Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Пухликов, Бирационально жесткие гиперповерхности Фано с изолированными особенностями, *Матем. сб.*, 2002, том 193, номер 3, 135–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm640>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 11:36:26

УДК 513.6

А. В. Пухликов

Бирационально жесткие гиперповерхности Фано с изолированными особенностями

В работе доказано, что общая гиперповерхность Фано $V = V_M \subset \mathbb{P}^M$ индекса 1 с изолированными особенностями общего положения бирационально жесткая. Поэтому она не может быть расслоена рациональным отображением на униформные многообразия меньшей размерности и любое $\mathbb{Q}$ -Фано многообразие V' с числом Пикара 1, бирационально эквивалентное V , на самом деле изоморфно V . В частности, V нерационально. Группа бирациональных автоморфизмов V есть либо $\{1\}$, либо $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ в зависимости от того, имеет ли V терминальную особую точку максимально возможной кратности $M - 2$. Доказательство основано на методе максимальных особенностей и технике гиперкасательных систем в сочетании с принципом связности Шокурова.

Библиография: 12 названий.

§ 0. Введение

0.1. Бирационально жесткие многообразия. В настоящей статье мы работаем над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Напомним, что многообразие Фано X размерности ≥ 3 с $\mathbb{Q}$ -факториальными терминальными особенностями, $\mathrm{rk} \mathrm{Pic} X = 1$, называется *бirationально сверхжестким*, если для любого бирационального отображения

$$\chi: X \dashrightarrow X'$$

на многообразии X' той же размерности, гладкое в коразмерности 1, и каждой линейной системы Σ' на X' , свободной в коразмерности 1 (т.е. $\mathrm{codim} \mathrm{Bs} \Sigma' \geq 2$), выполнено неравенство

$$c(\Sigma, X) \leq c(\Sigma', X'), \quad (1)$$

где $\Sigma = (\chi^{-1})_* \Sigma'$ есть собственный прообраз Σ' на X относительно χ и $c(\Sigma, X) = c(D, X)$ обозначает *порог канонического присоединения*

$$c(D, X) = \sup \left\{ \frac{b}{a} : b, a \in \mathbb{Z}_+ \setminus \{0\}, |aD + bK_X| \neq \emptyset \right\},$$

$D \in \Sigma$ (и аналогично для Σ', X'); X называется *бirationально жестким*, если для любых X', χ, Σ' существует бирациональный автоморфизм $\chi^* \in \mathrm{Bir} X$ такой, что тройка $X', \chi \circ \chi^*, \Sigma'$ удовлетворяет условию (1).

Следующий факт хорошо известен.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № № 99-15-96013 и 99-01-01132) и фонда INTAS-OPEN (грант 2000 № 269).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Предположим, что X жесткое. Тогда:*

- (i) *X не может быть расслоено нетривиальным рациональным отображением на унитарные многообразия;*
- (ii) *если $\chi: X \dashrightarrow X'$ — бирациональное отображение на многообразии Фано X' с $\mathbb{Q}$ -факториальными терминальными особенностями такое, что $\mathrm{Pic} X' \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{Q}K_{X'}$, то X' (бирегулярно) изоморфно X . Если X сверхжесткое, то само отображение χ есть уже (бирегулярный) изоморфизм. В частности, в сверхжестком случае группы бирациональных и бирегулярных отображений совпадают:*

$$\mathrm{Bir} X = \mathrm{Aut} X;$$

- (iii) *X нерационально.*

0.2. Регулярные гиперповерхности. Пусть $W = W_m \subset \mathbb{P}^N$ — гиперповерхность степени $m \leq N$ в N -мерном комплексном проективном пространстве. Для точки $x \in W$ выберем систему аффинных координат $(z_1, \dots, z_N)$ на $\mathbb{C}^N \subset \mathbb{P}^N$ с центром в x и запишем уравнение гиперповерхности W в виде

$$f = q_1 + q_2 + \dots + q_m,$$

где $q_i(z_*)$ — однородные многочлены степени i .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Гиперповерхность W *регулярна* в гладкой точке $x \in W$, если последовательность

$$q_1, \dots, q_k,$$

$k = \min\{m, N - 1\}$, регулярна в $\mathcal{O}_{x, \mathbb{P}^N}$, т.е. система уравнений

$$q_1 = \dots = q_k = 0$$

задает в $\mathbb{P}^N$ алгебраическое подмножество коразмерности k .

Подсчет размерностей, аналогичный рассуждениям из [1], показывает, что обшая (в смысле топологии Зариского на $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m))$) гиперповерхность W регулярна в каждой своей точке.

Пусть $V = V_M \subset \mathbb{P} = \mathbb{P}^M$ — гиперповерхность степени M , имеющая, самое большее, изолированные особые точки,

$$f = q_1 + q_2 + \dots + q_M$$

— ее уравнение относительно системы аффинных координат $(z_1, \dots, z_M)$ с центром в точке $x \in V$. Пусть

$$\mu = \min\{k \in \mathbb{Z}_+ : q_k \neq 0\} = \mathrm{mult}_x V$$

— кратность V в точке x . Предположим, что $M - 2 \geq \mu \geq 2$, т.е. $x \in \mathrm{Sing} V$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Гиперповерхность V *регулярна* в точке x , если выполнены следующие условия:

- (i) последовательность $q_\mu, \dots, q_M$ регулярна в $\mathcal{O}_{x, \mathbb{P}}$;
- (ii) гиперповерхность $T_x V = \{q_\mu = 0\} \subset \mathbb{T} = \mathbb{P}(T_x \mathbb{P}) \cong \mathbb{P}^{M-1}$ неособа и регулярна в каждой своей точке $y \in T_x V$;
- (iii) при $\mu = 3, 4$ и $M \geq 7$ для любой точки $y \in T_x V$ ни одна из неприводимых компонент замкнутого множества

$$\{q_\mu = q_{\mu+1} = \dots = q_6 = 0\} \cap T_y(T_x V) \subset \mathbb{T} \quad (2)$$

не содержится в квадратичной гиперповерхности

$$T_y(T_y(T_x V) \cap T_x V) \subset \mathbb{T} \quad (3)$$

(при $\mu = 3, M = 6$ достаточно условия (2) с q_5 вместо q_6).

Условие (iii) нуждается в комментариях, тем более что мы несколько злоупотребляем обозначениями: символом $T_y(T_x V)$ мы обозначаем гиперплоскость в $\mathbb{T}$, касательную к $T_x V$ в точке y . В силу регулярности гиперповерхности $T_x V$ пересечение

$$T_y(T_x V) \cap T_x V$$

есть гиперповерхность в гиперплоскости $T_y(T_x V)$, имеющая изолированную особую точку кратности 2. Замкнутое множество (2) имеет размерность ≥ 1 , так что мы требуем, чтобы ни одна из его компонент не содержалась в квадрике (3). Это условие можно сформулировать и по-другому: пересечение цикла

$$T_x V \cap T_y(T_y(T_x V) \cap T_x V)$$

с полным пересечением

$$\{q_{\mu+1} = \dots = q_6 = 0\}$$

имеет коразмерность точно $9 - \mu$ в $\mathbb{T}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $\mathcal{V}_\mu(x) \subset \mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(M)))$ – пространство гиперповерхностей степени $M \geq 5$, имеющих в фиксированной точке $x \in \mathbb{P}$ особенность кратности μ , $2 \leq \mu \leq M - 2$. Тогда общая (по Зарискому) гиперповерхность $V \in \mathcal{V}_\mu(x)$ регулярна в каждой своей точке.

Очевидно, для общей $V \in \mathcal{V}_\mu(x)$ имеем $\text{Sing } V = \{x\}$. Отметим следующий вопрос: для каких наборов целых чисел $(\mu_1, \dots, \mu_k) \in \{2, \dots, M - 2\}^k$ существует регулярная в каждой точке гиперповерхность V , имеющая k точек $x_1, \dots, x_k$ кратностей $\mu_1, \dots, \mu_k$ соответственно? Можно показать, что при $\mu \equiv 2$ ответ утвердителен при $k \leq M + 1$, однако точное предельное значение k , по-видимому, гораздо больше.

0.3. Основной результат. Основным результатом настоящей работы – следующая

ТЕОРЕМА. Пусть гиперповерхность V регулярна в каждой точке.

(i) Если для любой точки $x \in V$ имеет место оценка $\text{mult}_x V \leq M - 3$, то V — бирационально сверхжесткое многообразие.

(ii) Если $x \in V$ — (единственная) точка кратности $M - 2$, то проекция из этой точки

$$\pi: V \dashrightarrow \mathbb{P}^{M-1}$$

имеет степень 2 и существует бирациональная инволюция (инволюция Галуа) $\tau \in \text{Bir } V$, переставляющая точки в слоях π . Многообразие V бирационально жесткое, и имеет место точная последовательность

$$1 \rightarrow \text{Aut } V \rightarrow \text{Bir } V \rightarrow \langle \tau \rangle = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 1.$$

Для общей V имеем $\text{Aut } V = \{1\}$, так что $\text{Bir } V = \langle \tau \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

0.4. Известные результаты об особых многообразиях Фано. Первым примером бирационально жесткого трехмерного многообразия Фано была кварта $V = V_4 \subset \mathbb{P}^4$ с единственной двойной точкой общего положения $x \in V$ [2]. Как и в случае произвольной размерности, проекция

$$\pi: V \dashrightarrow \mathbb{P}^3$$

из точки x имеет степень 2 и определяет инволюцию Галуа $\tau_x \in \text{Bir } V$. Однако в размерности 3 группа бирациональных автоморфизмов гораздо больше. Через точку $x \in V$ в случае общего положения проходят ровно 24 прямые $L_1, \dots, L_{24} \subset V$. Пусть $L = L_i$ — одна из них. Проекция

$$\pi_L: V \dashrightarrow \mathbb{P}^2$$

из этой прямой расслаивает V на эллиптические кривые. Точнее, для общей точки $p \in \mathbb{P}^2$ кривая $C_p = \pi_L^{-1}(p)$ есть плоская кубика, проходящая через точку x . Принимая точку x за нуль группового закона на C_p , получаем бирациональную инволюцию:

$$\begin{aligned} \tau_L: V &\dashrightarrow V, \\ \tau_L|_{C_p}: z &\mapsto -z. \end{aligned}$$

Положим $\tau_0 = \tau_x$, $\tau_i = \tau_{L_i}$. Имеет место следующий факт [2].

Многообразие V бирационально жесткое. Инволюции τ_i , $i = 0, 1, \dots, 24$, свободно порождают в $\text{Bir } V$ подгруппу $B(V)$ конечного индекса, причем имеет место представление

$$1 \rightarrow B(V) = \bigstar_{i=0}^{24} \langle \tau_i \rangle \rightarrow \text{Bir } V \rightarrow \text{Aut } V \rightarrow 1.$$

Здесь действие $\text{Aut } V$ на $B(V)$ определяется очевидным образом.

В [3] Корти существенно упростил доказательство, применив теорему Шокурова о связности [4] для исключения бесконечно близкой максимальной особенности над точкой x . Несколько позже Чельцов заметил, что, в свою очередь, рассуждение Корти можно существенно упростить, если применить теорему Шокурова о связности к исключительному дивизору $E \subset V_0 \rightarrow V$ раздутия точки x ,

$E \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. А именно если точка x не максимальна, но над ней лежит максимальная особенность, то на E существует линейная система Σ_E кривых (возможно, с неподвижными компонентами) типа (m, m) такая, что лог-пара $(E, \frac{1}{m}\Sigma_E)$ не лог-канонична. Последнее легко привести к противоречию. На самом деле, в [2] это противоречие уже фактически было получено, см. “лемму о графе”.

Этот способ рассуждений используется и в настоящей работе при изучении особой точки максимальной кратности $M - 2$.

Далее, в [5] построена серия примеров бирационально сверхжестких особых многообразий Фано произвольной размерности: двойные пространства индекса 1 с особой точкой общего положения. В [6] начат анализ особых гиперповерхностей Фано: доказана бирациональная сверхжесткость гиперповерхностей $V = V_M \subset \mathbb{P}^M$ с невырожденными двойными точками. Наконец, Корти и Мелла рассмотрели в [7] более широкий класс трехмерных квартик с изолированными двойными точками. Других примеров жестких многообразий Фано с гиперповерхностными особенностями до настоящей работы не было.

Однако необходимо упомянуть и работу [8], где рассмотрены 95 семейств взвешенных трехмерных гиперповерхностей Фано $V_d \subset \mathbb{P}(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$, $d = a_0 + \dots + a_4 - 1$ (следовало бы говорить о 94 семействах, поскольку первое семейство в этом списке состоит из неособых многообразий – гладких трехмерных квартик $V \subset \mathbb{P}^4$, бирациональная сверхжесткость которых доказана в [9] и стала отправной точкой теории бирациональной жесткости в целом). Взвешенные гиперповерхности Фано имеют терминальные факторособенности. Эти особенности существенно отличаются от гиперповерхностных особенностей, которым посвящена настоящая работа.

Результаты, составившие содержание настоящей статьи, были получены в ходе работы автора в Байройтском университете (Германия) в качестве Гумбольдтовского стипендиата, и автор очень признателен Фонду Гумбольдта за финансовую поддержку. Автор также благодарен Т. Петернеллу и его коллегам из Математического института Байройтского университета за превосходные условия работы, стимулирующую творческую атмосферу и общее гостеприимство.

§ 1. Начало доказательства

Теорема будет доказана методом максимальных особенностей, см. [1], [2], [5], [6], [8]–[10].

1.1. Максимальные особенности. Следуя традиционной схеме рассуждений, рассмотрим линейную систему $\Sigma \subset |nH|$ на V , $H \in \text{Pic } V$ – класс гиперплоского сечения. Линейная система Σ предполагается подвижной (т.е. она не имеет неподвижных компонент).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Геометрическое дискретное нормирование $\nu \in \mathcal{N}(V)$ называется *максимальной особенностью* системы Σ , если выполнено *неравенство Нётера–Фано*

$$\nu(\Sigma) > n \cdot \text{discrepancy}(\nu).$$

Если многообразие V не сверхжесткое, то существует подвижная линейная система, обладающая максимальной особенностью [1], [10].

Пусть $B = \text{centre}(\nu) \subset V$ – центр максимальной особенности – неприводимое подмногообразие многообразия V .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. $B = x \in V$ – особая точка гиперповерхности V кратности $\mu \geq 3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что $B \notin \text{Sing } V$. Согласно [1] мы можем утверждать, что $\text{codim}_V B \geq 3$. (Иначе выберем проективную кривую $C \subset B$, $C \cap \text{Sing } V = \emptyset$. Для этой кривой получим оценку $\text{mult}_C \Sigma > n$. Поскольку C содержится в неособой части V , проходят рассуждения работы [1], дающие противоречие.) Следовательно, для цикла

$$Z = (D_1 \bullet D_2)$$

теоретико-схемного пересечения общих дивизоров $D_1, D_2 \in \Sigma$ имеем оценку

$$\text{mult}_B Z > 4n^2.$$

Поскольку существует гладкая точка $x \in B$, в силу условия регулярности рассуждения работы [1] дают противоположную оценку

$$\text{mult}_B Z \leq \frac{4}{M} \deg Z = 4n^2.$$

Противоречие. Следовательно, $B = x \in V$ – особая точка. В [6] показано, что случай $\mu = \text{mult}_x V = 2$ невозможен. (Впрочем, этот случай существенно проще случая $\mu \geq 3$, рассматриваемого в настоящей работе, и читатель легко исключит его с помощью приводимых ниже в ходе доказательства оценок, которые работают при $\mu = 2$ с радикальными упрощениями.) Предложение доказано.

1.2. Изолированная особая точка. Пусть $x \in V$ – регулярная особая точка кратности $\mu \geq 3$, $\nu \in \mathcal{N}(V)$ – максимальная особенность системы $\Sigma \subset |nH|$, $x = \text{centre}(\nu)$,

$$\begin{aligned} \varphi_0: \quad V_0 &\rightarrow V \\ &\cup \\ E = E_0 &\rightarrow x \end{aligned}$$

– раздутие особой точки, $E = E_0$ – исключительный дивизор. Имеем $\text{Pic } V_0 = \mathbb{Z}H \oplus \mathbb{Z}E$, так что для собственного прообраза линейной системы Σ на V_0 получим

$$\Sigma^0 \subset |nH - \nu E|.$$

Напомним, что $E \subset \mathbb{P}^{M-1}$ – регулярная гиперповерхность степени $\mu \geq 3$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. (i) При $\mu \leq M - 3$ дивизор E не может быть максимальной особенностью.

(ii) При $\mu = M - 2$ бирациональная инволюция $\tau \in \text{Bir } V$ задается линейной системой $|(M-1)H - ME|$ на V_0 . Если точка x максимальна для системы Σ , т.е. $\nu_0 > n$, то $\nu_0/n \leq M/(M-1)$ и $\tau_*\Sigma$ – подвижная линейная система на V , для которой точка x не максимальна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Предположим противное: точка x максимальна для Σ . Тогда $\nu_0 > (M - \mu - 1)n \geq 2n$. Пусть $D_1, D_2 \in \Sigma$ — общие дивизоры. Для эффективного цикла $Z = (D_1 \bullet D_2)$ на V коразмерности 2 имеем оценку

$$\text{mult}_x Z \geq (M - \mu - 1)^2 n^2 \mu > Mn^2 = \deg Z$$

(поскольку $(M - \mu - 1)^2 \mu > M$), что невозможно. Противоречие доказывает часть (i).

(ii) Рассмотрим τ как элемент группы $\text{Bir } V_0 \cong \text{Bir } V$. Легко видеть, что вне инвариантного замкнутого подмножества коразмерности 2 инволюция τ бирегулярна на V_0 и действует на $\text{Pic } V_0$ следующим образом:

$$\tau^* H = (M - 1)H - ME,$$

$$\tau^* E = \mu H - (\mu + 1)E.$$

Если Σ имеет точку x максимальной особенностью, т.е. $\nu_0 > n$, то

$$\tau^* |nH - \nu_0 E| \subset |(n(M - 1) - \nu_0 \mu)H - (nM - \nu_0(\mu + 1))E|,$$

где $\mu = M - 2$. Очевидно, $nM - \nu_0(\mu + 1) \leq n(M - 1) - \nu_0 \mu$, так что точка x уже не максимальна для системы $\tau^* \Sigma$.

Пусть $T = T_x V \cap V$: это неприводимый дивизор на V . Очевидно,

$$T \sim (M - 2)H - (M - 1)E.$$

Если система Σ подвижна, то для общего дивизора $D \in \Sigma$ цикл $Z = (T \bullet D)$ эффективен, так что получаем

$$\nu_0(M - 1)(M - 2) = \nu_0 \text{mult}_x T \leq \text{mult}_x Z \leq \deg Z = M(M - 2)n,$$

откуда $\nu_0/n \leq M/(M - 1)$, как и утверждалось.

Предложение 4 доказано полностью.

1.3. Ключевой факт. Теперь теорема вытекает из следующего ключевого факта:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Если точка $x \in V$ не максимальна для линейной системы Σ , то не существует максимальной особенности $\nu \in \mathcal{N}(V)$ такой, что $x = \text{centre}(\nu)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 5 для $\mu = M - 2$. Предположим противное: точка $x \in V$ не максимальна для системы Σ , но существует максимальная особенность ν такая, что $x = \text{centre}(\nu)$. Тогда линейная система Σ^0 на V_0 имеет максимальную особенность $\nu \in \mathcal{N}(V_0)$, центр которой содержится в E . Иными словами, лог-пара

$$\left(V_0, \frac{1}{n} \Sigma^0 \right)$$

не канонична на E . По теореме Шокурова о связности [4] лог-пара

$$\left(E, \frac{1}{n} \Sigma_E^0 \right),$$

где $\Sigma_E^0 = \Sigma^0|_E$, не лог-канонична. Рассуждение, предложенное в [11], показывает, что это невозможно. Для удобства читателя воспроизведем здесь это рассуждение (обобщающее рассуждения работы [12]). В его основе – теорема Шокурова о связности [4].

Напомним, что $E \subset \mathbb{P}^{M-1}$ – регулярная гиперповерхность степени $\mu = M - 2$. Пусть $L \in \text{Pic } E$ – класс гиперплоского сечения. Очевидно,

$$\Sigma_E^0 \subset |\nu_0 L|,$$

где по предположению $\nu_0 \leq n$. Как было показано в [1], для любой кривой $C \subset E$ имеет место оценка

$$\text{mult}_C \Sigma_E^0 \leq \nu_0 \leq n,$$

так что если $\gamma \in \mathcal{N}(E)$ удовлетворяет лог-неравенству Нётера–Фано

$$\gamma(\Sigma_E^0) > n \cdot \text{discrepancy}(\gamma) + n,$$

то $\text{centre}(\gamma) \subset E$ есть точка. Пусть $D \in \Sigma_E^0$ – некоторый дивизор,

$$\pi: E \rightarrow \mathbb{P}^{M-2}$$

– общая проекция из точки. Очевидно, $F = \pi(D)$ есть дивизор степени $\nu_0(M - 2)$ в $\mathbb{P}^{M-2}$. Более того, точка $y = \pi(\text{centre}(\gamma)) \in \mathbb{P}^{M-2}$ есть центр не лог-канонической особенности пары

$$\left(\mathbb{P}^{M-2}, \frac{1}{n} F \right) \quad (4)$$

и в малой окрестности точки y центры всех не лог-канонических особенностей этой пары суть точка y . Покажем, что этого не может быть.

Заменим, прежде всего, n^{-1} на чуть меньшее рациональное число $s \in \mathbb{Q}$, $s \approx n^{-1}$, такое, что лог-пара

$$(\mathbb{P}^{M-2}, sF)$$

обладает теми же свойствами, что и (4). Пусть

$$\rho: Y \rightarrow \mathbb{P}^{M-2}$$

– разрешение особенностей F в смысле [4] и $T \subset \mathbb{P}^{M-2}$ – общая гиперплоскость, $T \not\ni y$. Запишем

$$K_Y = \rho^*(K_{\mathbb{P}^{M-2}} + sF + T) + (-1)\tilde{T} + \sum_{i \in I} e_i E_i - s\tilde{F},$$

где $\tilde{T}, \tilde{F}$ – собственные прообразы T, F на Y , $E_i \subset Y$ – исключительные дивизоры. Очевидно, $\mathbb{Q}$ -дивизор $-(K_{\mathbb{P}^{M-2}} + sF + T)$ численно эффективный и объемный. Следовательно, согласно [4; п. 17.4] дивизор

$$\tilde{T} + \sum_{e_i \leq -1} E_i$$

связен. Однако этого не может быть, ибо по доказанному выше точка y является связной компонентой замкнутого алгебраического множества

$$\bigcup_{e_i \leq -1} \rho(E_i),$$

а по предположению $y \notin T$. Это противоречие завершает доказательство предложения 5 в случае $\mu = M - 2$.

Для $M = 4$ предложение 5 может быть доказано элементарными методами, см. [2; доказательство “леммы о графе”]. Идея использования теоремы Шокурова о связности для исключения максимальных особенностей линейных систем принадлежит Корти [3]. К сожалению, в настоящий момент этот подход (со всеми его модификациями [3], [7], [8], [11], [12]) позволяет исключать лишь некоторые, обычно весьма специфические, виды максимальных особенностей.

§ 2. Бесконечно близкие максимальные особенности

2.1. Разрешение максимальной особенности. Напомним стандартные конструкции и обозначения [1], [10]. Пусть

$$\begin{array}{ccc} \varphi_{i,i-1}: & V_i & \rightarrow V_{i-1} \\ & \cup & \cup \\ & E_i & \rightarrow B_{i-1} \end{array},$$

$i = 1, \dots, K$, – разрешение нормирования $\nu \in \mathcal{N}(V)$, максимального для Σ . Здесь первые L раздутий соответствуют циклам B_{i-1} коразмерности ≥ 3 (нижняя часть), а последующие $K - L$ раздутий соответствуют циклам B_{i-1} коразмерности 2 (верхняя часть; возможно, $K = L$ и верхняя часть пуста). Пусть $p_i = p_{Ki}$ – число путей из E_K в E_i , $i = 0, \dots, K$, в ориентированном графе Γ нормирования ν (см. [1], [9], [10]). Положим $\delta_i = \text{codim } B_{i-1} - 1$, $i = 1, \dots, K$, $\delta_0 = M - \mu - 1$.

Для неприводимого подмногообразия $Y \subset V$ коразмерности 2 положим

$$m(Y) = \text{mult}_x Y, \quad m_i(Y) = \text{mult}_{B_{i-1}} Y^{i-1},$$

$i = 1, \dots, L$, где верхний индекс j означает взятие собственного прообраза данного подмногообразия на V_j . Технической основой доказательства является

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Если $\nu \in \mathcal{N}(V)$ – максимальная особенность системы Σ , $\text{centre}(\nu) = x$, то существует неприводимое подмногообразие $Y \subset V$ коразмерности 2, для которого выполнена оценка

$$\frac{2}{\mu} p_0 m(Y) + \sum_{i=1}^L p_i m_i(Y) > \frac{(\sum_{i=0}^K p_i \delta_i)^2}{\frac{1}{2} p_0 + \sum_{i=1}^K p_i} \frac{\deg Y}{M}. \quad (5)$$

Доказательство дано ниже в § 3.

ЗАМЕЧАНИЕ. Как было показано в [10], можно “подправить” коэффициенты p_i таким образом, что выполнена оценка

$$p_0 \leq \sum_{i=1}^L p_i, \quad (6)$$

если только $L \geq 1$. Для этого достаточно убрать в графе Γ стрелки, соединяющие E_i , $i \geq L + 1$, с $E = E_0$, если таковые имеются (иначе нечего доказывать). Неравенство Нётера–Фано при этом только усилится, а доказательство предложения 6 сохраняет свою силу. В дальнейшем, если $L \geq 1$, будем предполагать (6) выполненным без специальных оговорок.

Зафиксируем неприводимое подмногообразие $Y \subset V$ коразмерности 2, удовлетворяющее оценке (5). Наша цель – получить противоречие. Этим предположение о существовании максимальной особенности $\nu \in \mathcal{N}(V)$ с центром в точке x будет опровергнуто и бирациональная жесткость многообразия V доказана.

2.2. Простые примеры.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. *Имеет место неравенство $L \geq 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что $L = 0$. Оценка (5) превращается в неравенство

$$m(Y) > \frac{\mu}{2} \frac{((M - \mu - 1)p_0 + \Sigma_u)^2}{p_0(\frac{1}{2}p_0 + \Sigma_u)} \frac{\deg Y}{M}.$$

Здесь для удобства $\Sigma_u = \sum_{i=L+1}^K p_i = \sum_{i=1}^K p_i$. В силу определения чисел p_i имеем очевидную оценку

$$p_0 \leq \Sigma_u.$$

Нетрудно проверить, что при любых s, t верно неравенство

$$\frac{(2s + t)^2}{2s(s/2 + t)} \geq 3,$$

откуда получаем оценку

$$\text{mult}_x Y > \frac{3\mu}{M} \deg Y.$$

Пусть $f_i = q_\mu + \dots + q_i$, $\mu \leq i \leq M$, обозначает левый отрезок уравнения гиперповерхности V .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Линейная система

$$\Lambda_i = \left| \sum_{j=\mu}^i f_j s_{i-j} \right|_V,$$

где $s_k(z_*)$ есть произвольный однородный многочлен степени k от z_* , называется i -й гиперкасательной линейной системой в точке x .

Очевидно, для любого дивизора $D \in \Lambda_i$ имеем

$$\frac{\text{mult}_x D}{\deg D} \geq \frac{i+1}{i} \frac{\mu}{M}. \quad (7)$$

В силу условия регулярности

$$\text{codim}_V \text{Bs } \Lambda_i = i - \mu + 1 \quad (8)$$

для всех $i = \mu, \dots, M-1$. Теперь пусть $D_\mu, D_{\mu+1}, \dots, D_{M-1}$ — общие дивизоры гиперкасательных систем $\Lambda_\mu, \dots, \Lambda_{M-1}$ соответственно. Легко видеть, что в силу (8) теоретико-множественное пересечение

$$Y \cap D_{\mu+2} \cap D_{\mu+3} \cap \dots \cap D_{M-1}$$

имеет в V коразмерность точно $M - \mu$. Рассмотрим эффективный цикл

$$Y^* = (Y \bullet D_{\mu+2} \bullet D_{\mu+3} \bullet \dots \bullet D_{M-1})$$

соответствующего теоретико-схемного пересечения. В силу (7) имеем оценку

$$\frac{\text{mult}_x Y^*}{\deg Y^*} \geq \frac{3\mu}{M} \cdot \frac{\mu+3}{\mu+2} \dots \frac{M}{M-1} = \frac{3\mu}{\mu+2} > 1,$$

что невозможно. Противоречие доказывает предложение 7.

Пусть

$$R = \{q_\mu = q_{\mu+1} = 0\} \cap V.$$

Это неприводимый цикл коразмерности 2 (в силу условия регулярности). Для гиперповерхности V общего положения его собственный прообраз $\tilde{R}$ на V_0 неособ в окрестности исключительного дивизора.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. *Неприводимые циклы Y и R различны: $Y \neq R$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу условия регулярности имеем

$$\text{mult}_x R = \frac{\mu + 2}{M} \deg R, \quad \text{mult}_{B_{i-1}} R^{i-1} \leq 1.$$

Теперь если $Y = R$, то из (5) получаем:

$$2 \frac{\mu + 2}{\mu} p_0 + \Sigma_l > \frac{(2p_0 + 2\Sigma_l + \Sigma_u)^2}{\frac{1}{2}p_0 + \Sigma_l + \Sigma_u},$$

где для удобства положим $\Sigma_l = \sum_{i=1}^L p_i$. Элементарными вычислениями легко убедиться, что это неравенство ложно. Предложение доказано.

Рассмотренные два примера (предложения 7 и 8) представляют собой простейшие ситуации.

Перейдем к изучению общего случая.

2.3. Подмногообразие коразмерности 2. Пусть $y \in E \subset \mathbb{P}^{M-1}$ — произвольная точка на исключительном дивизоре. В силу условия регулярности $T_y^{(1)} = T_y E \cap E$ есть гиперповерхность (степени μ) в гиперплоскости $T_y E \cong \mathbb{P}^{M-2}$, имеющая точку y изолированной квадратичной особенностью. Положим $T = T_y(T_y^{(1)}) \cap T_y^{(1)}$. Это неприводимый цикл коразмерности 2 на E , причем $\deg T = 2\mu$, $\text{mult}_y T = 6$.

ЛЕММА 1. *Пусть $W \neq T$ — неприводимое подмногообразие коразмерности 2 на E . При $\mu \geq 4$ имеет место оценка*

$$\frac{\text{mult}_y W}{\deg W} \leq \frac{8}{3\mu}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим технику гиперкасательных систем к $E \subset \mathbb{P}^{M-1}$. Это возможно благодаря условию регулярности. Точнее, пусть $(u_1, \dots, u_{M-1})$ — система аффинных координат на $\mathbb{P}^{M-1}$ с центром в точке y ,

$$e(y) = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_\mu$$

— уравнение гиперповерхности E , $e_i = \xi_1 + \dots + \xi_i$ — его левый отрезок. Здесь ξ_i однородны степени i по u_* . Положим

$$\Delta_i = \left| \sum_{j=1}^i e_j s_{i-j} \right|_E,$$

$i = 1, \dots, \mu - 1$, s_k — произвольный однородный многочлен степени k . Очевидно, в силу условия регулярности

$$\text{codim Bs } \Delta_i \geq i,$$

так что для общего дивизора $D_i \in \Delta_i$ и произвольного цикла $B \subset E$ коразмерности $i - 1$ имеем: $B \not\subset D_i$. Поскольку $W \neq T = \text{Bs } \Delta_2$, имеем

$$\text{codim } W \cap D_2 = 3,$$

так что $(W \bullet D_2)$ – эффективный цикл коразмерности 3 на E . Поэтому

$$W \cap D_2 \cap D_4 \cap D_5 \cap \cdots \cap D_{\mu-1}$$

имеет коразмерность $\mu - 1$ на E , так что

$$W^* = (W \bullet D_2 \bullet D_4 \bullet D_5 \bullet \cdots \bullet D_{\mu-1})$$

есть эффективный цикл на E . Имеем оценку

$$1 \geq \frac{\text{mult}_y W^*}{\deg} \geq \frac{\text{mult}_y W}{\deg} \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdots \frac{\mu}{\mu-1} \right) = \frac{3\mu}{8},$$

откуда немедленно получаем утверждение леммы.

ЛЕММА 2. Пусть $\mu = 3$. Для любого неприводимого подмногообразия $W \neq T$ коразмерности 2 имеем

$$\frac{\text{mult}_y W}{\deg} \leq \frac{2}{3}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В обозначениях доказательства предыдущей леммы $\text{codim}(W \cap D_2) = 3$, так что $(W \bullet D_2)$ – эффективный цикл коразмерности 3 и

$$1 \geq \frac{\text{mult}_y (W \bullet D_2)}{\deg} \geq \frac{\text{mult}_y W}{\deg} \cdot \frac{3}{2},$$

что и требовалось.

Пусть $Y^0 \subset V_0$ – собственный прообраз цикла Y и $(Y^0 \bullet E) = \mathbb{P}(T_x Y)$ – его проективизированный касательный конус в точке x . Для эффективного цикла $(Y^0 \bullet E)$ коразмерности 2 на E имеем представление

$$(Y^0 \bullet E) = aT + W, \quad (9)$$

где $a \in \mathbb{Z}_+$ и эффективный цикл W не содержит T компонентой.

ЛЕММА 3. Имеет место оценка $a \geq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное: $a = 0$. Рассмотрим сначала случай $\mu \geq 4$. Согласно лемме 1 имеем

$$\frac{m_1(Y)}{m(Y)} \leq \frac{\text{mult}_y (Y^0 \bullet E)}{\deg(Y^0 \bullet E)} \leq \frac{8}{3\mu},$$

где $y \in B_0$ – произвольная точка (ибо $m(Y) = \text{mult}_x Y = \deg(Y^0 \bullet E)$ и $m_1(Y) \leq \text{mult}_y Y^0 \leq \text{mult}_y (Y^0 \bullet E)$). Поэтому, учитывая, что $m_i(Y) \leq m_1(Y)$, можно заменить в (5) $m_i(Y)$ на $(8/(3\mu))m(Y)$ при $i \geq 1$. Теперь из (5) получаем

$$\begin{aligned} \text{mult}_x Y &> \frac{(2p_0 + 2\Sigma_l + \Sigma_u)^2}{(\frac{2}{\mu}p_0 + \frac{8}{3\mu}\Sigma_l)(\frac{1}{2}p_0 + \Sigma_l + \Sigma_u)} \cdot \frac{\deg Y}{M} \\ &= \mu \frac{4p_0^2 + 4p_0(2\Sigma_l + \Sigma_u) + 4\Sigma_l(\Sigma_l + \Sigma_u) + \Sigma_u^2}{p_0^2 + 2p_0(\frac{5}{3}\Sigma_l + \Sigma_u) + \frac{8}{3}\Sigma_l(\Sigma_l + \Sigma_u)} \cdot \frac{\deg Y}{M}, \end{aligned}$$

откуда получаем окончательно

$$\frac{\text{mult}_x Y}{\deg} > \frac{3}{2M} \mu. \quad (10)$$

С другой стороны, как в доказательстве леммы 1, для общих $D_i \in \Lambda_i$ теоретико-множественное пересечение

$$Y \cap D_{\mu+2} \cap D_{\mu+3} \cap \cdots \cap D_{M-1}$$

имеет коразмерность в точности $M - \mu$, так что, рассматривая эффективный цикл

$$Y^* = (Y \bullet D_{\mu+2} \bullet \cdots \bullet D_{M-1}),$$

получаем оценку

$$\frac{\text{mult}_x Y}{\deg} \leq \frac{\mu + 2}{M}. \quad (11)$$

Сравнивая это неравенство с (10), видим, что

$$\frac{3}{2} \mu < \mu + 2,$$

так что $\mu < 4$: противоречие.

Пусть теперь $\mu = 3$. Согласно лемме 2 в этом случае

$$\frac{m_1(Y)}{m(Y)} \leq \frac{2}{\mu},$$

так что, рассуждая как выше, получаем оценку

$$\frac{\text{mult}_x Y}{\deg} > 3 \frac{4p_0^2 + 4p_0(2\Sigma_l + \Sigma_u) + 4\Sigma_l(\Sigma_l + \Sigma_u) + \Sigma_u^2}{p_0^2 + p_0(3\Sigma_l + 2\Sigma_u) + 2\Sigma_l(\Sigma_l + \Sigma_u)} \cdot \frac{1}{M},$$

откуда

$$\frac{\text{mult}_x Y}{\deg} > \frac{6}{M}.$$

Оценка (11) справедлива и при $\mu = 3$, следовательно, получаем противоречие: $6 < \mu + 2 = 5$. Лемма 3 доказана полностью.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Подмногообразие Y не содержится в $T_x V$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим противное: $Y \subset T_x V$. Тогда $Y \subset T_x V \cap V$ и потому $T_x Y \subset T_x(T_x V \cap V)$. Однако это невозможно, потому что $\mathbb{P}(T_x Y)$ содержит компонентой подмногообразие T , а

$$\mathbb{P}(T_x(T_x V \cap V)) = \{q_\mu = q_{\mu+1} = 0\} \subset \mathbb{P}^{M-1}$$

не содержит T в силу условия регулярности. Следствие доказано.

2.4. Случай $\mu \geq 5$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 5 для $\mu \geq 5$. Для любого неприводимого подмногообразия $W \subset E$ коразмерности 2 согласно лемме 1 имеем

$$\frac{\text{mult}_y W}{\deg} \leq \frac{3}{\mu},$$

причем равенство достигается только на $W = T$. Рассуждая как выше, получаем из (5):

$$\frac{\text{mult}_x Y}{\deg} > \mu \frac{(2p_0 + 2\Sigma_l + \Sigma_u)^2}{M(2p_0 + 3\Sigma_l)(\frac{1}{2}p_0 + \Sigma_l + \Sigma_u)} \geq \frac{4}{3M}\mu. \quad (12)$$

Поскольку $Y \not\subset T_x V$, пересечение $Y \cap D_\mu$ имеет коразмерность 3, так что в силу условия регулярности

$$Y^* = (Y \bullet D_\mu \bullet D_{\mu+3} \bullet \cdots \bullet D_{M-1})$$

есть эффективный цикл коразмерности $M - \mu$. Имеем

$$\begin{aligned} 1 &\geq \frac{\text{mult}_x Y^*}{\deg} \geq \frac{\text{mult}_x Y}{\deg} \cdot \left(\frac{\mu+1}{\mu} \cdot \frac{\mu+4}{\mu+3} \cdots \frac{M}{M-1} \right) \\ &= \frac{\text{mult}_x Y}{\deg} \cdot \frac{(\mu+1)M}{\mu(\mu+3)}, \end{aligned} \quad (13)$$

так что, комбинируя (12) и (13), получаем

$$\frac{\mu(\mu+3)}{\mu+1} > \frac{4}{3}\mu,$$

откуда $\mu < 5$: противоречие. Предложение 5 доказано для $\mu \geq 5$.

2.5. Трудные случаи $\mu = 3$ и $\mu = 4$.

ОКОНЧАНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ПРЕДЛОЖЕНИЯ 5. Осталось рассмотреть два наиболее трудных случая: $\mu = 3$ и $\mu = 4$. Мы подробно рассмотрим второй. Необходимы более тонкие рассуждения, чем те, которые использовались выше.

Напомним, что $T_x Y$ содержит T нетривиальной компонентой и потому $Y \not\subset D_\mu$, как выше. Тем более, $Y \not\subset D_{\mu+1}$ для общего дивизора $D_{\mu+1} \in \Lambda_{\mu+1}$. Однако в силу условия регулярности можно сказать больше:

$$T \cap \{q_{\mu+1} = q_{\mu+2} = 0\}$$

имеет коразмерность 2 в T . В частности, линейная система $\Lambda_{\mu+1}^0|_T$ подвижна. Поэтому ни одна из компонент замкнутого алгебраического множества $D_{\mu+1}^0 \cap T$ не содержится в носителе цикла W (9). Положим $Y_{\mu+1} = (Y \bullet D_{\mu+1})$ — эффективный цикл коразмерности 3 на V . Имеем представление

$$Y_{\mu+1} = Y_{\mu+1}^\# + Y_{\mu+1}^+,$$

где неприводимая компонента X цикла $Y_{\mu+1}$ входит в $Y_{\mu+1}^\#$ (и не входит в $Y_{\mu+1}^+$) тогда и только тогда, когда ее собственный прообраз $X^0 \subset V_0$ содержит неприводимую компоненту множества $(D_{\mu+1}^0 \cap T)$. В силу сказанного выше

$$(\tilde{Y}_{\mu+1}^\# \bullet E) = a^\#(T \bullet D_{\mu+1}^0) + (\#),$$

$a^\# \geq a \geq 1$. Для цикла $Y_{\mu+1}^+$ имеем оценку

$$\frac{\text{mult}_x Y_{\mu+1}^+}{\deg} \leq \frac{\mu+3}{M}, \quad (14)$$

получаемую обычным способом. Однако про цикл $Y_{\mu+1}^\#$ можно сказать гораздо больше: по построению

$$Y_{\mu+1}^\# \not\subset D_\mu.$$

Следовательно, $(Y_{\mu+1}^\# \bullet D_\mu)$ – эффективный цикл коразмерности 4, так что получаем

$$\frac{\text{mult}_x Y_{\mu+1}^\#}{\deg} \leq \frac{\mu}{\mu+1} \frac{\text{mult}_x (Y_{\mu+1}^\# \bullet D_\mu)}{\deg} \leq \frac{\mu(\mu+4)}{(\mu+1)M}. \quad (15)$$

Положим

$$\begin{aligned} d^\# &= \deg Y_{\mu+1}^\#, \\ d^+ &= \deg Y_{\mu+1}^+, \\ b^\# &= a \deg T, \\ b^+ &= \deg W, \\ \deg(\tilde{Y}_{\mu+1}^\# \bullet E) &= b^\#(\mu+2) + \delta^\#, \\ \deg(\tilde{Y}_{\mu+1}^+ \bullet E) &= \delta^+. \end{aligned}$$

Получаем систему неравенств

$$\begin{aligned} (b^\# + b^+)(\mu+2) &\leq (\mu+2)b^\# + \delta^\# + \delta^+, \\ (\mu+2)b^\# + \delta^\# &\leq d^\# \frac{\mu(\mu+4)}{M(\mu+1)}, \\ \delta^+ &\leq d^+ \frac{\mu+3}{M}, \end{aligned}$$

причем

$$\begin{aligned} d^+ + d^\# &= (\mu+1) \deg Y, \\ b^+ + b^\# &= \text{mult}_x Y = m_0. \end{aligned}$$

Прежде всего заметим, что, поскольку неравенство (15) сильнее, чем (14), можно считать $\delta^\# = 0$: иначе заменим δ^+ на $\delta^+ + \delta^\#$, $\delta^\#$ на 0, $d^\#$ на

$$d^\# - \delta^\# \frac{M(\mu+1)}{\mu(\mu+4)}$$

и d^+ на

$$d^+ + \delta^\# \frac{M(\mu+1)}{\mu(\mu+4)}.$$

При этом все соотношения сохраняются, так как

$$\delta^\# \leq \delta^\# \frac{(\mu+1)(\mu+3)}{\mu(\mu+4)}.$$

Далее, для $m_1(Y)$ имеем согласно лемме 1 оценку

$$m_1(Y) \leq \frac{3}{\mu} b^\# + \frac{8}{3\mu} b^+.$$

Отсюда получаем в силу (5):

$$b^\# \left(\frac{2}{\mu} p_0 + \frac{3}{\mu} \Sigma_l \right) + b^+ \left(\frac{2}{\mu} p_0 + \frac{8}{3\mu} \Sigma_l \right) > \frac{(2p_0 + 2\Sigma_l + \Sigma_u)^2}{(\frac{1}{2}p_0 + \Sigma_l + \Sigma_u)} \frac{\deg Y}{M}.$$

Используя полученные выше оценки, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\mu(\mu+4)}{(\mu+1)(\mu+2)} d^\# \left(\frac{2}{\mu} p_0 + \frac{3}{\mu} \Sigma_l \right) + \frac{\mu+3}{\mu+2} d^+ \left(\frac{2}{\mu} p_0 + \frac{8}{3\mu} \Sigma_l \right) \\ > \frac{(2p_0 + 2\Sigma_l + \Sigma_u)^2}{(\frac{1}{2}p_0 + \Sigma_l + \Sigma_u)} \frac{(d^\# + d^+)}{\mu+1}. \end{aligned}$$

Следовательно, в силу линейности либо

$$\frac{\mu+4}{\mu+2} > \frac{(2p_0 + 2\Sigma_l + \Sigma_u)^2}{(2p_0 + 3\Sigma_l)(\frac{1}{2}p_0 + \Sigma_l + \Sigma_u)} \geq \frac{4}{3},$$

откуда $\mu < 4$ – противоречие, либо

$$\frac{(\mu+3)(\mu+1)}{\mu(\mu+2)} > \frac{(2p_0 + 2\Sigma_l + \Sigma_u)^2}{(2p_0 + \frac{8}{3}\Sigma_l)(\frac{1}{2}p_0 + \Sigma_l + \Sigma_u)} \geq \frac{3}{2},$$

откуда $\mu^2 < 2\mu + 6$ – снова противоречие. Случай $\mu = 4$ разобран полностью.

Отметим, что полученные оценки достаточны для исключения точки кратности $\mu = 3$ на пятимерной секстике. Если $M \geq 7$ и $\mu = 3$, то для доказательства предложения 5 необходимо начать с цикла $(Y \bullet D_{\mu+1})$, выделить в нем компоненты, содержащие компоненты цикла $(T \cap D_{\mu+1}^0)$, пересечь их с $D_{\mu+2}$, выделить компоненты, содержащие компоненты цикла $(T \cap D_{\mu+1}^0 \cap D_{\mu+2}^0)$, и пересечь их с D_μ (это все еще возможно в силу условия регулярности). Получающиеся оценки уже достаточно сильные для исключения случая $\mu = 3$. Однако они весьма громоздки, и мы их не приводим.

Предложение 5 и основная теорема полностью доказаны.

§3. Техника подсчета кратностей

В этом параграфе мы обобщаем технику подсчета кратностей [1], [10] на некоторые виды особенностей.

3.1. Последовательность раздутий. Пусть $x \in X$ – росток изолированной терминальной $\mathbb{Q}$ -факториальной особенности и

$$\begin{aligned} \varphi_{i,i-1}: \quad X_i &\rightarrow X_{i-1} \\ &\cup \quad \cup \\ E_i &\rightarrow B_{i-1} \end{aligned},$$

$i = 1, \dots, K$, – последовательность раздутий с центрами $B_{i-1} \subset X_{i-1}$, $B_0 = x$, $E_i = \varphi_{i,i-1}^{-1}(B_{i-1}) \subset X_i$ – исключительные дивизоры. Предполагаем, что выполнены следующие условия:

- (i) $\varphi_{i,i-1}(B_i) = B_{i-1}$, т.е. $B_i \subset E_i$;
- (ii) исключительные дивизоры $E_i \subset X_i$ неприводимы, приведены и X_i $\mathbb{Q}$ -факториально над общей точкой цикла B_{i-1} .

Положим $\delta_i = \text{codim } B_{i-1} - 1$. Очевидно, имеем

$$(F_i \cdot (-E_i)^{\delta_i}) = \mu_i \geq 1,$$

где

$$\mu_i = \text{mult}_{B_{i-1}} V_{i-1},$$

F_i — слой морфизма $\varphi_{i,i-1}: E_i \rightarrow B_{i-1}$.

Для цикла $Y_i \subset X_i$ символом $Y^j \subset X_j$ обозначаем его собственный прообраз, если он определен. На множестве исключительных дивизоров $\{E_i\}$ зададим структуру ориентированного графа обычным способом:

$$E_j \rightarrow E_i \quad \text{или} \quad i \rightarrow j,$$

если $j > i$ и $B_{j-1} \subset E_i^{j-1}$ [1], [2], [5], [9], [10]. При $j \rightarrow i$ положим

$$\beta_{i,j} = \sup_{Y \subset E_j} \frac{\text{mult}_{B_{i-1}} Y^{i-1}}{\deg Y} \in \mathbb{R}_+,$$

где $\sup$ берется по всем простым дивизорам $Y \subset E_i$, накрывающим B_{j-1} (впрочем, если $\varphi_{j,j-1}(Y) \neq B_{j-1}$, то $\text{mult}_{B_{i-1}} Y^{i-1} = 0$), и

$$\deg Y = (Y \cdot F_j \cdot (-E_j)^{\delta_j-1})$$

есть “степень” пересечения $Y \cap F_t$, $F_t = \varphi_{i,i-1}^{-1}(s)$, $s \in B_{i-1}$ — общая точка.

Для пути $\pi \in P(i, j)$, соединяющего i с j , определим его *вес* формулой

$$\beta(\pi) = \prod_{\alpha=1}^k \beta_{i_\alpha, i_{\alpha-1}},$$

где $\pi = \{i = i_k \rightarrow i_{k-1} \rightarrow \dots \rightarrow i_\alpha \rightarrow i_{\alpha-1} \rightarrow \dots \rightarrow i_0 = j\}$. Определим коэффициенты

$$w_{i,j} = \sum_{\pi \in P(i,j)} \beta(\pi), \quad w_{i,i} = 1.$$

ЛЕММА 4. *Имеет место соотношение*

$$w_{i,j} = \sum_{k \rightarrow j} w_{i,k} \beta_{k,j}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем дизъюнктное объединение

$$P(i, j) = \coprod_{k \rightarrow j} P(i, k) \circ \{k \rightarrow j\},$$

где $\circ \{k \rightarrow j\}$ обозначает продолжение пути из i в k до пути из i в j добавлением стрелки $k \rightarrow j$. Теперь утверждение леммы очевидно по определению чисел $w_{i,j}$.

3.2. Самопересечение линейной системы. Пусть теперь Σ – линейная система без неподвижных компонент на X , Σ^i – ее собственный прообраз на X_i , $D \in \Sigma$ – общий дивизор. Имеем

$$D^i = \varphi_{i,i-1}^*(D^{i-1}) - \nu_i E_i,$$

так что

$$D^K = \varphi_{K,0}^*(D) - \sum_{i=1}^K \nu_i \varphi_{K,i}^* E_i.$$

Пусть $D_1, D_2 \in \Sigma$ – два общих дивизора. Определим последовательность циклов коразмерности 2 на X_i , полагая

$$\begin{aligned} D_1 \bullet D_2 &= Z_0, \\ D_1^1 \bullet D_2^2 &= Z_0^1 + Z_1, \\ &\dots, \\ D_1^i \bullet D_2^i &= (D_1^{i-1} \bullet D_2^{i-1})^i + Z_i, \\ &\dots, \end{aligned}$$

где $Z_i \subset E_i$. Отсюда для $i \leq L$, где L определено условием $\text{codim } B_{i-1} \geq 3$ при $i \leq L$, получаем:

$$D_1^i \bullet D_2^i = Z_0^i + Z_1^i + \dots + Z_{i-1}^i + Z_i.$$

Для любых $j > i, j \leq L$ положим

$$m_{i,j} = \text{mult}_{B_{j-1}}(Z_i^{j-1}).$$

Положим также

$$d_i = \deg Z_i = (Z_i \cdot F_i \cdot (-E_i)^{\delta_i-1}).$$

Получаем следующую систему равенств:

$$\begin{aligned} \mu_1 \nu_1^2 + d_1 &= m_{0,1}, \\ \mu_2 \nu_2^2 + d_2 &= m_{0,2} + m_{1,2}, \\ &\dots, \\ \mu_i \nu_i^2 + d_i &= m_{0,i} + \dots + m_{i-1,i}, \\ &\dots, \\ \mu_L \nu_L^2 + d_L &= m_{0,L} + \dots + m_{L-1,L}. \end{aligned}$$

Теперь

$$d_L \geq \sum_{i=L+1}^K \mu_i \nu_i^2.$$

Умножим i -е уравнение на $w_{L,i}$ и сложим их. Справа для любого $i \geq 1$ получаем выражение

$$\sum_{j=i+1}^L w_{L,j} m_{i,j} = \sum_{j \rightarrow i} w_{L,j} m_{i,j}. \quad (16)$$

Однако по определению чисел $\beta_{j,i}$ имеем оценку

$$m_{i,j} \leq \beta_{j,i} d_i,$$

так что (16) можно оценить сверху числом

$$d_i \sum_{j \rightarrow i} w_{L,j} \beta_{i,j} = d_i w_{L,i}.$$

Слева для любого $i \geq 1$ присутствует $d_i w_{L,i}$, так что, выбрасывая все $m_{i,*}$, $i \geq 1$, из правой части и все d_i , $i \geq 1$, из левой, получаем окончательно

$$\sum_{j=1}^L w_{L,j} m_{0,j} \geq \sum_{j=1}^L w_{L,j} \mu_j \nu_j^2 + \sum_{i=L+1}^K \mu_i \nu_i^2. \quad (17)$$

3.3. Доказательство предложения 6. Вернемся теперь к особой точке $x \in V$, рассматриваемой в настоящей работе. Имеем, очевидно,

$$w_{i,j} = 1 \quad \text{при } i, j \geq 1,$$

где в соответствии с принятыми в статье обозначениями последовательность раздутий $\varphi_{i,i-1}$ начинается с φ_0 , а не с $\varphi_{1,0}$. Для любого дивизора $Y \subset E$ и точки $y \in Y$ имеем оценку

$$\frac{\text{mult}_y Y}{\deg} \leq \frac{2}{\mu},$$

причем равенство достигается на единственном дивизоре $T_y E \cap E$. В самом деле, в силу условия регулярности для общих дивизоров $R_i \in \Delta_i$ гиперкасательных линейных систем на E получаем при $Y \neq R_1 = T_y E \cap E$: пересечение

$$Y \cap R_1 \cap R_3 \cap \cdots \cap R_{\mu-1}$$

имеет коразмерность точно $\mu - 1$ на E , откуда следует, что цикл

$$Y^* = (Y \bullet R_1 \bullet R_3 \bullet \cdots \bullet R_{\mu-1})$$

эффективен, так что

$$\begin{aligned} 1 &\geq \frac{\text{mult}_y Y^*}{\deg} \geq \frac{\text{mult}_y Y}{\deg} \cdot \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{\mu}{\mu-1} \right) \\ &= \frac{\text{mult}_y Y}{\deg} \cdot \frac{2\mu}{3} \end{aligned}$$

и потому

$$\frac{\text{mult}_y Y}{\deg} \leq \frac{3}{2\mu} < \frac{2}{\mu}.$$

Следовательно, $\beta_{i,0} \leq 2/\mu$ для всех $i \rightarrow 0$. Теперь из (17) получаем

$$\frac{2}{\mu} p_{L,0} m_0 + \sum_{i=1}^L p_{L,i} m_i \geq 2p_0 \nu_0^2 + \sum_{i=1}^L p_{L,i} \nu_i^2 + \sum_{i=L+1}^K \nu_i^2. \quad (18)$$

Из определения чисел $p_{i,j}$ следует, что (18) влечет оценку

$$\frac{2}{\mu} p_0 m_0 + \sum_{i=1}^L p_i m_i \geq 2p_0 \nu_0^2 + \sum_{i=1}^K p_i \nu_i^2, \quad (19)$$

где $p_i = p_{K,i}$. Оценим снизу правую часть (19). Согласно неравенству Нётер–Фано имеем

$$\sum_{i=0}^K p_i \nu_i > n \left(\sum_{i=0}^K p_i \delta_i \right). \quad (20)$$

Поскольку

$$\inf_{\sum_{i=0}^K p_i \nu_i = C} \left\{ 2p_0 \nu_0^2 + \sum_{i=1}^K p_i \nu_i^2 \right\} = \frac{C^2}{\frac{1}{2} p_0 + \sum_{i=1}^K p_i},$$

получаем окончательно (с учетом того, что $\deg Z = M n^2$, $Z = (D_1 \bullet D_2)$):

$$\frac{2}{\mu} p_0 \operatorname{mult}_x Z + \sum_{i=1}^L p_i \operatorname{mult}_{B_{i-1}} Z^{i-1} > \frac{(\sum_{i=0}^K p_i \delta_i)^2}{\frac{1}{2} p_0 + \sum_{i=1}^K p_i} \cdot \frac{\deg Z}{M}.$$

Осталось заметить, что это неравенство линейно по Z . Следовательно, существует неприводимая компонента Y этого цикла, которая удовлетворяет (5).

Предложение 6 полностью доказано.

§ 4. Существование регулярных гиперповерхностей

Этот параграф посвящен доказательству предложения 2.

4.1. Регулярные неособые точки. Пусть $\mathcal{V}_\mu(x) \subset \mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(M)))$ – пространство гиперповерхностей степени $M \geq 5$, имеющих особенность кратности μ , $2 \leq \mu \leq M - 2$, в фиксированной точке $x \in \mathbb{P}$. Нетрудно видеть, что общая гиперповерхность $V \in \mathcal{V}_\mu(x)$ регулярна в особой точке x , так как ее уравнение относительно системы координат $z_1, \dots, z_M$ с центром в точке x есть

$$q_\mu + \dots + q_M = 0,$$

где многочлены q_i произвольны. Также очевидно, что гиперповерхность V гладкая в любой точке $y \in V \setminus \{x\}$ (см. ниже п. 4.3). Поэтому для доказательства предложения 2 остается проверить, что V регулярна в любой (гладкой) точке $y \in V \setminus \{x\}$ в смысле определения 1.

Положим для любой точки $y \in \mathbb{P} \setminus \{x\}$

$$Y(y) = \{V \in \mathcal{V}_\mu(x) : y \in V, V \text{ нерегулярна в } y\}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. *Имеет место оценка*

$$\operatorname{codim}_{\mathcal{V}_\mu(x)} Y(y) \geq M + 1. \quad (21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2. Пусть $Y \subset \mathcal{V}_\mu(x)$ — множество гиперповерхностей, нерегулярных хотя бы в одной точке $y \in \mathbb{P} \setminus \{x\}$. Очевидно,

$$Y = \bigcup_{y \in \mathbb{P} \setminus \{x\}} Y(y),$$

так что согласно предложению 9

$$\text{codim}_{\mathcal{V}_\mu(x)} Y \geq 1,$$

и поэтому замыкание $\overline{Y} \subset \mathcal{V}_\mu(x)$ есть собственное замкнутое подмножество положительной коразмерности. Поскольку, как было отмечено выше, общая (по Зарискому) гиперповерхность $V \in \mathcal{V}_\mu(x)$ регулярна в точке x , предложение 2 доказано полностью.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 9. Пусть $z_1, \dots, z_M$ — такая система аффинных координат на $\mathbb{C}^M \subset \mathbb{P}$, что $x = (0, \dots, 0)$ — ее начало, $y \in \mathbb{C}^M$ и координаты точки y суть $(1, 0, \dots, 0)$. Таким образом, замена

$$z_1 = 1 + u$$

дает новую систему аффинных координат

$$(u, z_2, \dots, z_M)$$

на $\mathbb{C}^M$ с центром в точке $y \in \mathbb{C}^M$. Положим

$$q_i = \sum_{j=0}^i z_1^{i-j} q_{i,j},$$

где $q_{i,j} = q_{i,j}(z_2, \dots, z_M)$ — однородные многочлены степени j от переменных $z_2, \dots, z_M$. Положим

$$w_k = \sum_{e=0}^k u^e \left(\sum_{i=\max(\mu, k)}^M \binom{i+e-k}{e} q_{i, k-e} \right). \quad (22)$$

Очевидно,

$$w_0 + w_1 + \dots + w_M = 0$$

есть уравнение гиперповерхности V в точке y .

Пусть $Y_l \subset \{(q_\mu, \dots, q_M)\}$ состоит из таких наборов $(q_\mu, \dots, q_M)$, что регулярность последовательности w_* впервые нарушается на l -м шаге, $l = 1, \dots, M-1$:

- $w_0 = 0$;
- $\text{codim}_{\mathbb{P}}\{w_1 = \dots = w_{l-1} = 0\} = l-1$;
- существует компонента B множества $\{w_1 = \dots = w_{l-1} = 0\}$ такая, что $w_l|_B \equiv 0$.

Ввиду однородности всех многочленов w_i по $(u, z_2, \dots, z_M)$ можно рассмотреть проективизацию $\mathbb{P}^{M-1} = \mathbb{P}(\mathbb{C}^M \ni y)$ (где за нуль аффинного пространства $\mathbb{C}^M$ принята именно точка y) и считать $B \subset \mathbb{P}^{M-1}$ проективным множеством.

Очевидно,

$$Y(y) = \prod_{l=1}^{M-1} Y_l,$$

так что оценка (21) вытекает из неравенства

$$\text{codim}_{\mathcal{V}_\mu(x)} Y_l \geq M + 1 \quad (23)$$

для каждого $l = 1, \dots, M-1$. Следуя предложенной в [1] схеме аргументов, положим

$$Y_l = Y_l^\circ \cup Y_l^+,$$

где открытое в Y_l подмножество $Y_l^\circ \subset Y_l$ выделяется условием: существует компонента B множества $\{w_1 = \dots = w_{l-1} = 0\}$, не являющаяся конусом с вершиной в точке $p = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{P}^{M-1}$, такая, что $w_l|_B \equiv 0$. Здесь $p \in \mathbb{P}^{M-1}$ есть образ точки $x \in \mathbb{C}^M \setminus \{y\}$ при проективизации. Очевидно, это условие является открытым. Наоборот, замкнутое подмножество $Y_l^+ \subset Y_l$ выделяется условием: существует компонента $B \subset \{w_1 = \dots = w_{l-1} = 0\}$ — конус с вершиной в точке p , — на которой w_l обращается в нуль. Множества Y_l° и Y_l^+ имеют непустое пересечение.

Очевидно, достаточно доказать оценку (23) для Y_l° и Y_l^+ по отдельности.

4.2. Случай общего положения. Пусть $B \subset \mathbb{P}^{M-1}$ — не конус с вершиной p . Мы почти дословно повторяем рассуждения из [1]. Возьмем общее подпространство $L \subset \mathbb{P}^{M-1}$, $\text{codim } L = \dim B$, содержащее точку p . Пусть

$$\pi_L: \mathbb{P}^{M-1} \dashrightarrow \mathbb{P}^{\dim B}$$

— соответствующая проекция. По предположению

$$\pi_L(B) = \mathbb{P}^{\dim B}$$

и легко видеть, что для любой линейной функции

$$s \in H^0(\mathbb{P}^{\dim B}, \mathcal{O}(1))$$

имеем

$$\pi_L^* s \in \langle z_2, \dots, z_M \rangle$$

(именно потому, что $p \in L$). В частности, имеется подпространство

$$W_l = \pi_L^* H^0(\mathbb{P}^{\dim B}, \mathcal{O}(l))$$

однородных многочленов степени l от $z_2, \dots, z_M$ такое, что для любого $g \in W \setminus \{0\}$ получаем

$$g|_B \neq 0.$$

Отметим, что многочлен w_j есть линейная комбинация многочленов вида $u^e q_{i,j-e}$, так что многочлены $q_{i,l}$ не входят в $w_0, \dots, w_{l-1}$. Фиксируя многочлены $q_{i,j}$, $j \leq l-1$, и, тем самым, B , мы получаем

$$\dim W_l = \binom{M}{l} \geq M$$

независимых условий на $q_{i,l}$, ибо

$$w_l = \sum_{i=\max(\mu,l)}^M q_{i,l} + (\#),$$

где в $(\#)$ входят только многочлены $q_{i,j}$, $j \leq l-1$. Кроме того, имеется еще одно независимое условие, $y \in V$:

$$q_{\mu,0} + \dots + q_{M,0} = 0,$$

откуда получаем окончательно:

$$\text{codim}_{\mathcal{V}_{\mu}(x)} Y_l^{\circ} \geq M+1,$$

что и требовалось.

4.3. Случай конуса. Если B – конус с вершиной p , то предыдущие рассуждения дают более слабую оценку

$$\text{codim}_{\mathcal{V}_{\mu}(x)} Y_l^+ \geq \binom{M-1}{l} + 1, \quad (24)$$

ибо здесь имеем проекцию из подпространства $L \ni p$, $\text{codim } L = \dim B - 1$,

$$\pi_L: B \dashrightarrow \mathbb{P}^{\dim B-1}.$$

Оценка (24) достаточна для наших целей во всех случаях, кроме трех: $l = 1, M-2, M-1$. Разберем их по отдельности. Пусть сначала $l = 1$.

В этом случае имеем следующие (очевидно, независимые) условия:

- $w_0 = 0$, т.е. $q_{\mu,0} + \dots + q_{M,0} = 0$ (1 условие);
- коэффициент при u в w_1 обращается в нуль:

$$\sum_{i=\mu}^M i q_{i,0} = 0$$

(еще 1 условие);

- $(z_2, \dots, z_M)$ -часть w_1 обращается в нуль:

$$q_{\mu,1} + \dots + q_{M,1} \equiv 0$$

$(M-1)$ условий).

В итоге получаем, как и требуется, $M+1$ условие (выражающее просто негладкость V в точке y).

Пусть теперь $l = M-1$. Здесь B – прямая, проходящая через точку $p = (1, 0, \dots, 0)$. Все многочлены

$$w_0, w_1, \dots, w_{M-1}$$

обращаются на B в нуль. Но поскольку B проходит через точку p (является “конусом с вершиной” p), откуда следует, что все коэффициенты при степенях u в (22), т.е. все многочлены

$$w_{k,k-e} = \sum_{i=\max(\mu,k)}^M \binom{i+e-k}{e} q_{i,k-e}, \quad (25)$$

$k = 0, 1, \dots, M-1$, $e = 0, 1, \dots, k$, обращаются на B в нуль. Все эти многочлены зависят только от $z_2, \dots, z_M$. Таким образом, получаем следующую задачу в $\mathbb{P}^{M-2}$. Пусть

$$\mathcal{Q} = \{q_{i,j} = q_{i,j}(z_2, \dots, z_M) : \mu \leq i \leq M, 0 \leq j \leq M-1, \deg q_{i,j} = j\}$$

– пространство всех наборов однородных многочленов $q_{i,j}$ и

$$\mathcal{W} = \{w_{k,e} = w_{k,e}(z_2, \dots, z_M) : 0 \leq k \leq M-1, 0 \leq e \leq k, \deg w_{k,e} = e\}$$

– аналогичное пространство наборов $w_{k,e}$. Пусть

$$\xi: \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{W}$$

– линейное отображение, заданное формулами (25). Обозначим через $\mathcal{W}^\# \subset \mathcal{W}$ подмножество наборов $(w_{k,e})$, имеющих непустое множество нулей в $\mathbb{P}^{M-2}$. Необходимо оценить коразмерность

$$\text{codim}_{\mathcal{Q}} \xi^{-1}(\mathcal{W}^\#).$$

Очевидно,

$$\mathcal{W}^\# = \bigcup_{a \in \mathbb{P}^{M-2}} \mathcal{W}^\#(a),$$

где $\mathcal{W}^\#(a) = \{(w_{k,e}) : w_{k,e}(a) = 0, 0 \leq k \leq M-1, 0 \leq e \leq k\}$. Следовательно,

$$\text{codim}_{\mathcal{Q}} \xi^{-1}(\mathcal{W}^\#) \geq \text{codim}_{\mathcal{Q}} \xi^{-1}(\mathcal{W}^\#(a)) + 2 - M. \quad (26)$$

Оценим теперь коразмерность $\text{codim}_{\mathcal{Q}} \xi^{-1}(\mathcal{W}^\#(a))$. Прежде всего, очевидно,

$$\text{codim}_{\mathcal{W}} \mathcal{W}^\#(a) = \frac{M(M+1)}{2}.$$

Однако отображение ξ не сюръективно, и поэтому искомая коразмерность $\text{codim}_{\mathcal{Q}} \xi^{-1}(\mathcal{W}^\#(a))$ меньше.

Положим для каждого $j = 0, \dots, M-1$

$$\mathcal{Q}_j = \{q_{i,j} : \mu \leq i \leq M, \deg q_{i,j} = j\},$$

$$\mathcal{W}_j = \{w_{k,j} : j \leq k \leq M-1, \deg w_{k,j} = j\}.$$

Имеются естественные вложения $\mathcal{Q}_j \subset \mathcal{Q}$, $\mathcal{W}_j \subset \mathcal{W}$, дающие разложение в прямую сумму

$$\mathcal{Q} = \bigoplus_{j=0}^{M-1} \mathcal{Q}_j, \quad \mathcal{W} = \bigoplus_{j=0}^{M-1} \mathcal{W}_j,$$

причем

$$\xi = \bigoplus_{j=0}^{M-1} \xi_j,$$

где $\xi_j: \mathcal{Q}_j \rightarrow \mathcal{W}_j$ дается формулой (25). Положим

$$\mathcal{W}_j^\#(a) = \{(w_{k,j}) : w_{k,j}(a) = 0, j \leq k \leq M-1\}.$$

Очевидно,

$$\mathcal{W}^\#(a) = \bigoplus_{j=0}^{M-1} \mathcal{W}_j^\#(a)$$

и поэтому

$$\text{codim}_{\mathcal{Q}} \xi^{-1}(\mathcal{W}^\#(a)) = \sum_{j=0}^{M-1} \text{codim}_{\mathcal{Q}_j} \xi_j^{-1}(\mathcal{W}_j^\#(a)). \quad (27)$$

ЛЕММА 5. *Имеет место равенство*

$$\operatorname{codim}_{\mathcal{Q}_j} \xi_j^{-1}(\mathcal{W}_j^\#(a)) = \min(M - \max(\mu, j) + 1, M - j).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{Q}_{i,j}, \mathcal{W}_{k,j}$ суть пространства однородных многочленов от $z_2, \dots, z_M$ степени j , так что

$$\mathcal{Q}_j = \bigoplus_{i=\max(\mu, j)}^M \mathcal{Q}_{i,j}, \quad \mathcal{W}_j = \bigoplus_{k=j}^{M-1} \mathcal{W}_{k,j}.$$

В терминах этих прямых разложений отображение ξ_j задается матрицей линейных отображений

$$\Theta^{(j)} \operatorname{id} = \|\theta_{ik}^{(j)} \operatorname{id}\|, \quad \theta_{ik}^{(j)} = \binom{i-j}{k-j} \quad (28)$$

(все пространства $\mathcal{Q}_{i,j}, \mathcal{W}_{k,j}$ естественно изоморфны и символ id обозначает естественный изоморфизм). В (28) $i \geq \max(\mu, j), k = j, \dots, M-1$. Если символ

$$\binom{i-j}{k-j}$$

не имеет смысла ($i < k$ или одно из двух целых чисел отрицательно), то его значение полагается равным нулю. Например, при $j \leq \mu$ матрица $\Theta^{(j)}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \binom{\mu-j}{0} & \binom{\mu+1-j}{0} & \cdots & \binom{M-1-j}{0} & \binom{M-j}{0} \\ \binom{\mu-j}{1} & \binom{\mu+1-j}{1} & \cdots & \binom{M-1-j}{1} & \binom{M-j}{1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \binom{\mu-j}{\mu-j} & \binom{\mu+1-j}{\mu-j} & \cdots & \binom{M-1-j}{\mu-j} & \binom{M-j}{\mu-j} \\ 0 & \binom{\mu+1-j}{\mu+1-j} & \cdots & \binom{M-1-j}{\mu+1-j} & \binom{M-j}{\mu+1-j} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \binom{M-1-j}{M-1-j} & \binom{M-j}{M-1-j} \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что матрица $\Theta^{(j)}$ имеет максимальный ранг

$$\min(M - \max(\mu, j) + 1, M - j).$$

Поэтому существуют такие квадратные невырожденные матрицы A_j, C_j размеров $M - \max(\mu, j) + 1$ и $M - j$ соответственно, что отображение

$$(C_j \operatorname{id})^{-1}(\Theta^{(j)} \operatorname{id})(A_j \operatorname{id})$$

имеет вид

$$\begin{pmatrix} \operatorname{id} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & \operatorname{id} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} \operatorname{id} & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & \operatorname{id} \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

причем автоморфизм C_j id пространства $\mathcal{W}_j$, очевидно, сохраняет подпространство $\mathcal{W}_j^\#(a)$. Лемма доказана.

Применяя лемму 5, соотношения (26) и (27), получаем окончательно

$$\operatorname{codim}_{\mathcal{Q}} \xi^{-1}(\mathcal{W}^\#) \geq \frac{(M + \mu - 1)(M - \mu)}{2} + 2 \geq M + \mu + 1,$$

что завершает рассмотрение случая $l = M - 1$.

В случае $l = M - 2$ получаются гораздо более сильные оценки, так как набор многочленов $(w_{i,j})$ (здесь $i \leq M - 2$) обязан иметь уже одномерное множество общих нулей. Несложные вычисления, полностью аналогичные проведенным выше, здесь приводить не будем. Доказательство предложения 9 завершено.

Список литературы

1. *Pukhlikov A. V.* Birational automorphisms of Fano hypersurfaces // *Invent. Math.* 1998. V. 134. № 2. P. 401–426.
2. *Пушликов А. В.* Бирациональные автоморфизмы трехмерной кватрики с простейшей особенностью // *Матем. сб.* 1988. Т. 135 (177). № 4. С. 472–496.
3. *Corti A.* Singularities of linear systems and 3-fold birational geometry // *Explicit birational geometry of threefolds.* Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000. P. 259–312. (London Math. Soc. Lecture Note Ser. V. 281.)
4. *Kollár J., et al.* Flips and abundance for algebraic threefolds. Paris: Soc. Math. France, 1992. P. 9–27. (Astérisque. V. 211.)
5. *Pukhlikov A. V.* Birational automorphisms of double spaces with singularities // *J. Math. Sci.* 1997. V. 85. № 4. P. 2128–2141.
6. *Pukhlikov A. V.* Birational rigid singular Fano hypersurfaces // *J. Math. Sci.* 2001 (to appear).
7. *Corti A., Mella M.* Birational geometry of terminal quartic 3-folds. I // Preprint, math.AG/0102096.
8. *Corti A., Pukhlikov A., Reid M.* Fano 3-fold hypersurfaces // *Explicit birational geometry of threefolds.* Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000. P. 175–258. (London Math. Soc. Lecture Note Ser. V. 281.)
9. *Исковских В. А., Манин Ю. И.* Трехмерные кватрики и контрпримеры к проблеме Люрота // *Матем. сб.* 1971. Т. 86. № 1. С. 140–166.
10. *Pukhlikov A. V.* Essentials of the method of maximal singularities // *Explicit birational geometry of threefolds.* Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000. P. 73–100. (London Math. Soc. Lecture Note Ser. V. 281.)
11. *Чельцов И. А.* Лог-канонические пороги на гиперповерхностях // *Матем. сб.* 2001. Т. 192. № 8. С. 155–172.
12. *Cheltsov I. A., Park J.* Log-canonical thresholds and generalized Eckard points // Preprint, math.AG/0003121.

Математический институт
им. В. А. Стеклова РАН

Поступила в редакцию
04.09.2001