Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Н. Бруй, Методы суммирования тригонометрических рядов и пространства функций, *Матем. сб.*, 2002, том 193, номер 4, 17–36

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm642>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 11:11:53

УДК 517.518.456

И. Н. Бруй

Методы суммирования тригонометрических рядов и пространства функций

Указаны условия того, что тригонометрический ряд является рядом Фурье функции из пространства $C(\mathbb{T})$, $L^p(\mathbb{T})$, где $p \in [1, \infty]$, $\text{BMO}(\mathbb{T})$, $L^*_\Phi(\mathbb{T})$.

Библиография: 21 название.

1. Введение. Настоящая работа посвящена следующей проблеме:
“Когда тригонометрический ряд

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} \gamma_l e^{ilx} \quad (1)$$

является рядом Фурье функции из определенного пространства?”

Трудность этой проблемы иллюстрирует тригонометрический ряд

$$\sum_{|l|=2}^{\infty} \frac{\text{sign } l}{\ln |l|} e^{ilx},$$

который сходится в каждой точке x действительной прямой $\mathbb{R}$ и который не является рядом Фурье–Лебега ни своей суммой, ни другой функции [1; гл. I, § 40 и гл. X, § 7], [2; гл. V, § 1], [3; п. 7.3.4].

2. Основные результаты формулируются ниже в обозначениях и терминах монографии [3]. Смысл других встречающихся обозначений предполагается ясным из контекста.

Напомним, что для действительных пространств имеет место следующая цепочка строгих включений:

$$C(\mathbb{T}) \subset L^\infty(\mathbb{T}) \subset \text{BMO}(\mathbb{T}) \subset L^p(\mathbb{T}) \subset L^*_\Phi(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T}),$$

где показатель $p \in (1, \infty)$, а $\Phi(u)$ есть надлежащая N -функция [4; гл. I, § 1.3].

ТЕОРЕМА 1. Предположения: 1) *элементы бесконечной нижней треугольной комплексной матрицы $M := [\mu_l^{(n)}]$, $(n, l) \in \mathbb{Z}_0^2$, имеют по всем столбцам конечные пределы:*

$$\forall l \in \mathbb{Z}_0 \quad \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_l^{(n)} =: \rho_l \in \mathbb{C}, \quad (2)$$

которые удовлетворяют условию

$$\exists \lim_{l \rightarrow \infty} \rho_l =: \rho_\infty \neq 0; \quad (3)$$

2) тригонометрическая система и метод суммирования M связаны между собой условием

$$k_1(M) := \sup_{n \in \mathbb{Z}_0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{l=-n}^n \mu_{|l|}^{(n)} e^{ilt} \right| dt < \infty, \quad (4)$$

означающим ограниченность последовательности M -констант Лебега. В случае, когда последовательность (ρ_l) , $l \in \mathbb{Z}_0$, постролбцовых пределов элементов матрицы M отличается от единичной последовательности $(1, 1, \dots)$, дополнительно предполагается:

3C) последовательность $(1/\rho_{|l|})$, $l \in \mathbb{Z}$, где сообразно контексту $1/0 := 0$, является мультипликатором типа (C, C) .

Утверждение: для того чтобы комплексный тригонометрический ряд (1) являлся рядом Фурье функции f из комплексного пространства $C(\mathbb{T})$, т.е.

$$\exists f \in C(\mathbb{T}) \quad \forall l \in \mathbb{Z} \quad \gamma_l = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ilt} dt,$$

необходимо и достаточно, чтобы последовательность его M -средних была фундаментальной в пространстве $C(\mathbb{T})$:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \max_{|x| \leq \pi} \left| \sum_{l=-m}^m \gamma_l \mu_{|l|}^{(m)} e^{ilx} - \sum_{l=-n}^n \gamma_l \mu_{|l|}^{(n)} e^{ilx} \right| = 0. \quad (5)$$

Частные случаи теоремы 1. В случае матрицы $[\max(0, 1 - l/(n+1))]$, $(n, l) \in \mathbb{Z}_0^2$, определяющей $(C, 1)$ -метод суммирования рядов, из теоремы 1 имеем стартовую теорему Л. Фейера [1; гл. I, § 60, теорема 1], [2; гл. IV, § 4, теорема (4.2), (I)], [3; п. 6.1.2]. Если матрица M определяет регулярный [1] метод суммирования рядов, то из теоремы 1 получаем теорему, см. [5; теорема 3]. еКогда все $\rho_l = 1$, из теоремы 1 имеем известный результат [1].

Два напоминания. Условие (3) исключает [6], [7; § 3.5, теорема 8] все порождающие сходимость [6] методы суммирования рядов. Условие (4) влечет [1; гл. VII, § 2, неравенство (α)] ограниченность элементов матрицы M в совокупности, т.е. условие (10) теоремы 3.

ТЕОРЕМА 2. Предположения: условия 1) и 2) как в теореме 1. В случае, когда последовательность (ρ_l) , $l \in \mathbb{Z}_0$, постролбцовых пределов элементов матрицы M отличается от единичной последовательности $(1, 1, \dots)$, дополнительно предполагается:

3L^p) последовательность $(1/\rho_{|l|})$, $l \in \mathbb{Z}$, где сообразно контексту $1/0 := 0$, является мультипликатором типа (L^p, L^p) .

Утверждения: для того чтобы комплексный тригонометрический ряд (1) являлся рядом Фурье некоторой функции f из комплексного пространства $L^p(\mathbb{T})$, необходимо и достаточно, чтобы

А) при $p \in (1, \infty]$ последовательность его M -средних была ограниченной в пространстве $L^p(\mathbb{T})$:

$$k_2(\Gamma, M) := \sup_{n \in \mathbb{Z}_0} \left\| \sum_{l=-n}^n \gamma_l \mu_{|l|}^{(n)} e^{il\circ} \right\|_p < \infty; \quad (6)$$

Б) при $p \in [1, \infty)$ последовательность его M -средних была фундаментальной в пространстве $L^p(\mathbb{T})$:

$$\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} \left\| \sum_{l=-m}^m \gamma_l \mu_{|l|}^{(m)} e^{il\omega} - \sum_{l=-n}^n \gamma_l \mu_{|l|}^{(n)} e^{il\omega} \right\|_p = 0; \quad (7)$$

В) при $p \in [1, \infty]$ для любой функции h из комплексного пространства $L^{p/(p-1)}(\mathbb{T})$ числовой ряд

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} \gamma_l \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{h}(u) e^{ilu} du \quad (8)$$

суммировался методом M , т.е. чтобы при $p \in [1, \infty]$

$$\forall h \in L^{p/(p-1)}(\mathbb{T}) \quad \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{l=-n}^n \mu_{|l|}^{(n)} \gamma_l \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{h}(u) e^{ilu} du \in \mathbb{C}. \quad (9)$$

Частные случаи теоремы 2. В случае $(C, 1)$ -метода суммирования рядов из теоремы 2 имеем стартовые теоремы У. и Дж. Юнгов [1; гл. I, § 60, теоремы 2 и 3], [2; гл. IV, § 4, теорема (4.2), (II), § 5, следствие из теоремы (5.7)], [3; п. 12.7.6] для пространств $L^p(\mathbb{T})$, $p \in (1, \infty]$, и В. Гросса и Г. Штейнгауза [1; гл. I, § 60, теорема 4], [2; гл. IV, § 4, теорема (5.5), (I)], [3; п. 6.1.3] для пространства $L^1(\mathbb{T})$. Если матрица M определяет регулярный [8] метод суммирования рядов, то из теоремы 2 получаем сужение на тригонометрические ряды классических результатов В. Орлича и З. Ломнишко об ортогональных рядах [8; гл. VI, § 4, теоремы 6.4.1–3 и 6.4.6].

Условие (4) необходимо [8; гл. VI, § 4, замечания к теоремам 6.4.2 и 6.4.3] для справедливости утверждений А) и В) при $p = \infty$ и утверждений Б) и В) при $p = 1$ теоремы 2 и утверждения теоремы 1.

Матрица $[\max(0, \text{sign}(n - l + 1))]$, $(n, l) \in \mathbb{Z}_0^2$, определяет метод частных сумм, который условию (4) не удовлетворяет [1; гл. I, § 35], [2; гл. II, § 12], [3; п. 7.1.1].

Однако для этого метода в силу теоремы Марселя Рисса [1; гл. VIII, § 20], [2; гл. VII, § 6, теорема (6.4)], [3; п. 12.10.1] утверждения А) и Б) теоремы 2 имеют место для пространств $L^p(\mathbb{T})$ с показателем $p \in (1, \infty)$.

Таким образом, условие (4) теоремы 2 для пространств Фридьеша Рисса $L^p(\mathbb{T})$, $p \in (1, \infty)$, не является необходимым.

Для пространств Рисса $L^p(\mathbb{T})$, $p \in (1, \infty)$, автор, опираясь на критерий Руни [3; п. 2.3.10(3)], [9], доказал в [10; теорема 3] сужение на тригонометрические ряды теоремы Орлича–Ломнишко об ортогональных рядах [8; теорема 6.4.1] без условия (4), а в [11; теорема 3] обобщил свой результат на консервативные [6] методы суммирования рядов, которые не порождают сходимости [6].

Недавний результат автора [12; теорема 4] усиливает

ТЕОРЕМА 3. Предположения: элементы бесконечной нижней треугольной комплексной матрицы $M := [\mu_l^{(n)}]$, $(n, l) \in \mathbb{Z}_0^2$, во-первых, ограничены в совокупности:

$$\sup\{|\mu_l^{(n)}| : (n, l) \in \mathbb{Z}_0^2\} < \infty, \quad (10)$$

во-вторых, таковы, что ограничены в совокупности их построчные вариации на диадических отрезках:

$$k_3(M) := \sup \left\{ \sum_{l=2^\nu-1}^{2(2^\nu-1)} |\mu_l^{(n)} - \mu_{l+1}^{(n)}| : (n, \nu) \in \mathbb{Z}_0^2 \right\} < \infty, \quad (11)$$

в-третьих, имеют по всем столбцам конечные пределы (2), которые, в-четвертых, удовлетворяют условию (3).

Утверждения: для того чтобы комплексный тригонометрический ряд (1) являлся рядом Фурье некоторой функции f из комплексного пространства Рисса $L^p(\mathbb{T})$, $p \in (1, \infty)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось любое из условий (6), (7) или (9) теоремы 2.

ПРИМЕР. Метод суммирования рядов, определяемый матрицей, у которой элементы столбцов с четными номерами

$$\forall k \in \mathbb{Z}_0 \quad \mu_{2k}^{(n)} := \begin{cases} 0, & \text{когда } 2k > n, \\ 1, & \text{когда } 2k \leq n, \end{cases}$$

а элементы “нечетных” столбцов

$$\forall k \in \mathbb{Z}_0 \quad \mu_{2k+1}^{(n)} := \begin{cases} 0, & \text{когда } 2k+1 > n, \\ 1 + \frac{1}{k+2}, & \text{когда } 2k+1 \leq n, \end{cases}$$

не является ни регулярным, ни консервативным [6; теорема 1.3], [7; § 3.5, теорема 7], ибо

$$\sum_{l=0}^n |\mu_l^{(n)} - \mu_{l+1}^{(n)}| > \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{1}{k+2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty.$$

Однако этот метод удовлетворяет условию (11), поскольку

$$\forall \nu \in \mathbb{N} \quad \sum_{l=2^\nu-1}^{2(2^\nu-1)} |\mu_l^{(n)} - \mu_{l+1}^{(n)}| < 2 \sum_{k=2^{\nu-1}-1}^{2^\nu-1} \frac{1}{k+2} < 2 \ln 3.$$

Таким образом, теорема 3, в отличие от предшествовавших результатов автора [10; теорема 3], [11; теорема 3], не выводится из теории суммируемости числовых рядов.

Обозначим через $\text{ВМО}(\mathbb{T})$ пространство функций ограниченной средней осцилляции, т.е. действительное линейное пространство всех почти всюду на действительной прямой $\mathbb{R}$ определенных и 2π -периодических действительных функций f , которые на отрезке $[-\pi, \pi]$ измеримы и интегрируемы в смысле Лебега и имеют конечную *-полуноорму

$$\|f\|_* := \sup_I \frac{1}{|I|} \int_I \left| f(t) - \frac{1}{|I|} \int_I f(\vartheta) d\vartheta \right| dt,$$

где верхняя грань берется по всем отрезкам $I \subset \mathbb{R}$ и где $|I|$ — длина I , с обычными операциями сложения функций и умножения их на действительные числа. Если функция $f \in L^\infty(\mathbb{T})$, то $\|f\|_* \leq 2\|f\|_\infty$.

Для действительных пространств имеют место следующие строгие включения:

$$L^\infty(\mathbb{T}) \subset \text{ВМО}(\mathbb{T}) \subset \bigcap_{1 \leq p < \infty} L^p(\mathbb{T}).$$

Разности $\text{ВМО}(\mathbb{T}) \setminus L^\infty(\mathbb{T})$ принадлежит 2π -периодическая функция

$$f_1(x) := \begin{cases} \ln |x|, & \text{когда } x \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\}, \\ 0, & \text{когда } x = 0, \end{cases}$$

а разности $\bigcap_{1 \leq p < \infty} L^p(\mathbb{T}) \setminus \text{ВМО}(\mathbb{T})$ принадлежит 2π -периодическая функция

$$f_2(x) := \begin{cases} \ln x, & \text{когда } x \in (0, \pi], \\ 0, & \text{когда } x \in (-\pi, 0]. \end{cases}$$

Недавний результат [13; теорема 4] обобщает

ТЕОРЕМА 4. *Предположения: элементы бесконечной нижней треугольной действительной матрицы $M := [\mu_l^{(n)}]$, $(n, l) \in \mathbb{Z}_0^2$, имеют по всем столбцам конечные пределы:*

$$\forall l \in \mathbb{Z}_0 \quad \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_l^{(n)} =: \rho_l \in \mathbb{R}, \quad (12)$$

которые удовлетворяют условию (3); условие 2) как в теореме 1. В случае, когда последовательность (ρ_l) , $l \in \mathbb{Z}_0$, постолбцовых пределов элементов матрицы M отличается от единичной последовательности $(1, 1, \dots)$, дополнительно предполагается:

ЗВМО) последовательность $(1/\rho_{|l|})$, $l \in \mathbb{Z}$, где сообразно контексту $1/0 := 0$, является мультипликатором типа (ВМО, ВМО).

Утверждение: для того чтобы действительный $(\forall l \in \mathbb{Z} \quad \gamma_l = \gamma_{-l})$ тригонометрический ряд (1) являлся рядом Фурье некоторой функции f из (действительного) пространства $\text{ВМО}(\mathbb{T})$, необходимо и достаточно, чтобы последовательность его M -средних была ограниченной в пространстве $\text{ВМО}(\mathbb{T})$:

$$k_4(\Gamma, M) := \sup_{n \in \mathbb{Z}_0} \left\| \sum_{l=-n}^n \gamma_l \mu_{|l|}^{(n)} e^{il \circ} \right\|_* < \infty. \quad (13)$$

Следующий результат формулируется в обозначениях монографии [2; гл. IV, §10] и терминах монографии [4].

ТЕОРЕМА 5. *Предположения: условия 1) и 2) как в теореме 1. В случае, когда последовательность (ρ_l) , $l \in \mathbb{Z}_0$, постолбцовых пределов элементов матрицы M отличается от единичной последовательности $(1, 1, \dots)$, дополнительно предполагается:*

$3L_\Phi^*$) последовательность $(1/\rho_{|l|})$, $l \in \mathbb{Z}$, где сообразно контексту $1/0 := 0$, является мультипликатором типа (L_Φ^*, L_Φ^*) .

Утверждения: для того чтобы комплексный тригонометрический ряд (1) являлся рядом Фурье некоторой функции f из комплексного пространства Орлича $L_\Phi^*(\mathbb{T})$, необходимо и достаточно, чтобы

А) при N -функции $\Phi(u)$ последовательность его M -средних была ограниченной в пространстве $L_\Phi^*(\mathbb{T})$:

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}_0} \left\| \sum_{l=-n}^n \gamma_l \mu_{|l|}^{(n)} e^{il\circ} \right\|_\Phi < \infty; \quad (14)$$

Б) при N -функции $\Phi(u)$, удовлетворяющей Δ_2 -условию, последовательность его M -средних была фундаментальной в пространстве $L_\Phi^*(\mathbb{T})$:

$$\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} \left\| \sum_{l=-m}^m \gamma_l \mu_{|l|}^{(m)} e^{il\circ} - \sum_{l=-n}^n \gamma_l \mu_{|l|}^{(n)} e^{il\circ} \right\|_\Phi = 0; \quad (15)$$

В) при N -функции $\Phi(u)$ для любой функции h из комплексного пространства Орлича $L_\Psi^*(\mathbb{T})$, где дополнительная N -функция $\Psi(v)$ удовлетворяет Δ_2 -условию, числовой ряд (8) суммировался методом M , т.е. чтобы при N -функции $\Phi(u)$

$$\forall h \in L_\Psi^*(\mathbb{T}) \quad \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{l=-n}^n \mu_{|l|}^{(n)} \gamma_l \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{h}(u) e^{ilu} du \in \mathbb{C}.$$

Частные случаи теоремы 5. В случае матрицы $(C, 1) := [\max(0, 1 - l/(n+1))]$, $(n, l) \in \mathbb{Z}_0^2$, из теоремы 5 имеем стартовые результаты [2; гл. IV, примеры 16 и 17, § 11, теорема (11.13)]. Если матрица M определяет регулярный [6] метод суммирования рядов, то из теоремы 5 получаем лучшие предшествовавшие результаты [5; теоремы 1, 2 и 6].

Два напоминания. Для каждой функции $f \in L^1(\mathbb{T})$ существует [4; гл. II, § 8.1] N -функция $\Phi(u)$ такая, что $f \in L_\Phi^*(\mathbb{T})$. Пространство Орлича $L_\Phi^*(\mathbb{T})$ сепарабельно [2; гл. IV, пример 18], [4; гл. II, § 10.4] тогда и только тогда, когда N -функция $\Phi(u)$ удовлетворяет Δ_2 -условию.

Если функция $\Phi(u) := u^p/p$, где $p \in (1, \infty)$, то дополнительная функция $\Psi(v) = (p-1)v^{p/(p-1)}/p$ и полунорма Орлича $\|f\|_\Phi = (2\pi)^{1/p} (p/(p-1))^{(p-1)/p} \|f\|_p$. Поэтому из теоремы 5 имеем сужение на пространства Рисса $L^p(\mathbb{T})$, $p \in (1, \infty)$, теоремы 2, которое улучшает теорема 3. (Полное доказательство теоремы 2 не приводится; см. замечание 1 в п. 6.)

Предположения о методах суммирования рядов в теоремах 1–5 обладают некоторой симметрией относительно пространства Гильберта $L^2(\mathbb{T})$, что естественно ввиду теоремы Ф. Рисса–Э. Фишера [1; гл. I, § 16], [2; гл. VI, теорема (1.1)], [3; теорема 8.3.1].

С. Качмаж и Г. Штейнгауз [8] выделяют три типа решений проблемы п. 1. Если следовать их классификации, то теорема 1, пп. А) и Б) теорем 2, 3 и 5 настоящей работы относятся к первому типу. Пункты В) теорем 2, 3 и 5 представляют третий тип решений.

3. Доказательство теоремы 1. Обозначим:

$$\forall n \in \mathbb{Z}_0 \quad M_n(f, x) := \sum_{l=-n}^n \mu_{|l|}^{(n)} e^{ilx} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ilt} dt. \quad (16)$$

Очевидна [8; теорема 6.4.2, необходимость]

ЛЕММА 1. *Предположение: условие 2) как в теореме 1.*

Утверждение: если функция f принадлежит комплексному пространству $L^\infty(\mathbb{T})$, то

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}_0} \|M_n(f, \circ)\|_\infty \leq k_1(M) \|f\|_\infty. \quad (17)$$

Справедливость теоремы 1 вытекает из лемм 2 и 3.

ЛЕММА 2 (необходимость). *Предположения: условия 2) и 1) как в теореме 1, но без условия (3).*

Утверждение: если функция f принадлежит комплексному пространству $C(\mathbb{T})$, то последовательность M -средних (16) ее ряда Фурье будет в этом пространстве фундаментальной:

$$\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} \max_{|x| \leq \pi} |M_m(f, x) - M_n(f, x)| = 0. \quad (5')$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно отправное неравенство доказательства:

$$\begin{aligned} \max_{|x| \leq \pi} |M_m(f, x) - M_n(f, x)| &\leq \max_{|x| \leq \pi} |M_m(f - g, x)| \\ &+ \max_{|x| \leq \pi} |M_m(g, x) - M_n(g, x)| + \max_{|x| \leq \pi} |M_n(g - f, x)|, \end{aligned} \quad (18)$$

справедливое для любой функции $g \in L^1(\mathbb{T})$.

Какое бы малое положительное число ε мы ни задали, всегда согласно теореме Вейерштрасса [1; гл. I, § 27] найдется тригонометрический полином $g_{\alpha(\varepsilon)}(x) := \sum_{l=-\alpha(\varepsilon)}^{\alpha(\varepsilon)} c_l^{(\varepsilon)} e^{ilx}$ такой, что

$$\max_{|x| \leq \pi} |f(x) - g_{\alpha(\varepsilon)}(x)| \leq \frac{\varepsilon}{4k_1(M) + 1}. \quad (19)$$

Из (18) и (19) согласно неравенству (17) леммы 1 получаем промежуточное неравенство доказательства:

$$\max_{|x| \leq \pi} |M_m(f, x) - M_n(f, x)| < \max_{|x| \leq \pi} |M_m(g_{\alpha(\varepsilon)}, x) - M_n(g_{\alpha(\varepsilon)}, x)| + \varepsilon/2. \quad (20)$$

Для всех номеров $m > n \geq \alpha(\varepsilon)$ разность

$$M_m(g_{\alpha(\varepsilon)}, x) - M_n(g_{\alpha(\varepsilon)}, x) = \sum_{l=-\alpha(\varepsilon)}^{\alpha(\varepsilon)} c_l^{(\varepsilon)} (\mu_{|l|}^{(m)} - \mu_{|l|}^{(n)}) e^{ilx}.$$

Отсюда на основании неравенства Коши–Буняковского [1], очевидных равенств $|e^{ilx}| = 1$ и равенства Парсеваля для тригонометрической системы [1; гл. I, § 17] имеем

$$|M_m(g_{\alpha(\varepsilon)}, x) - M_n(g_{\alpha(\varepsilon)}, x)| \leq \|g_{\alpha(\varepsilon)}\|_2 \left(\sum_{l=-\alpha(\varepsilon)}^{\alpha(\varepsilon)} |\mu_{|l|}^{(m)} - \mu_{|l|}^{(n)}|^2 \right)^{1/2}.$$

Для любого $l \in \mathbb{Z}_0$ и выбранного выше числа $\varepsilon > 0$ всегда согласно условию (2) найдется номер $\beta(l, \varepsilon)$ такой, что для всех номеров $m > n \geq \beta(l, \varepsilon)$ будет выполняться неравенство

$$|\mu_l^{(m)} - \mu_l^{(n)}| \leq |\mu_l^{(m)} - \rho_l| + |\rho_l - \mu_l^{(n)}| \leq \frac{\varepsilon}{2\sqrt{1+2\alpha(\varepsilon)}\|g_{\alpha(\varepsilon)}\|_2 + 1}.$$

Тогда для всех номеров $m > n \geq \delta(\varepsilon) := \max\{\beta(l, \varepsilon) : 0 \leq l \leq \alpha(\varepsilon)\}$ истинно

$$\max_{|x| \leq \pi} |M_m(g_{\alpha(\varepsilon)}, x) - M_n(g_{\alpha(\varepsilon)}, x)| < \varepsilon/2. \quad (21)$$

Из (20) и (21) вытекает, что для всех номеров $m > n \geq \max(\alpha(\varepsilon), \delta(\varepsilon))$ справедливо заключительное неравенство доказательства:

$$\max_{|x| \leq \pi} |M_m(f, x) - M_n(f, x)| < \varepsilon.$$

Оно ввиду произвола в выборе $\varepsilon > 0$ означает, что имеет место предельное равенство (5').

Лемма 2 доказана.

ЛЕММА 3 (достаточность). *Предположения: условия 1) и 3C) как в теореме 1.*

Утверждение: если последовательность M -средних комплексного тригонометрического ряда (1) удовлетворяет условию C -фундаментальности (5), то он является рядом Фурье функции f из пространства $C(\mathbb{T})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Шаг 1. Условие C -фундаментальности (5) в силу полноты [8; гл. § 3] пространства $C(\mathbb{T})$ влечет равномерную сходимость (сильную сходимость) последовательности M -средних тригонометрического ряда (1) к функции g из пространства $C(\mathbb{T})$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{|x| \leq \pi} \left| g(x) - \sum_{l=-n}^n \gamma_l \mu_{|l|}^{(n)} e^{ilx} \right| = 0.$$

Отсюда получаем предельные равенства

$$\forall m \in \mathbb{Z} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-imt} \sum_{l=-n}^n \gamma_l \mu_{|l|}^{(n)} e^{ilt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{-imt} dt,$$

из которых в силу ортонормированности тригонометрической системы по весу $1/(2\pi)$ на промежутке $[-\pi, \pi]$ имеем

$$\forall m \in \mathbb{Z} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_m \mu_{|m|}^{(n)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{-imt} dt.$$

Учет предельных равенств (2) дает

$$\forall m \in \mathbb{Z} \quad \gamma_m \rho_{|m|} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{-imt} dt. \quad (22)$$

Если последовательность (ρ_m) , $m \in \mathbb{Z}_0$, постолбцовых пределов элементов матрицы M является единичной последовательностью $(1, 1, \dots)$ (это заведомо так, если матрица M определяет регулярный [1; вводный материал, § 5] метод суммирования рядов), то доказательство леммы 3 закончено с функцией $f = g$.

Шаг 2. Пусть $P := \{l \in \mathbb{Z} : \rho_{|l|} = 0\}$. В силу условия (3) множество P конечно или пусто. Ряд Фурье функции $g \in C(\mathbb{T})$ имеет вид

$$g \sim \sum_{l \in \mathbb{Z} \setminus P} e^{ilx} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{-ilt} dt.$$

Согласно предположению 3C) теоремы 1 последовательность $(1/\rho_{|l|})$, $l \in \mathbb{Z}$, является мультипликатором типа (C, C) рядов Фурье. Поэтому она [3; п. 16.1.1], [8; гл. VI, § 5] предыдущий ряд Фурье функции g из пространства $C(\mathbb{T})$ переводит в ряд Фурье функции h из того же пространства:

$$h \sim \sum_{l \in \mathbb{Z} \setminus P} e^{ilx} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(t) e^{-ilt} dt,$$

при этом

$$\forall l \in \mathbb{Z} \setminus P \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{-ilt} dt / \rho_{|l|} = \gamma_l = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(t) e^{-ilt} dt.$$

Таким образом, тригонометрический ряд (1) является рядом Фурье функции

$$f(x) := h(x) + \sum_{l \in P} \gamma_l e^{ilx},$$

принадлежащей пространству $C(\mathbb{T})$.

Лемма 3 доказана.

Теорема 1 полностью доказана.

4. Доказательство теоремы 3 заключается в доказательстве лемм 4 и 5.

ЛЕММА 4 (необходимость). *Предположения: элементы бесконечной нижней треугольной комплексной матрицы $M := [\mu_l^{(n)}]$, $(n, l) \in \mathbb{Z}_0^2$, удовлетворяют двум условиям: (10) и (11).*

Утверждение: если функция f принадлежит комплексному пространству Рисса $L^p(\mathbb{T})$, $p \in (1, \infty)$, то последовательность M -средних (16) ее ряда Фурье будет в пространстве $L^p(\mathbb{T})$ ограниченной:

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}_0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |M_n(f, t)|^p dt \leq k_5^p(M, p) \|f\|_p^p \quad (23)$$

(где постоянная $k_5 > 0$ зависит только от матрицы M и показателя p), и, более того, фундаментальной:

$$\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} \int_{-\pi}^{\pi} |M_m(f, t) - M_n(f, t)|^p dt = 0 \quad (24)$$

и, кроме того, для любой функции h из комплексного сопряженного пространства $L^{p/(p-1)}(\mathbb{T})$ будет существовать конечный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{l=-n}^n \mu_{|l|}^{(n)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ilt} dt \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{h}(u) e^{ilu} du. \quad (25)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Шаг 1. Неравенство (23) было доказано автором в [12; лемма 1] по следующему плану.

Применение теоремы Литтлвуда–Пэли о диадическом разложении [2; гл. XV, § 4, теорема (4.24)] к M -средним (16) ряда Фурье функции $f \in L^1(\mathbb{T})$ дает:

$$\|M_n(f, \circ)\|_p^p \lesssim \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{\nu=0}^{[\log_2(n+1)]} \left| \sum_{|l|=2^\nu-1}^{2(2^\nu-1)} \mu_{|l|}^{(n)} e^{ilt} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) e^{-ilu} du \right|^2 \right)^{p/2} dt.$$

Условия (10) и (11) позволяют при $p \in (1, \infty)$ с помощью преобразования Абеля, неравенства Коши–Буняковского и леммы Литтлвуда–Пэли о мажорировании [2; гл. XV, § 2, лемма (2.15)] получить оценку:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{\nu=0}^{[\log_2(n+1)]} \left| \sum_{|l|=2^\nu-1}^{2(2^\nu-1)} \mu_{|l|}^{(n)} e^{ilt} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) e^{-ilu} du \right|^2 \right)^{p/2} dt \\ & \prec \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{\nu=0}^{[\log_2(n+1)]} \left| \sum_{|l|=2^\nu-1}^{2(2^\nu-1)} e^{ilt} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) e^{-ilu} du \right|^2 \right)^{p/2} dt, \end{aligned}$$

т.е. устранить явную зависимость от элементов матрицы M .

Если функция f принадлежит пространству Φ Рисса $L^p(\mathbb{T})$, $p \in (1, \infty)$, то на основании уже применявшейся теоремы Литтлвуда–Пэли о диадическом разложении имеем:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \left| \sum_{|l|=2^\nu-1}^{2(2^\nu-1)} e^{ilt} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) e^{-ilu} du \right|^2 \right)^{p/2} dt \prec \|f\|_p^p.$$

Из трех предыдущих оценок и вытекает неравенство (23).

Шаг 2. На основании неравенства Минковского [1] имеем следующее отправное неравенство доказательства предельного равенства (24):

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |M_m(f, t) - M_n(f, t)|^p dt \right)^{1/p} \leq \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |M_m(f - g, t)|^p dt \right)^{1/p} \\ & + \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |M_m(g, t) - M_n(g, t)|^p dt \right)^{1/p} + \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |M_n(g - f, t)|^p dt \right)^{1/p}, \end{aligned} \quad (26)$$

справедливое для любой функции $g \in L^1(\mathbb{T})$.

Множество тригонометрических полиномов всюду плотно [1; гл. I, § 28] во всех пространствах $L^p(\mathbb{T})$ с показателем $p \in [1, \infty)$. Поэтому для любого сколь угодно малого действительного числа $\varepsilon > 0$ найдется такой тригонометрический полином $g_{\alpha(\varepsilon)}(x) := \sum_{l=-\alpha(\varepsilon)}^{\alpha(\varepsilon)} c_l^{(\varepsilon)} e^{ilx}$, что

$$\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - g_{\alpha(\varepsilon)}(t)|^p dt \right)^{1/p} \leq \frac{\varepsilon}{4k_5(M, p) + 1}. \quad (27)$$

Из (26) и (27) согласно неравенству (23) получаем следующее промежуточное неравенство доказательства соотношения (24):

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |M_m(f, t) - M_n(f, t)|^p dt \right)^{1/p} \\ & < \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |M_m(g_{\alpha(\varepsilon)}, t) - M_n(g_{\alpha(\varepsilon)}, t)|^p dt \right)^{1/p} + \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned} \quad (28)$$

справедливое для показателя $p \in (1, \infty)$.

От условия (2) дословным повторением фрагмента доказательства леммы 2 приходим к неравенству (21), которое влечет оценку

$$\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |M_m(g_{\alpha(\varepsilon)}, t) - M_n(g_{\alpha(\varepsilon)}, t)|^p dt \right)^{1/p} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (29)$$

истинную для всех номеров $m > n \geq \delta(\varepsilon) := \max\{\beta(l, \varepsilon) : 0 \leq l \leq \alpha(\varepsilon)\}$.

Из (28) и (29) вытекает, что для всех номеров $m > n \geq \max(\alpha(\varepsilon), \delta(\varepsilon))$ справедливо следующее заключительное неравенство доказательства предельного равенства (24):

$$\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |M_m(f, t) - M_n(f, t)|^p dt \right)^{1/p} < \varepsilon.$$

Шаг 3. Обозначим через T_n сумму в (25). Из очевидных интегральных представлений $\forall n \in \mathbb{Z}_0$ $T_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{h}(\nu) M_n(f, \nu) d\nu$ согласно неравенству Гёльдера [1] получаем $|T_m - T_n| \leq \|h\|_{p/(p-1)} \|M_m(f, \circ) - M_n(f, \circ)\|_p$. Отсюда в силу предельного равенства (24) имеем условие $\lim_{n \rightarrow \infty} |T_m - T_n| = 0$, которое влечет существование конечного предела (25).

Лемма 4 доказана.

ЛЕММА 5 (достаточность). *Предположения: элементы бесконечной нижней треугольной комплексной матрицы $M := [\mu_l^{(n)}]$, $(n, l) \in \mathbb{Z}_0^2$, удовлетворяют трем условиям: (2), (3) и (11).*

Утверждение: для того чтобы комплексный тригонометрический ряд (1) являлся рядом Фурье некоторой функции f из комплексного пространства Рисса $L^p(\mathbb{T})$, $p \in (1, \infty)$, достаточно, чтобы выполнялось любое из трех условий (6), (7) или: для любой функции h из комплексного сопряженного пространства $L^{p/(p-1)}(\mathbb{T})$ комплексная последовательность

$$\left(\sum_{l=-n}^n \mu_{|l|}^{(n)} \gamma_l \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{h}(u) e^{ilu} du \right), \quad n \in \mathbb{Z}_0, \quad (30)$$

ограничена.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Шаг 1.* Из последовательности M -средних условия L^p -ограниченности (6) можно [3; теорема 12.3.10(2)], [8; теорема 1.6.6] выделить подпоследовательность, которая слабо сходится к некоторой функции $g \in L^p(\mathbb{T})$: $\|g\|_p \leq k_2(\Gamma, M)$. Это значит, что для любых функций $u(t)$ из сопряженного пространства $L^{p/(p-1)}(\mathbb{T})$ имеет место предельное равенство

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t) \sum_{l=-n_\nu}^{n_\nu} \gamma_l \mu_{|l|}^{(n_\nu)} e^{ilt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t) g(t) dt. \quad (31)$$

Очевидно, $C(\mathbb{T}) \subset L^{p/(p-1)}(\mathbb{T})$. Поэтому, беря в предыдущем равенстве в качестве $u(t)$ функцию e^{-imt} , где $m \in \mathbb{Z}$, и учитывая ортонормированность тригонометрической системы по весу $1/(2\pi)$ на промежутке $[-\pi, \pi]$ и предельные равенства (2), получаем (22).

Если последовательность (ρ_m) , $m \in \mathbb{Z}_0$, постолбцовых пределов элементов матрицы M является единичной последовательностью $(1, 1, \dots)$, то доказательство леммы 5 закончено с функцией $f = g$.

Шаг 2. Из условия (3) на основании определения предела числовой последовательности вытекает существование номера $r := 2^q - 1$ такого, что все члены последовательности (ρ_l) , $l \in \mathbb{Z}_r$, удовлетворяют двойному неравенству

$$0.5|\rho_\infty| \leq |\rho_l| \leq 1.5|\rho_\infty|. \quad (32)$$

(Стало быть, $P \subset [-(r-1), r-1] \cap \mathbb{Z}$, где P есть множество, определенное на шаге 2 доказательства леммы 3.)

Очевидно,

$$L^p(\mathbb{T}) \ni g(x) - \sum_{l=-(r-1)}^{r-1} \gamma_l \rho_{|l|} e^{ilx} \sim \sum_{|l|=r}^{\infty} e^{ilx} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{-ilt} dt.$$

Условия (2) и (11) влекут

$$\sup_{\nu \in \mathbb{Z}_0} \sum_{l=2^\nu-1}^{2(2^\nu-1)} |\rho_l - \rho_{l+1}| \leq k_3(M).$$

Отсюда и из левого неравенства (32) получаем

$$\sup_{l \geq r} \left| \frac{1}{\rho_l} \right| \leq \frac{2}{|\rho_\infty|}, \quad \sup_{\nu \geq q} \sum_{l=2^\nu-1}^{2(2^\nu-1)} \left| \frac{1}{\rho_l} - \frac{1}{\rho_{l+1}} \right| \leq \frac{4k_3(M)}{|\rho_\infty|^2}.$$

И согласно теореме Марцинкевича о мультипликаторах [2; гл. XV, §4, теорема (4.14)] существует функция $h \in L^p(\mathbb{T})$ такая, что

$$\forall |l| \in \mathbb{Z}_r \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{-ilt} dt / \rho_{|l|} = \gamma_l = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(t) e^{-ilt} dt.$$

Таким образом, тригонометрический ряд (1) является рядом Фурье функции

$$f(x) := h(x) + \sum_{l=-(r-1)}^{r-1} \gamma_l e^{ilx} \in L^p(\mathbb{T}).$$

Итак, достаточность условия (6) для того, чтобы тригонометрический ряд (1) был рядом Фурье некоторой функции $f \in L^p(\mathbb{T})$, $p \in (1, \infty)$, полностью доказана.

Шаг 3. Поскольку каждая фундаментальная последовательность ограничена, то условие (7) влечет условие (6), которое достаточно согласно шагам 1 и 2.

Шаг 4. В силу посылки утверждения для любой функции $h \in L^{p/(p-1)}(\mathbb{T})$ комплексная последовательность

$$\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{h}(t) \sum_{l=-n}^n \gamma_l \mu_{|l|}^{(n)} e^{ilt} dt \right), \quad n \in \mathbb{Z}_0, \quad (30')$$

ограничена. Тогда [2; гл. IV, §9, теорема (9.11), (III)]

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}_0} \left\| \sum_{l=-n}^n \gamma_l \mu_{|l|}^{(n)} e^{il\circ} \right\|_p < \infty.$$

И мы снова выходим на шаги 1 и 2.

Лемма 5 доказана.

Теорема 3 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если матрица M определяет консервативный [6] метод суммирования рядов и, кроме того, все постолбцовые пределы отделены от нуля, т.е. $\inf\{\rho_l : l \in \mathbb{Z}_0\} > 0$, то, как показал автор [11], частные суммы рядов Фурье функций f и g связаны между собой следующим образом:

$$\forall n \in \mathbb{Z}_0 \quad s_n(f, x) = \sum_{l=0}^{n-1} \left(\frac{1}{\rho_l} - \frac{1}{\rho_{l+1}} \right) s_l(g, x) + \frac{1}{\rho_n} s_n(g, x).$$

И можно шаг 2 доказательства леммы 5 провести, опираясь на теорему М. Рисса об L^p -ограниченности [1; гл. VIII, §20, теорема 1], [4; гл. VII, §6, первое неравенство (6.5)], [3; неравенство (12.10.1)].

5. Доказательство теоремы 4 состоит в доказательстве лемм 6 и 7.

ЛЕММА 6 (необходимость). *Предположение: условие 2) как в теореме 1.*

Утверждение: если функция $f \in \text{ВМО}(\mathbb{T})$, то последовательность M -средних (16) ее ряда Фурье является ограниченной в пространстве $\text{ВМО}(\mathbb{T})$:

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}_0} \|M_n(f, \circ)\|_* \leq k_6(M) \|f\|_*, \quad (33)$$

где константа $k_6 > 0$ не зависит от f .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если функция $f \in \text{ВМО}(\mathbb{T})$, то по теореме Феффермана [14; гл. VI, п. 4, следствие 4.5], [15; гл. X, п. F.3°] можно найти две функции $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ и $\psi \in L^\infty(\mathbb{T})$ такие, что $f(x) = \varphi(x) + \psi^\sim(x) + \text{const}$ и

$$\|\varphi\|_\infty \leq k_7 \|f\|_*, \quad \|\psi\|_\infty \leq k_7 \|f\|_* \quad (34)$$

при некоторой постоянной k_7 . Через $\psi^\sim$ обозначена функция, тригонометрически сопряженная [1; гл. VIII, §1], [2; гл. II, §5], [3; п. 12.8.2] к функции ψ .

Стало быть, $M_n(f, x) = M_n(\varphi, x) + M_n(\psi^\sim, x) + \text{const.}$ Отсюда ввиду очевидного равенства $M_n(\psi^\sim, x) = M_n^\sim(\psi, x)$ имеем

$$M_n(f, x) = M_n(\varphi, x) + M_n^\sim(\psi, x) + \text{const.}$$

Из предыдущего, поскольку постоянные функции имеют [14; гл. VI, п. 1], [15; гл. X, п. В.1°, замечание 1] нулевую *-полунорму, получаем

$$\|M_n(f, \circ)\|_* \leq \|M_n(\varphi, \circ)\|_* + \|M_n^\sim(\psi, \circ)\|_*.$$

Так как $M_n \in C(\mathbb{T}) \subset \text{ВМО}(\mathbb{T})$, то [14; гл. VI, п. 1], [15; гл. X, п. В.2°] $\|M_n(\varphi, \circ)\|_* \leq 2\|M_n(\varphi, \circ)\|_c$. Для функции $M_n^\sim$, тригонометрически сопряженной к функции $M_n \in C(\mathbb{T})$, имеем [14; гл. VI, п. 1, теорема 1.5], [15; гл. X, п. В.2°, замечание] $\|M_n^\sim(\psi, \circ)\|_* \leq k_8 \|M_n(\psi, \circ)\|_c$, где постоянная k_8 не зависит от M_n .

Таким образом,

$$\|M_n(f, \circ)\|_* \leq 2\|M_n(\varphi, \circ)\|_c + k_8 \|M_n(\psi, \circ)\|_c.$$

Отсюда на основании неравенства (17) леммы 1 получаем

$$\|M_n(f, \circ)\|_* \leq k_1(M)(2\|\varphi\|_\infty + k_8\|\psi\|_\infty).$$

Из предыдущего с учетом неравенств (34) имеем оценку (33) с постоянной $k_6(M) := k_1(M)k_7(2 + k_8)$.

Лемма 6 доказана.

ЛЕММА 7 (достаточность). *Предположения: как в теореме 4.*

*Утверждение: если последовательность M -средних действительного $(\forall l \in \mathbb{Z} \quad \bar{\gamma}_l = \gamma_{-l})$ тригонометрического ряда (1) удовлетворяет условию *-ограниченности (13), то он является рядом Фурье некоторой функции f из (действительного) пространства $\text{ВМО}(\mathbb{T})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Шаг 1. Элементы матрицы $(C, 1) := [\max(0, 1 - l/(n+1))]$, $(n, l) \in \mathbb{Z}_0^2$, удовлетворяют предположению 2) теоремы 1, ибо все $(C, 1)$ -константы Лебега равны [1; гл. I, § 47, равенства (47.10)], [2; гл. III § 3, свойство (A)], [3; равенства (5.1.8)] единице. Применение к функциям, удовлетворяющим условию *-ограниченности (13), вышедшей леммы 6 дает

$$\forall m \in \mathbb{Z}_0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_0 \quad \left\| \sum_{l=-m}^m \left(1 - \left|\frac{l}{m+1}\right|\right) \gamma_l \mu_{|l|}^{(n)} e^{il\circ} \right\|_* \leq k_6(M)k_4(\Gamma, M).$$

Стало быть, для любого фиксированного числа $m \in \mathbb{Z}_0$ и для любого фиксированного отрезка $I \subset \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{Z}_0 \quad & \left| \frac{1}{|I|} \int_I \sum_{l=-m}^m \left(1 - \left|\frac{l}{m+1}\right|\right) \gamma_l \mu_{|l|}^{(n)} e^{ilt} \right. \\ & \left. - \frac{1}{|I|} \int_I \sum_{l=-m}^m \left(1 - \left|\frac{l}{m+1}\right|\right) \gamma_l \mu_{|l|}^{(n)} e^{i\theta} d\theta \right| dt \leq k_6 k_4. \end{aligned}$$

В последних неравенствах переходим к пределу при $n \rightarrow \infty$. Тогда на основании теоремы Фату [1; вводный материал, § 14, теорема 3], [2; гл. I, § 11, лемма (11.2)] с учетом условия (12) получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|I|} \int_I \left| \sum_{l=-m}^m \left(1 - \left| \frac{l}{m+1} \right| \right) \gamma_l \rho_{|l|} e^{ilt} \right| \\ & - \frac{1}{|I|} \int_I \sum_{l=-m}^m \left(1 - \left| \frac{l}{m+1} \right| \right) \gamma_l \rho_{|l|} e^{il\theta} d\theta \Big| dt \leq k_6 k_4. \end{aligned} \quad (35)$$

Шаг 2. Из [35], поскольку отрезок I произвольный, имеем

$$\sup_{m \in \mathbb{Z}_0} \left\| \sum_{l=-m}^m \left(1 - \left| \frac{l}{m+1} \right| \right) \gamma_l \rho_{|l|} e^{il\circ} \right\|_* \leq k_6(M) k_4(\Gamma, M). \quad (36)$$

Очевидно,

$$\begin{aligned} \forall m \in \mathbb{Z}_0 \quad & \left\| \sum_{l=-m}^m \left(1 - \left| \frac{l}{m+1} \right| \right) \gamma_l \rho_{|l|} e^{il\circ} \right\|_p \leq |\gamma_0| |\rho_0| \\ & + \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{|l|=1}^m \left(1 - \left| \frac{l}{m+1} \right| \right) \gamma_l \rho_{|l|} e^{ilt} \right|^p dt \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Последняя подмодульная сумма для любого числа $m \in \mathbb{N}$ равна разности

$$\sum_{|l|=1}^m \left(1 - \left| \frac{l}{m+1} \right| \right) \gamma_l \rho_{|l|} e^{ilt} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{|l|=1}^m \left(1 - \left| \frac{l}{m+1} \right| \right) \gamma_l \rho_{|l|} e^{il\theta} d\theta,$$

ибо $\forall l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \int_{-\pi}^{\pi} e^{il\theta} d\theta = 0$. Согласно обращению неравенства Гёльдера [14; гл. VI, п. 2, следствие 2.3] для любого показателя $p \in [1, \infty)$

$$\begin{aligned} & \sup_I \left(\frac{1}{|I|} \int_I \left| \sum_{|l|=1}^m \left(1 - \left| \frac{l}{m+1} \right| \right) \gamma_l \rho_{|l|} e^{ilt} \right| \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{|I|} \int_I \sum_{|l|=1}^m \left(1 - \left| \frac{l}{m+1} \right| \right) \gamma_l \rho_{|l|} e^{il\theta} d\theta \right|^p dt \Big)^{1/p} \\ & \leq k_9(p) \left\| \sum_{|l|=1}^m \left(1 - \left| \frac{l}{m+1} \right| \right) \gamma_l \rho_{|l|} e^{il\circ} \right\|_*, \end{aligned}$$

где константа k_9 зависит только от p .

Поскольку постоянные функции имеют [14; гл. VI, п. 1], [15; гл. X, п. В.1°, замечание 1] нулевую *-полунорму, то из предыдущего с учетом неравенства $\sup\{|\mu_l^{(n)}| : (n, l) \in \mathbb{Z}_0^2\} \leq k_1(M)$, которое вытекает [1; гл. VII, п. 2, неравенство (α)] из неравенства (4), и неравенства (36) для всех показателей $p \in [1, \infty)$ получаем

$$\sup_{m \in \mathbb{Z}_0} \left\| \sum_{l=-m}^m \left(1 - \left| \frac{l}{m+1} \right| \right) \gamma_l \rho_{|l|} e^{il\circ} \right\|_p \leq |\gamma_0| k_1(M) + k_9(p) k_6(M) k_4(\Gamma, M).$$

Отсюда на основании теоремы У. и Дж. Юнгов [1; гл. I, § 60, теорема 3], [2; гл. IV, § 5, следствие из теоремы (5.7)], [3; п. 12.7.6], применяемой в направлении “ $\Leftarrow$ ”, заключаем, что тригонометрический ряд $\sum_{l=-\infty}^{\infty} \gamma_l \rho_{|l|} e^{ilx}$ является рядом Фурье некоторой функции $g \in \bigcap_{1 < p < \infty} L^p(\mathbb{T})$, т.е. имеют место равенства (22).

Таким образом, для неравенства (35) имеем следующую запись:

$$\frac{1}{|I|} \int_I \left| (C, 1)_m(g, t) - \frac{1}{|I|} \int_I (C, 1)_m(g, \theta) d\theta \right| dt \leq k_6(M) k_4(\Gamma, M), \quad (35')$$

где номер $m \in \mathbb{Z}_0$ и отрезок $I \subset \mathbb{R}$ суть произвольные фиксированные.

Шаг 3. Докажем, что функция g на самом деле принадлежит пространству $\text{ВМО}(\mathbb{T})$ – собственной части пересечения $\bigcap_{1 < p < \infty} L^p(\mathbb{T})$.

Последовательность $(C, 1)$ -средних ряда Фурье функции $g \in \bigcap_{1 < p < \infty} L^p(\mathbb{T})$, во-первых, согласно теореме Лебега [1; гл. I, § 49], [2; гл. III, § 3, теорема (3.9)], [3; п. 6.4.4] сходится почти всюду на $\mathbb{R}$ к функции $g(x)$:

$$\begin{aligned} (C, 1)_m(g, x) &:= \sum_{l=-m}^m \left(1 - \left| \frac{l}{m+1} \right| \right) e^{ilx} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{-ilt} dt \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{\text{п.в.}} g(x) \\ &\in \bigcap_{1 < p < \infty} L^p(\mathbb{T}), \end{aligned}$$

во-вторых, по теореме Харди–Литтлвуда [2; гл. IV, § 7, теорема (7.8)], [3; неравенство (6.4.11) в п. 6.4.7 и п. 13.10] имеет мажорантную функцию, интегрируемую с любой степенью $p \in (1, \infty)$:

$$(C, 1)^*(g, x) := \sup_{m \in \mathbb{Z}_0} |(C, 1)_m(g, x)| \in \bigcap_{1 < p < \infty} L^p(\mathbb{T}).$$

Поэтому на основании теоремы Лебега о мажорируемой сходимости [1; вводный материал, § 14, теорема 2] переход в неравенствах (35') при фиксированном отрезке $I \subset \mathbb{R}$ к пределу при $m \rightarrow \infty$ дает

$$\frac{1}{|I|} \int_I \left| g(t) - \frac{1}{|I|} \int_I g(\theta) d\theta \right| dt \leq k_6(M) k_4(\Gamma, M).$$

Отсюда, так как отрезок I произвольный, получаем $\|g\|_* \leq k_6 k_4$.

Итак, функция $g \in \text{ВМО}(\mathbb{T})$.

Если последовательность (ρ_l) , $l \in \mathbb{Z}_0$, постолбцовых пределов элементов матрицы M является единичной последовательностью $(1, 1, \dots)$, то доказательство частного случая леммы 7 закончено с функцией $f = g$.

Если же $(\rho_l) \neq (1, 1, \dots)$, то, как при завершении доказательства леммы 3, приходим к выводу, что тригонометрический ряд (1) есть ряд Фурье функции

$$f(x) := h(x) + \sum_{l \in \mathbb{P}} \gamma_l e^{ilx} \in \text{ВМО}(\mathbb{T}).$$

Лемма 7 доказана.

Теорема 4 полностью доказана.

6. Доказательство теоремы 5. Известна [6]

ЛЕММА 8 (необходимость). *Предположение: условие 2) как в теореме 1.*

Утверждения: если при N -функции $\Phi(u)$ функция f принадлежит комплексному пространству Орлича $L_{\Phi}^(\mathbb{T})$, то*

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}_0} \|M_n(f, \circ)\|_{\Phi} < \infty;$$

если при N -функции $\Phi(u)$, удовлетворяющей Δ_2 -условию, функция f принадлежит комплексному пространству Орлича $L_{\Phi}^(\mathbb{T})$, то*

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}_0} \|M_n(f, \circ)\|_{\Phi} \leq k_{10}(M, \Phi) \|f\|_{\Phi},$$

где постоянная k_{10} не зависит от f .

Стало быть, доказательство теоремы 5 сводится к доказательству лемм 9 и 10.

ЛЕММА 9 (необходимость). *Предположения: условия 2) и 1) как в теореме 1, но без условия (3).*

Утверждения: если при N -функции $\Phi(u)$, удовлетворяющей Δ_2 -условию, функция f принадлежит комплексному пространству Орлича $L_{\Phi}^(\mathbb{T})$, то последовательность M -средних (16) ее ряда Фурье будет в этом пространстве фундаментальной:*

$$\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} \|M_m(f, \circ) - M_n(f, \circ)\|_{\Phi} = 0; \quad (15')$$

если при N -функции $\Phi(u)$ функция f принадлежит комплексному пространству Орлича $L_{\Phi}^(\mathbb{T})$, то для любой функции h из комплексного пространства Орлича $L_{\Psi}^*(\mathbb{T})$, где дополнительная N -функция $\Psi(v)$ удовлетворяет Δ_2 -условию, будет существовать конечный предел (25).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы 9 проводится по следующей схеме.

Шаг 1. При N -функции $\Phi(u)$, удовлетворяющей Δ_2 -условию, множество тригонометрических полиномов (см. [3; упражнение 6.17] и [4; гл. II, § 9.6, теорема 9.4]) всюду плотно в пространстве Орлича $L_{\Phi}^*(\mathbb{T})$. И доказательство первого утверждения проводится очевидной адаптацией рассуждений шага 2 доказательства леммы 4, учитывающей $2\pi\Psi^{-1}(1/(2\pi))$ — значение полунормы Орлича характеристической функции отрезка $[-\pi, \pi]$ [4; гл. II § 9.3 (9.11)].

Доказательство первого утверждения можно сократить, сразу воспользовавшись леммой 2, согласно которой

$$\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} \|M_m(g_{\alpha(\varepsilon)}, \circ) - M_n(g_{\alpha(\varepsilon)}, \circ)\|_C = 0. \quad (5'')$$

(Нельзя воспользоваться леммой 2 при доказательстве леммы 4, ибо последняя выполнение условия (4) не предполагает.)

Шаг 2. Доказательство второго утверждения состоит в установлении фундаментальности комплексной последовательности (30) с помощью аналога [4; гл. II, § 9.4, теорема 9.3] неравенства Гёльдера и первого утверждения.

Доказательство леммы 9 закончено.

ЛЕММА 10 (достаточность). *Предположения: условие 1) как в теореме 1 и $3L_{\Phi}^*$ как в теореме 5. Утверждение: для того чтобы при N -функции $\Phi(u)$ комплексный тригонометрический ряд (1) являлся рядом Фурье некоторой функции f из комплексного пространства Орлича $L_{\Phi}^*(\mathbb{T})$, достаточно, чтобы выполнялось любое из трех условий (14), (15) или: для любой функции h из комплексного пространства Орлича $L_{\Phi}^*(\mathbb{T})$, где дополнительная N -функция $\Psi(v)$ удовлетворяет Δ_2 -условию, комплексная последовательность (30) ограничена.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы 10 проводится по следующей схеме.

Шаг 1. При N -функции $\Phi(u)$ из последовательности M -средних условия L_{Φ}^* -ограниченности (14) можно [4; гл. II, § 14.3, теорема 14.4] выделить подпоследовательность, которая E_{Φ} -слабо сходится к некоторой функции $g \in L_{\Phi}^*(\mathbb{T})$. Это значит, что для любых функций $u(t)$ из $E_{\Phi}(\mathbb{T})$ – замыкания $L^{\infty}(\mathbb{T})$ в $L_{\Phi}^*(\mathbb{T})$ – имеет место предельное равенство (31).

Из (31), как на шаге 1 доказательства леммы 5, приходим к равенствам (22).

Если $(\rho_l) = (1, 1, \dots)$, то доказательство первого утверждения закончено.

Если же $(\rho_l) \neq (1, 1, \dots)$, то, как при доказательстве лемм 3 и 7, приходим к выводу, что тригонометрический ряд (1) есть ряд Фурье функции

$$f(x) := h(x) + \sum_{l \in \mathbb{P}} \gamma_l e^{ilx} \in L_{\Phi}^*(\mathbb{T}).$$

Шаг 2. Так как при N -функции $\Phi(u)$ пространство Орлича $L_{\Phi}^*(\mathbb{T})$ полно [4; гл. II, § 9.2, теорема 9.2], то условие L_{Φ}^* -фундаментальности (15) влечет условие L_{Φ}^* -ограниченности (14). Тем самым доказательство второго утверждения сводится к шагу 1.

Шаг 3. Доказательство третьего утверждения с помощью теоремы об ограниченных последовательностях функционалов [2; гл. IV, § 10, теорема (10.7), (II)] также сводится к шагу 1.

Доказательство леммы 10 закончено.

Доказательство теоремы 5 закончено.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В случае $\Phi(u) := u^p/p$ из теоремы 5 имеем сужение теоремы 2 на пространства Ф. Рисса $L^p(\mathbb{T})$, $p \in (1, \infty)$. Что касается крайних значений показателя $p = 1$ и $p = \infty$, то схема доказательства теоремы 5 позволяет доказать теорему 2 в полном объеме, ибо:

отправная теорема [3; теорема 12.3.10(2)], [8; теорема 1.6.6] доказательства обратного утверждения А) верна при $p \in (1, \infty)$;

вывод прямого утверждения Б) опирается на то, что множество тригонометрических полиномов всюду плотно [1; гл. I, § 28] во всех пространствах $L^p(\mathbb{T})$ с показателем $p \in [1, \infty)$ (пространство $L^{\infty}(\mathbb{T})$ не сепарабельно);

при $p = 1$ вывод прямого утверждения В) использует очевидные интегральные представления $\forall n \in \mathbb{Z}_0 \quad T_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{M}_n(h, t) dt$, вывод обратного – слабую секвенциальную полноту $L^1(\mathbb{T})$ [3; приложение С.2].

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Теорема 3 улучшает теорему 2 для пространств Рисса $L^p(\mathbb{T})$, $p \in (1, \infty)$. Метод частных сумм определяет матрица $[\max(0, \text{sign}(n - l + 1))]$, $(n, l) \in \mathbb{Z}_0^2$, которая предположениям теоремы 3 удовлетворяет, а условие (4) предположений теорем 1, 2, 4 и 5 не удовлетворяет [1; гл. I, § 35], [2; гл. II, § 12], [3; п. 7.1.1].

7. Добавление к основным результатам. Предположения 3C) теоремы 1, $3L^p$) теоремы 2, 3ВМО) теоремы 4 и $3L_\Phi^*$) теоремы 5 дополняет

ТЕОРЕМА 6. *Предположение: элементы бесконечной нижней треугольной действительной матрицы $N := [\nu_l^{(n)}]$, $(n, l) \in \mathbb{Z}_0^2$, имеют по всем столбцам единичный предел:*

$$\forall l \in \mathbb{Z}_0 \quad \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \nu_l^{(n)} = 1.$$

Утверждения: если действительная последовательность $\Lambda := (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_l, \dots)$ удовлетворяет условию

$$k_{11}(\Lambda, N) := \sup_{n \in \mathbb{Z}_0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{l=-n}^n \lambda_{|l|} \nu_{|l|}^{(n)} e^{ilt} \right| dt < \infty, \quad (37)$$

то она является мультипликатором типа (C, C) , для всех показателей $p \in [1, \infty]$ типа (L^p, L^p) , типа $(\text{ВМО}, \text{ВМО})$ и при N -функции $\Phi(u)$ типа (L_Φ^, L_Φ^*) .*

Частные случаи теоремы 6. В случае матрицы $[\max(0, 1 - l/(n+1))]$, $(n, l) \in \mathbb{Z}_0^2$, определяющей $(C, 1)$ -метод суммирования рядов, из теоремы 6 имеем классические результаты [2; гл. IV, § 11, теорема (11.4) и следствие из теоремы (11.11)] о мультипликаторах типов (C, C) и (L^p, L^p) , $p \in [1, \infty]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6. В настоящей работе ограничимся доказательством того, что последовательность $\Lambda \in (\text{ВМО}, \text{ВМО})$.

Пусть g – произвольная функция из пространства $\text{ВМО}(\mathbb{T})$ функций ограниченной средней осцилляции. Тогда из условия (37) согласно лемме 6 с элементами $\mu_l^{(n)} := \lambda_l \nu_l^{(n)}$ получаем неравенство

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}_0} \left\| \sum_{l=-n}^n \lambda_{|l|} \nu_{|l|}^{(n)} e^{il \circ} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{-ilt} dt \right\|_* \leq k_{11}(\Lambda, N) k_7 (2 + k_8) \|g\|_*. \quad (33')$$

Отсюда на основании леммы 7 с коэффициентами $\gamma_l := \lambda_{|l|} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{-ilt} dt$ и элементами $\mu_l^{(n)} := \nu_l^{(n)}$ следует, что тригонометрический ряд

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} \lambda_{|l|} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{-ilt} dt e^{ilx}$$

является рядом Фурье некоторой функции $f \in \text{ВМО}(\mathbb{T})$.

Из предыдущего ввиду произвола в выборе функции $g \in \text{ВМО}(\mathbb{T})$ заключаем, что последовательность Λ является мультипликатором типа $(\text{ВМО}, \text{ВМО})$.

8. Заключительные замечания.

ЗАМЕЧАНИЕ 1 об условии (4), входящем в предположения теорем 1, 2, 4 и 5 и лемм 1, 2 и 6–9. Его проверка для метода Гёльдера H^r при любом действительном $r > 1$ занимает в работе [16] почти девять полных страниц. Трудной задаче – поиску эффективных условий, достаточных для ограниченности последовательности M -констант Лебега, – посвящали свои глубокие исследования С. М. Никольский [1], Б. Сёкефальви-Надь [1] и другие [17]–[19].

ЗАМЕЧАНИЕ 2 об *эффективных* условиях, достаточных для выполнения предположения $3L^p$) теоремы 2.

Равенство Парсеваля и теорема Ф. Рисса–Э. Фишера влекут: любая ограниченная последовательность является мультипликатором типа (L^2, L^2) .

Если ограниченная последовательность имеет ограниченные в совокупности вариации на диадических отрезках, то она является [2; гл. XV, § 4, теорема (4.14)] для всех показателей $p \in (1, \infty)$ мультипликатором типа (L^p, L^p) .

Дополнительные условия на последовательность ограниченной вариации, при которых она будет мультипликатором типов $(L^\infty, L^\infty) = (L^1, L^1)$, см. в [20; с. 502] и [21; с. 236].

Список литературы

1. *Барн Н. К.* Тригонометрические ряды. М.: ГИФМЛ, 1961.
2. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. Т. 1, 2. М.: Мир, 1965.
3. *Эдвардс Р.* Ряды Фурье в современном изложении. Т. 1, 2. М.: Мир, 1985.
4. *Красносельский М. А., Рутецкий Я. Б.* Выпуклые функции и пространства Орлича. М.: ГИФМЛ, 1958.
5. *Тыннов М. Т.* дополнительные пространства коэффициентов Фурье // Уч. зап. Тартуского гос. ун-та. 1966. № 192. С. 65–81.
6. *Барон С.* Введение в теорию суммируемости рядов. Таллин: Валгус, 1977.
7. *Харди Г.* Расходящиеся ряды. М.: ИЛ, 1951.
8. *Качмаж С., Штейнгауз Г.* Теория ортогональных рядов. М.: ГИФМЛ, 1958.
9. *Rooney P. G.* On the representation of sequences as Fourier coefficients // Proc. Amer. Math. Soc. 1960. V. 11. P. 762–768.
10. *Бруй И. Н.* Тригонометрические ряды классов $L^p(\mathbb{T})$ и их регулярные средние // Весці Акадэміі навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 1996. № 1. С. 24–30.
11. *Бруй И. Н.* Тригонометрические ряды классов $L^p(\mathbb{T})$, $p \in [1, \infty[$, и их консервативные средние // Матем. заметки. 1997. Т. 62. № 5. С. 677–686.
12. *Бруй И. Н.* Тригонометрические ряды классов $L^p(\mathbb{T})$ и их матричные средние // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2000. № 1. С. 46–49.
13. *Bruj I., Schmieder G.* Real trigonometric series of class BMO and $(C, 1)$ -means // Acta Sci. Math. (Szeged). 1998. V. 64. P. 483–488.
14. *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции. М.: Мир, 1984.
15. *Кусис П.* Введение в теорию пространств H^p . М.: Мир, 1984.
16. *Турецкий А. Х.* О классах насыщения в пространстве C // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1961. Т. 25. № 3. С. 411–442.
17. *Ефимов А. В.* О линейных методах суммирования рядов Фурье // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1960. Т. 24. № 5. С. 743–756.
18. *Покало А. К.* Об одном классе линейных методов суммирования // Весці Акадэміі навук Беларускай ССР. Сер. фіз.-тэхн. навук. 1962. № 1. С. 24–27.
19. *Теляковский С. А.* Условия интегрируемости тригонометрических рядов и их приложение к изучению линейных методов суммирования рядов Фурье // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1964. Т. 28. № 6. С. 1209–1236.
20. *Buntinas M.* Some new multipliers of Fourier series // Proc. Amer. Math. Soc. 1987. V. 101. № 3. P. 497–502.
21. *Giang D. V., Móricz F.* Multipliers of Fourier transforms and series on L^1 // Arch. Math. (Basel). 1994. V. 62. № 3. P. 230–238.

Гродненский государственный университет
имени Янки Купалы, Беларусь

Поступила в редакцию
21.05.2001