_{\nu-1}-k_\nu} \right. \\ & \left. \times H^{(k_\nu)}(\langle z; (k_{\nu-1} - k_\nu)\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \alpha_1, \dots \rangle) \right\} \cdots \left. \right\}. \end{aligned} \quad (70)$$

Применим теорему 4 к форме $H^{(k_\nu)}$, стоящей последним множителем во внутренней сумме последнего равенства, полагая там $n = k_\nu$, $\lambda = k_{\nu-1} - k_\nu$. Имеем

$$\begin{aligned} & H^{(k_\nu)}(\langle z; (k_{\nu-1} - k_\nu)\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \alpha_1, \dots \rangle) \\ & = (k_{\nu-1} - k_\nu)\alpha_1 \sum_{s_1 + \dots + s_m = k_\nu} \frac{k_\nu!}{s_1! \cdots s_m!} [(s_m + (k_{\nu-1} - k_\nu))\alpha_1]^{s_1-1} \\ & \quad \times (s_1\alpha_2)^{s_2} (s_2\alpha_3)^{s_3} \cdots (s_{m-1}\alpha_m)^{s_m}. \end{aligned} \quad (71)$$

Подставляя правую часть этого равенства в (70), получим представление формы $H^{(n)}(g)$ для циклической цепной степени (63), если $n > \nu$. При $n \leq \nu$ форма $H^{(n)}(g)$ представляется в виде (17) или (44), при этом коэффициенты a_k заменяются там на λ_k , $k = 1, 2, \dots, m$.

Теорема 5 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Цепная степень $g(z) = \langle z; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\nu, \alpha, \alpha, \dots \rangle$ с ν первыми произвольными показателями при $n > \nu$ имеет форму порядка n вида

$$\begin{aligned} H^{(n)}(g) & = \lambda_1^n + \sum_{k_1=1}^{n-1} \binom{n}{k_1} \lambda_1^{n-k_1} \left\{ [(n - k_1)\lambda_2]^{k_1} + \sum_{k_2=1}^{k_1-1} \binom{k_1}{k_2} [(n - k_1)\lambda_2]^{k_1-k_2} \right. \\ & \quad \times \left\{ [(k_1 - k_2)\lambda_3]^{k_2} + \sum_{k_3=1}^{k_2-1} \binom{k_2}{k_3} [(k_1 - k_2)\lambda_3]^{k_2-k_3} \right. \\ & \quad \times \cdots \times \left\{ [(k_{\nu-2} - k_{\nu-1})\lambda_\nu]^{k_{\nu-1}} + \sum_{k_\nu=1}^{k_{\nu-1}-1} \binom{k_{\nu-1}}{k_\nu} [(k_{\nu-2} - k_{\nu-1})\lambda_\nu]^{k_{\nu-1}-k_\nu} \right. \\ & \quad \left. \left. \times (k_{\nu-1} - k_\nu)k_{\nu-1}^{k_\nu-1} \alpha^{k_\nu} \right\} \cdots \right\} \left. \right\}. \end{aligned} \quad (72)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем использовать лемму 9 из работы [9]. Приведем ее формулировку.

ЛЕММА 3. Пусть $g_r(z) = a_r \cdot \langle z; a_{r+1}, a_{r+2}, \dots \rangle$, и пусть $a_r \neq a_{r+1} \neq a_{r+2} = a_{r+3} = a_{r+4} = a_{r+5} = \dots$. Тогда форма $H^{(n)}(g_r)$ сворачивается в бином Ньютона:

$$H^{(n)}(g_r) = a_r \cdot a_{r+1} \cdot (na_{r+2} + a_{r+1})^{n-1}. \quad (73)$$

Обратимся к равенству (70) и заметим, что форму $H^{(k_\nu)}(\langle z; (k_{\nu-1} - k_\nu)\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \alpha_1, \dots \rangle)$, стоящую там последним множителем, с использованием условий следствия 1, т.е. $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = \alpha$, и равенства (73), где $a_r = 1$,

$a_{r+1} = (k_{\nu-1} - k_{\nu})\alpha$, $a_{r+2} = a_{r+3} = \dots = \alpha$, можно записать в виде

$$\begin{aligned} H^{(k_{\nu})}(\langle z; (k_{\nu-1} - k_{\nu})\alpha, \alpha, \alpha, \dots \rangle) &= (k_{\nu-1} - k_{\nu})\alpha[k_{\nu}\alpha + (k_{\nu-1} - k_{\nu})\alpha]^{k_{\nu}-1} \\ &= (k_{\nu-1} - k_{\nu})k_{\nu}^{k_{\nu}-1}\alpha^{k_{\nu}}. \end{aligned} \quad (74)$$

Подставляя правую часть этого равенства вместо

$$H^{(k_{\nu})}(\langle z; (k_{\nu-1} - k_{\nu})\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \alpha_1, \dots \rangle)$$

в формуле (70), получим равенство (72).

Следствие 1 доказано.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Цепная циклическая степень периода $m = 2$ с ν первыми произвольными показателями*

$$g(z) = \langle z; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\nu}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_1, \dots \rangle \quad (75)$$

при $n > \nu$ имеет форму вида

$$\begin{aligned} H^{(n)}(g) &= \lambda_1^n + \sum_{k_1=1}^{n-1} \binom{n}{k_1} \lambda_1^{n-k_1} \left\{ [(n - k_1)\lambda_2]^{k_1} + \sum_{k_2=1}^{k_1-1} \binom{k_1}{k_2} [(n - k_1)\lambda_2]^{k_1-k_2} \right. \\ &\quad \times \left\{ [(k_1 - k_2)\lambda_3]^{k_2} + \sum_{k_3=1}^{k_2-1} \binom{k_2}{k_3} [(k_1 - k_2)\lambda_3]^{k_2-k_3} \right. \\ &\quad \times \dots \times \left\{ [(k_{\nu-2} - k_{\nu-1})\lambda_{\nu}]^{k_{\nu-1}} + \sum_{k_{\nu}=1}^{k_{\nu-1}-1} \binom{k_{\nu-1}}{k_{\nu}} [(k_{\nu-2} - k_{\nu-1})\lambda_{\nu}]^{k_{\nu-1}-k_{\nu}} \right. \\ &\quad \times (k_{\nu-1} - k_{\nu})\alpha_1 \sum_{j=0}^{k_{\nu}-1} \binom{k_{\nu}}{j} [(j + (k_{\nu-1} - k_{\nu}))\alpha_1]^{k_{\nu}-j-1} [(k_{\nu} - j)\alpha_2]^j \left. \right\} \dots \left. \right\}. \end{aligned} \quad (76)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 4 форма порядка k_{ν} циклической цепной степени периода $m = 2$ и с первым показателем $(k_{\nu-1} - k_{\nu})\alpha_1$ представляется в виде

$$\begin{aligned} H^{(k_{\nu})}(\langle z; (k_{\nu-1} - k_{\nu})\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \alpha_1, \dots \rangle) &= (k_{\nu-1} - k_{\nu})\alpha_1 \sum_{s_1+s_2=k_{\nu}} \frac{k_{\nu}!}{s_1! s_2!} [(s_2 + (k_{\nu-1} - k_{\nu}))\alpha_1]^{s_1-1} (s_1\alpha_2)^{s_2} \\ &= (k_{\nu-1} - k_{\nu})\alpha_1 \sum_{s=1}^{k_{\nu}} \binom{k_{\nu}}{s} [((k_{\nu} - s) + (k_{\nu-1} - k_{\nu}))\alpha_1]^{s-1} (s\alpha_2)^{k_{\nu}-s} \\ &= (k_{\nu-1} - k_{\nu})\alpha_1 \sum_{j=0}^{k_{\nu}-1} \binom{k_{\nu}}{j} [(j + (k_{\nu-1} - k_{\nu}))\alpha_1]^{k_{\nu}-j-1} ((k_{\nu} - j)\alpha_2)^j. \end{aligned} \quad (77)$$

Подставляя правую часть этого равенства вместо $H^{(k_{\nu})}$ в формуле (70), получим равенство (76).

Следствие 2 доказано.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим функцию

$$g_0(z) = \langle z; \lambda_1, \lambda_2, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_1, \dots \rangle. \quad (78)$$

Здесь $\nu = 2, m = 6$. По следствию 2 форма $H^{(6)}(g_0)$ порядка $n = 2$ есть многочлен

$$\begin{aligned} H^{(6)}(g_0) = H^{(6)}(\lambda_1, \lambda_2, \alpha_1, \alpha_2) = & \lambda_1^6 + 30\lambda_1^5\lambda_2 + 240\lambda_1^4\lambda_2^2 + 120\lambda_1^4\lambda_2\alpha_1 + 540\lambda_1^3\lambda_2^3 \\ & + 1080\lambda_1^3\lambda_2^2\alpha_1 + 360\lambda_1^3\lambda_2\alpha_1\alpha_2 + 180\lambda_1^3\lambda_2\alpha_1^2 + 240\lambda_1^2\lambda_2^4 \\ & + 1440\lambda_1^2\lambda_2^3\alpha_1 + 1440\lambda_1^2\lambda_2^2\alpha_1\alpha_2 + 1440\lambda_1^2\lambda_2^2\alpha_1^2 + 360\lambda_1^2\lambda_2\alpha_1\alpha_2^2 \\ & + 1440\lambda_1^2\lambda_2\alpha_1^2\alpha_2 + 120\lambda_1^2\lambda_2\alpha_1^3 + 6\lambda_1\lambda_2^5 + 120\lambda_1\lambda_2^4\alpha_1 \\ & + 540\lambda_1\lambda_2^3\alpha_1^2 + 360\lambda_1\lambda_2^3\alpha_1\alpha_2 + 360\lambda_1\lambda_2^2\alpha_1\alpha_2^2 + 2160\lambda_1\lambda_2^2\alpha_1^2\alpha_2 \\ & + 480\lambda_1\lambda_2^2\alpha_1^3 + 120\lambda_1\lambda_2\alpha_1\alpha_2^3 + 2160\lambda_1\lambda_2\alpha_1^2\alpha_2^2 + 1440\lambda_1\lambda_2\alpha_1^3\alpha_2 + 30\lambda_1\lambda_2\alpha_1^4. \end{aligned}$$

Здесь четыре различных показателя и количество слагаемых 26, если все шесть показателей различны, количество слагаемых равно $2^{6-1} = 32$.

Если же в этом примере положить $m = 1$ и $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, то по следствию 1 для функции

$$g_0(z) = \langle z; \lambda_1, \lambda_2, \alpha, \alpha, \dots \rangle \quad (79)$$

имеем форму $H^{(6)}(g_0)$, которая есть многочлен

$$\begin{aligned} H^{(6)}(g_0) = H^{(6)}(\lambda_1, \lambda_2, \alpha) = & \lambda_1^6 + 30\lambda_1^5\lambda_2 + 240\lambda_1^4\lambda_2^2 + 120\lambda_1^4\lambda_2\alpha + 540\lambda_1^3\lambda_2^3 \\ & + 1080\lambda_1^3\lambda_2^2\alpha + 540\lambda_1^3\lambda_2\alpha^2 + 240\lambda_1^2\lambda_2^4 + 1440\lambda_1^2\lambda_2^3\alpha + 2880\lambda_1^2\lambda_2^2\alpha^2 \\ & + 1920\lambda_1^2\lambda_2\alpha^3 + 6\lambda_1\lambda_2^5 + 120\lambda_1\lambda_2^4\alpha + 900\lambda_1\lambda_2^3\alpha^2 + 3000\lambda_1\lambda_2^2\alpha^3 + 3750\lambda_1\lambda_2\alpha^4. \end{aligned}$$

Вместо 32 слагаемых, когда все шесть показателей различны, здесь количество слагаемых равно 16.

В качестве весьма достоверной проверки можно использовать то, что сумма всех коэффициентов у многочленов $H^{(6)}(\lambda_1, \lambda_2, \alpha_1, \alpha_2)$ и $H^{(6)}(\lambda_1, \lambda_2, \alpha)$ должна быть равна числу $(6 + 1)^{6-1} = 7^5 = 16807$. Это соответствует случаю, когда у цепных степеней (78) и (79) показатели $\lambda_1 = \lambda_2 = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ и $H^{(6)}(\alpha) = 7^5\alpha^6$.

§ 3. Комбинаторное тождество

Если рассматривать форму $H^{(n)}(g)$ любого порядка n цепной степени $g(z) = \langle z; a_1, a_2, \dots \rangle$ в виде (17) или (44), где на показатели $a_1, a_2, \dots$ не наложено никаких ограничений, а сама степень – циклическая порядка m , то при достаточно больших n обязательно появятся подобные слагаемые, и форму можно будет представить в виде (48) или (67). Если сравнивать коэффициенты формы цепной циклической степени (например, $g(z) = \langle z; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \alpha_1, \dots \rangle$ при всевозможных комбинациях $\alpha_1^{k_1}\alpha_2^{k_2}\dots\alpha_m^{k_m}$, получаемых из указанных представлений), то можно получать комбинаторные тождества. Сформулируем и докажем одно тождество.

ТЕОРЕМА 6. Пусть компоненты вектора $(\varkappa, \lambda, \mu, \dots, \rho, \sigma, \tau)$ – любые натуральные числа и $p \geq \min\{\varkappa, \lambda, \mu, \dots, \rho, \sigma, \tau\} + 1$ натуральное. Тогда справедливо тождество

$$\sum \frac{k_1^{l_1} k_2^{l_2} \dots k_p^{l_p} l_1^{m_1} l_2^{m_2} \dots l_p^{m_p} \dots s_1^{t_1} s_2^{t_2} \dots s_p^{t_p} t_1^{k_2} t_2^{k_3} \dots t_{p-1}^{k_p} \cdot 1}{k_1! k_2! \dots k_p! l_1! l_2! \dots l_p! \dots s_1! s_2! \dots s_p! t_1! t_2! \dots t_{p-1}! t_p!} = \frac{\varkappa^\lambda \lambda^\mu \dots \rho^\sigma \sigma^\tau (\tau + 1)^{\varkappa-1}}{\varkappa! \lambda! \dots \rho! \sigma! \tau!}, \quad (80)$$

где суммирование производится по всем наборам целых неотрицательных чисел $k, l, m, \dots, r, s, t$ таких, что

$$k_1 + k_2 + \dots + k_p = \varkappa, \quad l_1 + l_2 + \dots + l_p = \lambda, \quad m_1 + m_2 + \dots + m_p = \mu, \quad \dots, \\ r_1 + r_2 + \dots + r_p = \rho, \quad s_1 + s_2 + \dots + s_p = \sigma, \quad t_1 + t_2 + \dots + t_p = \tau.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Дробь под знаком суммы в левой части тождества можно записать в виде

$$\frac{k_1^{l_1} l_1^{m_1} m_1^{n_1} \dots r_1^{s_1} s_1^{t_1} t_1^{k_2} k_2^{l_2} l_2^{m_2} \dots s_2^{t_2} t_2^{k_3} k_3^{l_3} \dots l_{p-1}^{m_{p-1}} \dots s_{p-1}^{t_{p-1}} t_{p-1}^{k_p} k_p^{l_p} \dots r_p^{s_p} s_p^{t_p} t_p^0}{k_1! l_1! m_1! \dots r_1! s_1! t_1! k_2! l_2! m_2! \dots s_2! t_2! k_3! \dots l_{p-1}! \dots s_{p-1}! t_{p-1}! k_p! \dots r_p! s_p! t_p!}. \quad (81)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если $\theta := \min\{\varkappa, \lambda, \dots, \tau\} = \varkappa$, то в качестве p можно взять $p = \theta = \varkappa$. Напомним: $0! = 1$, $0^0 = 1$. Отличные от нуля слагаемые имеют множители $k_j \neq 0$ с условием $k_1 + k_2 + \dots + k_d = \varkappa$, в частности, при $d = \varkappa$ имеем $k_1 = k_2 = \dots = k_\varkappa = 1$. В циклах же $\varkappa + 1, \varkappa + 2, \dots$ у этих слагаемых должны быть целые неотрицательные $k_{\varkappa+1} = l_{\varkappa+1} = \dots = t_{\varkappa+1} = k_{\varkappa+2} = \dots = 0$, какое бы $p > k_\varkappa$ мы ни взяли, так как при $k_{\varkappa+1} = 0$ число $k_{\varkappa+1}^{l_{\varkappa+1}}$ отлично от нуля лишь при $l_{\varkappa+1} = 0$, число $l_{\varkappa+1}^{m_{\varkappa+1}}$ отлично от нуля лишь при $m_{\varkappa+1} = 0$ и т.д.

Во всех других случаях, т.е. если $\theta \neq \varkappa$, в качестве p можно (по тем же соображениям) взять $p = \theta + 1$ (см. ниже пример 2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6. Для сокращения записи и не в ущерб общности возьмем период $m = 4$, вектор будет иметь четыре компоненты $\varkappa, \lambda, \mu, \tau$, а тождество, которое надо доказать, запишется в виде

$$\sum \frac{k_1^{l_1} l_1^{m_1} m_1^{t_1} t_1^{k_2} k_2^{l_2} \dots l_{p-1}^{m_{p-1}} m_{p-1}^{t_{p-1}} t_{p-1}^{k_p} k_p^{l_p} l_p^{m_p} m_p^{t_p} \cdot 1}{k_1! l_1! m_1! t_1! k_2! \dots l_{p-1}! m_{p-1}! t_{p-1}! k_p! l_p! m_p! t_p!} = \frac{\varkappa^\lambda \lambda^\mu \mu^\tau (\tau + 1)^{\varkappa-1}}{\varkappa! \lambda! \mu! \tau!}.$$

Пусть в формуле (48) произвольный множитель $\lambda = 1$, период $m = 4$; тогда

$$g_0(z) = \langle z; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_1, \dots \rangle, \\ H^{(n)}(g_0) = \alpha_1 \sum_{\varkappa + \lambda + \mu + \tau = n} \frac{n!}{\varkappa! \lambda! \mu! \tau!} (\varkappa \alpha_2)^\lambda (\lambda \alpha_3)^\mu (\mu \alpha_4)^\tau [(\tau + 1) \alpha_1]^{\varkappa-1} \\ = n! \sum_{\varkappa + \lambda + \mu + \tau = n} B_{\varkappa, \lambda, \mu, \tau} \alpha_1^\varkappa \alpha_2^\lambda \alpha_3^\mu \alpha_4^\tau, \quad (82)$$

где

$$B_{\varkappa, \lambda, \mu, \tau} = \frac{\varkappa^\lambda \lambda^\mu \mu^\tau (\tau + 1)^{\varkappa-1}}{\varkappa! \lambda! \mu! \tau!}.$$

С другой стороны, рассматривая различные комбинации

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 + \dots + k_p &= \varkappa, & l_1 + l_2 + \dots + l_p &= \lambda, \\ m_1 + m_2 + \dots + m_p &= \mu, & t_1 + t_2 + \dots + t_p &= \tau, \end{aligned}$$

где все k, l, m, t – неотрицательные целые числа, по общей формуле (17) (здесь $\sigma(k, l, m, t) = k_1 + k_2 + \dots + k_p + l_1 + l_2 + \dots + l_p + m_1 + m_2 + \dots + m_p + t_1 + t_2 + \dots + t_p$) имеем

$$\begin{aligned} H^{(n)}(g_0) &= n! \sum_{\sigma(k, l, m, t)=n} \frac{k_1^{l_1} l_1^{m_1} m_1^{t_1} t_1^{k_2} k_2^{l_2} \dots l_{p-1}^{m_{p-1}} m_{p-1}^{t_{p-1}} t_{p-1}^{k_p} k_p^{l_p} l_p^{m_p} m_p^{t_p} \cdot 1}{k_1! l_1! m_1! t_1! k_2! \dots l_{p-1}! m_{p-1}! t_{p-1}! k_p! l_p! m_p! t_p!} \\ &\times \alpha_1^{k_1} \alpha_2^{l_1} \alpha_3^{m_1} \alpha_4^{t_1} \alpha_1^{k_2} \alpha_2^{l_2} \alpha_3^{m_2} \alpha_4^{t_2} \dots \alpha_3^{m_{p-1}} \alpha_4^{t_{p-1}} \alpha_1^{k_p} \alpha_2^{l_p} \alpha_3^{m_p} \alpha_4^{t_p} \\ &= n! \sum_{\sigma(k, l, m, t)=n} \frac{k_1^{l_1} l_1^{m_1} m_1^{t_1} t_1^{k_2} k_2^{l_2} \dots l_{p-1}^{m_{p-1}} m_{p-1}^{t_{p-1}} t_{p-1}^{k_p} k_p^{l_p} l_p^{m_p} m_p^{t_p} \cdot 1}{k_1! l_1! m_1! t_1! k_2! \dots l_{p-1}! m_{p-1}! t_{p-1}! k_p! l_p! m_p! t_p!} \\ &\times \alpha_1^{k_1 + \dots + k_p} \alpha_2^{l_1 + \dots + l_p} \alpha_3^{m_1 + \dots + m_p} \alpha_4^{t_1 + \dots + t_p} \\ &= n! \sum_{\varkappa + \lambda + \mu + \tau = n} \alpha_1^{\varkappa} \alpha_2^{\lambda} \alpha_3^{\mu} \alpha_4^{\tau} \\ &\times \sum_{\left\{ \begin{array}{l} k_1 + \dots + k_p = \varkappa \\ l_1 + \dots + l_p = \lambda \\ m_1 + \dots + m_p = \mu \\ t_1 + \dots + t_p = \tau \end{array} \right\}} \frac{k_1^{l_1} l_1^{m_1} m_1^{t_1} t_1^{k_2} k_2^{l_2} \dots l_{p-1}^{m_{p-1}} m_{p-1}^{t_{p-1}} t_{p-1}^{k_p} k_p^{l_p} l_p^{m_p} m_p^{t_p} \cdot 1}{k_1! l_1! m_1! t_1! k_2! \dots l_{p-1}! m_{p-1}! t_{p-1}! k_p! l_p! m_p! t_p!} \\ &= n! \sum_{\varkappa + \lambda + \mu + \tau = n} A_{\varkappa, \lambda, \mu, \tau} \alpha_1^{\varkappa} \alpha_2^{\lambda} \alpha_3^{\mu} \alpha_4^{\tau}. \end{aligned} \tag{83}$$

Зафиксируем в сумме (82) и во внешней сумме (83) натуральные числа $\varkappa, \lambda, \mu, \tau$, тогда сравнение коэффициентов $B_{\varkappa, \lambda, \mu, \tau}$ и $A_{\varkappa, \lambda, \mu, \tau}$ завершает доказательство.

Теорема 6 доказана.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим два вектора $(2, 3, 4, 5)$ и $(5, 2, 3, 4)$. Для первого вектора, используя замечание 2, возьмем $p = 2$; количество различных комбинаций, дающих ненулевые слагаемые в левой части тождества, равно 34. От первой комбинации

$$\left\{ \begin{array}{cccccccc} k_1 & l_1 & m_1 & t_1 & k_2 & l_2 & m_2 & t_2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\}$$

имеем слагаемое

$$\frac{2^3 \cdot 3^4 \cdot 4^5 \cdot 5^0}{2! \cdot 3! \cdot 4! \cdot 5!} = \frac{1}{5} \cdot 3 \cdot 2^5,$$

от последней (34-й) комбинации

$$\left\{ \begin{array}{cccccccc} k_1 & l_1 & m_1 & t_1 & k_2 & l_2 & m_2 & t_2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \right\}$$

имеем слагаемое

$$\frac{1^2 \cdot 2^3 \cdot 3^4 \cdot 4^0}{1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 4!} = \left(\frac{3}{2}\right)^2.$$

Сумма всех 34 слагаемых дает число $2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^{-1}$, и правая часть тождества дает то же рациональное число

$$\frac{2^3 \cdot 3^4 \cdot 4^5 \cdot (5+1)^{2-1}}{2! \cdot 3! \cdot 4! \cdot 5!} = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^{-1}.$$

Для второго вектора возьмем $p = 3$; количество различных комбинаций, дающих ненулевые слагаемые в левой части тождества, равно 77. От первой комбинации

$$\left\{ \begin{array}{cccccccccccc} k_1 & l_1 & m_1 & t_1 & k_2 & l_2 & m_2 & t_2 & k_3 & l_3 & m_3 & t_3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\}$$

имеем слагаемое

$$\frac{5^2 \cdot 2^3 \cdot 3^4 \cdot 4^0}{5! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 4!} = 2^{-5} \cdot 3 \cdot 5.$$

От последней (77-й) комбинации

$$\left\{ \begin{array}{cccccccccccc} k_1 & l_1 & m_1 & t_1 & k_2 & l_2 & m_2 & t_2 & k_3 & l_3 & m_3 & t_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\}$$

имеем слагаемое

$$\frac{2^3 \cdot 3^3 \cdot 3^0}{2! \cdot 3! \cdot 3!} = 3.$$

Неотрицательное целое k на месте k_3 может принимать ненулевые значения, тогда как на месте k_4 оно должно быть равным нулю. Сумма всех 77 слагаемых в левой части тождества дает число $3(5/2)^5$, и правая часть тождества дает то же число

$$\frac{5^2 \cdot 2^3 \cdot 3^4 \cdot (4+1)^{5-1}}{2! \cdot 3! \cdot 4! \cdot 5!} = 3 \left(\frac{5}{2} \right)^5.$$

§ 4. Циклические цепные экспоненты как решение системы дифференциальных уравнений первого порядка

Рассмотрим систему из $l+m$ дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \varphi_i(t, x_1, x_2, \dots, x_l, y_1, y_2, \dots, y_m), & i &= 1, 2, \dots, l, \\ \dot{y}_k &= \psi_k(t, y_1, y_2, \dots, y_m), & k &= 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (84)$$

Здесь t – независимая переменная (время); $x_1, x_2, \dots, x_l, y_1, y_2, \dots, y_m$ – искомые функции, зависящие от t , причем систему значений этих переменных можно интерпретировать как координаты точки $(l+m)$ -мерного фазового пространства R^{l+m} , а левые части уравнений системы (84) – как координаты вектора скорости движущейся точки $(x_1, x_2, \dots, x_l, y_1, y_2, \dots, y_m)$ в момент времени t . При этом будет дано, что при $t = 0$ координаты точки имеют начальные значения. Поскольку движение материальной точки нередко происходит в поле сил тяготения, то зависимость компонент вектора скорости от положения точки может выражаться рациональными функциями. Правые части уравнений

ПРИМЕР 3. Рассмотрим систему из шести уравнений ($l = 3, m = 3$)

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= \alpha x_1 x_2 (1 - t^3 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 y_1 y_2 y_3)^{-1} \cdot [1 + t \beta x_3 + t^2 \beta \gamma x_3 y_1 \\
 &\quad + t^3 \cdot (\beta \gamma x_3 - \lambda_2 \lambda_3 y_3) \lambda_1 y_1 y_2 + t^4 \beta \cdot (\gamma - \lambda_3) \lambda_1 \lambda_2 x_3 y_1 y_2 y_3], \\
 \dot{x}_2 &= \beta x_2 x_3 \cdot (1 - t^3 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 y_1 y_2 y_3)^{-1} \cdot [1 + t \gamma y_1 + t^2 \gamma \lambda_1 y_1 y_2 \\
 &\quad + t^3 \cdot (\gamma - \lambda_3) \lambda_1 \lambda_2 y_1 y_2 y_3], \\
 \dot{x}_3 &= \gamma x_3 y_1 \cdot (1 - t^3 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 y_1 y_2 y_3)^{-1} \cdot [1 + t \lambda_1 y_2 + t^2 \lambda_1 \lambda_2 y_2 y_3], \\
 \dot{y}_1 &= \lambda_1 y_1 y_2 \cdot (1 - t^3 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 y_1 y_2 y_3)^{-1} \cdot [1 + t \lambda_2 y_3 + t^2 \lambda_2 \lambda_3 y_3 y_1], \\
 \dot{y}_2 &= \lambda_2 y_2 y_3 \cdot (1 - t^3 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 y_1 y_2 y_3)^{-1} \cdot [1 + t \lambda_3 y_1 + t^2 \lambda_3 \lambda_1 y_1 y_2], \\
 \dot{y}_3 &= \lambda_3 y_3 y_1 \cdot (1 - t^3 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 y_1 y_2 y_3)^{-1} \cdot [1 + t \lambda_1 y_2 + t^2 \lambda_1 \lambda_2 y_2 y_3]
 \end{aligned} \tag{88}$$

с начальными условиями

$$x_k(0) = 1, \quad k = 1, 2, 3, \quad y_i(0) = 1, \quad i = 1, 2, 3.$$

Эта система имеет решение, представимое системой циклических экспонент

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= \langle e^t; \alpha, \beta, \gamma, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_1, \dots \rangle, \\
 x_2(t) &= \langle e^t; \beta, \gamma, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_1, \dots \rangle, \\
 x_3(t) &= \langle e^t; \gamma, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_1, \dots \rangle, \\
 y_1(t) &= \langle e^t; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_1, \dots \rangle, \\
 y_2(t) &= \langle e^t; \lambda_2, \lambda_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_1, \lambda_2, \dots \rangle, \\
 y_3(t) &= \langle e^t; \lambda_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_1, \lambda_2, \dots \rangle.
 \end{aligned}$$

Если γ не будет произвольным, а будет фиксировано $\gamma = \lambda_3$, то третье и шестое уравнения в системе (88) будут тождественны и имеется равенство решений $x_3 = y_3$. Если к тому же $\beta = \lambda_2$, то в этой системе будет лишь четыре уравнения. Если же произвольных первых коэффициентов вовсе нет (и $\alpha = \lambda_1$, $\beta = \lambda_2$, $\gamma = \lambda_3$), то система состоит из трех уравнений такого вида, о котором шла речь в работе [10].

Заметим, что если у циклической цепной экспоненты нет произвольных первых коэффициентов, то сходимость ее в указанном интервале $(-1/(e\bar{\lambda}), 1/(e\bar{\lambda}))$ следует также и по теореме Бэрроу (см. [6]), а в круге $\{z : |z| < 1/(e\bar{\lambda})\}$ – по теореме Трона (см. [7]).

Не лишним будет напомнить здесь о рекуррентных формулах, по которым можно приближенно вычислять значение функции комплексной переменной, являющейся цепной циклической экспонентой. По формуле Эйлера (α – вещественное число)

$$\exp(\alpha z(U + iV)) = \exp(\alpha(xU - yV)) [\cos(\alpha(xV + yU)) + i \sin(\alpha(xV + yU))]. \tag{89}$$

Пусть цепная циклическая экспонента $f(z) = \langle e^z; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \alpha_1, \dots \rangle$ имеет период $m > 1$, и пусть $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ – вещественные показатели. В качестве

нулевого приближения возьмем $f_0(z) = U_1^{(0)} + iV_1^{(0)} = 1 = e^{0z}$. В качестве первого приближения будем брать

$$f_1(z) = U_1^{(1)} + iV_1^{(1)},$$

где $U_1^{(1)} = U_1^{(1)}(x, y)$, $V_1^{(1)} = V_1^{(1)}(x, y)$ определяются рекуррентно через значения функций $U_1^{(0)}$, $V_1^{(0)}$, $U_m^{(1)}$, $V_m^{(1)}$, $U_{m-1}^{(1)}$, $V_{m-1}^{(1)}$, $\dots$, $U_2^{(1)}$, $V_2^{(1)}$ по формулам

$$\begin{aligned} U_m^{(1)} &= \exp(\alpha_m(xU_1^{(0)} - yV_1^{(0)})) \cos[\alpha_m(xV_1^{(0)} + yU_1^{(0)})], \\ V_m^{(1)} &= \exp(\alpha_m(xU_1^{(0)} - yV_1^{(0)})) \sin[\alpha_m(xV_1^{(0)} + yU_1^{(0)})], \\ U_{m-1}^{(1)} &= \exp(\alpha_{m-1}(xU_m^{(1)} - yV_m^{(1)})) \cos[\alpha_{m-1}(xV_m^{(1)} + yU_m^{(1)})], \\ V_{m-1}^{(1)} &= \exp(\alpha_{m-1}(xU_m^{(1)} - yV_m^{(1)})) \sin[\alpha_{m-1}(xV_m^{(1)} + yU_m^{(1)})], \\ &\dots\dots\dots \\ U_2^{(1)} &= \exp(\alpha_2(xU_3^{(1)} - yV_3^{(1)})) \cos[\alpha_2(xV_3^{(1)} + yU_3^{(1)})], \\ V_2^{(1)} &= \exp(\alpha_2(xU_3^{(1)} - yV_3^{(1)})) \sin[\alpha_2(xV_3^{(1)} + yU_3^{(1)})], \\ U_1^{(1)} &= \exp(\alpha_1(xU_2^{(1)} - yV_2^{(1)})) \cos[\alpha_1(xV_2^{(1)} + yU_2^{(1)})], \\ V_1^{(1)} &= \exp(\alpha_1(xU_2^{(1)} - yV_2^{(1)})) \sin[\alpha_1(xV_2^{(1)} + yU_2^{(1)})]. \end{aligned}$$

В качестве k -го ($k = 2, 3, \dots$) приближения берем

$$f_k(z) = U_1^{(k)} + iV_1^{(k)},$$

где $U_1^{(k)}$ и $V_1^{(k)}$ рекуррентно вычисляются через значения функций $U_1^{(k-1)}$, $V_1^{(k-1)}$, $U_m^{(k)}$, $V_m^{(k)}$, $U_{m-1}^{(k)}$, $V_{m-1}^{(k)}$, $\dots$, $U_2^{(k)}$, $V_2^{(k)}$ по формулам

$$\begin{aligned} U_m^{(k)} &= \exp(\alpha_m(xU_1^{(k-1)} - yV_1^{(k-1)})) \cos[\alpha_m(xV_1^{(k-1)} + yU_1^{(k-1)})], \\ V_m^{(k)} &= \exp(\alpha_m(xU_1^{(k-1)} - yV_1^{(k-1)})) \sin[\alpha_m(xV_1^{(k-1)} + yU_1^{(k-1)})], \\ U_{m-1}^{(k)} &= \exp(\alpha_{m-1}(xU_m^{(k)} - yV_m^{(k)})) \cos[\alpha_{m-1}(xV_m^{(k)} + yU_m^{(k)})], \\ V_{m-1}^{(k)} &= \exp(\alpha_{m-1}(xU_m^{(k)} - yV_m^{(k)})) \sin[\alpha_{m-1}(xV_m^{(k)} + yU_m^{(k)})], \\ &\dots\dots\dots \\ U_2^{(k)} &= \exp(\alpha_2(xU_3^{(k)} - yV_3^{(k)})) \cos[\alpha_2(xV_3^{(k)} + yU_3^{(k)})], \\ V_2^{(k)} &= \exp(\alpha_2(xU_3^{(k)} - yV_3^{(k)})) \sin[\alpha_2(xV_3^{(k)} + yU_3^{(k)})], \\ U_1^{(k)} &= \exp(\alpha_1(xU_2^{(k)} - yV_2^{(k)})) \cos[\alpha_1(xV_2^{(k)} + yU_2^{(k)})], \\ V_1^{(k)} &= \exp(\alpha_1(xU_2^{(k)} - yV_2^{(k)})) \sin[\alpha_1(xV_2^{(k)} + yU_2^{(k)})]. \end{aligned} \tag{90}$$

Если вместо вещественных показателей α_j , $j = 1, 2, \dots, m$, цепной экспоненты $f(z)$ появляются комплексные показатели $a_j = \alpha_j + i\beta_j$, то формулу (89) следует заменить на формулу Эйлера

$$\begin{aligned} \exp(az(U + iV)) &= \exp((\alpha x - \beta y)U - (\alpha y + \beta x)V) \\ &\times [\cos((\alpha x - \beta y)V + (\alpha y + \beta x)U) + i \sin((\alpha x - \beta y)V + (\alpha y + \beta x)U)]. \end{aligned} \tag{91}$$

Тогда все функции $U_j^{(k)}$ и $V_j^{(k)}$, за исключением нулевых $U_1^{(0)} = 1$ и $V_1^{(0)} = 0$, следует заменить соответственно формуле (91). Например, в k -м приближении $f_k(z) = U_1^{(k)} + iV_1^{(k)}$ функции $U_1^{(k)}$ и $V_1^{(k)}$ запишутся в виде

$$\begin{aligned} U_1^{(k)} &= \exp((\alpha_1 x - \beta_1 y)U_2^{(k)} - (\alpha_1 y + \beta_1 x)V_2^{(k)}) \\ &\quad \times \cos((\alpha_1 x - \beta_1 y)V_2^{(k)} + (\alpha_1 y + \beta_1 x)U_2^{(k)}), \\ V_1^{(k)} &= \exp((\alpha_1 x - \beta_1 y)U_2^{(k)} - (\alpha_1 y + \beta_1 x)V_2^{(k)}) \\ &\quad \times \sin((\alpha_1 x - \beta_1 y)V_2^{(k)} + (\alpha_1 y + \beta_1 x)U_2^{(k)}). \end{aligned}$$

Предположим теперь, что циклическая цепная экспонента имеет у первых ν показателей произвольные вещественные множители $\lambda_j \neq 0$, $j = 1, 2, \dots, \nu$ ($\nu \leq m$). Возьмем случай $\nu = 2$. Тогда для последнего (k -го) приближения последние две пары функций в системе (90) запишутся в виде

$$\begin{aligned} U_2^{(k)} &= \exp(\lambda_2 \alpha_2 (xU_3^{(k)} - yV_3^{(k)})) \cos[\lambda_2 \alpha_2 (xV_3^{(k)} + yU_3^{(k)})], \\ V_2^{(k)} &= \exp(\lambda_2 \alpha_2 (xU_3^{(k)} - yV_3^{(k)})) \sin[\lambda_2 \alpha_2 (xV_3^{(k)} + yU_3^{(k)})], \\ U_1^{(k)} &= \exp(\lambda_1 \alpha_1 (xU_2^{(k)} - yV_2^{(k)})) \cos[\lambda_1 \alpha_1 (xV_2^{(k)} + yU_2^{(k)})], \\ V_1^{(k)} &= \exp(\lambda_1 \alpha_1 (xU_2^{(k)} - yV_2^{(k)})) \sin[\lambda_1 \alpha_1 (xV_2^{(k)} + yU_2^{(k)})]. \end{aligned}$$

Как отмечалось ранее, А. Кноубел в своей статье [18] (1981 г.) поместил список литературы (125 статей и иных публикаций), посвященной цепным степеням и экспонентам. Можно также обратиться к спискам литературы в работах Дж. Андерсона [15] и И. Н. Галидакиса [17], [20], [23].

Список литературы

- [1] L. Euler, “De formulis exponentialibus replicatis”, *Acta Academiae Scientiarum Petropolitanae*, **1** (1778), 38–60.
- [2] G. Eisenstein, “Entwicklung von $\alpha^{\alpha^{\alpha^{\dots}}}$ ”, *Crelle’s J. Reine Angew. Math.*, **1** (1844), 49–52.
- [3] L. Seidel, “Über die Grenzwerte eines unendlichen Patenzausdruckes der Form $x^{x^{x^{\dots}}}$ ”, *Abhandlungen der wissenschaften*, **11** (1873), 1–10.
- [4] A. Carlsson, *Om Iterade Functioner*, Ph. D. Thesis, Uppsala, 1907.
- [5] I. N. Baker, P. J. Rippon, “Convergence of infinite exponentials”, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.*, **8**:1 (1983), 179–186.
- [6] D. F. Barrow, “Infinite exponentials”, *Amer. Math. Monthly*, **43**:3 (1936), 150–160.
- [7] W. J. Thron, “Convergence of infinite exponentials with complex elements”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **8**:6 (1957), 1040–1043.
- [8] I. N. Baker, P. J. Rippon, “Iterating exponential functions with cyclic exponents”, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **105**:2 (1989), 357–375.
- [9] А. П. Буланов, “Регулярность степеней бесконечной кратности”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **62**:5 (1998), 49–78; англ. пер.: А. P. Bulanov, “Regularity of infinite exponentials”, *Izv. Math.*, **62**:5 (1998), 901–928.
- [10] А. П. Буланов, “Бесконечная цепная степень с коэффициентами, принимающими поочередно два значения”, *Матем. сб.*, **192**:11 (2001), 3–34; англ. пер.: А. P. Bulanov, “Infinite iterated power with alternating coefficients”, *Sb. Math.*, **192**:11 (2001), 1589–1620.

- [11] А. П. Буланов, “Параметрическая зависимость радиуса сходимости от коэффициента простейшей периодической экспоненты”, *Тезисы докладов 12-й Саратовской зимней школы “Современные проблемы теории функций и их приложения”* (Саратов, 2004), Саратовский госуд. ун-т, Саратов, 2004, 36–37.
- [12] А. Гурвиц, Р. Курант, *Теория функций*, Наука, М., 1968; пер. с нем.: A. Hurwitz, *Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen*, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1964.
- [13] D. Bernoulli, “Letter to Goldbach”, *Correspondance mathématique et physique de quelques celebres geometres du XVIII siecle*. 2, Imperial Academy of Sciences, St. Petersburg, 1843, 262.
- [14] C. Goldbach, “Letter to Daniel Bernoulli”, *Correspondance mathématique et physique de quelques celebres geometres du XVIII siecle*. 2, Imperial Academy of Sciences, St. Petersburg, 1843, 280–281.
- [15] J. Anderson, “Iterated exponentials”, *Amer. Math. Monthly*, **111**:8 (2004), 668–679.
- [16] S. Hurwitz, “On the rational solutions of $m^n = n^m$ with $m \neq n$ ”, *Amer. Math. Monthly*, **74**:3 (1967), 298–300.
- [17] I. N. Galidakis, “On an application of Lambert’s W function to infinite exponentials”, *Complex Var. Theory Appl.*, **49**:11 (2004), 759–780.
- [18] R. A. Knoebel, “Exponentials reiterated”, *Amer. Math. Monthly*, **88**:4 (1981), 235–252.
- [19] J. B. S. Haldane, “Enzymes”, 1965, 85–88.
- [20] I. N. Galidakis, “On solving the p -th complex auxiliary equation $f^{(p)}(z) = z$ ”, *Complex Var. Theory Appl.*, **50**:13 (2005), 977–997.
- [21] P. Colwell, *Solving Kepler’s equation over three centuries*, Willmann-Bell, Richmond, VA, 1993.
- [22] А. Е. Дубинов, И. Н. Галидакис, “Явное решение уравнения Кеплера”, *Письма в ЭЧАЯ*, **4**:3(139) (2007), 365–370.
- [23] I. N. Galidakis, “On some applications of the generalized hyper-Lambert functions”, *Complex Var. Elliptic Equ.*, **52**:12 (2007), 1101–1119.
- [24] R. M. Corless, G. H. Gonnet, D. E. G. Hare, D. J. Jeffrey, D. E. Knuth, “On the Lambert W function”, *Adv. Comput. Math.*, **5**:1 (1996), 329–359.
- [25] А. Е. Дубинов, И. Д. Дубинова, С. К. Сайков, *W-функция Ламберта: таблица интегралов и другие математические свойства*, СарФТИ, Саров, 2004.
- [26] Г. А. Амбарцумян, А. В. Буробин, “Продолжение функций, представляемых экспонентами бесконечной кратности с чередующимися показателями”, *Матем. заметки*, **73**:2 (2003), 163–172; англ. пер.: G. A. Ambartsumyan, A. V. Burobin, “Continuation of functions representable via infinitely multiple exponentials with alternating exponents”, *Math. Notes*, **73**:1–2 (2003), 155–162.
- [27] А. А. Гончар, “Рациональные аппроксимации аналитических функций”, *Совр. пробл. матем.*, **1**, МИАН, М., 2003, 83–106.
- [28] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, “О сходимости совместных аппроксимаций Паде для систем функций марковского типа”, *Теория чисел, математический анализ и приложения*, Тр. МИАН, **157**, Наука, М., 1981, 31–48.
- [29] Е. М. Никишин, “Дискретный оператор Штурма–Лиувилля и некоторые задачи теории функций”, Тр. сем. им. И. Г. Петровского, **10**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1984, 3–77; англ. пер.: E. M. Nikishin, “Discrete Sturm–Liouville operators and some problems of function theory”, *J. Math. Sci.*, **35**:5 (1986), 2679–2744.
- [30] А. И. Аптекарев, Е. М. Никишин, “Задача рассеяния для дискретного оператора Штурма–Лиувилля”, *Матем. сб.*, **121**(163):3(7) (1983), 327–358; англ. пер.: A. I. Aptekarev, E. M. Nikishin, “Continuation of functions representable via infinitely multiple exponentials with alternating exponents”, *Math. USSR-Sb.*, **49**:2 (1984), 325–355.

- [31] А. И. Аптекарев, “Асимптотические свойства многочленов, ортогональных на системе контуров, и периодические движения цепочек Toda”, *Матем. сб.*, **125(167)**:2(10) (1984), 231–258; англ. пер.: A. I. Aptekarev, “Asymptotic properties of polynomials orthogonal on a system of contours, and periodic motions of Toda lattices”, *Math. USSR-Sb.*, **53**:1 (1986), 233–260.
- [32] А. И. Аптекарев, “Вынужденные движения односторонней цепочки Ленгмюра”, *Теория функций и приближения. Часть 2* (Саратов, 1984), Изд-во Сарат. ун-та, Саратов, 1986, 17–21.

А. П. Буланов (A. P. Bulanov)

Обнинский государственный технический
университет атомной энергетики

E-mail: bksen2002@yandex.ru

Поступила в редакцию

23.07.2008 и 15.07.2009