Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. И. Голубов, О модифицированном сильном двоичном интеграле и производной,
Матем. сб., 2002, том 193, номер 4, 37–60

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm643>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 17:20:50

УДК 517.5

Б. И. Голубов

О модифицированном сильном двоичном интеграле и производной

Для функций $f \in L(\mathbb{R}_+)$ введены модифицированные сильные двоичные интеграл (МСДИ) $J(f)$ и производная (МСДП) $D(f)$. Доказан критерий существования МСДИ для заданной интегрируемой функции и установлены равенства $J(D(f)) = f$ и $D(J(f)) = f$ при условии $\int_{\mathbb{R}_+} f(x) dx = 0$. Найдено счетное множество собственных функций операторов D и J . Доказано, что линейная оболочка L , натянутая на это множество, плотна в двоичном пространстве Харди $H(\mathbb{R}_+)$, а линейный оператор $\tilde{J}: L \rightarrow L(\mathbb{R}_+)$ ограничен, где $\tilde{J}(f) = J(f)^\sim$. Следовательно, этот оператор может быть единственным образом продолжен по непрерывности на $H(\mathbb{R}_+)$ и полученный в результате линейный оператор $\tilde{J}: H(\mathbb{R}_+) \rightarrow L(\mathbb{R}_+)$ ограничен.

Библиография: 12 названий.

Введение

В работе [1] П. Л. Бутцер и Х. Й. Вагнер для функций $f \in L(G)$ ввели понятие сильной двоичной производной $D(f) \in L(G)$, где G — двоичная группа, являющаяся реализацией модифицированного отрезка $[0, 1]^*$. Они доказали, что функции ортонормированной на G системы Уолша–Пэли $\{w_n\}_{n=0}^\infty$ удовлетворяют условиям $D(w_n) = nw_n$ ($n \in \mathbb{Z}_+$), т.е. являются собственными функциями оператора D . В той же работе для функций $f \in L(G)$ введен сильный двоичный интеграл $I(f) \in L(G)$. Доказано, что $D(I(f)) = I(D(f)) = f$, если $\hat{f}(0) = \int_G f(x) dx = 0$. Таким образом, установлена основная теорема интегрального исчисления для двоичного анализа. В той же работе доказано, что следующие три условия равносильны:

- а) существует $D(f) = g$;
- б) существует такая функция $g \in L(G)$, что $\hat{g}(n) = n\hat{f}(n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, где $\hat{f}(n) = \int_G f(x)w_n(x) dx$ — коэффициенты Фурье–Уолша функции f ;
- в) существует такая функция $g \in L(G)$, что $f = I(g) + \hat{f}(0)$.

В другой работе тех же авторов [2] введено понятие сильной двоичной производной $\overline{D}$ для функций $f \in L(\mathbb{R}_+)$ и доказано равенство $(\overline{D}(f))^\sim(x) = x\tilde{f}(x)$, где $\tilde{f}$ — преобразование Фурье–Уолша функции f . Е. Пал [3] доказал, что если $f \in L(\mathbb{R}_+)$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00355).

и $xf(x) \in L(\mathbb{R}_+)$, то $\overline{D}(\tilde{f})$ существует и совпадает с $(xf(x))^\sim$. В другой работе Е. Пала [4] при некотором дополнительном условии на функцию $f \in L(\mathbb{R}_+)$ ($\tilde{f}(x) = 0$ для $0 \leq x < a$ при некотором $a > 0$) определен сильный двоичный интеграл $\overline{I}(f)$ и доказаны равенства $\overline{D}(\overline{I}(f)) = f$ и $\overline{I}(\overline{D}(f)) = f$. В книге [5; гл. 9] указанное ограничение на функцию $f \in L(\mathbb{R}_+)$ при определении сильного двоичного интеграла $\overline{I}(f)$ снято и доказан следующий критерий: пара функций $f, g \in L(\mathbb{R}_+)$ связана равенством $g = \overline{I}(f)$ тогда и только тогда, когда выполняются условия $\tilde{g}(0) = 0$ и $\tilde{g}(x) = \tilde{f}(x)/x$, $x > 0$.

С. У. Онневир [6] ввел понятие сильной двоичной производной $D^{(1)}(f)$ для функций $f \in L(G)$ и доказал равенства $D^{(1)}(w_k) = 2^n w_k$, где $2^n \leq k < 2^{n+1}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. В работах [6] и [7] введены также две сильные двоичные производные $D^{(1)}(f)$ и $D^{[1]}(f)$ для функций $f \in L(K)$, где двоичная группа K является реализацией модифицированной положительной полуоси $\mathbb{R}_+^*$. В [7] установлено, что производные $D^{(1)}$ и $D^{[1]}$ дифференцируют один и тот же набор функций $f \in L(K)$, не совпадающий с $L(K)$.

В данной работе вводятся модифицированный сильный двоичный интеграл $J(f)$ и модифицированная сильная двоичная производная $D(f)$ для функций $f \in L(\mathbb{R}_+)$. Отметим, что рассматриваемая нами производная $D(f)$ для функций $f \in L(\mathbb{R}_+)$ фактически эквивалентна производным $D^{(1)}(f)$ и $D^{[1]}(f)$ С. У. Онневир [7], который рассматривал функции $f \in L(K)$. В работе доказывается аналог упомянутого выше критерия Е. Пала: пара функций $f, g \in L(\mathbb{R}_+)$ связана равенством $g = J(f)$ тогда и только тогда, когда $\tilde{g}(0) = 0$ и $\tilde{g}(x) = h(x)\tilde{f}(x)$, где $h(x) = 2^{-n}$, $2^n \leq x < 2^{n+1}$, $n \in \mathbb{Z}$, а $\tilde{f}$ — преобразование Фурье–Уолша функции f . При условии $\tilde{f}(0) = 0$ доказаны равенства $D(J(f)) = f$ и $J(D(f)) = f$. Кроме того, найдено счетное множество собственных функций операторов D и J и показано, что линейная оболочка L , натянутая на это множество, плотна в двоичном пространстве Харди $H(\mathbb{R}_+)$. Доказано, что линейный оператор $\tilde{J}: L \rightarrow L(\mathbb{R}_+)$, где $\tilde{J}(f) = (J(f))^\sim$, ограничен и, следовательно, допускает продолжение по непрерывности на $H(\mathbb{R}_+)$. Наконец, доказано, что на двоичном пространстве Харди $H(\mathbb{R}_+)$ можно определить модифицированный сильный двоичный интеграл $J(f)$ как равномерный предел на $\mathbb{R}_+$ некоторой последовательности двоичных сверток $f * W_n$, где ядра $W_n \in L(\mathbb{R}_+)$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

§ 1. Основные определения и известные результаты

Как обычно, через $\mathbb{R}_+$ обозначается положительная полуось $[0, +\infty)$. Через $L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 \leq p \leq \infty$, обозначается пространство измеримых на $\mathbb{R}_+$ по мере Лебега функций f с конечной нормой

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}_+)} = \left(\int_{\mathbb{R}_+} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

или

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}_+} |f(x)|.$$

При этом вместо $L^1(\mathbb{R}_+)$ будем писать $L(\mathbb{R}_+)$. Через $\mathbb{Z}$ обозначается множество всех целых чисел, а через $\mathbb{Z}_+$ — множество всех целых неотрицательных чисел.

Напомним определение преобразования Фурье–Уолша, которое впервые появилось в работе Н. Файна [8] (см. также [5; гл. 9] или [9; гл. 6]). Для числа $x \in \mathbb{R}_+$ и натурального n положим

$$x_n \equiv [2^n x] \pmod{2}, \quad x_{-n} \equiv [2^{1-n} x] \pmod{2}, \quad (1.1)$$

где $[a]$ обозначает целую часть числа a , а числа x_n и x_{-n} по определению равны 0 или 1. Поскольку $x_{-n} = 0$ для $n \geq n(x)$, то для $(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ определено целое неотрицательное число

$$t(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n y_{-n} + x_{-n} y_n).$$

Обобщенные функции Уолша определяются для $(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ равенством

$$\psi_y(x) = (-1)^{t(x, y)}. \quad (1.2)$$

Нам понадобятся также следующие свойства обобщенных функций Уолша (см. [5; гл. 9]):

$$\psi_y(x) = \psi_x(y), \quad \psi_y(x) = \pm 1 \quad \text{для } (x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \quad (1.3)$$

$$\psi_y(x) = \psi_{[y]}(x) \psi_{[x]}(y), \quad \psi_0(x) \equiv 1 \quad (x, y \in \mathbb{R}_+). \quad (1.4)$$

Преобразование Фурье–Уолша $F[f] \equiv \tilde{f}$ функции $f \in L(\mathbb{R}_+)$ задается равенством

$$F[f](x) \equiv \tilde{f}(x) = \int_{\mathbb{R}_+} \psi_x(y) f(y) dy \quad (1.5)$$

(см. [5; гл. 9] или [9; гл. 6]). Если же функция $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$, то $F[f] \equiv \tilde{f}$ определяется как предел по норме пространства $L^2(\mathbb{R}_+)$ последовательности функций $\int_{D_n} \psi_x(y) f(y) dy$.

Преобразование Фурье–Уолша имеет свойства, аналогичные свойствам обычного преобразования Фурье. Очевидно, для функции $f \in L(\mathbb{R}_+)$ ее преобразование Фурье–Уолша ограничено и $\|\tilde{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)} \leq \|f\|_{L(\mathbb{R}_+)}$. Поэтому из сходимости последовательности функций f_n к функции f в метрике $L(\mathbb{R}_+)$ вытекает, что $\tilde{f}_n$ сходится к $\tilde{f}$ равномерно на $\mathbb{R}_+$. Справедлив также аналог теоремы Планшереля:

ТЕОРЕМА А. Если $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$, то $\tilde{f} \in L^2(\mathbb{R}_+)$, причем

$$\|\tilde{f}\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}, \quad F[\tilde{f}] = f.$$

Отметим также следующий результат:

ТЕОРЕМА В. Если $f, g \in L^2(\mathbb{R}_+)$ или $f, g \in L(\mathbb{R}_+)$, то

$$\int_{\mathbb{R}_+} \tilde{f}(x)g(x) dx = \int_{\mathbb{R}_+} f(x)\tilde{g}(x) dx.$$

На $\mathbb{R}_+$ введем операцию сложения $\oplus$, положив для $(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$: $x \oplus y = z$, где число z в двоичной системе счисления имеет двоичные разряды

$$z_n \equiv x_n + y_n \pmod{2} \quad (n \in \mathbb{Z} \setminus 0),$$

а x_n, y_n вычисляются по правилу (1.1). Отметим, что для $n \in \mathbb{N}$ x_n является n -м двоичным разрядом дробной части числа $x \in \mathbb{R}_+$, а x_{-n} является n -м двоичным разрядом целой части этого числа. При этом двоично-рациональным числам $x \in \mathbb{R}_+$ сопоставляются конечные двоичные разложения, т.е. $x_n = 0$ для $n \geq n(x)$.

Обобщенные функции Уолша удовлетворяют равенству

$$\psi_t(x \oplus y) = \psi_t(x)\psi_t(y), \quad (1.6)$$

если $t, x, y \in \mathbb{R}_+$, $x \oplus y$ — двоично-иррационально. Таким образом, при фиксированных t и x равенство (1.6) выполняется для всех $y \in \mathbb{R}_+$, за исключением счетного множества.

Отметим, что обобщенные функции Уолша с целым неотрицательным нижним индексом выражаются через функции Уолша:

$$\psi_k(x) = w_k(x - [x]) \quad (k \in \mathbb{Z}_+, x \in \mathbb{R}_+). \quad (1.7)$$

Теорема об обращении преобразования Фурье–Уолша справедлива не только для класса $L^2(\mathbb{R}_+)$. Чтобы сформулировать ее для класса $L(\mathbb{R}_+)$, напомним определение W -непрерывности функции. Функцию $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ назовем W -непрерывной в точке $x \in \mathbb{R}_+$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $|f(x \oplus y) - f(x)| < \varepsilon$ при $0 < y < \delta$ (см. [9; гл. 1]).

Отметим, что для функции $f \in L(\mathbb{R}_+)$ ее преобразование Фурье–Уолша $\tilde{f}$ является W -непрерывной функцией на $\mathbb{R}_+$ (см. [9; теорема 6.1.5]).

ТЕОРЕМА С. Пусть функция $f \in L(\mathbb{R}_+)$ является W -непрерывной на $\mathbb{R}_+$ и $\tilde{f} \in L(\mathbb{R}_+)$. Тогда

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}_+} \psi_x(y)\tilde{f}(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

Положим

$$S_y(f)(x) = \int_0^y \tilde{f}(t)\psi_x(t) dt. \quad (1.8)$$

ТЕОРЕМА D. Если $f \in L(\mathbb{R}_+)$, то

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|S_{2^n}(f) - f\|_{L(\mathbb{R}_+)} = 0$$

и

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|S_{2^{-n}}(f)\|_{L(\mathbb{R}_+)} = |\tilde{f}(0)|.$$

Все эти факты о преобразованиях Фурье–Уолша можно найти, например, в [5; гл. 9] или [9; гл. 6].

§ 2. Модифицированный сильный двоичный интеграл

Напомним определение двоичной свертки $f * g$ двух функций $f, g \in L(\mathbb{R}_+)$:

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}_+} f(y)g(x \oplus y) dy, \quad x \in L(\mathbb{R}_+).$$

Как и в случае обычной свертки $f * g \in L(\mathbb{R}_+)$, $(f * g)^\sim = \tilde{f}\tilde{g}$.

В книге [5; с. 435], введено понятие сильного двоичного интеграла в пространстве $L(\mathbb{R}_+)$ следующим образом. Для $n \in \mathbb{Z}_+$ положим

$$\overline{W}_n(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{2^{-n}}^{2^k} \frac{1}{t} \psi_x(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}_+. \quad (2.1)$$

Как доказано в [5; с. 434], предел (2.1) существует как почти всюду на $\mathbb{R}_+$, так и в метрике пространства $L(\mathbb{R}_+)$. Поэтому для любой функции $f \in L(\mathbb{R}_+)$ и $n \in \mathbb{Z}_+$ определена двоичная свертка

$$(f * \overline{W}_n)(x) = \int_{\mathbb{R}_+} f(t) \overline{W}_n(x \oplus t) dt, \quad (2.2)$$

причем $f * \overline{W}_n \in L(\mathbb{R}_+)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Если для некоторой функции $f \in L(\mathbb{R}_+)$ существует такая функция $g \in L(\mathbb{R}_+)$, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f * \overline{W}_n - g\|_{L(\mathbb{R}_+)} = 0$, то функция $g \equiv \bar{I}(f)$ называется *сильным двоичным интегралом* функции f .

Известна следующая

ТЕОРЕМА Е. Если $f, g \in L(\mathbb{R}_+)$, то $g = \bar{I}(f)$ тогда и только тогда, когда $\tilde{g}(0) = 0$ и $\tilde{g}(x) = \tilde{f}(x)/x$ для $x > 0$ (см. [5; с. 435]).

Сильный двоичный интеграл существует не для всех функций $f \in L(\mathbb{R}_+)$. Например, он не существует для функции $X_{[0,1]}$, где через $X_E(x)$ обозначена характеристическая функция множества $E \in \mathbb{R}_+$, т.е. $X_E(x) = 1$ для $x \in E$ и $X_E(x) = 0$ для $x \in \mathbb{R}_+ \setminus E$ (см. [5; с. 436]).

Обозначим через $L_d(\mathbb{R}_+)$ множество всех функций $f \in L(\mathbb{R}_+)$, для которых существует сильный двоичный интеграл $\bar{I}(f)$. Очевидно, $L_d(\mathbb{R}_+)$ является линейным подпространством в $L(\mathbb{R}_+)$. Как доказано в [5; гл. 9], функции

$$a_{m,n}(x) = 2^{-n} \psi_{m2^{-n}}(x) X_{[0,2^n]}(x) \quad (m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z}_+) \quad (2.3)$$

принадлежат $L_d(\mathbb{R}_+)$, а их линейная оболочка плотна в $L_d(\mathbb{R}_+)$.

Ниже нам понадобятся следующие две леммы.

ЛЕММА 2.1. Справедливы равенства $\tilde{a}_{m,n}(x) = X_{[m2^{-n}, (m+1)2^{-n}]}(x)$, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $x \in \mathbb{R}_+$ (см. [10; лемма 1]).

ЛЕММА 2.2. Если $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, то существует единственное целое число r , при котором справедливо вложение $[m2^{-n}, (m+1)2^{-n}) \subset [2^r, 2^{r+1})$ (см. [11; лемма 3]).

Последовательность ядер (2.1), с помощью которой определяется сильный двоичный интеграл, хотя и задается явным образом, но свойства функций W_n (например, их поведение в окрестности нуля) исследовать достаточно сложно. По этой причине, как нам кажется, заслуживает внимания определение модифицированного сильного двоичного интеграла (МСДИ) с помощью следующей более простой последовательности ядер

$$W_n(x) = \begin{cases} 0, & x \geq 2^n, \\ k-1, & 2^{n-k-1} \leq x < 2^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, \end{cases} \quad (2.4)$$

где $n \in \mathbb{Z}_+$. Как будет доказано ниже, и преобразование Фурье–Уолша ядер (2.4) выражается достаточно просто, поскольку $\widetilde{W}_n = \varphi_n$, где функция φ_n задается равенством (2.9).

Легко видеть, что

$$W_n \in L(\mathbb{R}_+), \quad \int_{\mathbb{R}_+} W_n(x) dx = 0, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (2.5)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Если для некоторой функции $f \in L(\mathbb{R}_+)$ существует такая функция $g \in L(\mathbb{R}_+)$, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f * W_n - g\|_{L(\mathbb{R}_+)} = 0$, то функцию $g \equiv J(f)$ назовем *модифицированным сильным двоичным интегралом* (МСДИ) функции f .

Следующая теорема является аналогом теоремы Е.

ТЕОРЕМА 2.1. Если $f, g \in L(\mathbb{R}_+)$, то $g = J(f)$ тогда и только тогда, когда

$$\widetilde{g}(0) = 0 \quad \text{и} \quad \widetilde{g}(x) = \widetilde{f}(x)h(x) \quad \text{для} \quad x > 0, \quad (2.6)$$

где

$$h(x) = 2^{-n}, \quad 2^n \leq x < 2^{n+1}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (2.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть сначала $f, g \in L(\mathbb{R}_+)$ и $g = J(f)$. Докажем равенства (2.6). С этой целью, пользуясь тем, что $(f * \varphi)^\sim = \widetilde{f}\widetilde{\varphi}$, из определения 2.2 для $x \in \mathbb{R}_+$ получим

$$\widetilde{g}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \widetilde{W}_n(x)\widetilde{f}(x). \quad (2.8)$$

В силу того, что $\psi_0(x) \equiv 1$, на основании (2.5) имеем

$$\widetilde{W}_n(0) = \int_0^{+\infty} W_n(y) dy = 0.$$

Поэтому, полагая $x = 0$, из (2.8) получим $\widetilde{g}(0) = 0$. Тем самым, доказано первое из равенств (2.6).

Для доказательства второго равенства (2.6) рассмотрим функцию

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 2^{-n}, \\ 2^{-k}, & 2^k \leq x < 2^{k+1}, \quad k = -n, -n+1, \dots \end{cases} \quad (2.9)$$

Найдем преобразование Фурье–Уолша этой функции:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_n(x) &= \int_{2^{-n}}^{+\infty} \varphi_n(y) \psi_x(y) dy = \sum_{k=-n}^{+\infty} 2^{-k} \int_{2^k}^{2^{k+1}} \psi_x(y) dy \\ &= \sum_{k=-n}^{+\infty} 2^{-k} [D_{2^{k+1}}(x) - D_{2^k}(x)], \end{aligned}$$

где

$$D_y(x) = \int_0^y \psi_x(t) dt \quad (2.10)$$

– обобщенное ядро Дирихле–Уолша. Известно, что

$$D_{2^k}(x) = 2^k X_{[0, 2^{-k})}(x), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (2.11)$$

Следовательно,

$$\tilde{\varphi}_n(x) = \sum_{k=-n}^{+\infty} [2X_{[0, 2^{-k-1})}(x) - X_{[0, 2^{-k})}(x)]. \quad (2.12)$$

Легко видеть, что сумма ряда в правой части равенства (2.12) совпадает с функцией $W_n(x)$ из (2.4). Поскольку функция φ_n является W -непрерывной на $\mathbb{R}_+$, то из равенства $\tilde{\varphi}_n(x) = W_n(x)$, $x \in \mathbb{R}_+$, с помощью теоремы С заключаем, что $\tilde{W}_n(x) = \varphi_n(x)$ на $\mathbb{R}_+$. Поэтому равенство (2.8) принимает вид

$$\tilde{g}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{f}(x) \varphi_n(x) = \tilde{f}(x) h(x), \quad x > 0.$$

Тем самым, доказано и второе из равенств (2.6).

2) Пусть теперь функции $f, g \in L(\mathbb{R}_+)$ таковы, что выполняются равенства (2.6). Докажем, что функция f имеет МСДИ $J(f)$, причем $g = J(f)$. Для этого докажем, что последовательность $\{f * W_n\}_{n=0}^{+\infty}$ фундаментальна в пространстве $L(\mathbb{R}_+)$, откуда и будет следовать ее сходимости в этом пространстве, т.е. существование МСДИ $J(f)$. С этой целью рассмотрим обобщенный интеграл Дирихле–Уолша функции g :

$$S_y(g)(x) = (g * D_y)(x), \quad y \in \mathbb{R}_+, \quad (2.13)$$

где $D_y(x)$ – обобщенное ядро Дирихле–Уолша (2.10). Докажем, что имеет место равенство

$$f * W_n - f * W_m = -(S_{2^{-n}}(g) - S_{2^{-m}}(g)), \quad n, m \in \mathbb{Z}_+. \quad (2.14)$$

Для этого достаточно доказать, что

$$(f * W_n - f * W_m)^\sim = -(S_{2^{-n}}(g) - S_{2^{-m}}(g))^\sim, \quad n, m \in \mathbb{Z}_+. \quad (2.15)$$

Преобразуем левую часть доказываемого равенства (2.15). Пользуясь доказанными в п. 1) равенствами $\widetilde{W}_n = \varphi_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, имеем

$$(f * W_n - f * W_m)^\sim = \widetilde{f}(\widetilde{W}_n - \widetilde{W}_m) = -\widetilde{f}h[X_{[0, 2^{-n})} - X_{[0, 2^{-m})}]. \quad (2.16)$$

Преобразуем правую часть (2.15), пользуясь равенствами (2.6) и равенством

$$\widetilde{D}_{2^n} = X_{[0, 2^n)}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

(см. [5; с. 435]). В результате получим

$$(S_{2^{-n}}(g) - S_{2^{-m}}(g))^\sim = \widetilde{g}[\widetilde{D}_{2^{-n}} - \widetilde{D}_{2^{-m}}] = \widetilde{f}h[X_{[0, 2^{-n})} - X_{[0, 2^{-m})}]. \quad (2.17)$$

Из (2.16) и (2.17) вытекает равенство (2.15), а следовательно, и (2.14).

Из равенства (2.14) имеем

$$\begin{aligned} \|f * W_n - f * W_m\|_{L(\mathbb{R}_+)} &= \|S_{2^{-n}}(g) - S_{2^{-m}}(g)\|_{L(\mathbb{R}_+)} \\ &\leq \|S_{2^{-n}}(g)\|_{L(\mathbb{R}_+)} + \|S_{2^{-m}}(g)\|_{L(\mathbb{R}_+)}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Поскольку согласно (2.6) $\widetilde{g}(0) = 0$, то по теореме D оба слагаемых в правой части (2.18) стремятся к нулю. Поэтому и левая часть неравенства (2.18) стремится к нулю при $m, n \rightarrow +\infty$. Таким образом, последовательность $\{f * W_n\}_{n=0}^{+\infty}$ фундаментальна в пространстве $L(\mathbb{R}_+)$. Обозначим ее предел в метрике $L(\mathbb{R}_+)$ через G . Согласно определению 2.2 $G = J(f)$. Тогда по доказанному в п. 1) $\widetilde{G} = h\widetilde{f}$. Отсюда и из (2.6) заключаем, что $\widetilde{G} = \widetilde{g}$. Следовательно, $g = G = J(f)$. Теорема 2.1 доказана.

Не все функции $f \in L(\mathbb{R}_+)$ имеют модифицированный сильный двоичный интеграл. Например, покажем, что он не существует для функции $\varphi = X_{[0, 1)}$. Для этой функции $\widetilde{\varphi} = \varphi$ (см. [5; с. 421]). Принимая во внимание теорему C, для $x \in [0, 1)$ получим

$$(\varphi * W_n)(x) = \int_{\mathbb{R}_+} \widetilde{\varphi}(y) \widetilde{W}_n(y) \psi_x(y) dy = \int_0^1 \widetilde{W}_n(y) dy. \quad (2.19)$$

При доказательстве теоремы 2.1 установлено равенство $\widetilde{W}_n = \varphi_n$, где функция φ_n определяется равенством (2.9). Поэтому из (2.19) для $x \in [0, 1)$ получим

$$(\varphi * W_n)(x) = \sum_{k=-n}^{-1} \int_{2^k}^{2^{k+1}} \varphi_n(y) dy = \sum_{k=-n}^{-1} 2^{-k} 2^k = n.$$

Следовательно, $(\varphi * W_n)(x) \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow +\infty$ для $x \in [0, 1)$. Поэтому последовательность $(\varphi * W_n)(x)$ не может иметь предела в метрике $L(\mathbb{R}_+)$, т.е. функция $\varphi = X_{[0, 1)}$ не имеет модифицированного сильного двоичного интеграла.

Покажем, что функций, имеющих МСДИ, достаточно много.

ТЕОРЕМА 2.2. *Каждая из функций $a_{m,n}$, определяемых равенствами (2.3), имеет МСДИ и является собственной функцией оператора J с собственным значением 2^{-r} , где целое число $r = r(m, n)$ однозначно определяется вложением $[m2^{-n}, (m+1)2^{-n}] \subset [2^r, 2^{r+1})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 2.1 имеем

$$(a_{m,n} * W_k)^\sim = \tilde{a}_{m,n} \tilde{W}_k = X_{[m2^{-n}, (m+1)2^{-n})} \tilde{W}_k.$$

Эта функция принадлежит пространству $L^2(\mathbb{R}_+)$, так как $\tilde{W}_k = \varphi_k$, а функция φ_n определяется формулой (2.9). Кроме того, функция $a_{m,n} * W_k \in L^2(\mathbb{R}_+)$. Поэтому по теореме о восстановлении функции по ее преобразованию Фурье–Уолша (см. теорему А) имеем

$$(a_{m,n} * W_k)(x) = \int_{\mathbb{R}_+} X_{[m2^{-n}, (m+1)2^{-n})}(y) \tilde{W}_k(y) \psi_x(y) dy. \quad (2.20)$$

Согласно лемме 2.2 найдем отрезок $[2^r, 2^{r+1})$, содержащий $[m2^{-n}, (m+1)2^{-n})$. Такой отрезок, очевидно, только один. Из (2.9) следует, что при $k \geq -r$ функция $\tilde{W}_k$ на отрезке $[2^r, 2^{r+1})$ принимает постоянное значение 2^{-r} . Поэтому из (2.20) получим

$$(a_{m,n} * W_k)(x) = 2^{-r} \int_{\mathbb{R}_+} X_{[m2^{-n}, (m+1)2^{-n})}(y) \psi_x(y) dy. \quad (2.21)$$

Применяя лемму 2.1 и теорему А, из (2.21) получим

$$a_{m,n} * W_k = 2^{-r} a_{m,n}. \quad (2.22)$$

Это равенство доказано для всех $k \geq -r$. (Заметим, что функции W_n формулой (2.4) можно определять и для отрицательных целых значений индекса n , хотя это нам не понадобится.) Из равенства (2.22) согласно определению 2.2 вытекает утверждение теоремы 2.2.

Обозначим через $L_J(\mathbb{R}_+)$ множество всех функций $f \in L(\mathbb{R}_+)$, для которых существует МСДИ $J(f)$.

Из теоремы 2.2 получаем

СЛЕДСТВИЕ 2.1. *Справедливы равенства $J(a_{1,n}) = 2^n a_{1,n}$, $n \in \mathbb{Z}_+$.*

Из этого следствия вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2.2. *Линейный оператор $J: L_J(\mathbb{R}_+) \rightarrow L(\mathbb{R}_+)$ неограничен.*

Из теоремы 2.2 получаем также

СЛЕДСТВИЕ 2.3. *Справедливы равенства*

$$J(a_{m,0}) = 2^{-r} a_{m,0}, \quad 2^r \leq m < 2^{r+1}, \quad r = 0, 1, \dots \quad (2.23)$$

Учитывая равенства (1.7) и (2.3), для $m \in \mathbb{Z}_+$ получаем

$$a_{m,0}(x) = \begin{cases} w_m(x), & 0 \leq x < 1, \\ 0, & x \geq 1, \end{cases}$$

где $w_m(x)$ — функции Уолша в нумерации Пэли. Таким образом, равенства (2.23) можно записать в виде

$$J(w_m) = 2^{-r} w_m, \quad 2^r \leq m < 2^{r+1}, \quad r = 0, 1, \dots, \quad (2.24)$$

если считать, что $w_m(x) = 0$, $x \geq 1$.

§ 3. Модифицированная сильная двоичная производная

В этом параграфе мы введем понятие модифицированной сильной двоичной производной (МСДП) $D(f)$ для функции $f \in L(\mathbb{R}_+)$ и докажем равенства $D(J(f)) = f$ и $J(D(f)) = f$ при условии $f(0) = 0$.

Зададим последовательность ядер

$$\Lambda_n(x) = \sum_{k=-n}^n \frac{\psi_{2^{-k}}(x)}{2^{2k}} X_{[0,2^k)}(x), \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (3.1)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Если для функции $f \in L(\mathbb{R}_+)$ существует такая функция $\varphi \in L(\mathbb{R}_+)$, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f * \Lambda_n - \varphi\|_{L(\mathbb{R}_+)} = 0, \quad (3.2)$$

то функцию $\varphi \equiv D(f)$ назовем МСДП функции f .

Отметим, что в работах [6] и [7] С. У. Онневир ввел две сильные двоичные производные $D^{(1)}$ и $D^{[1]}$ для функций $f \in L(K)$, где K — двоичная группа, являющаяся реализацией модифицированной положительной полуоси $\mathbb{R}_+^*$. Он же показал в работе [7], что области определения этих производных совпадают, т.е. они дифференцируют один и тот же набор функций из $L(K)$. Между модифицированной положительной полуосью $\mathbb{R}_+^*$ и двоичной группой K , а также между пространствами $L(\mathbb{R}_+)$ и $L(K)$ существует естественный изоморфизм. Используя этот изоморфизм, можно показать, что нижеследующая теорема 3.1 вытекает из результатов С. У. Онневир [7]. Однако мы здесь приводим ее прямое доказательство.

ТЕОРЕМА 3.1. Если у функции $f \in L(\mathbb{R}_+)$ существует МСДП φ , то

$$\tilde{\varphi}(0) = 0, \quad \tilde{\varphi}(x) = \frac{\tilde{f}(x)}{h(x)}, \quad x > 0, \quad (3.3)$$

где функция h определяется равенством (2.7).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если существует $D(f) \equiv \varphi$, то из (3.2) следует, что существует равномерный на $\mathbb{R}_+$ предел

$$\tilde{\varphi}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{f}(x) \tilde{\Lambda}_n(x). \quad (3.4)$$

Но из (3.1) и (1.6) имеем

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}_n(x) &= \int_{\mathbb{R}_+} \sum_{k=-n}^n \frac{\psi_{2^{-k}}(t)}{2^{2k}} X_{[0,2^k)}(t) \psi_x(t) dt \\ &= \sum_{k=-n}^n 2^{-2k} \int_0^{2^k} \psi_{x \oplus 2^{-k}}(t) dt \\ &= \sum_{k=-n}^n 2^{-2k} D_{2^k}(x \oplus 2^{-k}), \end{aligned} \quad (3.5)$$

где $D_y(x)$ – обобщенное ядро Дирихле–Уолша (см. (2.10)). Воспользовавшись равенством (2.11), из (3.5) получим

$$\tilde{\Lambda}_n(x) = \sum_{k=-n}^n 2^{-k} X_{[0, 2^{-k})}(x \oplus 2^{-k}). \quad (3.6)$$

Но легко видеть, что $X_{[0, 2^{-k})}(x \oplus 2^{-k}) = X_{[2^{-k}, 2^{-k+1})}(x)$. Поэтому из (3.6) имеем

$$\tilde{\Lambda}_n(x) = \sum_{k=-n}^n 2^{-k} X_{[2^{-k}, 2^{-k+1})}(x) \quad (3.7)$$

и, следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{\Lambda}_n(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^{-k} X_{[2^{-k}, 2^{-k+1})}(x), \quad x \in \mathbb{R}_+. \quad (3.8)$$

Легко видеть, что при $x > 0$ сумма ряда в правой части (3.8) равна $\frac{1}{h(x)}$, где $h(x)$ определяется равенством (2.7). При $x = 0$ сумма ряда (3.8), очевидно, равна 0. Тем самым, из (3.4) и (3.8) следует утверждение теоремы.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. *Если для функции $f \in L(\mathbb{R}_+)$ существует МСДП $D(f)$ и выполняется равенство $\tilde{f}(0) = 0$, то у $D(f)$ существует МСДИ, причем $J(D(f)) = f$.*

Действительно, в предположениях следствия на основании теоремы 3.1 справедливы равенства $\tilde{f}(0) = 0$, $\tilde{f}(x) = D(f)^\sim(x)h(x)$, $x > 0$. Но тогда согласно теореме 2.1 заключаем, что $f = J(D(f))$.

Утверждение следствия 3.1 допускает обращение.

ТЕОРЕМА 3.2. *Если для функции $f \in L(\mathbb{R}_+)$ существует МСДИ $J(f)$ и $\tilde{f}(0) = 0$, то у $J(f)$ существует МСДП, причем $D(J(f)) = f$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть у функции $f \in L(\mathbb{R}_+)$ существует МСДИ $J(f)$ и $\tilde{f}(0) = 0$. Нам надо доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|J(f) * \Lambda_n - f\|_{L(\mathbb{R}_+)} = 0, \quad (3.9)$$

где Λ_n определяется равенством (3.1). Для этого заметим, что

$$(J(f) * \Lambda_n)^\sim = J(f)^\sim \tilde{\Lambda}_n.$$

Отсюда на основании теоремы 2.1 и (3.7) имеем

$$(J(f) * \Lambda_n)^\sim = \tilde{f}h \sum_{K=-n}^n 2^{-k} X_{[2^{-k}, 2^{-k+1})}. \quad (3.10)$$

Но так как функция Λ_n является равномерно W -непрерывной на $\mathbb{R}_+$, то свертка $J(f) * \Lambda_n$ является W -непрерывной на $\mathbb{R}_+$. Поэтому из (3.10) согласно теореме С (см. §1) получим

$$(J(f) * \Lambda_n)(x) = \int_{\mathbb{R}_+} \tilde{f}(t)h(t) \sum_{k=-n}^n 2^{-k} X_{[2^{-k}, 2^{-k+1})}(t) \psi_x(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

Легко видеть, что

$$h(t) \sum_{k=-n}^n 2^{-k} X_{[2^{-k}, 2^{-k+1})}(t) = \begin{cases} 1, & 2^{-n} \leq t < 2^{n+1}, \\ 0, & t \in \mathbb{R}_+ \setminus [2^{-n}, 2^{n+1}). \end{cases} \quad (3.11)$$

Следовательно,

$$(J(f) * \Lambda_n)(x) = \int_{2^{-n}}^{2^{n+1}} \tilde{f}(t) \psi_x(t) dt = S_{2^{n+1}}(f)(x) - S_{2^{-n}}(f)(x), \quad (3.12)$$

где $S_y(f)(x)$ – обобщенный интеграл Дирихле–Уолша (см. (1.8)). Поскольку $\tilde{f}(0) = 0$, то из (3.12) на основании теоремы D следует равенство (3.9). Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Если заданы две функции $f, \varphi \in L(\mathbb{R}_+)$, причем $\tilde{f}(0) = 0$ и $\tilde{\varphi}(x) = \frac{\tilde{f}(x)}{h(x)}$, $x > 0$, то у функции f существует МСДП, причем $D(f) = \varphi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, согласно условию теоремы $\tilde{f}(0) = 0$ и $\tilde{f}(x) = \tilde{\varphi}(x)h(x)$ для $x > 0$. Поэтому согласно теореме 2.1 $f = J(\varphi)$, а согласно теореме 3.2 существует $D(f) = \varphi$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Функцию (3.1) можно представить в следующем виде

$$\Lambda_n(x) = \int_{2^{-n}}^{2^{n+1}} \frac{\psi_x(t)}{h(t)} dt, \quad x \in \mathbb{R}_+. \quad (3.13)$$

Действительно, учитывая (3.7) и (3.10), получаем

$$\tilde{\Lambda}_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{h(x)}, & 2^{-n} \leq x < 2^{n+1}, \\ 0, & x \in \mathbb{R}_+ \setminus [2^{-n}, 2^{n+1}). \end{cases} \quad (3.14)$$

Поскольку функция $\Lambda_n \in L(\mathbb{R}_+)$ является W -непрерывной на $\mathbb{R}_+$ и $\tilde{\Lambda}_n \in L(\mathbb{R}_+)$, то из (3.14) вытекает (3.13).

Согласно теореме 2.2 у каждой из функций (2.3) существует МСДП, а согласно лемме 2.1 $\tilde{a}_{m,n}(0) = 0$, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Поэтому из теорем 3.2 и 2.2 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 3.3. Каждая из функций (2.3) является собственной функцией оператора D , причем $D(a_{m,n}) = 2^r a_{m,n}$, где целое число r однозначно определяется вложением $[m2^{-n}, (m+1)2^{-n}) \subset [2^r, 2^{r+1})$.

Из этого следствия на основании равенства (2.24) вытекает

СЛЕДСТВИЕ 3.4. *Справедливы равенства*

$$D(w_m) = 2^r w_m, \quad 2^r \leq m < 2^{r+1}, \quad r = 0, 1, \dots,$$

если считать, что $w_m(x) = 0$, $x \geq 1$.

Обозначим через L_D множество всех функций $f \in L(\mathbb{R}_+)$, для каждой из которых существует МСП $D(f)$. Очевидно, L_D является линейным подпространством в $L(\mathbb{R}_+)$. Из следствия 3.4 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 3.5. *Линейный оператор $D: L_D \rightarrow L(\mathbb{R}_+)$ неограничен.*

Отметим, что ядра (3.1) принадлежат пространству $L(\mathbb{R}_+)$. Поэтому свертка $(f * \Lambda_n)(x)$ для функций $f \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$ имеет смысл в каждой точке $x \in \mathbb{R}_+$. Этот факт позволяет ввести следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Если $f \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$ и в точке $x \in \mathbb{R}_+$ существует конечный предел

$$D(f)(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (f * \Lambda_n)(x), \quad (3.15)$$

то этот предел назовем *модифицированной двоичной производной* (МДП) функции f в точке x .

Символом $L_C^\infty(\mathbb{R}_+)$ обозначим подпространство всех функций $f \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$, которые W -непрерывны на $\mathbb{R}_+$. Очевидно, для $f \in L_C^\infty(\mathbb{R}_+)$ имеем

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)} = \sup_{x \in \mathbb{R}_+} |f(x)|.$$

Известно (см. [5; гл. 9]), что $\psi_y \in L_C^\infty(\mathbb{R}_+)$ для любого $y \geq 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. Если для функции $f \in L_C^\infty(\mathbb{R}_+)$ предел (3.15) существует в метрике $L^\infty(\mathbb{R}_+)$, то функцию $D(f)$ назовем *модифицированной сильной двоичной производной* (МСДП) в пространстве $L_C^\infty(\mathbb{R}_+)$.

ТЕОРЕМА 3.3. *Обобщенные функции Уолша $\psi_y(x)$ при любом $y \in \mathbb{R}_+$ имеют МДП в каждой точке $x \in \mathbb{R}_+$, причем $D(\psi_0)(x) \equiv 0$ на $\mathbb{R}_+$, а для $y > 0$ справедливо равенство $D(\psi_y)(x) = \frac{\psi_y(x)}{h(y)}$, $x \in \mathbb{R}_+$, где функция h определяется равенством (2.7). Кроме того, при любом $y \in \mathbb{R}_+$ существует МСП $D(\psi_y)$ в пространстве $L_C^\infty(\mathbb{R}_+)$, причем $D(\psi_0) = 0$ и $D(\psi_y) = \frac{\psi_y}{h(y)}$ для $y > 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\psi_0(x) \equiv 1$ на $\mathbb{R}_+$, то равенство $D(\psi_0)(x) = 0$ на $\mathbb{R}_+$ легко вытекает из следствия 2.1, так как

$$(\psi_0 * \Lambda_n)(x) = \int_{\mathbb{R}_+} \Lambda_n(t) dt = \tilde{\Lambda}_n(0) = \sum_{k=-n}^n 2^{-k} \tilde{a}_{1,k}(0) = 0$$

для любого $x \in \mathbb{R}_+$. Пусть теперь $y > 0$. Тогда из (3.1), пользуясь равенствами (1.6), (2.11) и (3.6), получим

$$\begin{aligned}
 (\psi_y * \Lambda_n)(x) &= \sum_{k=-n}^n 2^{-2k} \int_0^{2^k} \psi_y(x \oplus t) \psi_{2^{-k}}(t) dt \\
 &= \psi_y(x) \sum_{k=-n}^n 2^{-2k} \int_0^{2^k} \psi_{y \oplus 2^{-k}}(t) dt \\
 &= \psi_y(x) \sum_{k=-n}^n 2^{-2k} D_{2^k}(y \oplus 2^{-k}) \\
 &= \psi_y(x) \sum_{k=-n}^n 2^{-k} X_{[0, 2^{-k})}(y \oplus 2^{-k}) = \psi_y(x) \tilde{\Lambda}_n(y). \quad (3.16)
 \end{aligned}$$

Но при доказательстве теоремы 3.1 было установлено, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{\Lambda}_n(y) = \frac{1}{h(y)}$ для $y > 0$. Поэтому из (3.16) при $n \rightarrow +\infty$ получаем требуемое равенство $D(\psi_y)(x) = \frac{\psi_y(x)}{h(y)}$. Тем самым, первая часть теоремы, касающаяся МДП в точке, доказана. Вторая часть теоремы следует из проведенных рассуждений на основании определения 3.3. Теорема доказана.

Отметим, что эквивалентная версия этой теоремы для производной $D^{(1)}$ в случае, когда $y \in K$ и функции ψ_y заданы на группе K , установлена С.У. Онневи-ром [7].

Из теоремы 3.3 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 3.6. *Обобщенные функции Уолша ψ_y являются собственными функциями оператора $D: L_C^\infty(\mathbb{R}_+) \rightarrow L_C^\infty(\mathbb{R}_+)$ с собственными числами $\frac{1}{h(y)}$ при $y > 0$ и 0 при $y = 0$.*

§ 4. Модифицированный сильный двоичный интеграл в пространстве $H(\mathbb{R}_+)$

В этом параграфе мы определим модифицированный сильный двоичный интеграл для функций из двоичного пространства Харди $H(\mathbb{R}_+)$. Полуинтервал вида $[k2^{-n}, (k+1)2^{-n})$ при $k \in \mathbb{Z}_+$, $n \in \mathbb{Z}$ назовем двоичным отрезком, а множество всех таких отрезков обозначим через Δ . Для функции $f \in L(\mathbb{R}_+)$ определим двоичную максимальную функцию на $\mathbb{R}_+$:

$$M(f)(x) = \sup_{x \in I \in \Delta} \left| \frac{1}{|I|} \int_I f(t) dt \right|, \quad x \in \mathbb{R}_+. \quad (4.1)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. *Двоичным пространством Харди $H(\mathbb{R}_+)$ назовем множество всех таких функций $f \in L(\mathbb{R}_+)$, для которых $M(f) \in L(\mathbb{R}_+)$, причем $\|f\|_{H(\mathbb{R}_+)} = \|M(f)\|_{L(\mathbb{R}_+)}$.*

Так как $M(f)(x) \geq |f(x)|$ почти всюду на $\mathbb{R}_+$, то $\|f\|_{H(\mathbb{R}_+)} \geq \|f\|_{L(\mathbb{R}_+)}$. Пользуясь полнотой пространства $L(\mathbb{R}_+)$, легко доказать, что пространство $H(\mathbb{R}_+)$ полно.

Введем обозначение $D_n = [0, 2^n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, и для функции $f \in L(D_n)$ определим двоичную максимальную функцию:

$$M_n(f)(x) = \sup_{x \in I \subset D_n} \left| \frac{1}{|I|} \int_I f(t) dt \right|. \quad (4.2)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. *Двоичным пространством Харди $H(D_n)$ назовем множество всех таких функций $f \in L(\mathbb{R}_+)$, для которых $M_n(f) \in L(\mathbb{R}_+)$, причем $\|f\|_{H(D_n)} = \|M_n(f)\|_{L(D_n)}$.*

Отметим, что пространство $H(D_0)$ рассматривалось, например, в книге [5; гл. 3], где отмечалось, что это пространство полно. Легко видеть, что $\|f\|_{H(D_n)} \geq \|f\|_{L(D_n)}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.3. *Двоичным пространством Харди $H[i, i+1)$, $i \in \mathbb{Z}_+$, назовем множество всех таких функций $f \in L[i, i+1)$, для которых $f(\cdot - i) \in H(D_0)$.*

Норма в пространстве $H[i, i+1)$ индуцируется нормой в пространстве $H(D_0)$, но ее можно записать и явным образом:

$$\|f\|_{H[i, i+1)} = \int_i^{i+1} M_{[i, i+1)}(x) dx, \quad (4.3)$$

где

$$M_{[i, i+1)}(f)(x) = \sup_{x \in I \subset [i, i+1)} \left| \frac{1}{|I|} \int_I f(t) dt \right|, \quad (4.4)$$

а I , как всегда, обозначает двоичный отрезок.

Поскольку пространство $H(D_0)$ полно, то пространства $H[i, i+1)$, $i \in \mathbb{Z}_+$, также полны. Очевидно, что $\|f\|_{H[i, i+1)} \geq \|f\|_{L[i, i+1)}$.

В нашей работе [10] доказана следующая

ТЕОРЕМА F. *Если $f \in H(\mathbb{R}_+)$, то*

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{|\tilde{f}(x)|}{x} dx \leq 50\sqrt{2} \|f\|_{H(\mathbb{R}_+)}.$$

ЛЕММА 4.1. *Если $f \in H(\mathbb{R}_+)$, то на $\mathbb{R}_+$ существует равномерный предел*

$$J(f)(x) \equiv \lim_{n \rightarrow +\infty} (f * W_n)(x), \quad (4.5)$$

где свертка $(f * W_n)(x)$ в каждой точке $x \in \mathbb{R}_+$ определяется равенством (4.7) (обоснование такого допущения см. при доказательстве леммы). При этом оператор $J: H(\mathbb{R}_+) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R}_+)$ ограничен, точнее

$$\|J(f)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)} \leq 100\sqrt{2} \|f\|_{H(\mathbb{R}_+)}. \quad (4.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь тем, что $\widetilde{W}_n = \varphi_n$, где φ_n определяется равенством (2.9) (см. доказательство теоремы 2.1), на основании теоремы А имеем

$$(f * W_n)(x) = \int_{\mathbb{R}_+} (f * W_n)^\sim(t) \psi_x(t) dt = \int_{2^{-n}}^{+\infty} \tilde{f}(t) h(t) \psi_x(t) dt. \quad (4.7)$$

Отметим, что теорема А гарантирует равенство (4.7) почти всюду на $\mathbb{R}_+$, а правая часть этого равенства на основании неравенства $h(t) < 2/t$, $t > 0$, и теоремы F имеет смысл в каждой точке $x \in \mathbb{R}_+$. (Более того, так как $\tilde{f}h \in L(\mathbb{R}_+)$, то функция в правой части (4.7) W -непрерывна и ограничена на $\mathbb{R}_+$, т.е. принадлежит подпространству $L^\infty_{\mathcal{C}}(\mathbb{R}_+)$ пространства $L(\mathbb{R}_+)$.) Поэтому будем считать, что свертка $(f * W_n)(x)$ в каждой точке $x \in \mathbb{R}_+$ определяется равенством (4.7). Из этого равенства, учитывая, что $|\psi_x(t)| \equiv 1$, имеем при $n < m$:

$$\|(f * W_n) - (f * W_m)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)} \leq \int_{2^{-m}}^{2^{-n}} |\tilde{f}(t)h(t)| dt \leq 2 \int_{2^{-m}}^{2^{-n}} \frac{|\tilde{f}(t)|}{t} dt. \quad (4.8)$$

Из теоремы F следует, что правая часть неравенства (4.8) при $m > n \rightarrow +\infty$ стремится к нулю. Таким образом, последовательность $(f * W_n)$ фундаментальна в пространстве $L^\infty(\mathbb{R}_+)$, откуда и вытекает существование равномерного на $\mathbb{R}_+$ предела (4.5). Далее, из (4.7) и теоремы F имеем

$$\|(f * W_n)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)} \leq \int_{2^{-n}}^{+\infty} |\tilde{f}(t)h(t)| dt \leq 2 \int_0^{+\infty} \frac{|\tilde{f}(t)|}{t} dt \leq 100\sqrt{2} \|f\|_{H(\mathbb{R}_+)}.$$

Отсюда при $n \rightarrow +\infty$ вытекает неравенство (4.6). Лемма доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.4. Если $f \in H(\mathbb{R}_+)$, то функцию (4.5) назовем *модифицированным равномерным двоичным интегралом* (МРДИ) функции f .

Это определение не противоречит определению 2.2, так как если некоторая последовательность функций имеет предел в метрике $L(\mathbb{R}_+)$ и одновременно равномерный предел на $\mathbb{R}_+$, то эти пределы совпадают почти всюду.

ЛЕММА 4.2. Пусть функция $f \in H(D_n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, удовлетворяет условию

$$\int_{D_n} f(t) dt = 0 \quad (4.9)$$

и с помощью равенства $f(x) = 0$ продолжена на $\mathbb{R}_+ \setminus D_n = [2^n, +\infty)$. Тогда продолженная функция принадлежит пространству $H(\mathbb{R}_+)$ и справедливо равенство

$$\|f\|_{H(\mathbb{R}_+)} = \|f\|_{H(D_n)}. \quad (4.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим отдельно четыре возможных случая взаимного расположения двоичного отрезка I , содержащего точку $x \in \mathbb{R}_+$, отрезка D_n и его дополнения.

1) Пусть сначала $x \in I \subset D_n$. Тогда на основании (4.2) имеем

$$\left| \frac{1}{|I|} \int_I f(t) dt \right| \leq M_n(f)(x). \quad (4.11)$$

2) Пусть теперь $x \in I \cap D_n$, но $I \not\subset D_n$. Докажем, что в этом случае $I = D_i$, где $i > n$. Действительно, двоичные отрезки I и D_n пересекаются. Поэтому один из них содержится в другом. Но так как $I \not\subset D_n$, то $D_n \subset I$. Следовательно, $I = D_i$, причем $i > n$.

Учитывая это, из (4.9) получим

$$\left| \frac{1}{|I|} \int_I f(t) dt \right| = 2^{-i} \left| \int_{D_i} f(t) dt \right| = 2^{-i} \left| \int_{D_n} f(t) dt \right| = 0. \quad (4.12)$$

3) Пусть $x \in I \subset \mathbb{R}_+ \setminus D_n$. Так как $f(t) = 0$ на $\mathbb{R}_+ \setminus D_n = [2^n, +\infty)$ и $I \subset \mathbb{R}_+ \setminus D_n$, то в этом случае также справедливо равенство (4.12).

4) Наконец, пусть $2^n \leq x \in I \not\subset \mathbb{R}_+ \setminus D_n$. Докажем, что в этом случае $I = D_i$, где $i > n$. Действительно, так как I — двоичный отрезок, то он имеет вид $I = [k2^i, (k+1)2^i)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $i \in \mathbb{Z}$. Нам надо доказать, что $k = 0$. Предположим противное, т.е. k — натуральное. Тогда по лемме 2.2 найдется двоичный отрезок $J \supset I$ вида $J = [2^r, 2^{r+1})$, где $r \in \mathbb{Z}$. Так как $x \in I \subset J$, то $2^r \leq k2^i \leq x < (k+1)2^i \leq 2^{r+1}$. Но по предположению $I \not\subset \mathbb{R}_+ \setminus D_n$ и поэтому $2^r \leq k2^i < 2^n$. Следовательно, $x \in I \subset [2^r, 2^{r+1}) \subset D_n$, что противоречит предположению о том, что $2^n \leq x$. Итак, доказано, что $k = 0$, т.е. $I = D_i$. Но так как $2^n \leq x \in I$, то $i > n$. В этом случае, как и при доказательстве п. 2), справедливо равенство (4.12). Из рассуждений, проведенных в п.п. 1)–4), следует, что $M(f)(x) \leq M_n(f)(x)$ при $x \in D_n$ и $M(f)(x) = 0$ при $x \in \mathbb{R}_+ \setminus D_n$. Отсюда на основании определений 4.1 и 4.2 следует неравенство $\|f\|_{H(\mathbb{R}_+)} \leq \|f\|_{H(D_n)}$. Но так как обратное неравенство очевидно, то лемма доказана.

ЛЕММА 4.3. Каждая из функций (2.3) принадлежит пространству $H(\mathbb{R}_+)$, причем

$$\|a_{m,n}\|_{H(\mathbb{R}_+)} = \|a_{m,n}\|_{L(\mathbb{R}_+)} = 1 \quad (m \in \mathbb{N}, \quad n \in \mathbb{Z}_+). \quad (4.13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, $a_{m,n} \in H(D_n)$, причем на основании леммы 2.1 $\tilde{a}_{m,n}(0) = \int_{\mathbb{R}_+} a_{m,n}(x) dx = \int_{D_n} a_{m,n}(x) dx = 0$. Поэтому согласно лемме 4.2 справедливо равенство

$$\|a_{m,n}\|_{H(\mathbb{R}_+)} = \|a_{m,n}\|_{H(D_n)} \quad (m \in \mathbb{N}, \quad n \in \mathbb{Z}_+). \quad (4.14)$$

Но так как $|\psi_x(t)| \equiv 1$, то из (2.3) следует, что $\max_{x \in \mathbb{R}_+} |a_{m,n}(x)| = 2^{-n}$. Поэтому из (4.2) следует неравенство $M_n(a_{m,n})(x) \leq 2^{-n}$, $x \in D_n$. Отсюда согласно определению 4.2 имеем $\|a_{m,n}\|_{H(D_n)} \leq 1$. Справедливо и обратное неравенство, так как $\|a_{m,n}\|_{H(D_n)} \geq \|a_{m,n}\|_{L(D_n)} = 1$. Лемма доказана.

Обозначим через L линейную оболочку, натянутую на систему функций (2.3), и определим линейный оператор $\tilde{J}: L \rightarrow L(\mathbb{R}_+)$, где $\tilde{J}(f) = (J(f))^\sim^1$. Будем рассматривать L как подпространство пространства $H(\mathbb{R}_+)$. Это возможно на основании предыдущей леммы.

ЛЕММА 4.4. *Линейный оператор $\tilde{J}: L \rightarrow L(\mathbb{R}_+)$ ограничен, а его норма не превосходит $100\sqrt{2}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $L \subset L(\mathbb{R}_+)$, то на основании теоремы 2.2 функции $f \in L$ имеют модифицированный сильный двоичный интеграл $J(f)$ в смысле определения 2.2. Тогда по теореме 2.1 $\tilde{J}(f) = \tilde{f}h$. Но так как $L \subset H(\mathbb{R}_+)$, то на основании неравенства $h(t) < 2/t, t > 0$, из теоремы F получаем

$$\|\tilde{J}(f)\|_{L(\mathbb{R}_+)} = \int_{\mathbb{R}_+} |\tilde{f}(x)h(x)| dx \leq 100\sqrt{2} \|f\|_{H(\mathbb{R}_+)}, \quad f \in L.$$

Лемма доказана.

Ниже будет показано (см. лемму 5.4), что L плотно в $H(\mathbb{R}_+)$. Поэтому из леммы 4.4 вытекает

ТЕОРЕМА 4.1. *Ограниченный линейный оператор $\tilde{J}: L \rightarrow L(\mathbb{R}_+)$ допускает продолжение по непрерывности на $H(\mathbb{R}_+)$, и после такого продолжения норма оператора $\tilde{J}: H(\mathbb{R}_+) \rightarrow L(\mathbb{R}_+)$ не превосходит $100\sqrt{2}$.*

Аналог этой теоремы для функций, заданных на $[0, 1)$, также справедлив и может быть сформулирован в такой форме.

ТЕОРЕМА G. *Пусть $f \in H(D_0)$ и $F \equiv I(f)$ — ее сильный двоичный интеграл в смысле Бутцера–Вагнера. Тогда для последовательности $\hat{F}(n)$ коэффициентов Фурье–Уолша функции F справедливо неравенство*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |\hat{F}(n)| \leq 25\sqrt{2} \|f\|_{H(D_0)}.$$

Первоначально эта теорема была доказана в [12], а затем другое ее доказательство приведено в книге [5; с. 104]. При этом в [5] и [12] вместо $\hat{F}(n)$ пишется $\tilde{f}(n)/n$ и, таким образом, утверждение теоремы формулируется в терминах коэффициентов Фурье–Уолша самой функции f , а не ее двоичного интеграла.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Линейный оператор J , определяемый равенством (4.5), не является ограниченным оператором из $H(\mathbb{R}_+)$ в $L(\mathbb{R}_+)$.

Действительно, при доказательстве теоремы 2.2 было установлено равенство

$$a_{m,n} * W_k = 2^{-r} a_{m,n}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

для всех целых $k \geq -r$, где целое число $r = r(m, n)$ однозначно определяется вложением $[m2^{-n}, (m+1)2^{-n}] \subset [2^r, 2^{r+1})$. Отсюда вытекает равенство $J(a_{m,n})(x) = 2^{-r} a_{m,n}(x)$, $x \in \mathbb{R}_+$, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, где $J(f)(x)$ понимается как МРДИ в смысле определения 4.4. В частности, $J(a_{1,n})(x) = 2^n a_{1,n}(x)$, $x \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Отсюда на основании (4.13) вытекает равенство

$$\|J(a_{1,n})\|_{L(\mathbb{R}_+)} = 2^n \|a_{m,n}\|_{L(\mathbb{R}_+)} = 2^n \|a_{m,n}\|_{H(\mathbb{R}_+)}.$$

Следовательно, $\|J\|_{H(\mathbb{R}_+) \rightarrow L(\mathbb{R}_+)} \geq 2^n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, т.е. $\|J\|_{H(\mathbb{R}_+) \rightarrow L(\mathbb{R}_+)} = +\infty$.

¹При этом $J(f)$ можно рассматривать как МСДИ или как МРДИ.

§ 5. Доказательство теоремы 4.1

Для функции $f \in H(\mathbb{R}_+)$ введем обозначение

$$f_n(x) = \left(f(x) - 2^{-n} \int_{D_n} f(t) dt \right) X_{D_n}(x), \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (5.1)$$

ЛЕММА 5.1. Если $f \in H(\mathbb{R}_+)$, то $f_n \in H(\mathbb{R}_+)$ и $\|f_n\|_{H(\mathbb{R}_+)} \leq 2\|f\|_{H(\mathbb{R}_+)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $f \in H(\mathbb{R}_+)$, то функция $f_n(x)$, рассматриваемая только на D_n , очевидно, принадлежит пространству $H(D_n)$ и удовлетворяет условиям леммы 4.2. Поэтому на основании этой леммы имеем $\|f_n\|_{H(\mathbb{R}_+)} = \|f_n\|_{H(D_n)}$. Далее, очевидно, что

$$\|f_n\|_{H(D_n)} \leq \|f\|_{H(D_n)} + \left| \int_{D_n} f(t) dt \right| \leq 2\|f\|_{H(D_n)} \leq 2\|f\|_{H(\mathbb{R}_+)}.$$

Лемма доказана.

Ниже мы установим, что f_n сходится к f при $n \rightarrow +\infty$ в пространстве $H(\mathbb{R}_+)$. Для этого введем обозначение

$$\varepsilon_n = 2^{-n} \int_{D_n} f(t) dt, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (5.2)$$

ЛЕММА 5.2. Если $f \in H(\mathbb{R}_+)$, то

$$\|f - f_n\|_{H(\mathbb{R}_+)} \leq 2^n \max_{i \geq n} |\varepsilon_i| + \int_{2^n}^{+\infty} M(f)(x) dx. \quad (5.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения (5.1) функции f_n и из (5.2) имеем

$$\varphi_n(x) \equiv f(x) - f_n(x) = \begin{cases} \varepsilon_n, & x \in D_n, \\ f(x), & x \geq 2^n. \end{cases} \quad (5.4)$$

Оценим сверху двоичную максимальную функцию $M(\varphi_n)$. Для этого, как и при доказательстве леммы 4.2, рассмотрим отдельно четыре возможных случая взаимного расположения двоичного отрезка I , содержащего точку $x \in \mathbb{R}_+$, отрезка D_n и его дополнения.

1) Пусть сначала $x \in I \subset D_n$. Тогда на основании (5.4) имеем

$$\left| \frac{1}{|I|} \int_I \varphi_n(t) dt \right| = |\varepsilon_n|. \quad (5.5)$$

2) Пусть теперь $x \in I \cap D_n$, но $I \not\subset D_n$. В этом случае, как установлено при доказательстве леммы 4.2, $I = D_i$, где $i > n$. Тогда из (5.4) и из определения двоичной максимальной функции следует, что

$$\left| \frac{1}{|I|} \int_I \varphi_n(t) dt \right| = 2^{-i} \left| \int_{D_n} \varepsilon_n dt + \int_{2^n}^{2^i} f(t) dt \right| = 2^{-i} \left| \int_{D_i} f(t) dt \right| = |\varepsilon_i|. \quad (5.6)$$

3) Пусть $x \in I \subset \mathbb{R}_+ \setminus D_n$. Тогда из (5.4) и из определения двоичной максимальной функции имеем

$$\left| \frac{1}{|I|} \int_I \varphi_n(t) dt \right| = \left| \frac{1}{|I|} \int_I f(t) dt \right| \leq M(f)(x). \quad (5.7)$$

4) Наконец, пусть $2^n \leq x \in I \not\subset \mathbb{R}_+ \setminus D_n$. В этом случае, как установлено при доказательстве п. 4) леммы 4.2, $I = D_i$, где $i > n$. Поэтому справедливы равенства (5.6), откуда

$$\left| \frac{1}{|I|} \int_I \varphi_n(t) dt \right| = |\varepsilon_i| \leq M(f)(x). \quad (5.8)$$

Учитывая предположения, сделанные в п.п. 3) и 4), из (5.7) и (5.8) заключаем, что

$$M(\varphi_n)(x) \leq M(f)(x), \quad x \geq 2^n. \quad (5.9)$$

На основании предположений, сделанных в п.п. 1) и 2), из (5.5) и (5.6) получаем неравенство

$$M(\varphi_n)(x) \leq \max_{i \geq n} |\varepsilon_i|, \quad x \in D_n. \quad (5.10)$$

Учитывая, что

$$\|f - f_n\|_{H(\mathbb{R}_+)} = \|\varphi_n\|_{H(\mathbb{R}_+)} = \int_{D_n} M(\varphi_n)(x) dx + \int_{2^n}^{+\infty} M(\varphi_n)(x) dx,$$

из (5.8) и (5.9) приходим к неравенству (5.3). Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 5.2. Если $f \in H(\mathbb{R}_+)$, то $\|f - f_n\|_{H(\mathbb{R}_+)} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно определению двоичной максимальной функции (см. (4.1)) для каждой точки $x \in D_n$ справедливо неравенство $M(f)(x) \geq |\varepsilon_n|$. Поэтому

$$\int_{2^{n-1}}^{2^n} M(x) dx \geq 2^{n-1} |\varepsilon_n|.$$

Но так как $f \in H(\mathbb{R}_+)$, то левая часть этого неравенства стремится к нулю при $n \rightarrow +\infty$. Значит, $\varepsilon_n = o(2^{-n})$ при $n \rightarrow +\infty$. Поэтому первое слагаемое в правой части неравенства (5.3) стремится к нулю при $n \rightarrow +\infty$. Второе слагаемое в правой части (5.3) также стремится к нулю при $n \rightarrow +\infty$, так как $f \in H(\mathbb{R}_+)$. Следствие доказано.

ЛЕММА 5.3. Если $f \in H(D_n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, то справедливо неравенство

$$\|f\|_{H(D_n)} \leq 2^{n+1} \max_{0 \leq j < 2^n} \|f\|_{H[j, j+1)}. \quad (5.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно определению 4.1 имеем

$$\|f\|_{H(D_n)} = \|M_n(f)\|_{L(D_n)} = \sum_{i=0}^{2^n-1} \|M_n(f)\|_{L[i,i+1)}. \quad (5.12)$$

Оценим сверху двоичную максимальную функцию $M_n(f)(x)$ для $x \in [i, i+1) \subset D_n$. Для двоичного отрезка $I = [m2^k, (m+1)2^k) \subset D_n$, содержащего точку $x \in [i, i+1)$, возможны два случая: а) $I \subset [i, i+1)$; б) $I \not\subset [i, i+1)$. Так как $x \in [i, i+1)$ и $x \in I$, то двоичные отрезки $[i, i+1)$ и I пересекаются. Поэтому один из них содержится в другом (возможно также их совпадение). Если выполняется случай б), то $[i, i+1) \subset I$. Значит, $k \in \mathbb{Z}_+$ и, учитывая неравенство $\|f\|_{H[i,i+1)} \geq \|f\|_{L[i,i+1)}$, получим

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{|I|} \int_I f(t) dt \right| &= 2^{-k} \left| \sum_{j=m2^k}^{(m+1)2^k-1} \int_j^{j+1} f(t) dt \right| \\ &\leq 2^{-k} \sum_{j=m2^k}^{(m+1)2^k-1} \|f\|_{L[j,j+1)} \leq 2^{-k} \sum_{j=m2^k}^{(m+1)2^k-1} \|f\|_{H[j,j+1)} \\ &\leq \max_{m2^k \leq j < (m+1)2^k} \|f\|_{H[j,j+1)} \leq \max_{0 \leq j < 2^n} \|f\|_{H[j,j+1)}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Если же выполняется случай а), то, очевидно,

$$\left| \frac{1}{|I|} \int_I f(t) dt \right| \leq M_{[i,i+1)}(f)(x). \quad (5.14)$$

Из (4.2), (5.12) и (5.13) для $x \in [i, i+1)$ следует неравенство

$$\begin{aligned} M_n(f)(x) &\leq \max \left\{ \max_{0 \leq j < 2^n} \|f\|_{H[j,j+1)}, M_{[i,i+1)}(f)(x) \right\} \\ &\leq \max_{0 \leq j < 2^n} \|f\|_{H[j,j+1)} + M_{[i,i+1)}(f)(x). \end{aligned}$$

Отсюда на основании (4.2)–(4.4) имеем

$$\begin{aligned} \|f\|_{H(D_n)} &\leq 2^n \max_{0 \leq j < 2^n} \|f\|_{H[j,j+1)} + \sum_{i=0}^{2^n-1} \|f\|_{H[i,i+1)} \\ &\leq 2^{n+1} \max_{0 \leq j < 2^n} \|f\|_{H[j,j+1)}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Рассмотрим систему функций

$$b_{m,n}(x) = 2^{-n/2} \psi_{m2^{-n}}(x) X_{[0,2^n)}(x) \quad (m \in \mathbb{Z}_+). \quad (5.15)$$

Известно (см. [9; лемма 1.5.6]), что система функций $\{b_{m,n}\}_{m=0}^{+\infty}$ ортонормирована на отрезке $D_n = [0, 2^n)$ при каждом фиксированном $n \in \mathbb{Z}_+$. При этом система $\{b_{m,0}\}_{m=0}^{+\infty}$ совпадает с системой Уолша в нумерации Пэли.

ЛЕММА 5.4. *Линейная оболочка L , натянутая на систему функций (2.3), плотна в пространстве $H(\mathbb{R}_+)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть задана функция $f \in H(\mathbb{R}_+)$ и число $\varepsilon > 0$. Пользуясь следствием 5.2, найдем такое $n \in \mathbb{Z}_+$, при котором выполняется неравенство

$$\|f - f_n\|_{H(\mathbb{R}_+)} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (5.16)$$

где функция f_n определяется равенством (5.1). Остается показать, что найденную функцию f_n можно с любой точностью приблизить в метрике пространства $H(\mathbb{R}_+)$ линейными комбинациями функций вида

$$a_{m,n}(x) = 2^{-n} \psi_{m2^{-n}}(x) X_{[0,2^n)}(x) \quad (m \in \mathbb{N}). \quad (5.17)$$

Обозначим через $S_k(\varphi)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, частную сумму порядка k ряда Фурье функции $\varphi \in L(D_n)$ по ортонормированной системе $\{b_{m,n}\}_{m=0}^{+\infty}$, т.е. положим

$$S_k(\varphi) = \sum_{i=0}^k \widehat{\varphi}(i) b_{i,n}(x), \quad (5.18)$$

где

$$\widehat{\varphi}(i) = \int_{D_n} \varphi(t) b_{i,n}(t) dt$$

— коэффициенты Фурье функции φ . Как доказано в нашей работе [10; лемма 4] для $x \in I_{i,j}^m = [i + j2^m, i + (j+1)2^m)$, $i = 0, 1, \dots, 2^n - 1$, $j = 0, 1, \dots, 2^m - 1$, справедливо равенство

$$S_{2^{n+m}}(\varphi)(x) = 2^m \int_{I_{i,j}^m} \varphi(t) dt. \quad (5.19)$$

В книге [5; с. 104 или с. 158, теорема 7] доказано, что

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \|S_{2^m}(\varphi) - \varphi\|_{H(D_0)} = 0$$

для $\varphi \in H(D_0)$. Отсюда, учитывая (5.19), заключаем, что

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \|S_{2^{n+m}}(\varphi) - \varphi\|_{H[i, i+1)} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, 2^n - 1, \quad (5.20)$$

для $\varphi \in H[i, i+1)$.

Частные суммы $S_{2^{n+m}}(f)(x)$ определены на $D_n = [0, 2^n)$. Продолжим их на $\mathbb{R}_+$, положив $S_{2^{n+m}}(f)(x) = 0$ на $\mathbb{R}_+ \setminus D_n$. Так как функция $a_{0,n}(x)$ постоянна на $D_n = [0, 2^n)$, то

$$\int_{D_n} (S_{2^{n+m}}(f)(x) - f(x)) dx = 0.$$

Учитывая это, нетрудно проверить, что имеет место равенство

$$(S_{2^{n+m}}(f))_n(x) - f_n(x) = (S_{2^{n+m}}(f)(x) - f(x)) X_{D_n}(x), \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad (5.21)$$

где функция f_n определена согласно (5.1). Следовательно, функция, стоящая в правой части равенства (5.21), удовлетворяет условиям леммы 4.2, и согласно этой лемме имеем

$$\|(S_{2^{n+m}}(f))_n - f_n\|_{H(\mathbb{R}_+)} = \|S_{2^{n+m}}(f) - f\|_{H(D_n)}. \quad (5.22)$$

На основании леммы 5.3 справедливо неравенство

$$\|S_{2^{n+m}}(f) - f\|_{H(D_n)} \leq 2^{n+1} \max_{0 \leq i < 2^n} \|S_{2^{n+m}}(f) - f\|_{H[i, i+1)}. \quad (5.23)$$

Полагая в (5.20) $\varphi = f$, заключаем, что при $m \rightarrow +\infty$ правая часть неравенства (5.23) стремится к нулю. Поэтому из (5.22) и (5.23) следует, что по выбранному ранее $\varepsilon > 0$ найдется такое $m \in \mathbb{Z}_+$, что будет справедливо неравенство

$$\|(S_{2^{n+m}}(f))_n - f_n\|_{H(\mathbb{R}_+)} < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (5.24)$$

Так как функция $a_{0,n}(x)$ постоянна на $D_n = [0, 2^n)$, то на основании (5.1) заключаем, что

$$(S_{2^{n+m}}(f))_n(x) = \sum_{k=1}^{2^{n+m}-1} \widehat{f}(k) b_{k,n}(x). \quad (5.25)$$

Таким образом, из (5.24) и (5.25) имеем

$$\left\| \sum_{k=1}^{2^{n+m}-1} \widehat{f}(k) b_{k,n} - f_n \right\|_{H(\mathbb{R}_+)} < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (5.26)$$

Из (5.16) и (5.26) следует, что

$$\left\| \sum_{k=1}^{2^{n+m}-1} \widehat{f}(k) b_{k,n} - f \right\|_{H(\mathbb{R}_+)} < \varepsilon.$$

Таким образом, система функций $\{b_{m,n}\}$, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, плотна в пространстве $H(\mathbb{R}_+)$. А так как функции (5.15) и (5.17) с одинаковыми индексами отличаются лишь постоянными множителями, то лемма доказана.

Утверждение теоремы 4.1 следует из леммы 4.4 на основании леммы 5.4.

Список литературы

1. Butzer P. L., Wagner H. J. Walsh series and the concept of a derivative // Appl. Anal. 1973. V. 3. № 1. P. 29–46.
2. Butzer P. L., Wagner H. J. A calculus for Walsh functions defined on $\mathbb{R}_+$ // Proc. Sympos. Naval Res. Laboratory, Washington, DC. April 18–20. 1973. P. 75–81.
3. Pal J. On the connection between the concept of a derivative defined on the dyadic field and the Walsh–Fourier transform // Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math. 1975. V. 18. P. 49–54.

4. *Pal J.* On a concept of a derivative among functions defined on the dyadic field // *SIAM J. Math. Anal.* 1977. V. 8. №3. P. 375–391.
5. *Schipp F., Wade W. R., Simon P.* Walsh series. An introduction to dyadic harmonic analysis. Budapest: Akademiai Kiado, 1990.
6. *Onneweer C. W.* Differentiation on p -adic or p -series field // *Linear spaces and approx. Internat. Ser. Numer. Math.* V. 40. Basel: Birkhäuser, 1978. P. 187–198.
7. *Onneweer C. W.* On the definition of dyadic differentiation // *Appl. Anal.* 1979. V. 9. P. 267–278.
8. *Fine N. J.* The generalized Walsh functions // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1950. V. 69. P. 66–77.
9. *Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А.* Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения. М.: Наука, 1987.
10. *Голубов Б. И.* Об аналоге неравенства Харди для преобразования Фурье–Уолша // *Изв. РАН. Сер. матем.* 2001. Т. 65. №3. С. 3–14.
11. *Голубов Б. И.* Об ограниченности двоичных операторов Харди и Харди–Литтлвуда в двоичных пространствах H и BMO // *Anal. Math.* 2000. Т. 26. С. 287–298.
12. *Ladhawala N. R.* Absolute summability of Walsh–Fourier series // *Pacific J. Math.* 1976. V. 65. P. 103–108.

Московский государственный инженерно-физический институт
(технический университет)
E-mail: golubov@math.mipt.ru

Поступила в редакцию
10.09.2001