Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. К. Бабенко, Гипотеза Лёвнера, бочка Безиковича и относительная систолическая геометрия, *Матем. сб.*, 2002, том 193, номер 4, 3–16

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm641>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 17:19:02

УДК 512.7

И. К. Бабенко

Гипотеза Лёвнера, бочка Безиковича и относительная систолическая геометрия

Работа посвящена относительной систолической геометрии на компактном многообразии с краем. Изучаются достаточные условия, обеспечивающие интересистическую жесткость или интересистическую мягкость на таких многообразиях. Сформулирован ряд открытых вопросов.

Библиография: 17 названий.

§ 1. Гипотеза Лёвнера и бочка Безиковича

В конце 1940-х годов Лёвнер фактически заложил основы систолической геометрии, доказав свое знаменитое изопериметрическое неравенство для двумерного тора и сформулировав несколько гипотез об изопериметрических свойствах куба и сходных с ним топологических объектов. К сожалению, эти идеи Лёвнера изначально не были опубликованы и поэтому достаточно поздно получили заслуженную известность. Принципиальную роль в пропаганде идей Лёвнера и его последователей сыграли работы Берже, в частности [1], [2]. Для первого знакомства с кругом проблем, восходящих к идеям Лёвнера, см. также прекрасную энциклопедию по изопериметрическим неравенствам [3].

Вернемся к изопериметрическому неравенству для куба. Рассмотрим топологический куб $I^m = \prod_{i=1}^m [0, 1]_i$, он имеет m пар $(m-1)$ -граней:

$$I_{j,\alpha}^{m-1} = \prod_{i < j} [0, 1]_i \cdot \{\alpha\} \cdot \prod_{i > j} [0, 1]_i, \quad \alpha = 0, 1, \quad 1 \leq j \leq m.$$

Пусть I^m снабжен римановой метрикой g , которую можно считать заданной на некоторой окрестности I^m в $\mathbb{R}^m$. Относительно этой метрики можно определить объем куба $V(I^m) = \text{Vol}(I^m, g)$ и m высот $h_j = \text{dist}(I_{j,0}^{m-1}, I_{j,1}^{m-1})$, $j = 1, 2, \dots, m$. Оказывается, что для любой метрики g на I^m справедливо неравенство, аналогичное неравенству для параллелепипеда в евклидовом пространстве:

$$\text{Vol}(I^m, g) \geq \prod_{i=1}^m h_i. \quad (1)$$

Сейчас это неравенство носит имя Безиковича, первоначально оно было высказано Лёвнером и даже доказано им для гладких метрик и $m = 2$. Безикович [4]

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-01201) и Швейцарского национального фонда научных исследований.

дал доказательство (1) в более общих предположениях на расстояние (метрику) между точками. Работа [4] была первым опубликованным доказательством (1).

Сходная проблема для топологического цилиндра также была сформулирована Лёвнером и, в определенном смысле, разрешена Безиковичем негативно. Как и в оригинальной работе [4], рассмотрим трехмерный цилиндр $Z = [0, 1] \times D^2$, где D^2 – стандартный двумерный диск. Цилиндр Z имеет два основания $Z_\alpha = \{\alpha\} \times D^2$, $\alpha = 0, 1$, и боковую поверхность $\partial_\delta Z = [0, 1] \times \partial D$. Пусть Z снабжен римановой метрикой g , которую, как и выше, можно считать заданной в некоторой окрестности Z . В этой ситуации корректно определена высота цилиндра $h = \text{dist}_g(Z_0, Z_1)$, а также минимальная площадь “горизонтальных” сечений. Под “горизонтальными” сечениями мы понимаем гомеоморфные вложения двумерного диска $s: D^2 \rightarrow Z$ такие, что $s(\partial D^2) \subset \partial_\delta Z$. Чтобы избежать лишних проблем с вычислением площади таких сечений, будем всегда предполагать, что гомеоморфизм s липшицев или даже кусочно гладкий. При этом соглашении корректно определена площадь $\text{mes}_2(s)$ такого сечения. Положим $a = \min_s \text{mes}_2(s)$, где s пробегает множество “горизонтальных” сечений. Вторая проблема Лёвнера состоит в следующем: верно ли, что при сделанных предположениях имеет место неравенство:

$$\text{Vol}(Z, g) \geq h \cdot a. \quad (2)$$

При кажущейся близости этих проблем Лёвнера неравенство (2), как показал Безикович [4], вообще говоря, несправедливо. Безикович сконструировал оригинальной формы сосуд, который мы в дальнейшем будем называть “бочкой Безиковича”. Этот сосуд вложен в $\mathbb{R}^3$ и гомеоморфен Z (даже гладко, за исключением границы). При таком гомеоморфизме евклидова метрика внутри бочки переходит в некоторую риманову метрику на цилиндре, которая, как показал Безикович, не удовлетворяет неравенству (2).

Как это часто бывает, возможность получения положительного результата типа неравенства (1) дала повод для различных обобщений неравенства Безиковича–Лёвнера (1). Укажем, например, работы [5]–[7], где наряду с более общими формулировками можно найти полезные идеи для доказательства неравенств типа (1). Отметим также работу Громова [8], где даны топологические обобщения неравенства (1), а именно на так называемые обобщенные кубы. Под обобщенным кубом $(M, \partial M)$ понимается некоторое ориентируемое многообразие с границей, допускающее отображение $f: (M, \partial M) \rightarrow (I^m, \partial I^m)$ ненулевой степени. Для обобщенного куба роль противоположных граней играют прообразы соответствующих граней стандартного куба. Сделанное соглашение позволяет определить “высоты” $\{h_i\}_{i=1}^m$ для каждой римановой метрики g на M . Это приводит к обобщенному неравенству Безиковича (или Лёвнера–Безиковича) типа (1), в которое естественным образом войдет степень $\deg f$ отображения f . Детали можно найти в [8].

Говоря современным языком, обе проблемы Лёвнера выражают некоторую зависимость или независимость между относительными систолами риманова многообразия с краем и его объемом. Проанализируем более аккуратно вторую проблему Лёвнера. Цилиндр Z представляет собой простейший кобордизм многообразий с краем. В качестве таких многообразий выступают верхнее и нижнее основания цилиндра Z_0 и Z_1 , снабженные надлежащими ориентациями. Боковая поверхность цилиндра является кобордизмом краев ∂Z_0 и ∂Z_1 указанных многообразий. В этом

контексте высота цилиндра h может быть интерпретирована как относительная 1-систола указанного кобордизма

$$h = \text{sys}_1(Z, Z_0 \cup Z_1; g), \quad (3)$$

точное определение можно найти в следующем параграфе. При таком подходе минимальная площадь “горизонтальных” сечений будет ни чем иным, как относительной гомотопической систолой

$$a = \text{sys}_2^\pi(Z, \partial_\delta Z; g) = \inf_{s \in \pi_2(Z, \partial_\delta Z)} \text{mes}(s), \quad (4)$$

где минимум берется по всем липшицевым отображениям s , представляющим нетривиальный элемент относительной гомотопической группы $\pi_2(Z, \partial_\delta Z) \simeq \mathbb{Z}$.

Рис. 1

Бочка Безиковича показывает, что, меняя метрику g на цилиндре, произведение систол (3) и (4) нельзя ограничить сверху объемом самого цилиндра. В современной терминологии это называется *относительной интерсистолической мягкостью цилиндра*. Однако более пристальный взгляд на бочку Безиковича позволяет увидеть нетривиальный относительный гомологический цикл $c \in H_2(Z, \partial_\delta Z; \mathbb{Z})$ достаточно маленькой площади. Этот цикл изображен на рис. 1 а). Чтобы не загромождать рисунок, пропорции самой бочки соблюдены условно, точные размеры читатель найдет в [4]. Цикл малой площади изображен темным, он нетривиален по модулю боковой поверхности. На рис. 1 б) представлен образ этого цикла после гомеоморфизма, вытягивающего внутреннюю полость бочки наружу и переводящего границу полости в часть боковой границы стандартного цилиндра. Это

несложное замечание показывает, что вторую проблему Лёвнера не следует ставить в гомотопических терминах (что подтверждается существованием бочки), а следует формулировать в гомологических терминах. Справедливость такого предположения будет видна в следующем параграфе, где мы установим неравенства типа (2) для произвольного ориентируемого кобордизма многообразий с краем.

В неравенство (2) вовлечены систолы дополнительных размерностей на многообразии с краем. Попытки обобщения (2) приводят к исследованию произведения двух систол произвольных дополнительных размерностей на таком многообразии. При этом, как и в двойственности Пуанкаре, одну систолу мы рассматриваем в относительных гомологиях по модулю края, а другую – в абсолютных.

Недавний результат [9] показывает существенную разницу между обычными и стабильными систолами. Интерсистолическое неравенство для стабильных систол рассматривалось в [8], [10], [11] и в окончательной и универсальной форме в недавней работе [12]. В этих работах показано, что для замкнутых многообразий справедливо интерсистолическое неравенство типа (2):

$$\text{Vol}(M, g) \geq c(M) \cdot \text{stsys}_k(M, g) \cdot \text{stsys}_{m-k}(M, g), \quad (5)$$

где $c(M)$ – некоторая положительная константа, зависящая только от топологии M . Неравенство (2) сформулировано для обычных систол, но в рассмотренном частном случае размерностей $(1, m-1)$ эти систолы, как мы увидим, превращаются в стабильные относительные систолы. Видимо, это одна из основных причин, по которой аналоги (2) справедливы для произвольных кобордизмов многообразий с краем.

В следующем параграфе мы дадим строгие определения различного рода систол и рассмотрим различные варианты относительной $(1, m-1)$ -жесткости на многообразии с краем. Параграф 3 посвящен исследованию интерсистолической мягкости на многообразии с краем.

§ 2. Систо́лы размерности и коразмерности 1 на многообразии с краем

Начнем этот параграф с основных определений и точных описаний основных объектов, с которыми мы будем иметь дело ниже. Основным объектом дальнейшего изучения будет гладкое многообразие X с краем ∂X , при этом на крае может существовать некоторая стратификация и X может иметь углы в естественном понимании этого термина, см., например, [13]. Топологически $(X, \partial X)$ представляет собой обычное многообразие с краем. Одним из основных примеров такого рода является (ориентируемый) кобордизм многообразий с краем. Пусть M_1, M_2 – два многообразия с краем размерности m , а N – некоторый кобордизм краев $\partial N = \partial M_1 - \partial M_2$, где ориентации согласованы надлежащим образом. Будем говорить, что $(m+1)$ -мерное многообразие X *осуществляет кобордизм* M_1 и M_2 , если $\partial X = M_1 - M_2$. Многообразие X имеет углы вдоль подмногообразий края ∂M_1 и ∂M_2 . Мы не обсуждаем проблему сглаживания углов, имеющую значение в дифференциальной топологии, но несущественную для нас. Многообразие N будем называть *боковой границей* кобордизма X и обозначать через $\partial_\delta X$.

Пусть X – гладкое многообразие (с краем) и $A \subset X$ – замкнутое подмножество. Под $C_k(X, A; \mathbf{k})$ мы понимаем множество сингулярных липшицевых относительных цепей с коэффициентами в кольце $\mathbf{k}$ ($\mathbf{k} = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$). Как обычно, $\mathcal{E}^k(X)$

означает пространство всех внешних k -форм на X , а $\mathcal{E}^k(X, A)$ – подпространство k -форм, обращающихся в 0 на подмножестве A .

Если многообразие X снабжено римановой метрикой g , то на пространствах $\mathcal{E}^k(X, A)$ определена естественная норма “comass”, детали можно найти в [14]. Двойственное к $\mathcal{E}^k(X, A)$ пространство $T^k(X, A)$, называемое *пространством относительных k -поток*ов, наделяется дуальной нормой, обозначаемой “mass”. Если $c \in C_k(X, A; \mathbf{k})$, то масса потока, задаваемого этой цепью,

$$c(\alpha) = \int_c \alpha, \quad \alpha \in \mathcal{E}^k(X, A), \quad (6)$$

называется *массой c* и обозначается через $\text{mass}(c)$.

Для классов гомологий положим

$$\text{mass}(u) = \inf_{c \in u} \text{mass}(c), \quad u \in \mathbf{H}_k(X, A; \mathbf{k}),$$

где нижняя грань берется по всем потокам, представляющим класс u . Если $f: \Delta^k \rightarrow X$ – сингулярный липшицев симплекс, то корректно определен его объем $\text{Vol}_k(f, g)$, см. [3]. Для сингулярной липшицевой k -цепи $c = \sum_i r_i f_i$, как обычно, положим

$$\text{Vol}_k(c; g) = \sum_i |r_i| \cdot \text{Vol}_k(f_i, g), \quad (7)$$

а для классов гомологий $u \in \mathbf{H}_k(X, A; \mathbf{k})$, $\mathbf{k} = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$, соответственно положим

$$\text{Vol}_k(u; g) = \inf_{c \in u} \text{Vol}_k(c, g).$$

Здесь коэффициенты цепей строго соответствуют коэффициентам гомологий. Из (6) получаем $|c(\alpha)| \leq \text{Vol}_k(c, g) \cdot \text{comass}(\alpha)$, $\alpha \in \mathcal{E}^k(X, A)$, что приводит к неравенству

$$\text{mass}(u) \leq \text{Vol}_k(u, g), \quad u \in \mathbf{H}_k(X, A; \mathbf{k}). \quad (8)$$

Для $\mathbf{k} = \mathbb{Z}$ последнее неравенство может быть строгим. Для вещественных классов гомологий “mass” и “Vol_k” совпадают, как показано в [15]. В этой же работе доказано, что для целочисленных гомологий имеет место формула усреднения:

$$\text{mass}(u) = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{l} \cdot \text{Vol}_k(lu), \quad u \in \mathbf{H}_k(X, A; \mathbb{Z}),$$

причем последовательность $(1/l) \cdot \text{Vol}_k(lu)$ может быть строго монотонной.

Дадим, наконец, определения наиболее употребимых систол. Величина

$$\text{sys}_k(X, A; g) = \inf_{u \in \mathbf{H}_k(X, A; \mathbb{Z}), u \neq 0} \text{Vol}_k(u; g)$$

называется *k -систолой* пары (X, A) в метрике g . Норма mass автоматически равна нулю на элементах кручения. Величину

$$\text{stsys}_k(X, A; g) = \inf_{u \in \mathbf{H}_k(X, A; \mathbb{Z}), u \neq 0 \pmod{\text{Tors}}} \text{mass}(u; g)$$

назовем *стабильной систолой* пары (X, A) в метрике g . Примем следующее техническое соглашение: если $\mathbf{H}_k(X, A; \mathbb{Z}) = 0$, то положим $\text{sys}_k(X, A; g) = \infty$; если

$\mathbf{H}_k(X, A; \mathbb{Z}) = \text{Tors}$, то положим $\text{stsys}_k(X, A; g) = \infty$ для любой метрики g . Наконец, заметим, что если $A = \emptyset$, то относительные систолы пары (X, A) превращаются в систолы многообразия X .

Теперь вернемся к бочке Безиковича, изображенной на рис. 1. Как видно из рис. 1 б), цикл малой площади, возникающий в оригинальной конструкции Безиковича, имеет род 1. Некоторым усложнением конструкции бочки можно создать малые циклы любого наперед заданного рода. Покажем, что такие циклы всегда существуют, причем в существенно более общей ситуации.

Пусть M_1 и M_2 — два (непустых) ориентируемых m -мерных многообразия с краем. Рассмотрим произвольный ориентируемый кобордизм X этих многообразий.

ТЕОРЕМА 1. *Для любой римановой метрики g на X имеет место неравенство*

$$\text{Vol}(X; g) \geq \text{sys}_1(X, M_1 \cup M_2; g) \cdot \text{sys}_m(X, \partial_\delta X; g). \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся идеями, восходящими к [5]–[7], которые уже многократно применялись в близких вопросах. Пусть $h = \text{dist}(M_1, M_2)$; очевидно, $h \geq \text{sys}_1(X, M_1 \cup M_2; g)$. Рассмотрим отображение $f: X \rightarrow [0, h]$, заданное формулой

$$f(q) = \min\{\text{dist}(q, M_1), h\}, \quad q \in X.$$

Это липшицева функция на X , причем $\text{Lip}(f) \leq 1$, кроме того, $f(M_1) = 0$, $f(M_2) = h$. Для почти всех $t \in [0, h]$ $f^{-1}(t)$ является гладким подмногообразием с краем, гомологичным $M_1 \pmod{\partial_\delta X}$. По формуле Кронрода–Федерера [3]

$$\text{Vol}(X; g) \geq \int_0^h \mathcal{H}_m(f^{-1}(t)) dt, \quad (10)$$

где $\mathcal{H}_m$ — m -мерная мера Хаусдорфа в X относительно расстояния, задаваемого g . Из (10) вытекает существование гладкого цикла $f^{-1}(t)$, гомологичного $M_1 \pmod{\partial_\delta X}$ и имеющего m -объем не более $(\text{Vol}(X, g) + \varepsilon)/(h + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$ — произвольное наперед заданное число. В силу произвольности ε и выбора h получаем требуемое неравенство на систолы.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Согласно [15] в ориентируемом случае систола коразмерности 1 всегда стабильна. Одномерная систола $\text{sys}_1(X, M_1 \cup M_2; g)$, вообще говоря, не обязательно будет стабильной. Тем не менее, как видно из доказательства теоремы 1, неравенство (9) имеет скрытый стабильный характер. По существу, мы доказали несколько более сильное неравенство

$$\text{Vol}(X; g) \geq h \cdot s,$$

где h — минимальная длина кривых, соединяющих M_1 и M_2 , а s — минимальный m -объем циклов, принадлежащих подгруппе $\mathbf{H}_m(M_1, \partial_\delta M_1; \mathbb{Z}) \subset \mathbf{H}_m(X, \partial_\delta X; \mathbb{Z})$. Из определения h видно, что h совпадает с массой относительных 1-циклов

$$\tau: [0, 1] \rightarrow X, \quad \tau(i) \in M_i, \quad i = 0, 1.$$

Это объясняет стабильную природу h и самого неравенства (9).

Теорема 1 близка к теореме А из [11]. Топологические условия теоремы 1 существенно шире, чем в теореме А. Кроме того, обратное утверждение, как и в [11], вообще говоря, не имеет места даже при условии $\mathbf{H}_1(X, M_1 \cup M_2; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$.

Частным случаем теоремы 1 является обычный кобордизм, что, в свою очередь, является частным случаем многообразия с краем. Рассмотрим m -мерное многообразие с краем $(X, \partial X)$, снабженное римановой метрикой g . Выясним, при каких условиях на X справедлив аналог неравенства (9) для пары систол $\text{sys}_1(X, \partial X; g)$, $\text{sys}_{m-1}(X; g)$. Как мы сейчас увидим, справедливость неравенства типа (9) существенно зависит от топологии X , точнее, от числа компонент края и от ориентируемости.

Пусть X ориентируемо и $b_0(\partial X) = \text{rk } \mathbf{H}_0(\partial X; \mathbb{Z}) > 1$, тогда, взяв одну компоненту ∂X в качестве M_1 , а остальные компоненты в качестве M_2 , мы попадем в область применения теоремы 1, следовательно, для любой метрики g на X имеет место неравенство

$$\text{Vol}(X; g) \geq \text{sys}_1(X, \partial X; g) \cdot \text{sys}_{m-1}(X; g). \quad (11)$$

Случай $b_0(\partial X) = 1$ полностью отличен от предыдущего, и неравенство (11), вообще говоря, не имеет места. Рассмотрим симплициальный комплекс

$$Y = X \cup_{\partial X} \mathbf{C}(\partial X), \quad (12)$$

где $\mathbf{C}(\partial X)$ — конус. В качестве триангуляции на Y возьмем естественное продолжение какой-либо гладкой триангуляции на X . Имеется естественное отображение $p: (X, \partial X) \rightarrow (Y, q)$, где q — вершина конуса в (12). Можно считать, что отображение p симплициально. Условие $b_0 = 1$ гарантирует мономорфность отображения

$$p_* \circ j_*: \mathbf{H}_{m-1}(X; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbf{H}_{m-1}(Y; \mathbb{Z}), \quad (13)$$

где j_* — гомоморфизм из точной последовательности тройки. Мономорфизм (13) вместе с изоморфизмом p_* на одномерных гомологиях сводит проблему справедливости (11) на X к справедливости аналогичного неравенства на Y , но уже для пары обычных систол, см. [9; предложение 2.2.7].

Теперь можно применить основной результат из [9], гарантирующий существование последовательности метрик, нарушающих неравенство (11). Наконец, заметим, что если X неориентируемо и ∂X также неориентируемо, то предыдущая конструкция с отображением p в пространство Y остается в силе. Окончательно получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть X — многообразие размерности $m > 2$ с краем, причем либо X ориентируемо и ∂X связан, либо X и ∂X неориентируемы. Тогда существует последовательность римановых метрик $\{g_p\}_{p=1}^\infty$ такая, что

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\text{Vol}(X; g_p)}{\text{sys}_1(X, \partial X; g_p) \cdot \text{sys}_{m-1}(X; g_p)} = 0. \quad (14)$$

Если X — неориентируемое многообразие, имеющее хотя бы одну ориентируемую компоненту края, то предыдущая конструкция не работает, поскольку отображение $j_*: \mathbf{H}_{m-1}(X; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbf{H}_{m-1}(X, \partial X; \mathbb{Z})$, использованное выше, имеет нетривиальное ядро. Это обстоятельство играет существенную роль. Действительно, пусть $M \subset \partial X$ — некоторая ориентируемая компонента края и $\tilde{X}$ — двулистное

ориентируемое накрытие X . Тогда край $\partial\tilde{X}$ содержит два подмногообразия M_α , $\alpha = 0, 1$, гомеоморфных M , причем если ориентации $\partial\tilde{X}$, M_α , $\alpha = 0, 1$, согласованы, то $\pi(M_\alpha) = (-1)^\alpha \cdot M$, $\alpha = 0, 1$, где $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ – естественная проекция. Далее рассмотрим два случая:

- 1) $\partial X = M$;
- 2) $\partial X \neq M$.

В первом случае $\partial\tilde{X} = M_0 \cup M_1$, причем вложение $M_0 \hookrightarrow \tilde{X}$ задает элемент $b \in \mathbf{H}_{m-1}(\tilde{X}; \mathbb{Z})$. При проекции $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ мы получим $\pi_*(b) = 2a$, где $a \in \mathbf{H}_{m-1}(X; \mathbb{Z})$ – некоторый элемент бесконечного порядка. Для поднятия $\tilde{g}$ метрики g , заданной на X , будем иметь:

$$\text{Vol}(\tilde{X}; \tilde{g}) = 2 \cdot \text{Vol}(X; g), \quad \text{mass}(b, \tilde{g}) \geq 2 \cdot \text{mass}(a). \quad (15)$$

В действительности второе неравенство является равенством, но для нас это не имеет значения. Пусть γ – кратчайшая $\tilde{g}$ -геодезическая на $\tilde{X}$, соединяющая M_0 и M_1 , а h – ее $\tilde{g}$ -длина. Проекция $\pi(\gamma)$ задает нетривиальный элемент $\mathbf{H}_1(X, \partial X; \mathbb{Z})$, который мы обозначим через α . Возможно, этот элемент имеет порядок 2, как в примере ниже, но он будет $\mathbb{Z}_2$ -двойственным к a . Очевидно,

$$\text{Vol}_1(\alpha, g) \leq h, \quad (16)$$

в действительности имеет место равенство. Наконец, из теоремы 1 для $(\tilde{X}, \tilde{g})$ будем иметь:

$$\text{Vol}(\tilde{X}, \tilde{g}) \geq h \cdot \text{mass}(b, \tilde{g}), \quad (17)$$

откуда в силу (15) и (16) получим

$$\text{Vol}(X, g) \geq \text{Vol}(\alpha, g) \cdot \text{mass}(a, g).$$

Таким образом, имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть X – неориентируемое многообразие с краем, состоящим из единственной компоненты, которая ориентируема. Тогда для любой метрики g на X имеет место неравенство

$$\text{Vol}(X, g) \geq \text{sys}_1(X, \partial X; g) \cdot \text{stsys}_{m-1}(X; g). \quad (18)$$

ПРИМЕР. Пусть $X = \mathcal{P}(\mathbb{RP}^{2k-1})$ – нормальное расслоение на отрезки над $\mathbb{RP}^{2k-1} \subset \mathbb{RP}^{2k}$, $k \geq 2$. Тогда $\mathbf{H}_1(X, \partial X) \simeq \mathbb{Z}_2$ и рассмотренный выше элемент α имеет порядок 2. Как мы видим, неравенство (18), вообще говоря, нестабильно. Тем не менее, это неравенство имеет некое “воспоминание” о своей стабильной природе, поскольку оно пришло с двулистного накрытия, где соответствующее неравенство было стабильным.

Теперь рассмотрим второй случай: $\partial X \neq M$. В отличие от предыдущего случая элемент $\pi_*(b) \in \mathbf{H}_{m-1}(X, \mathbb{Z})$ не сравним с нулем по модулю 2. Поступая как в предыдущем случае, рассмотрим $\tilde{X}$ как кобордизм с нижним основанием M_0 , а в верхнее основание отнесем M_1 и все остальные компоненты края. Пусть α , γ и h имеют тот же смысл, что и выше. Заметим, что, как и выше, α может иметь порядок 2, но если γ соединяет два подмногообразия $\partial\tilde{X}$, проектирующиеся в различные компоненты ∂X , то α имеет бесконечный порядок. Наконец, из неравенства (17) получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть X – неориентируемое многообразие с краем, имеющим хотя бы одну ориентируемую компоненту, причем общее число компонент края $b_0(\partial X) > 1$. Тогда для любой метрики g на X имеет место неравенство:

$$\text{Vol}(X, g) \geq \frac{1}{2} \cdot \text{sys}_1(X, \partial X; g) \cdot \text{sys}_{m-1}(X; g). \quad (19)$$

Предложения 1–3 решают проблему интерсистолической жесткости на многообразиях с краем размерности $m \geq 3$ для пары систол $\text{sys}_1(X, \partial X; g), \text{sys}_{m-1}(X; g)$ в $\mathbb{Z}$ -гомологиях. Как следует из [9], если X замкнуто, то $(1, m-1)$ -жесткость всегда отсутствует. Для удобства все эти результаты можно свести в одну таблицу. За ориентируемость X и компонент края отвечают следующие числа Бетти $B = \mathbf{b}_m(X, \partial X; \mathbb{Z})$ и $b = \mathbf{b}_{m-1}(\partial X; \mathbb{Z})$. Знаки $+$ и $-$ в таблице 1 отвечают случаям $(1, m-1)$ -жесткости и $(1, m-1)$ -мягкости соответственно. Эта таблица охватывает как случаи многообразия с краем, так и без края.

Таблица 1

$B \setminus b$	0	1	> 1
0	–	+	+
1	–	–	+

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Как показывает предложение 1, в случае неориентируемого X и неориентируемости всех компонент ∂X неравенство (18) не имеет места в случае, когда sys_1 и sys_{m-1} рассматриваются на $\mathbb{Z}$ -гомологиях. Тем не менее, аргументы, использованные в теореме 1, показывают, что если $b_0(\partial X) > 1$, то неравенство (18) будет справедливо для систол, вычисленных в $\mathbb{Z}_2$ -гомологиях.

В заключение укажем аналог теоремы А из [11] для многообразий с краем.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть X – ориентируемое многообразие с краем и $\mathbf{H}_1(X; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, тогда для любой метрики g на X имеет место неравенство:

$$\text{Vol}(X, g) \geq \text{stsys}_1(X; g) \cdot \text{stsys}_{m-1}(X, \partial X; g). \quad (20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как уже отмечалось выше, на ориентируемом многообразии систола коразмерности 1 всегда стабильна. Для доказательства предложения следует рассмотреть последовательность гомологических накрытий $\{X_k\}_{k=1}^\infty$ многообразия X . Если каждое X_k разрезать по $(m-1)$ -мерному циклу (реализованному единым для всех k подмногообразием коразмерности 1), то мы получим последовательность кобордизмов $\{\widehat{X}_k\}_{k=1}^\infty$.

Остается применить теорему 1 к $(\widehat{X}_k, g_k)$, где g_k – поднятие метрики g , и перейти к пределу по k . Это даст стабильную 1-систолу и установит требуемое неравенство.

§3. Интерсистолическая мягкость на многообразии с краем.

Как и выше, $(X; g)$ – компактное риманово многообразие с краем. Ориентируемость X специально не предполагается, размерность m многообразия X считаем далее не меньше 3. В предыдущем параграфе мы исследовали вопрос об интерсистолической мягкости–жесткости для пары систол $\text{sys}_1(X, \partial X; g)$ и $\text{sys}_{m-1}(X; g)$.

Естественным обобщением этой проблемы по размерности является вопрос о справедливости неравенства вида

$$\text{Vol}(X, g) \geq c(X) \text{sys}_r(X, \partial X; g) \cdot \text{sys}_{m-r}(X; g), \quad (21)$$

где $c(X)$ — некоторая положительная константа, зависящая только от топологии X и не зависящая от метрики.

Несуществование такой положительной константы для данного X называют обычно $(r, m-r)$ -*мягкостью*. К сожалению, разработанная на настоящий момент техника пока не позволяет разобраться с возможной справедливостью неравенства (21) при $1 < r \leq m/2$. В этом интервале вопрос полностью открыт.

Недавно в [9] был исследован вопрос об интерсистолической жесткости в терминах систола — стабильная систола дополнительных размерностей, при этом обе систолы рассматривались в абсолютных гомологиях X . Основной результат [9] показывает, что для достаточно широкого класса пространств (римановых полиэдров) для индексов r , строго меньших половины размерности полиэдра, неравенство типа (21) несправедливо, т.е. имеет место интерсистолическая мягкость. Основная цель этого параграфа — установить аналогичный результат на многообразиях с краем и в случае, когда стабильная систола рассматривается в относительных гомологиях. Далее, для технического удобства мы меняем индексацию систол на симметричную по отношению к (21).

ТЕОРЕМА 2. *Для любого многообразия с краем X размерности $m \geq 3$ и каждого $1 \leq k < m/2$ справедливо равенство*

$$\inf_g \frac{\text{Vol}(X, g)}{\text{sys}_k(X; g) \cdot \text{stsys}_{m-k}(X, \partial X; g)} = 0, \quad (22)$$

где g пробегает множество римановых метрик на X .

СЛЕДСТВИЕ 1. *Если в условиях теоремы 2 $\mathbf{H}_{m-k}(X, \partial X; \mathbb{Z})$ свободно от кручения, то*

$$\inf_g \frac{\text{Vol}(X, g)}{\text{sys}_k(X; g) \cdot \text{sys}_{m-k}(X, \partial X; g)} = 0, \quad 1 \leq k < \frac{m}{2}. \quad (23)$$

Заметим, что согласно предложению 4 заменить sys_k на stsys_k в (22) уже нельзя.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. В доказательстве мы будем с некоторыми модификациями следовать методу, изложенному в [9]. Далее используются симплициальные дифференциальные формы, римановы метрики и связанные с ними массы и комассы на произвольных полиэдрах. Необходимые для работы триангуляции гладких многообразий всегда предполагаются гладкими. Все технические детали, как и доказательство совпадения гладких и симплициальных масс на гладком многообразии, можно найти в [9]. Ряд метрических конструкций восходит к работе [16], см. также [17]. За доказательствами некоторых технических утверждений мы будем отсылать читателя к этим работам.

Рассмотрим сферы с отмеченными точками (S^k, q_1) и (S^n, q_2) , где $n = m - k$ ($n > k$), и пусть $S^k = (S^k, q_1) \subset S^k \times S^n$. Следующая лемма представляет относительный аналог предложения 3.3.1 из [9]. Соответствующие метрики были первоначально построены в [16], см. также [17].

ЛЕММА 1. На произведении сфер $S^k \times S^n$, $k < n$, существует последовательность римановых метрик $\{g_p\}_{p=1}^\infty$, удовлетворяющих условиям

- а) $\text{sys}_k(g_p) \geq A$,
- б) $\text{mass}(a) \geq B \cdot p^2$ для каждого $a \in \mathbf{H}_n(S^k \times S^n, S^k; \mathbb{Z})$,
- в) $\text{Vol}(g_p) \leq C \cdot p$,

где A, B, C – некоторые положительные константы, общие для всех метрик.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Возьмем ту же самую последовательность метрик $\{g_p\}_{p=1}^\infty$ и те же константы A, B и C , что и в [9]; таким образом, а) и в) выполняются автоматически. Остается заметить, что оператор границы $\partial: \mathbf{H}_n(S^k \times S^n, S^k; \mathbf{k}) \rightarrow \mathbf{H}_{n-1}(S^k; \mathbf{k})$ в точной последовательности пары всегда тривиален (при $k = n - 1$ нужно рассмотреть следующий член, который является изоморфизмом). Отсюда получаем, что для всякой замкнутой цепи $c \in C_n(S^k \times S^n, S^k; \mathbb{Z})$ существует цепь $c_1 \in C_n(S^k; \mathbb{Z})$ такая, что $\partial c = -\partial c_1$, т.е. $c + c_1$ – абсолютная замкнутая цепь в $C_n(S^k \times S^n; \mathbb{Z})$.

Поскольку $k < n$, то для любой формы $\alpha \in \mathcal{E}^n(S^k \times S^n)$ будем иметь $\int_{c_1} \alpha = \int_{c_1} \alpha|_{S^k} = 0$, следовательно, $\int_{c+c_1} \alpha = \int_c \alpha$.

Отсюда получаем $\text{mass}(c + c_1) = \text{mass}(c)$ для любой римановой метрики g на $S^k \times S^n$. Последнее согласно [9; 3.3.1] устанавливает б) для рассмотренной последовательности метрик $\{g_p\}_{p=1}^\infty$. Это завершает доказательство леммы 1.

Далее рассмотрим некоторую гладкую триангуляцию Θ на $S^k \times S^n$, предполагая при этом, что $S^k \times \{q_2\} \subset S^k \times S^n$ – симплицальный подкомплекс. Пусть H – симплицальный комплекс, а $P = H \cup S^k \times S^n$ – симплицальный комплекс такой, что $H \cap (S^k \times S^n) = S^k \times \{q_2\}$, причем H и $S^k \times S^n$ – подкомплексы P и индуцированная на $S^k \times S^n$ триангуляция совпадает с Θ . Нам будет полезен следующий метрический вариант леммы о вырезании. Пусть $i: (S^k \times S^n, S^k) \rightarrow (P, H)$ – вложение и $i_*: \mathbf{H}_n(S^k \times S^n, S^k; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbf{H}_n(P, H; \mathbb{Z})$ – изоморфизм вырезания.

ЛЕММА 2. Пусть g – риманова метрика на $S^k \times S^n$ и g' – ее произвольное симплицальное продолжение на P . Тогда i_* – изометрия относительно mass_g и $\text{mass}_{g'}$.

Поскольку $k < n$, то лемма 2 очевидно следует из равенств

$$\mathcal{E}^n(S^k \times S^n) \simeq \mathcal{E}^n(S^k \times S^n, S^k) \simeq \mathcal{E}^n(P, H).$$

Дальнейшие рассуждения во многом следуют схеме из [9]. Построенный ниже специальный полиэдр $\widehat{X}$, в отличие от построенного в [9], использует свойства гладкости исходного многообразия X .

Хорошо известно, что при $n > m/2$ для любого элемента $a \in \mathbf{H}_n(X, \partial X; \mathbb{Z})$ бесконечного порядка существует отображение $\psi_a: (X, \partial X) \rightarrow (S^n, *)$ такое, что

$$\psi_{a,*}(a) \neq 0 \tag{24}$$

в $\mathbf{H}_n(S^n, \mathbb{Z})$. Выберем некоторый набор элементов $\{a_i\}_{i=1}^r$ в $\mathbf{H}_n(X, \partial X; \mathbb{Z})$, образующий базис в $\mathbf{H}_n(X, \partial X; \mathbb{Z}) / \text{Tors}$.

Зафиксируем соответствующий набор отображений (24), которые обозначим через $\{\psi_i\}_{i=1}^r$; эти отображения можно предполагать гладкими. Положим $C_i = \psi_i^{-1}(y)$, где y – какое-то регулярное значение для ψ_i , $i = 1, \dots, r$. Набор $\{C_i\}_{i=1}^r$ будет набором k -мерных ($k = m - n$) подмногообразий (без края) с тривиальным нормальным пучком. Очевидно, $\{\psi_i\}_{i=1}^r$ всегда можно выбрать так, чтобы $\{C_i\}_{i=1}^r$ не пересекались. Кроме того, увеличивая, если необходимо, число r отображений ψ_i , можно считать, что $\{C_i\}_{i=1}^r$ связны. С другой стороны, мы не предполагаем, что C_i гомологически нетривиальны в X , они даже не обязаны быть ориентируемыми, если X неориентируемо.

Далее рассмотрим комплексы

$$\begin{aligned}\tilde{X} &= X \cup_{C_i} (C_i \times [0, L] \cup C_i \times S^n), \\ \hat{X} &= X \cup_{C_i} (C_i \times [0, L] \cup_{f_i} S^k \times S^n),\end{aligned}\tag{25}$$

где последняя склейка происходит по некоторому отображению $f_i: C_i \rightarrow S^k$ геометрической степени 1. Такие отображения всегда можно выбрать симплициальными относительно некоторых (гладких) триангуляций на C_i и S^k .

Отображения $f_i \times \text{id}: C_i \times S^n \rightarrow S^k \times S^n$ индуцируют отображение $p: \tilde{X} \rightarrow \hat{X}$, которое будет тождественным всюду, за исключением последних слагаемых $\{C_i \times S^n\}_{i=1}^r$. Наконец, определим отображение $F: X \rightarrow \tilde{X}$. Пусть $D(C_i)$ – некоторая тривиальная трубчатая окрестность C_i , которую мы отождествим с $C_i \times D^k(\rho)$, где $D^k(\rho)$ – стандартный диск. Мы считаем, что окрестности $\{D(C_i)\}_{i=1}^r$ выбраны непересекающимися. В дальнейшей конструкции положим $\rho = L + \pi$. Теперь рассмотрим отображение $h: D(\rho) \rightarrow S^k \vee [0, L]$, которое состоит в экспоненциальном отображении диска $D(\pi) \subset D(\rho)$ на сферу S^k единичного радиуса и отображении каждой сферы $S^{k-1}(\pi + t) \subset D(\rho)$ радиуса $\pi + t$ в точку $L - t$ интервала $[0, L]$. Отображение h послойно индуцирует отображения $h_i: D(C_i) \rightarrow C_i \times [0, L] \cup C_i \times S^n$, $1 \leq i \leq r$, которые продолжаются до диффеоморфизмов $h_i: X \setminus D(C_i) \rightarrow X \setminus C_i$. Каждый диффеоморфизм h_i можно выбрать тождественным вне некоторой окрестности $U_i \supset D(C_i)$, считая при этом, что $\{U_i\}_{i=1}^r$ не пересекаются. Поскольку $\{h_i\}_{i=1}^r$ тождественны на $X \setminus (\bigcup_{i=1}^r U_i)$, то, объединяя их, получаем требуемое отображение $F: X \rightarrow \tilde{X}$.

Далее положим $\hat{X}_i = \hat{X} \setminus (S_i^k \times S^n)$, $1 \leq i \leq r$, где черта обозначает замыкание, и пусть $\hat{\varphi}_i: \hat{X} \rightarrow S^n$ – отображение, состоящее в стягивании $\hat{X}_i$ в точку и естественной проекции $S_i^k \times S^n \rightarrow S^n$. Легко видеть, что отображение $\hat{\varphi}_i \circ p \circ F: X \rightarrow S^n$ гомотопно ψ_i , $1 \leq i \leq r$.

Рассмотрим цепочку отображений в гомологиях

$$\mathbf{H}_n(X, \partial X; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbf{H}_n(\hat{X}, \partial X; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbf{H}_n(\hat{X}, \hat{X}_i; \mathbb{Z}) \simeq \mathbf{H}_n(S^k \times S^n, S^k; \mathbb{Z}),\tag{26}$$

где первое отображение индуцировано $p \circ F$, второе – вложение пар, а третье – вырезание. Из гомотопности $\hat{\varphi}_i \circ p \circ F$ и ψ_i заключаем, что сквозное отображение (26) нетривиально на элементе $a_i \in \mathbf{H}_n(X, \partial X; \mathbb{Z})$.

Наконец, заметим, что из точной последовательности Майера–Виеториса немедленно вытекает, что вложение $j: X \rightarrow \hat{X}$ индуцирует мономорфизм k -мерных гомологий

$$j_*: \mathbf{H}_k(X; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbf{H}_k(\hat{X}; \mathbb{Z}).\tag{27}$$

Теперь перейдем к заключительной части доказательства теоремы 2 – построению последовательностей мягких метрик на X . Иными словами, мы построим последовательность метрик $\{h_p\}_{p=1}^r$ на X такую, что

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\text{Vol}(X; h_p)}{\text{sys}_k(X; h_p) \cdot \text{stsys}_{m-k}(X, \partial X; h_p)} = 0. \quad (28)$$

Сначала построим метрику $\{\hat{h}_p\}_{p=1}^\infty$ на $\hat{X}$ по модели метрик на “доме с пристройками” из [9]. Для этой цели снабдим $X \subset \hat{X}$ некоторой фиксированной метрикой g_0 , на $\{S^k \times S^m\}_{i=1}^r$ для всех i возьмем метрики $\{g_p\}_{p=1}^\infty$ из леммы 1. На каждом “коридоре” возьмем метрику, аналогичную метрике на “коридорах” из [9] с единственной модификацией. Поскольку $g_0|_{C_i}$ фиксирована, то положим $\hat{h}_p|_{[1, L-1] \times C_i} = \lambda(p) \cdot g_0$, где $\lambda(p) = \max_i \text{Lip}(f_i)$, а константа Липшица вычислена относительно метрик $g_0|_{C_i}$ и $g_p|_{S^k}$. На цилиндры $C_i \times [0, 1]$ и $C_i \times [L-1, L]$, $1 \leq i \leq r$, метрика $\hat{h}_p$ продолжается точно так же, как и в [9; п. 4].

Как и в [9] доказывается, что построенная на $\hat{X}$ метрика $\hat{h}_p$ удовлетворяет свойствам

- a) $\text{sys}_k(\hat{h}_p) \geq \hat{A}$;
- b) $\text{Vol}(\hat{h}_p) \leq \hat{C} \cdot p$.

Из лемм 1 и 2 получаем

- c) $\text{mass}(a, \hat{h}_p) \geq \hat{B} \cdot p^2$ для любого нетривиального $a \in \mathbf{H}_m(\hat{X}, \hat{X}_i; \mathbb{Z})$.

Здесь $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ – некоторые константы, не зависящие от p . В качестве $\hat{C}$ можно взять $r \cdot C + \text{Vol}(g_0)$, $\hat{B} = B$, где B и C – константы из леммы 1. Связь между $\hat{A}$ и A такая же, как и в [9; лемма 3.3.4].

Теперь рассмотрим отображение $p \circ F: X \rightarrow \hat{X}$ и применим, как это описано в [9], ε -раздутье метрик $\hat{h}_p$; ε выбирается достаточно малым, чтобы общий объем X увеличился не более чем на 1. Полученную последовательность метрик на X обозначим через $\{h_p\}_{p=1}^\infty$. Поскольку $\text{Lip } p \circ F \leq 1$ относительно h_p и $\hat{h}_p$, то из (27) получаем $\text{sys}_k(X, h_p) \geq \hat{A}$. Далее, отображение (26) нетривиально на a_i , что вместе с c) дает $\text{mass}(a_i, h_p) \geq \hat{B} \cdot p^2$, $1 \leq i \leq r$. Наконец, из b) получим $\text{Vol}(h_p) \leq \hat{C} \cdot p + 1$. Три последних неравенства обеспечивают предел (28), что завершает доказательство теоремы 2.

Как уже отмечалось выше, вопрос об интерсистолической жесткости в случае пары систол $\text{sys}_k(X, \partial X; g)$ и $\text{stsys}_{m-k}(X; g)$ ($\text{sys}_{m-k}(X; g)$), где $1 < k \leq m/2$, до конца не ясен. Случай $k = 1$ рассмотрен в предыдущем параграфе. Доказанные там утверждения показывают, что на мягкость или жесткость влияет индуцированное вложением края отображение в гомологиях

$$i_*: \mathbf{H}_{m-k}(\partial X; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbf{H}_{m-k}(X; \mathbb{Z}). \quad (29)$$

В случае $k = 1$ мы нашли, что если i_* – тривиальный гомоморфизм, то имеет место $(1, m-1)$ -мягкость. Напротив, если i_* нетривиально, то имеется жесткость. Сохраняется ли последнее свойство при $k > 1$ – неясно, даже для таких простых примеров, как $X = D^k \times S^{m-k}$. С другой стороны, тривиальность отображения (29) обеспечивает мягкость в самой общей ситуации.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Если для m -мерного многообразия с краем X и некоторого $1 \leq k < m/2$ гомоморфизм (29) тривиален, то справедливо равенство

$$\inf_g \frac{\text{Vol}(X; g)}{\text{sys}_k(X, \partial X; g) \cdot \text{stsys}_{m-k}(X; g)} = 0, \quad (30)$$

где g пробегает множество гладких римановых метрик на X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этого предложения дословно повторяет доказательство предложения 1. Вводим пространство Y (12); тривиальность гомоморфизма (29) редуцирует вопрос об относительных систолах на X к аналогичному вопросу об абсолютных систолах на Y . Необходимое утверждение теперь следует из [9].

Автор благодарит Швейцарский национальный фонд научных исследований за поддержку и Женевский университет, где была начата эта работа, за гостеприимство.

Список литературы

1. Berger M. A l'ombre de Löwner // Ann. Sci. École Norm. Sup. (4). 1972. V. 5. P. 241–260.
2. Berger M. Systoles et applications selon Gromov // Séminaire Bourbaki. V. 1992/93. Exposé 771. Paris: Soc. Math. France, 1993. P. 279–310. (Astérisque. V. 216.)
3. Бураго Ю., Залгаллер В. Геометрические неравенства. М.: Наука, 1980.
4. Besicovitch A. S. On two problems of Löwner // J. London Math. Soc. 1952. V. 27. № 2. P. 141–144.
5. Almgren F. An isoperimetric inequality // Proc. Amer. Math. Soc. 1964. V. 15. № 2. P. 284–285.
6. Derrick W. R. A weighted volume-diameter inequality for n -cubes // J. Math. Mech. 1969. V. 18. № 5. P. 453–472.
7. Derrick W. R. A volume-diameter inequality for n -cubes // J. Anal. Math. 1969. V. 22. P. 1–36.
8. Gromov M. Filling Riemannian manifolds // J. Differential Geom. 1983. V. 18. № 1. P. 1–147.
9. Babenko I. Forte souplesse intersystolique de variétés fermées et de polyèdres // Université Montpellier-II prépublication, № 13, 2000.
10. Gromov M. Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces. Boston: Birkhäuser, 1999. (Progr. Math. V. 152.)
11. Hebda D. The collars of Riemannian manifolds and stable isosystolic inequalities // Pacific J. Math. 1986. V. 121. № 2. P. 339–356.
12. Bangert V., Katz M. Mass inequalities associated to cohomology products // Preprint, 2001.
13. Vershynin V. Cobordisms and spectral sequences. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1993. (Trans. Math. Monogr. V. 130.)
14. Federer H. Geometric measure theory. Berlin: Springer-Verlag, 1969.
15. Federer H. Real flat chains, cochains and variational problems // Indiana Univ. Math. J. 1974. V. 24. P. 351–407.
16. Babenko I., Katz M. Systolic freedom of orientable manifolds // Ann. Sci. École Norm. Sup. (4). 1998. V. 31. № 6. P. 787–809.
17. Katz M. Appendix D in [10].

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Поступила в редакцию
 Unite Mathématique de Recherche 5030 17.10.2001
 (Centre Nationale de la Recherche Scientifique),
 Département des Sciences
 Mathématiques Université Montpellier-II, France
 E-mail: babenko@darboux.math.univ-montp2.fr