Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Милютин, Об условиях неотрицательности интегральных квадратичных форм с постоянными коэффициентами, определенных на полуоси, *Матем. сб.*, 2002, том 193, номер 4, 61–86

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm644>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 13:28:36

УДК 517.97

А. А. Милютин

Об условиях неотрицательности интегральных квадратичных форм с постоянными коэффициентами, определенных на полуоси

Рассматривается интегральный квадратичный функционал с постоянными коэффициентами, определенный на полуоси. Дается необходимое и достаточное условие его неотрицательности на всех парах функций, связанных линейным дифференциальным уравнением и интегрируемых с квадратом, основанное на неравенстве Гамильтона–Якоби. Установлена связь полученного условия с известным частотным критерием.

Библиография: 3 названия.

§1. Постановка вопроса

Пусть $x \in \mathbb{R}^{d(x)}$, $u \in \mathbb{R}^{d(u)}$, $d(u) \leq d(x)$ (через $d(a)$ обозначим размерность вектора a). Через L обозначим линейное многообразие финитных пар $(x(t), u(t)) \mid t \in [0, \infty)$, т.е. таких, которые отличны от нуля лишь на ограниченном множестве. Функцию $x(\cdot)$ мы будем считать абсолютно непрерывной и равной нулю при $t = 0$, функцию $u(t)$ — измеримой и ограниченной на $[0, \infty)$.

Рассмотрим управляемую систему $V: \dot{x} = Kx + Bu$, где K и B — постоянные матрицы. Через $L(V)$ обозначим множество таких элементов L , которые являются траекториями V . Положим

$$\Phi(x, u) = u^2 + 2Axu + Qxx,$$

где

$$A: \mathbb{R}^{d(x)} \rightarrow \mathbb{R}^{d(u)}, \quad Q: \mathbb{R}^{d(x)} \rightarrow \mathbb{R}^{d(x)}$$

— постоянные матрицы, причем Q предполагается симметрической.

Пусть пара $(x(\cdot), u(\cdot)) \in L$. Положим

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_0^\infty \Phi(x(t), u(t)) dt.$$

Нас будет интересовать вопрос о необходимых и достаточных условиях выполнения неравенства

$$J(x, u) \geq 0 \quad \forall (x, u) \in L(V). \quad (1.1)$$

Условие, которое мы получим, формально является более слабым, а значит, и более “продвинутое”, нежели известное условие, полученное путем разложения по Фурье [1].

§ 2. Формулировка основной теоремы

Пусть матрицы A, Q, K, B заданы. Через S будем обозначать произвольную симметрическую матрицу. Пусть S задана. Для любой траектории системы V положим:

$$\Phi_S(x(\cdot), u(\cdot)) = \Phi(x(\cdot), u(\cdot)) + \frac{d}{dt}(Sx(t), x(t)).$$

Нетрудно видеть, что

$$\Phi_S(x, u) = (u + U_S x)^2 + \omega_S(x),$$

где

$$U_S: \mathbb{R}^{d(x)} \rightarrow \mathbb{R}^{d(u)}, \quad U_S = -(A + B^* S),$$

$$\omega_S(x) = -(U_S x)^2 + 2(Kx, Sx) + (Qx, x).$$

Положим для $(x(t), u(t)) \in L(V)$

$$J_S(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_0^\infty \Phi_S(x(t), u(t)) dt.$$

Очевидно, что

$$J_S(x(\cdot), u(\cdot)) = J(x(\cdot), u(\cdot)) \quad \forall (x, u) \in L(V).$$

Пусть $\lambda(S)$ – наименьшее собственное число формы $\omega_S(x)$. Обозначим

$$\hat{\lambda} = \sup_S \lambda(S).$$

Основным результатом настоящей работы является

ТЕОРЕМА 1. *Неравенство $\hat{\lambda} \geq 0$ эквивалентно неравенству $J \geq 0$ на $L(V)$.*

Выражение для $\omega_S(x)$ является левой частью уравнения Гамильтона–Якоби для функции вида (Sx, x) при $S = \text{const}$.

Условие $\omega_S(x) \geq 0$ представляет, таким образом, неравенство Гамильтона–Якоби. Достаточность условия теоремы очевидна. Главное в ней – необходимость. Мы проведем доказательство, не опираясь на частотный критерий [1].

В случае двумерного пространства и управляемой системы вида $\dot{x} = u$ А. В. Дмитрук [2] исследовал вопрос о неотрицательности J на $L(V)$, опираясь, по существу, на теорему 1, хотя и не формулируя ее. Он получил новое условие, эквивалентное неотрицательности J на $L(V)$. Оно не связано с частотным критерием. Приведем его формулировку.

Мы будем считать (что допустимо) матрицу A кососимметрической. Пусть q_0, q_1 – собственные числа матрицы Q и a – модуль собственного числа матрицы A . Тогда указанное условие состоит в том, чтобы выполнялись неравенства:

$$q_0 \geq 0, \quad q_1 \geq 0, \quad \sqrt{q_0} + \sqrt{q_1} \geq 2a.$$

В следующем параграфе мы приведем леммы, необходимые для доказательства теоремы 1.

§3. Некоторые леммы

3.1. Пусть $R: \mathbb{R}^{d(x)} \rightarrow \mathbb{R}^{d(x)}$ – линейный оператор. Имеет место

ЛЕММА 1. Следующие два условия эквивалентны:

- (*) $\max_{|x|=1} (Rx, \overline{S}x) \geq 0$ для любой симметрической матрицы $\overline{S}$;
- (**) существует собственное число матрицы R с нулевой вещественной частью.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала мы докажем, что

$$(**) \Rightarrow (*). \quad (3.1)$$

Действительно, если $\lambda = 0$ – собственное число матрицы R , то существует вектор x_* такой, что $Rx_* = 0$, $|x_*| = 1$. Следовательно, для любой матрицы $\overline{S}$ выполнено равенство $(Rx_*, \overline{S}x_*) = 0$ и, тем самым, выполнено (*).

Пусть теперь $\lambda = i\sigma$, $\sigma \neq 0$, – собственное число матрицы R . Тогда, как известно, существует решение уравнения $\dot{x} = Rx$ вида:

$$x^0(t) = x_0 \cos \sigma t + x_1 \sin \sigma t,$$

где векторы x_0 и x_1 линейно независимы.

Пусть $\overline{S}$ – произвольная симметрическая матрица. Рассмотрим функцию $\frac{1}{2}\overline{S}x^0(t)x^0(t)$. Пусть t_* – точка максимума этой функции. Тогда ее производная в t_* обращается в нуль. Следовательно, $(Rx^0(t_*), \overline{S}x^0(t_*)) = 0$. Но $x^0(t_*) \neq 0$, ибо x_0 и x_1 линейно независимы. Тем самым для R выполнено (*).

Итак, (3.1) доказано. Теперь мы докажем, что если условие (**) не имеет места, то и условие (*) также не имеет места.

Действительно, исходя из жордановой формы матрицы R можно утверждать, что пространство $\mathbb{R}^{d(x)}$ разлагается в прямую сумму подпространств, инвариантных относительно R , в каждом из которых R можно представить в одном из двух видов.

1) Пусть X – одно из таких слагаемых. Тогда в некотором базисе в X оператор R имеет вид:

$$\begin{aligned} y_1 &= \lambda x_1 + x_2, \\ y_k &= \lambda x_k + x_{k+1}, \quad k \leq n-1, \\ y_n &= \lambda x_n, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где λ – вещественное число, $n = d(X)$.

2) Пусть $d(X) = 2m$. Нам удобно представить элемент подпространства X в виде: $(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \dots, \xi_m, \eta_m)$, т.е. все нечетные компоненты обозначить через ξ , а все четные – через η . Существует базис, в котором оператор R имеет вид:

$$\begin{aligned} \overline{w}_1 &= \lambda w_1 + \sigma \overline{V} w_1 + w_2, \\ \overline{w}_k &= \lambda w_k + \sigma \overline{V} w_k + w_{k+1}, \quad k \leq m-1, \\ \overline{w}_m &= \lambda w_m + \sigma \overline{V} w_m, \end{aligned}$$

где

$$w_k = (\xi_k, \eta_k), \quad \bar{V}w = (\bar{\xi}, \bar{\eta}), \quad \bar{\xi} = -\eta, \quad \bar{\eta} = \xi, \quad \sigma \neq 0.$$

В первом случае λ – вещественное собственное число оператора R , во втором случае пара $\lambda \pm i\sigma$ – сопряженные собственные числа R . Таким образом, $\lambda \neq 0$ во всех случаях. В дальнейшем мы будем говорить о слагаемых первого и второго рода в зависимости от того, является собственное число вещественным или нет. В каждом слагаемом определим квадратичную форму следующим образом.

Пусть X – слагаемое первого рода. В базисе, в котором R представлен в виде (3.2), положим

$$Z_X(x) = \sum_{k=1}^{d(X)} s_k x_k^2.$$

Коэффициенты s_k выберем следующим образом. Имеем:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} Z_X(x) = \sum_{k=1}^{d(X)} \lambda s_k x_k^2 + \sum_{k=1}^{d(X)-1} s_k x_k x_{k+1},$$

где $\frac{dx}{dt} = Rx$. Потребуем, чтобы $\text{sign } s_k = -\text{sign } \lambda \quad \forall k$. Далее потребуем, чтобы $|s_k|$ столь быстро вырастал с ростом k , что для любого $x \neq 0$ имело бы место неравенство

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} Z_X(x) < 0.$$

Нетрудно видеть, что эти требования выполнимы.

Для слагаемого второго рода положим

$$Z_X(w) = \sum_{k=1}^{\frac{1}{2}d(X)} s_k w_k^2, \quad \text{где} \quad w_k^2 = \xi_k^2 + \eta_k^2.$$

Тогда

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} Z_X(w) = \sum_{k=1}^{\frac{1}{2}d(X)} \lambda s_k w_k^2 + \sum_{k=1}^{\frac{1}{2}d(X)-1} s_k w_k w_{k+1}, \quad \frac{dw}{dt} = Rw.$$

Мы также потребуем, чтобы $\text{sign } s_k = -\text{sign } \lambda$ и чтобы рост $|s_k|$ обеспечивал неравенство:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} Z_X(w) < 0 \quad \forall w \neq 0.$$

Так же как и выше, нетрудно заметить, что это требование выполнимо.

Итак, формы Z_X выбраны. Положим $\hat{Z}(x) = \sum_X Z_X(x)$. В исходном базисе имеем $\hat{Z}(x) = (\hat{S}x, x)$, где $\hat{S}$ – симметрическая матрица. По построению $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \hat{Z}(x) < 0 \quad \forall x \neq 0$. Следовательно, $(Rx, \hat{S}x) < 0 \quad \forall x \neq 0$. Отсюда видно, что условие (*) не имеет места. Лемма доказана.

3.2. Пусть Γ – ненулевое подпространство в $\mathbb{R}^{d(x)}$. Рассмотрим условие:

$$(*; \Gamma) \max\{(Rx, Sx) : x \in \Gamma, |x| = 1\} \geq 0 \text{ для любой симметрической матрицы } S.$$

ЛЕММА 2. Пусть условие $(*; \Gamma)$ выполнено. Тогда существует подпространство $\hat{\Gamma}$ такое, что

$$\hat{\Gamma} \subset \Gamma, \quad d(\hat{\Gamma}) > 0, \quad R\hat{\Gamma} \subset \hat{\Gamma}$$

и условие $(*; \hat{\Gamma})$ выполнено.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для произвольного оператора $M : \mathbb{R}^{d(x)} \rightarrow \mathbb{R}^{d(x)}$ положим

$$M_1 : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^{d(x)}, \quad M_1 x = P_\Gamma M x,$$

$$M_2 : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^{d(x)}, \quad M_2 x = P_{\Gamma'} M x,$$

где P_Γ и $P_{\Gamma'}$ – ортогональные проекторы на Γ и его ортогональное дополнение Γ' .

Заметим, что оператор M совпадает на Γ с некоторым симметрическим оператором S тогда и только тогда, когда M_1 – симметрический оператор на Γ . Что касается M_2 , то он произволен. Справедливость данного утверждения проверяется элементарно.

Теперь мы можем перейти непосредственно к доказательству леммы.

Если $R_2 = 0$, то лемма верна, ибо в этом случае $\hat{\Gamma} = \Gamma$. Допустим, что $R_2 \neq 0$. Докажем, что тогда $d(R_2\Gamma) < d(\Gamma)$. Действительно, в противном случае, выбирая S из условий $S_1 = 0, S_2 = -R_2$, получаем:

$$(Sx, Rx)|_\Gamma = -(R_2 x)^2.$$

Но поскольку $d(R_2\Gamma) = d(\Gamma)$, то $(Sx, Rx) < 0 \quad \forall x \in \Gamma, x \neq 0$. Однако это противоречит условию леммы.

Итак, $d(R_2\Gamma) < d(\Gamma)$. Положим $\Gamma_1 = R_2^{-1}(0)$. Очевидно, $0 < d(\Gamma_1) < d(\Gamma)$. Докажем, что для R имеет место условие $(*; \Gamma_1)$.

Допустим противное – пусть существует симметрическая матрица S такая, что $(Sx, Rx) < 0 \quad \forall x \in \Gamma_1, x \neq 0$. Выберем $\hat{S}$ из условий $\hat{S}_1 = S_1, \hat{S}_2 = -NR_2$, где N – некоторое вещественное число. Тогда $(\hat{S}x, Rx)|_\Gamma = (S_1 x, R_1 x) - N(R_2 x)^2$. Положим:

$$x = x' + x'', \quad x' \in \Gamma_1, \quad x'' \perp \Gamma_1, \quad x, x'' \in \Gamma.$$

Тогда

$$(\hat{S}x, Rx)|_\Gamma = (S_1 x', R_1 x') + (S_1 x', R_1 x'') + (S_1 x'', R_1 x') + (S_1 x'', R_1 x'') - N(R_2 x)^2.$$

Но по определению Γ_1 имеем $R_2 x' = 0$. Следовательно, последнее слагаемое можно записать в виде $-N(R_2 x'')^2$. По этой же причине $(S_1 x', R_1 x') = (Sx', Rx')$ и, следовательно, эта величина не превосходит $-\alpha_0 x''^2$, где $\alpha_0 > 0$. Далее, так как $(R_2 x'')^2 \geq \alpha_1 x''^2$, где $\alpha_1 > 0$, то, выбирая N достаточно большим, получаем:

$$(\hat{S}x, Rx) < 0 \quad \forall x \in \Gamma, x \neq 0,$$

что противоречит условию $(*; \Gamma)$. Итак, мы доказали, что если Γ не инвариантно относительно R , то существует Γ_1 такое, что $0 < d(\Gamma_1) < d(\Gamma)$ и выполнено условие $(*; \Gamma_1)$. Отсюда легко следует утверждение леммы.

3.3. Пусть $\omega(x, y) = Cxx + Dxy + Eyy$ – квадратичная форма в $\mathbb{R}^{2d(x)}$. Мы предположим, что E – неотрицательно определенная матрица. Пусть S – симметрическая матрица, Γ – подпространство в $\mathbb{R}^{d(x)}$. Положим

$$f(S, \Gamma) = \max_{x \in \Sigma(\Gamma)} \omega(x, Sx),$$

где

$$\Sigma(\Gamma) = \{x \in \Gamma : |x| = 1\} \text{ – единичная сфера в } \Gamma.$$

Если $\Gamma = \{0\}$, то условимся считать $f(S, \Gamma) = -\infty \ \forall S$.

Положим $f(\Gamma) = \inf_S f(S, \Gamma)$. Пространство симметрических матриц обозначим через $\mathcal{J}$. Скалярное произведение в $\mathcal{J}$ определим как сумму произведений одноименных элементов.

Положим

$$\mathcal{J}_0(\Gamma) = \{S : (Dx, Sx) = 0, (ESx, Sx) = 0 \text{ на } \Gamma\}.$$

Так как $E \geq 0$, то второе условие эквивалентно условию $ES = 0$ на Γ . Следовательно, $\mathcal{J}_0(\Gamma)$ – подпространство в $\mathcal{J}$ для любого Γ . Через $\mathcal{J}_1(\Gamma)$ обозначим ортогональное дополнение к $\mathcal{J}_0(\Gamma)$ в $\mathcal{J}$.

Введем два определения:

$$\begin{aligned} \Omega(\Gamma) &= \{S \in \mathcal{J}_1(\Gamma) : (Dx, Sx) \leq 0, (ESx, Sx) = 0 \text{ на } \Gamma\}, \\ \widehat{\Gamma}(\Gamma) &= \{x \in \Gamma : (Dx, Sx) = 0 \ \forall S \in \Omega(\Gamma)\}. \end{aligned}$$

Очевидно, что $\Omega(\Gamma)$ – выпуклый конус в $\mathcal{J}_1(\Gamma)$. Так как

$$S \in \Omega(\Gamma) \Rightarrow (Dx, Sx) \leq 0 \text{ на } \Gamma,$$

то условие $(Dx, Sx) = 0$ выделяет подпространство в Γ . Отсюда следует, что $\widehat{\Gamma}(\Gamma)$ – подпространство в Γ .

Рассмотрим последовательность, порожденную подпространством Γ . Положим

$$\Gamma_1 = \widehat{\Gamma}(\Gamma), \Gamma_2 = \widehat{\Gamma}(\Gamma_1), \dots, \Gamma_{k+1} = \widehat{\Gamma}(\Gamma_k), \dots$$

Так как $\Gamma_{k+1} \subset \Gamma_k$, то начиная с некоторого $k = k_0$ получаем:

$$\Gamma_{k_0+1} = \Gamma_{k_0}, \text{ откуда } \Gamma_k = \Gamma_{k_0} \ \forall k \geq k_0.$$

Подпространство Γ_{k_0} обозначим через $\widetilde{\Gamma}(\Gamma)$. Если $\Gamma = \mathbb{R}^{d(x)}$, то мы будем просто писать $\widetilde{\Gamma}$, опуская аргумент Γ . Имеет место

ЛЕММА 3. Для любого Γ выполнены условия

- 1) $f(\widetilde{\Gamma}(\Gamma)) = f(\Gamma)$,
- 2) $\text{Arg min } f(S, \widetilde{\Gamma}(\Gamma)) \neq \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО разобьем на ряд этапов.

Сначала докажем, что для любого Γ

$$f(\widehat{\Gamma}(\Gamma)) = f(\Gamma). \quad (3.3)$$

Если $\widehat{\Gamma}(\Gamma) = \Gamma$, то это утверждение тривиально. Пусть $\widehat{\Gamma}(\Gamma) \neq \Gamma$. Тогда существует $\widehat{S} \in \Omega(\Gamma)$ такое, что $(Dx, \widehat{S}x) < 0$ на $\Gamma \setminus \widehat{\Gamma}(\Gamma)$. Отсюда следует формула, справедливая для любого S :

$$f(S, \widehat{\Gamma}(\Gamma)) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} f(S + \lambda \widehat{S}, \Gamma),$$

из которой следует неравенство:

$$f(\widehat{\Gamma}(\Gamma)) \geq f(\Gamma).$$

Обратное неравенство очевидно. Тем самым (3.3) доказано, откуда сразу следует утверждение 1) леммы.

Докажем 2). Если $\widetilde{\Gamma}(\Gamma) = \{0\}$, то утверждение тривиально выполнено, ибо по определению $f(S, \{0\}) = -\infty$ для любого S и, следовательно, $\text{Arg min } f(\{0\}) = \mathcal{J}$. Прежде чем перейти к случаю нетривиального $\widetilde{\Gamma}(\Gamma)$, установим эквивалентность:

$$\widehat{\Gamma}(\Gamma) = \Gamma \Leftrightarrow \Omega(\Gamma) = \{0\}. \quad (3.4)$$

Действительно, если $\Omega(\Gamma) = \{0\}$, то по определению $\widehat{\Gamma}(\Gamma) = \Gamma$. Если же $\widehat{\Gamma}(\Gamma) = \Gamma$, то также согласно определению $\Omega(\Gamma) \subset \mathcal{J}_0(\Gamma)$ и, следовательно, $\Omega(\Gamma) = \{0\}$. Тем самым, (3.4) доказано.

Теперь допустим, что $\widetilde{\Gamma}(\Gamma) \neq \{0\}$. Так как $\widehat{\Gamma}(\widetilde{\Gamma}(\Gamma)) = \widetilde{\Gamma}(\Gamma)$, то согласно (3.4) $\Omega(\widetilde{\Gamma}(\Gamma)) = \{0\}$. Пусть $\{S_n\}$ — минимизирующая последовательность для $f(\widetilde{\Gamma}(\Gamma))$. Если $\{S_n\}$ ограничена, то утверждение 2) леммы верно. Пусть последовательность $\{S_n\}$ неограничена. Без уменьшения общности можно считать, что $S_n \in \mathcal{J}_1(\widetilde{\Gamma}(\Gamma))$ для любого n . Это следует из элементарной формулы: пусть

$$S = S' + S'', \quad S' \in \mathcal{J}_0(\widetilde{\Gamma}(\Gamma)), \quad S'' \in \mathcal{J}_1(\widetilde{\Gamma}(\Gamma)),$$

тогда

$$\omega(x, Sx) = \omega(x, S''x) \text{ на } \Gamma.$$

Далее, не уменьшая общности, можно считать, что $\|S_n\| \rightarrow \infty$ и $S_n/\|S_n\| \rightarrow \widehat{S}$. Очевидно, $\widehat{S} \in \mathcal{J}_1(\Gamma)$ и $\|\widehat{S}\| = 1$. Докажем, однако, что

$$\widehat{S} \in \Omega(\widetilde{\Gamma}(\Gamma)). \quad (3.5)$$

Действительно, если существует элемент $x \in \widetilde{\Gamma}(\Gamma)$ такой, что $(E\widehat{S}x, \widehat{S}x) > 0$, то $f(S_n, \widetilde{\Gamma}(\Gamma)) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, что невозможно. Следовательно, $(E\widehat{S}x, \widehat{S}x) = 0$ на $\widetilde{\Gamma}(\Gamma)$. Далее, если существует $x \in \widetilde{\Gamma}(\Gamma)$ такой, что $(Dx, \widehat{S}x) > 0$, то также $f(S_n, \widetilde{\Gamma}(\Gamma)) \rightarrow \infty$. Отсюда $(Dx, \widehat{S}x) \leq 0$ на $\widetilde{\Gamma}(\Gamma)$. Но тогда $\widehat{S} \in \Omega(\widetilde{\Gamma}(\Gamma))$. Таким образом, (3.5) доказано. Следовательно, $\Omega(\widetilde{\Gamma}(\Gamma)) \neq \{0\}$. Мы пришли к противоречию, откуда следует, что последовательность $\{S_n\}$ ограничена. Лемма доказана.

Возвращаясь к задаче § 1, рассмотрим квадратичную форму

$$\omega(x, y) = (Ax + B^*y)^2 - 2Kxy - Qxx.$$

Имеем: $\omega(x, Sx) = -\omega_S(x)$. Форма $\omega(x, y)$ удовлетворяет требованиям леммы 3.

ЛЕММА 4. Пусть $\Omega(\mathbb{R}^{d(x)}) \neq \{0\}$. Тогда система $\dot{x} = Kx + Bu$ не обладает управляемостью.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\Gamma_0 = \{y : B^*y = 0\}$. Из определения $\Omega(\mathbb{R}^{d(x)})$ следует, что $Sx \in \Gamma_0 \quad \forall S \in \Omega(\mathbb{R}^{d(x)}), \forall x \in \mathbb{R}^{d(x)}$. Отсюда следует, что Γ_0 и Γ'_0 инвариантные подпространства S , причем

$$S\Gamma'_0 = \{0\}, \quad (3.6)$$

где Γ'_0 — ортогональное дополнение к Γ_0 в $\mathbb{R}^{d(x)}$. Из условия леммы следует:

$$\Gamma'_0 \neq \mathbb{R}^{d(x)}. \quad (3.7)$$

Положим $\Gamma'_n = K^n \Gamma'_0, n = 1, 2, \dots$. Докажем, что $\forall n$

$$Sx \perp \Gamma'_n \quad \forall S \in \Omega(\mathbb{R}^{d(x)}), \quad \forall x \in \mathbb{R}^{d(x)}. \quad (3.8)$$

Действительно, из (3.6) следует, что (3.8) верно для $n = 0$. Пусть (3.8) верно для некоторого n . Полагая, что Γ_n — ортогональное дополнение к Γ'_n в $\mathbb{R}^{d(x)}$, получаем:

$$Sx \in \Gamma_n \quad \forall S \in \Omega(\mathbb{R}^{d(x)}), \quad \forall x \in \mathbb{R}^{d(x)}.$$

Элементы Γ_n обозначим через ξ , а элементы Γ'_n — через ζ . По определению конуса $\Omega(\mathbb{R}^{d(x)})$ для S выполнено неравенство

$$(Sx, Kx) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^{d(x)}.$$

Тогда

$$(S\xi, K\xi) + (S\xi, K\zeta) = 0 \quad \forall \xi, \zeta,$$

откуда, в свою очередь, следует

$$(S\xi, K\zeta) = 0 \quad \forall \xi, \zeta.$$

Учитывая, что $S\Gamma'_n = 0$, получаем отсюда

$$(Sx, K\Gamma'_n) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^{d(x)}.$$

Но $K\Gamma'_n = \Gamma'_{n+1}$. Таким образом, мы установили, что $Sx \perp \Gamma'_{n+1} \quad \forall x$.

Отсюда согласно индукции следует (3.8).

Положим $\bar{\Gamma}'_n = \sum_{k=0}^n \Gamma'_k$. Через $\bar{\Gamma}_n$ обозначим ортогональное дополнение к $\bar{\Gamma}'_n$ в $\mathbb{R}^{d(x)}$. Очевидно, что $\bar{\Gamma}'_n$ — неубывающая последовательность подпространств, соответственно $\bar{\Gamma}_n$ — невозрастающая последовательность подпространств.

Положим $\bar{\Gamma}_\infty = \bigcap_n \bar{\Gamma}_n$. Докажем, что

$$\bar{\Gamma}_\infty \neq \{0\}. \quad (3.9)$$

Действительно, допустив противное, получим согласно (3.8) $S = 0$, что противоречит условию леммы. Тем самым (3.9) доказано. Полагая, что $\bar{\Gamma}'_\infty$ — ортогональное дополнение к $\bar{\Gamma}_\infty$ в $\mathbb{R}^{d(x)}$, получаем из (3.8)

$$K\bar{\Gamma}'_\infty \subset \bar{\Gamma}'_\infty. \quad (3.10)$$

Кроме того, из $\bar{\Gamma}_\infty \subset \Gamma_0$ следует

$$B^* \bar{\Gamma}_\infty = \{0\}. \quad (3.11)$$

Обозначая элементы $\bar{\Gamma}_\infty$ через ξ , а элементы $\bar{\Gamma}'_\infty$ через ζ , получаем

$$\dot{\xi} = P_\infty K \xi + P_\infty K \zeta + P_\infty B u,$$

где P_∞ — ортогональный проектор на $\bar{\Gamma}_\infty$. Тогда согласно (3.10) и (3.11) получим: $\dot{\xi} = P_\infty K \xi$. Но это и означает неуправляемость системы $\dot{x} = Kx + Bu$. Лемма доказана.

Итак, если система $V: \dot{x} = Kx + Bu$ управляема, то по лемме 4 $\Omega(\mathbb{R}^{d(x)}) = \{0\}$ и, следовательно, $\tilde{\Gamma} = \mathbb{R}^{d(x)}$ (по лемме 3). С другой стороны, любая управляемая система V разбивается на две подсистемы: первая представляет собой замкнутое дифференциальное уравнение, не содержащее управления, а вторая обладает управляемостью. Конечно, может случиться так, что одна из подсистем отсутствует. Компоненты, входящие в подсистему первого типа, равны тождественно нулю на $L(V)$ в силу нулевых начальных условий. Поэтому фактически мы будем иметь дело с управляемой системой. Таким образом, требование управляемости не снижает общности рассмотрения.

§ 4. Доказательство теоремы 1. Двойственность

4.1. Прежде всего установим, что из неравенства $\hat{\lambda} \geq 0$ следует неотрицательность J на $L(V)$. Применяя лемму 4 к форме

$$\omega(x, y) = (Ax + B^* y)^2 - 2Kxy - Qxx$$

и учитывая, что система V обладает управляемостью, получаем, что существует $\hat{S}$ такое, что

$$\lambda(\hat{S}) = \hat{\lambda}.$$

Тогда $\Phi_{\hat{S}}(x, u) \geq 0 \quad \forall x, u$, откуда следует, что $J \geq 0$ на $L(V)$.

Прежде чем перейти к рассмотрению случая $\hat{\lambda} < 0$, докажем следующее предположение. Назовем *элементарным циклом* траекторию системы V вида:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \cos \sigma t + x_1 \sin \sigma t, \\ u(t) &= u_0 \cos \sigma t + u_1 \sin \sigma t, \end{aligned}$$

где $(x_0, x_1) \neq 0$, $x_0 \perp x_1$. Через T_σ будем обозначать любой период элементарного цикла.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. 1) *Для любого элементарного цикла справедливо неравенство*

$$\frac{\int_0^{T_\sigma} \Phi(x(t), u(t)) dt}{\int_0^{T_\sigma} x^2(t) dt} \geq \hat{\lambda}. \quad (\star)$$

2) *Существует элементарный цикл, для которого в $(\star)$ выполнено равенство.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что отношение в левой части рассматриваемого выражения не зависит от T_σ . Прежде всего, ясно, что

$$\int_0^{T_\sigma} \Phi(x(t), u(t)) dt = \int_0^{T_\sigma} \Phi_S(x(t), u(t)) dt$$

для любого элементарного цикла, любого его периода T_σ и любого S . Следовательно,

$$\frac{\int_0^{T_\sigma} \Phi(x(t), u(t)) dt}{\int_0^{T_\sigma} x^2(t) dt} \geq \frac{\int_0^{T_\sigma} \omega_{\widehat{S}}(x) dt}{\int_0^{T_\sigma} x^2(t) dt},$$

но $\omega_{\widehat{S}}(x) \geq \widehat{\lambda}x^2$. Таким образом, утверждение 1) предложения 1 доказано.

Воспользуемся тем, что

$$\lambda(\widehat{S}) = \max_S \lambda(S).$$

Необходимое условие, которому должно удовлетворять $\widehat{S}$, имеет следующий вид:

$$\min_{x \in \Sigma_0} (R_{\widehat{S}}x, \overline{S}x) \leq 0 \quad \forall \overline{S},$$

где $R_S = K + BU_S$,

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= \{x : \omega_{\widehat{S}}(x) = \widehat{\lambda}x^2\}, \\ \Sigma_0 &= \{x \in \Gamma_0 : |x| = 1\}. \end{aligned}$$

Иными словами, для $-R_{\widehat{S}}$ выполнено условие $(*; \Gamma_0)$, см. §3. Согласно лемме 2 существует подпространство Γ_1 :

$$\Gamma_1 \subset \Gamma_0, \quad d(\Gamma_1) > 0, \quad R_{\widehat{S}}\Gamma_1 \subset \Gamma_1,$$

и $R_{\widehat{S}}$ на Γ_1 имеет собственное число с нулевой вещественной частью. Следовательно, в Γ_1 существует $\Gamma \subset \Gamma_1$, инвариантное относительно $R_{\widehat{S}}$, такое, что $d(\Gamma) = 1$ или 2. Таким образом, Γ – собственное подпространство $R_{\widehat{S}}$, соответствующее этому собственному числу. Если $d(\Gamma) = 1$, то собственное число $R_{\widehat{S}}$ на Γ равно нулю. Если $d(\Gamma) = 2$, то $R_{\widehat{S}}$ на Γ имеет пару сопряженных собственных чисел $\pm i\sigma$, $\sigma \neq 0$. Отсюда следует, что $R_{\widehat{S}}\Gamma = 0$, если $d(\Gamma) = 1$. В случае $d(\Gamma) = 2$ оператор $R_{\widehat{S}}$ имеет следующее представление:

$$R_{\widehat{S}}x_0 = \sigma x_1, \quad R_{\widehat{S}}x_1 = -\sigma x_0,$$

где

$$\text{Lin}(x_0, x_1) = \Gamma, \quad (x_0, x_1) = 0. \quad (4.1)$$

Для определенности рассмотрим последний случай. Пусть $x^0(t)$ есть решение уравнения:

$$\frac{dx}{dt} = R_{\widehat{S}}x, \quad x^0(0) = x_0.$$

Полагая $u_0^0(t) = U_{\widehat{S}}x^0(t)$, получаем, что пара $x(t)$, $u(t)$ является элементарным циклом, представимым в виде:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \cos \sigma t + x_1 \sin \sigma t, \\ u(t) &= u_0 \cos \sigma t + u_1 \sin \sigma t, \end{aligned}$$

где x_0, x_1 введены в (4.1), $u_0 = U_{\widehat{S}}x_0$, $u_1 = U_{\widehat{S}}x_1$. Имеем:

$$\Phi_{\widehat{S}}(x^0(t), u^0(t)) = \omega_{\widehat{S}}(x^0(t)) = \widehat{\lambda}(x^0(t))^2.$$

Отсюда следует утверждение 2) предложения 1. Тем самым оно доказано.

Продолжим доказательство теоремы 1 и рассмотрим случай $\widehat{\lambda} < 0$.

Пусть $x(t)$, $u(t)$ – элементарный цикл такой, что

$$\frac{\int_0^{T_\sigma} \Phi(x(t), u(t)) dt}{\int_0^{T_\sigma} x^2(t) dt} = \widehat{\lambda}.$$

Поскольку система V управляема, то можно за конечное время перейти из нуля на фазовую компоненту цикла, пробыть на нем любое время, равное некоторому T_σ , и вновь за конечное время вернуться в нуль.

Для достаточно больших T_σ мы получим траекторию из $L(V)$, на которой $J < 0$. Тем самым теорема 1 доказана.

4.2. Предложение 1 устанавливает связь между частотным критерием и критерием, основанным на неравенстве Гамильтона–Якоби. Эта связь представляет собой некоторую теорему двойственности.

Пусть $x(t)$, $u(t)$ – периодическая траектория системы V , и пусть $\{T\}$ – множество ее периодов. Положим

$$Z(\Phi) = \frac{\int_0^T \Phi(x(t), u(t)) dt}{\int_0^T x^2(t) dt}, \quad T \in \{T\}.$$

Очевидно, что $Z(\Phi)$ не зависит от выбора T и представляет собой линейный функционал на множестве функций $\Phi(x, u)$ рассматриваемого вида (см. §1), а это множество – обозначим его через $\widetilde{\Phi}$ – выпукло. Таким образом, каждый нетривиальный цикл порождает линейный функционал на выпуклом множестве $\widetilde{\Phi}$. Рассмотрим на $\widetilde{\Phi}$ функционал:

$$Y(\Phi) = \min \left\{ \frac{\Phi(x, u)}{x^2} : u \in \mathbb{R}^{d(u)}, x \in \mathbb{R}^{d(x)} \setminus \{0\} \right\}.$$

Заметим, что из $\Phi \in \widetilde{\Phi}$ следует, что $\Phi_S \in \widetilde{\Phi} \quad \forall S$. Кроме того, для $S = 0$ имеем $\Phi_S = \Phi$. Обозначим периодическую нетривиальную траекторию системы V через ζ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Имеет место следующая формула двойственности:*

$$\min_{\zeta} Z(\Phi) = \max_S Y(\Phi_S) \quad \text{для любого } \Phi \in \widetilde{\Phi}. \quad (4.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем согласно §2:

$$\Phi_S(x, u) = (u - U_S x)^2 + \omega_S(x).$$

Отсюда следует, что для любого ζ выполнено $Z(\Phi_S) \geq \lambda(S)$. Тогда, поскольку $Z(\Phi_S) = Z(\Phi)$, имеем:

$$Z(\Phi) \geq \lambda(S).$$

Следовательно, для любого ζ

$$Z(\Phi) \geq \widehat{\lambda}.$$

С другой стороны, $Y(\Phi_S) = \lambda(S)$, откуда $\widehat{\lambda} = \max_S Y(\Phi_S)$. Тем самым доказано неравенство

$$\min_{\zeta} Z(\Phi) \geq \max_S Y(\Phi_S). \quad (4.3)$$

Из предложения 1 следует, что существует элементарный цикл ζ^0 такой, что $Z(\Phi) = \widehat{\lambda}$, а тогда справедливо равенство (4.2). Предложение 2 доказано.

Рассмотрим теперь частотный критерий [1]. Положим

$$f = u_0^2 + u_1^2 + 2(Ax_0u_0 + Ax_1u_1) + Qx_0x_0 + Qx_1x_1.$$

Частотный критерий состоит в следующем. Для того чтобы выполнялось неравенство $J \geq 0$ на $L(V)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $f \geq 0$ для любых $\sigma, x_0, x_1, u_0, u_1$ таких, что

$$\begin{aligned} \sigma x_1 &= Kx_0 + Bu_0, \\ -\sigma x_0 &= Kx_1 + Bu_1. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Предложение 1 можно записать в форме:

$$\min \frac{f}{x_0^2 + x_1^2} = \widehat{\lambda}, \quad (4.5)$$

где $\min$ берется по всем $\sigma, x_0, x_1, u_0, u_1$, удовлетворяющим (4.4). Действительно, для любого элементарного цикла верно равенство:

$$\frac{f}{x_0^2 + x_1^2} = \frac{\int_0^{T_\sigma} \Phi(x(t), u(t)) dt}{\int_0^{T_\sigma} x^2(t) dt} \quad \forall T_\sigma.$$

Отсюда и из предложения 1 легко следует (4.5). Таким образом, частотный критерий следует из теоремы 1 и не является единственным аппаратом исследования интегральных квадратичных форм с постоянными коэффициентами на полуоси.

В следующих двух параграфах мы приведем некоторые примеры применения теоремы 1 и предложения 1.

§ 5. Квадратичное регулирование

5.1. Пусть задана управляемая система $V: \dot{x} = Kx + Bu$, обладающая управляемостью в смысле § 3. Положим $\mathcal{U} = \text{пр}_u(\cdot) L(V)$, $\mathcal{X} = \text{пр}_x(\cdot) L(V)$. На линейных многообразиях $\mathcal{U}$, $\mathcal{X}$ введем нормы

$$\|u(\cdot)\| = \sqrt{\int_0^\infty u^2(t) dt}, \quad \|x(\cdot)\| = \sqrt{\int_0^\infty x^2(t) dt}$$

и рассмотрим оператор

$$F: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}, \quad u(\cdot) \rightarrow x(\cdot), \quad \text{где } (u(t), x(t)) \in L(V).$$

Поставим вопрос: когда оператор F ограничен и какова его норма?

Положим $\Phi = u^2$. Для любого S согласно § 2 имеем:

$$\int_0^\infty \Phi dt = \int_0^\infty [(u - U_S x)^2 + \omega_S(x)] dt.$$

Пусть $\hat{\lambda} = \max_S \lambda(S)$. Так как при $S = 0$ имеем $\lambda(S) = 0$, то $\hat{\lambda} \geq 0$. Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 2. *Оператор F ограничен тогда и только тогда, когда $\hat{\lambda} > 0$. Его норма равна $1/\sqrt{\hat{\lambda}}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\hat{\lambda} > 0$ и $\hat{S}$ таково, что $\lambda(\hat{S}) = \hat{\lambda}$. Имеем:

$$\Phi_{\hat{S}}(x, u) - \hat{\lambda}x^2 = (u - U_{\hat{S}}x)^2 + \omega_{\hat{S}}(x) - \hat{\lambda}x^2 \geq 0.$$

Следовательно,

$$J_{\hat{S}}(x(\cdot), u(\cdot)) \geq \hat{\lambda} \int_0^\infty x^2(t) dt \quad \text{на } L(V),$$

но на $L(V)$ выполнено $J_{\hat{S}} = J$. Следовательно,

$$\int_0^\infty u^2 dt \geq \hat{\lambda} \int_0^\infty x^2 dt,$$

откуда $\|F\| \leq 1/\sqrt{\hat{\lambda}}$. С другой стороны, по предложению 1 существует элементарный цикл $x^0(t)$, $u^0(t)$ такой, что

$$\int_0^{T_\sigma} (u^0(t))^2 dt = \hat{\lambda} \int_0^{T_\sigma} (x^0(t))^2 dt,$$

откуда $\|F\| \geq 1/\sqrt{\hat{\lambda}}$. Таким образом,

$$\hat{\lambda} > 0 \Rightarrow \|F\| = \frac{1}{\sqrt{\hat{\lambda}}}. \quad (5.1)$$

Пусть $\hat{\lambda} = 0$. Согласно предложению 1 существует элементарный цикл $x^0(t), u^0(t)$ такой, что $u^0(t) = 0$. Отсюда следует неограниченность F . Теорема доказана.

Имеем далее $\omega_S(x) = -(B^*Sx)^2 + 2(Kx, Sx)$. Следовательно, $\hat{\lambda} > 0$ тогда и только тогда, когда существует S такое, что

$$(Kx, Sx) > 0 \quad \forall x \neq 0.$$

По лемме 1 это эквивалентно условию: K не имеет собственных чисел с нулевой вещественной частью. Таким образом, оператор F ограничен тогда и только тогда, когда K не имеет собственных чисел с нулевой вещественной частью.

Замыкание $\mathcal{U}$ по норме L_2 является подпространством конечной коразмерности, которая равна числу собственных чисел K с неотрицательной вещественной частью. Если таковых нет, то замыкание $\mathcal{U}$ есть все пространство. Следовательно, для того чтобы решение $x(t)$ уравнения $\dot{x} = Kx + Bu$, $x(0) = 0$, принадлежало L_2 , коль скоро $u(t) \in L_2$, необходимо и достаточно, чтобы все собственные числа K имели отрицательную вещественную часть.

5.2. Пусть заданы Φ и V . Рассмотрим задачу:

$$\begin{aligned} J = \int_0^\infty \Phi dt \rightarrow \inf, \quad \dot{x} = Kx + Bu, \quad x(0) = x_*, \\ \int_0^\infty (x^2 + u^2) dt < +\infty. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Предполагаем по-прежнему, что система V обладает управляемостью.

В обзоре [1] приведена следующая классификация. Возможны три случая:

- 1) $\inf J = -\infty \quad \forall x_*$;
- 2) $\inf J = \min J \quad \forall x_*$ и $\text{Arg min } J$ состоит из одной точки (регулярный случай);
- 3) $\inf J > -\infty \quad \forall x_*$, но регулярности нет.

Мы докажем эту классификацию, не опираясь на частотный критерий.

ТЕОРЕМА 3. *Случай $\inf J = -\infty \quad \forall x_*$ эквивалентен неравенству $\hat{\lambda} < 0$.*

Случай $\text{Arg min } J \neq \emptyset \quad \forall x_$ эквивалентен неравенству $\hat{\lambda} > 0$.*

Случай $\inf J > -\infty \quad \forall x_$ и $\exists x_*: \text{Arg min } J = \emptyset$ эквивалентен равенству $\hat{\lambda} = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\hat{\lambda} < 0$. По теореме 1 в этом случае существует траектория $(x^0(t), u^0(t)) \in L(V)$ такая, что

$$J(x^0(\cdot), u^0(\cdot)) < 0.$$

Тогда для любой траектории $(x^1(t), u^1(t))$, допустимой в задаче (5.2), траектория $(x^1(t) + \tau x^0(t), u^1(t) + \tau u^0(t))$ также будет допустима для любого τ и $J(x^1 + \tau x^0, u^1 + \tau u^0) \rightarrow -\infty$ при $\tau \rightarrow \infty$. Следовательно, $\inf J = -\infty \quad \forall x_*$.

Пусть $\hat{\lambda} > 0$. Возьмем $\hat{S}$ таким, чтобы $\lambda(\hat{S}) = \hat{\lambda}$, и положим

$$J_{\hat{S}} = \int_0^\infty \left(\Phi + \frac{d}{dt}(\hat{S}xx) \right) dt = J - (\hat{S}x_*x_*). \quad (5.3)$$

Имеем:

$$J_{\hat{S}} = \int_0^\infty [(u - U_{\hat{S}}x)^2 + \omega_{\hat{S}}(x)] dt \geq \int_0^\infty [(u - U_{\hat{S}}x)^2 + \hat{\lambda}x^2] dt$$

для любой траектории, допустимой в задаче (5.2). Отсюда следует, что существует $\delta > 0$ такое, что

$$J_{\hat{S}} \geq \delta \int_0^\infty [x^2(t) + u^2(t)] dt.$$

Тогда $\text{Arg min } J_{\hat{S}}$ непусто $\forall x_*$ и содержит ровно один элемент. Но $\text{Arg min } J_{\hat{S}} = \text{Arg min } J$.

Пусть $\hat{\lambda} = 0$. Тогда $J_{\hat{S}} \geq 0$ для любой допустимой траектории и, следовательно, $\inf J > -\infty \forall x_*$. Согласно предложению 1 существует элементарный цикл такой, что $\int_0^T \Phi dt = 0$ для любого периода T . Пусть этот цикл есть $x^0(t), u^0(t)$. Возьмем $x_* = x^0(0)$. Допустим, что для x_* $\text{Arg min } J \neq \emptyset$. Тогда $\text{Arg min } J$ содержит более чем одну траекторию. Однако нетрудно доказать, что если $\text{Arg min } J \neq \emptyset$, то он состоит из одной точки. Действительно, пусть

$$(x^1(t), u^1(t)) \in \text{Arg min } J \quad \text{и} \quad (x^2(t), u^2(t)) \in \text{Arg min } J.$$

Так как $\hat{\lambda} = 0$, то $J_{\hat{S}}$ — выпуклый функционал на допустимых траекториях задачи (5.2). Положим $x^1 - x^2 = \delta x, u^1 - u^2 = \delta u$. Тогда необходимо должно выполняться равенство

$$J_{\hat{S}}(\delta x(\cdot), \delta u(\cdot)) = 0.$$

Отсюда $\delta u = U_{\hat{S}}\delta x$ и тогда $\delta x = 0, \delta u = 0$ в силу системы V . Следовательно, $\text{Arg min } J$ может состоять не более чем из одной допустимой траектории. Но тогда для данного x_* $\text{Arg min } J = \emptyset$. Теорема доказана.

§6. Необходимые и достаточные условия неотрицательности формы J на $L(V)$, порожденные теоремой 1

6.1. Условия, необходимые и достаточные для неотрицательности формы J на $L(V)$, мы будем впредь коротко называть *условиями неотрицательности*. Непосредственно из доказательства теоремы вытекают следующие условия неотрицательности.

Назовем пару Γ, S *согласованной*, если выполнены следующие условия:

$$d(\Gamma) \in \{1, 2\}; \tag{6.1_1}$$

$$R_S \Gamma \subset \Gamma; \tag{6.1_2}$$

$$\begin{aligned} &\text{собственные числа } R_S \text{ на } \Gamma \text{ равны } 0, \text{ если } d(\Gamma) = 1, \\ &\text{и равны } \pm i\sigma, \sigma \neq 0, \text{ если } d(\Gamma) = 2; \end{aligned} \tag{6.1_3}$$

$$\omega_S(x) = \kappa x^2 \text{ на } \Gamma; \tag{6.1_4}$$

$$\omega'_S(x, x') = 0 \quad \forall x \in \Gamma, x' \perp \Gamma. \tag{6.1_5}$$

Тогда из доказательства теоремы 1 вытекает непосредственно, что следующее условие является условием неотрицательности.

УСЛОВИЕ 1. Для любой согласованной пары имеет место неравенство $\kappa \geq 0$.

Мы скажем, что пара Γ, S слабо согласована, если выполнены условия (6.1₁)–(6.1₄). Следующее условие также является условием неотрицательности.

УСЛОВИЕ 2. Для любой слабо согласованной пары имеет место неравенство $\kappa \geq 0$.

Это условие также непосредственно следует из доказательства теоремы 1. Ниже мы расшифруем условия 1 и 2.

6.2. Содержанием этого пункта является доказательство формулы

$$\frac{1}{2} \omega'_S(x, y) = (U_S x, Ay) + (SR_S x, y) + (Sx, Ky) + (Qx, y), \quad (6.2)$$

справедливой для любых x, y . Здесь $\omega'_S(x, y)$ – производная формы ω_S в точке x по направлению y :

$$\omega'_S(x, y) = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \omega_S(x + \varepsilon y) \right|_{\varepsilon=0}.$$

Имеем согласно § 2:

$$\omega_S(x) = -(U_S x)^2 + 2(Kx, Sx) + (Qx, x).$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2} \omega'_S(x, y) = -(U_S x, U_S y) + (Kx, Sy) + (Sx, Ky) + (Qx, y). \quad (6.3)$$

По определению $U_S = -(A + B^* S)$. Следовательно,

$$-(U_S x, U_S y) = (U_S x, Ay) + (U_S x, B^* Sy).$$

С другой стороны,

$$(Kx, Sy) = (SR_S x, y) - (SBU_S x, y),$$

что следует из определения R_S : $R_S = K + BU_S$. Учитывая два последних равенства, получаем:

$$\frac{1}{2} \omega'_S(x, y) = (U_S x, Ay) + (SR_S x, y) + (Sx, Ky) + (Qx, y),$$

что и требовалось.

6.3. Пусть $d(\Gamma) = 1$. Выясним, когда существует S , слабо согласованное с Γ .

ТЕОРЕМА 4. Слабо согласованная с Γ матрица S существует тогда и только тогда, когда существуют $\hat{x}, \hat{p}, \hat{u}$ такие, что:

- 1) $\hat{x} \in \Gamma, \hat{x} \neq 0$;
- 2) $0 = K\hat{x} + B\hat{u}$;
- 3) $\hat{u} = -(A\hat{x} + B^*\hat{p})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть S таково, что пара Γ, S слабо согласована. Выберем $\hat{x} \in \Gamma$, $\hat{x} \neq 0$, и положим $\hat{p} = S\hat{x}$. По определению слабой согласованности $R_S\hat{x} = 0$. Следовательно, полагая $\hat{u} = -(A\hat{x} + B^*\hat{p})$, получаем $0 = K\hat{x} + B\hat{u}$. Необходимость условий теоремы доказана.

Пусть теперь существуют $\hat{x}, \hat{p}, \hat{u}$, удовлетворяющие условиям 1)–3) теоремы. Выберем S так, чтобы $S\hat{x} = \hat{p}$. Тогда согласно условию 3)

$$\begin{aligned}\hat{u} &= U_S\hat{x}, \\ K\hat{x} + B\hat{u} &= R_S\hat{x}.\end{aligned}$$

Согласно условию 2) отсюда следует, что $R_S\hat{x} = 0$. Достаточность условий 1)–3) теоремы, а вместе с ней и вся теорема доказаны.

Выясним, когда существует S , согласованное с Γ .

ТЕОРЕМА 5. Матрица S , согласованная с Γ , существует тогда и только тогда, когда существуют $\hat{x}, \hat{p}, \hat{u}$ такие, что:

- 1) $\hat{x} \in \Gamma$, $\hat{x} \neq 0$;
- 2) $0 = K\hat{x} + B\hat{u}$;
- 3) $\hat{u} = -(A\hat{x} + B^*\hat{p})$;
- 4) $\hat{u}A + \hat{p}K + Q\hat{x} = \kappa\hat{x}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть S согласовано с Γ . Выберем произвольно $\hat{x} \in \Gamma$, $\hat{x} \neq 0$. Положим $\hat{p} = S\hat{x}$, $\hat{u} = U_S\hat{x}$. Очевидно, что $\hat{x}, \hat{p}, \hat{u}$ удовлетворяют условиям 1)–3) теоремы, ибо $R_S\hat{x} = 0$ по условию (6.13). Далее, согласно (6.15) имеем:

$$\omega'_S(\hat{x}, x') = 0 \quad \forall x' \perp \hat{x}.$$

Согласно формуле (6.2) отсюда следует:

$$(\hat{u}, Ax') + (\hat{p}, Kx') + (Q\hat{x}, x') = 0 \quad \forall x' \perp \hat{x},$$

откуда вытекает условие 4) теоремы. Необходимость доказана.

Перейдем к доказательству достаточности. Пусть $\hat{x}, \hat{p}, \hat{u}$ удовлетворяют условиям 1)–4) теоремы. Выберем S так, чтобы $S\hat{x} = \hat{p}$, и докажем, что S согласовано с Γ . Рассуждая так же, как при доказательстве предыдущей теоремы, установим, что S слабо согласовано с Γ . Установим (6.15). Согласно формуле (6.2) имеем для $x' \perp \hat{x}$

$$\frac{1}{2} \omega'_S(\hat{x}, x') = (\hat{u}, Ax') + (SR_S\hat{x}, x') + (\hat{p}, Kx') + (Q\hat{x}, x') = \kappa(\hat{x}, x') = 0.$$

Второе равенство следует из условия 4) теоремы. Тем самым установлено равенство (6.15). Достаточность, а вместе с ней и вся теорема доказаны.

6.4. В этом пункте мы выясним тот же вопрос, что и в п. 6.3, но для двумерного Γ . Итак, пусть задано Γ , $d(\Gamma) = 2$.

ТЕОРЕМА 6. Матрица S , слабо согласованная с Γ , существует тогда и только тогда, когда существуют $\sigma, \kappa; x_0, x_1; p_0, p_1; u_0, u_1$ такие, что:

- 1) $\sigma \neq 0$;
- 2) $\text{Lin}(x_0, x_1) = \Gamma, (x_0, x_1) = 0$;
- 3) $p_1 x_0 = p_0 x_1$;
- 4) $\sigma x_1 = K x_0 + B u_0, -\sigma x_0 = K x_1 + B u_1$;
- 5) $u_0 = -(A x_0 + B^* p_0), u_1 = -(A x_1 + B^* p_1)$;
- 6) $-u_0^2 + 2(p_0, K x_0) + (Q x_0, x_0) = \kappa x_0^2$,
 $-u_1^2 + 2(p_1, K x_1) + (Q x_1, x_1) = \kappa x_1^2$,
 $-u_0 u_1 + (p_1, K x_0) + (p_0, K x_1) + (Q x_0, x_1) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть S слабо согласовано с Γ . В силу (6.1₂) R_S имеет Γ своим инвариантным подпространством, а согласно (6.1₃) его собственные числа на Γ имеют вид $\pm i\sigma, \sigma \neq 0$. Тем самым постоянная σ определена. Далее, существует ортогональный базис x_0, x_1 в Γ , в котором R_S имеет вид

$$\sigma x_1 = R_S x_0, \quad -\sigma x_0 = R_S x_1.$$

Тем самым определены векторы x_0, x_1 . Заметим, что σ, x_0, x_1 удовлетворяют условиям 1), 2) теоремы. Положим, далее, $p_0 = S x_0, p_1 = S x_1, u_0 = U_S x_0, u_1 = U_S x_1$.

Исходя из определений U_S и R_S нетрудно установить, что $\sigma, x_0, x_1; p_0, p_1; u_0, u_1$ удовлетворяют условиям 3)–5) теоремы. Остается показать, что выполняются также и условия 6).

По условию (6.1₄) $\omega_S(x) = \kappa x^2$ на Γ . Тем самым постоянная κ определена. Очевидно, равенство (6.1₄) эквивалентно равенствам:

$$\begin{aligned} \omega_S(x_0) &= \kappa x_0^2, \quad \omega_S(x_1) = \kappa x_1^2, \\ \omega'_S(x_0, x_1) &= 0 \quad (\text{ибо } x_0 \perp x_1). \end{aligned}$$

Условия 6) теоремы элементарно вытекают из этих равенств. Необходимость доказана.

Перейдем к достаточности. Пусть $\sigma, \kappa; x_0, x_1; p_0, p_1; u_0, u_1$ удовлетворяют условиям 1)–6) теоремы. Определим матрицу S так, чтобы $S x_0 = p_0, S x_1 = p_1$. Эти требования корректны в силу условия 3). Тогда $u_0 = U_S x_0, u_1 = U_S x_1$. Из условий 4), 5) следует:

$$\sigma x_1 = R_S x_0, \quad -\sigma x_0 = R_S x_1.$$

Отсюда следует, что Γ инвариантно относительно R_S и что собственные числа R_S на Γ равны $\pm i\sigma$. Из условий 6) следует, что

$$\omega_S(x) = \kappa x^2 \quad \text{на } \Gamma.$$

Достаточность доказана. Тем самым доказательство теоремы завершено.

Выясним, когда существует S , согласованное с Γ .

ТЕОРЕМА 7. Матрица S , согласованная с Γ , существует тогда и только тогда, когда существуют $\sigma, \kappa; x_0, x_1; p_0, p_1; u_0, u_1$ такие, что:

- 1) $\sigma \neq 0$;
- 2) $\text{Lin}(x_0, x_1) = \Gamma, (x_0, x_1) = 0$;
- 3) $p_1 x_0 = p_0 x_1$;
- 4) $\sigma x_1 = K x_0 + B u_0, -\sigma x_0 = K x_1 + B u_1$;
- 5) $u_0 = -(A x_0 + B^* p_0), u_1 = -(A x_1 + B^* p_1)$;
- 6) $u_0 A + \sigma p_1 + p_0 K + Q x_0 = \kappa x_0,$
 $u_1 A - \sigma p_0 + p_1 K + Q x_1 = \kappa x_1.$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем необходимость. Пусть S согласовано с Γ . Тогда S слабо согласовано с Γ и, также как и при доказательстве теоремы 6, мы определим $\sigma, \kappa; x_0, x_1; p_0, p_1; u_0, u_1$, удовлетворяющие всем условиям теоремы 6. Из (6.1₅) следует:

$$\omega'_S(x_0, x') = 0, \quad \omega'_S(x_1, x') = 0 \quad \forall x' \perp \Gamma.$$

Из условий теоремы 6 вытекает, что $\forall x' \in \Gamma$

$$\begin{aligned} u_0 A x' + \sigma p_1 x' + (p_0, K x') + (Q x_0, x') &= 0, \\ u_1 A x' - \sigma p_0 x' + (p_1, K x') + (Q x_1, x') &= 0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} u_0 A + \sigma p_1 + p_0 K + Q x_0 &\in \Gamma, \\ u_1 A - \sigma p_0 + p_1 K + Q x_1 &\in \Gamma. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Умножая левую часть первого включения на x_1 и пользуясь формулой (6.2), получаем:

$$\frac{1}{2} \omega'_S(x_0, x_1) = u_0 A x_1 + \sigma p_1 x_1 + p_0 K x_1 + Q x_0 x_1,$$

но

$$\begin{aligned} u_0 A x_1 &= -u_0 u_1 - u_0 B^* p_1, \\ \sigma p_1 x_1 &= p_1 K x_0 + p_1 B u_0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2} \omega'_S(x_0, x_1) = -u_0 u_1 + p_1 K x_0 + p_0 K x_1 + Q x_0 x_1.$$

Отсюда согласно условиям 6) теоремы 6 следует: $\frac{1}{2} \omega'_S(x_0, x_1) = 0$. Но тогда из (6.4) следует, что

$$\begin{aligned} u_0 A + \sigma p_1 + p_0 K + Q x_0 &= \kappa_0 x_0, \\ u_1 A - \sigma p_0 + p_1 K + Q x_1 &= \kappa_1 x_1. \end{aligned}$$

Умножим первое равенство на x_0 . Получим

$$\omega_S(x_0) = u_0 A x_0 + \sigma p_1 x_0 + p_0 K x_0 + Q x_0 x_0 = \kappa_0 x_0^2,$$

но

$$\begin{aligned} u_0 A x_0 &= -u_0^2 - u_0 B^* p_0, \\ \sigma p_1 x_0 &= \sigma p_0 x_1 = p_0 K x_0 + p_0 B u_0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\omega_S(x_0) = -u_0^2 + 2p_0 K x_0 + Q x_0 x_0.$$

Согласно условиям 6) теоремы 6 отсюда следует: $\omega_S(x_0) = \kappa x_0^2$. Следовательно, $\kappa_0 = \kappa$. Аналогично доказывается, что $\kappa_1 = \kappa$, тем самым необходимость доказана.

Докажем достаточность. Пусть набор $\sigma, \kappa; x_0, x_1; p_0, p_1; u_0, u_1$ удовлетворяет всем условиям теоремы 7. Выберем матрицу S так, чтобы

$$S x_0 = p_0, \quad S x_1 = p_1.$$

В силу условия 3) теоремы такой выбор возможен. В остальном S — произвольная симметрическая матрица. Мы покажем, что S согласована с Γ . Из условий теоремы легко следует:

$$\begin{aligned} U_S x_0 &= u_0, & U_S x_1 &= u_1, \\ R_S x_0 &= \sigma x_1, & R_S x_1 &= -\sigma x_0. \end{aligned}$$

Следовательно, выполнены условия (6.1₁)–(6.1₃). Условия (6.1₄), (6.1₅) легко вытекают из условия 6) теоремы. Мы не будем подробно останавливаться на этом, ибо подобные рассмотрения уже были, когда мы доказывали необходимость. Достаточность, а вместе с ней и вся теорема, доказана.

Обратим внимание на то, что, как следует из доказательств теорем 4–7, коль скоро пара Γ, S согласована (слабо согласована), то и пара Γ, S' обладает тем же свойством для любой матрицы S' , совпадающей на Γ с S .

Условия 1 и 2 приобретают теперь следующую форму. Для любого набора, удовлетворяющего условиям одной из теорем 4–7, должно иметь место неравенство $\kappa \geq 0$. Вероятно, есть возможность получить условия неотрицательности, в которых будут существенны некоторые свойства матрицы S и вне Γ .

6.5. В этом пункте мы рассмотрим управляемую систему V вида $\dot{x} = u$. В этом случае

$$\begin{aligned} U_S &= R_S = -(A + S), \\ \omega_S(x) &= -(U_S x)^2 + Q x x. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Матрицу A в данном случае можно считать кососимметрической, что мы и будем делать. Матрицу Q естественно предположить неотрицательно определенной. Тогда условия 1 и 2 можно не рассматривать для одномерных Γ . Мы рассмотрим

условие неотрицательности, опирающееся на теорему 6. В нашем случае оно имеет следующий вид: для любых $\sigma, \kappa; x_0, x_1; p_0, p_1; u_0, u_1$, удовлетворяющих условиям

$$\sigma \neq 0, \quad (6.6_1)$$

$$d(\text{Lin}(x_0, x_1)) = 2, \quad (x_0, x_1) = 0, \quad (6.6_2)$$

$$p_1 x_0 = p_0 x_1, \quad (6.6_3)$$

$$\sigma x_1 = u_0, \quad -\sigma x_0 = u_1, \quad (6.6_4)$$

$$u_0 = -(Ax_0 + p_0), \quad u_1 = -(Ax_1 + p_1), \quad (6.6_5)$$

$$-u_0^2 + (Qx_0, x_0) = \kappa x_0^2, \quad -u_1^2 + (Qx_1, x_1) = \kappa x_1^2, \quad (Qx_0, x_1) = 0, \quad (6.6_6)$$

должно выполняться неравенство

$$\kappa \geq 0. \quad (6.7)$$

Отметим, что из (6.6₂) и (6.6₄) следует $(u_0, u_1) = 0$. Из условий (6.6₁)–(6.6₆) легко исключить u_0, u_1 и выразить σ через x_0, x_1 . Из (6.6₄), (6.6₅) имеем:

$$\begin{aligned} \sigma x_1 &= -Ax_0 - p_0, \\ -\sigma x_0 &= -Ax_1 - p_1. \end{aligned}$$

Умножая первое равенство на x_1 , второе на x_0 , вычитая одно из другого и учитывая (6.6₃), получаем:

$$\sigma(x_0^2 + x_1^2) = 2Ax_1x_0. \quad (6.8)$$

Условия (6.6₆) предстанут в виде:

$$\begin{aligned} -\sigma^2 x_1^2 + Qx_0x_0 &= \kappa x_0^2, \\ -\sigma^2 x_0^2 + Qx_1x_1 &= \kappa x_1^2, \\ Qx_0x_1 &= 0. \end{aligned} \quad (6.9)$$

К этим условиям следует добавить еще условия (6.6₁), (6.6₂). Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \bar{x}_0 &= \frac{x_0}{|x_0|}, & \bar{x}_1 &= \frac{x_1}{|x_1|}, \\ \mu &= \frac{x_0^2}{x_1^2}, & a &= 4(A\bar{x}, \bar{x}_0)^2, \\ q_0 &= (Q\bar{x}_0, \bar{x}_0), & q_1 &= (Q\bar{x}_1, \bar{x}_1). \end{aligned}$$

В этих обозначениях условия (6.9) примут вид:

$$\begin{aligned} -\frac{a}{(1+\mu)^2} + q_0 &= \kappa, \\ -\frac{a}{(1+1/\mu)^2} + q_1 &= \kappa, \\ a > 0, \quad 0 < \mu < +\infty. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Выясним, когда условия (6.10) совместны, и найдем выражение для μ . Имеем:

$$q_0 - q_1 = a \left(\frac{1}{(1 + \mu)^2} - \frac{1}{(1 + 1/\mu)^2} \right) = a \frac{1 - \mu^2}{(1 + \mu)^2} = a \frac{1 - \mu}{1 + \mu}.$$

Отсюда

$$\mu = \frac{a - \Delta q}{a + \Delta q}, \quad \Delta q = q_0 - q_1. \quad (6.11)$$

Следовательно, условия (6.10) совместны тогда и только тогда, когда

$$a > |\Delta q|. \quad (6.12)$$

Выясним условия, эквивалентные условию $\kappa \geq 0$. Оказывается, что эти условия можно сформулировать только через a и q .

Действительно, пусть $\kappa \geq 0$. Тогда согласно (6.10) имеем:

$$q_0 \geq \frac{a}{(1 + \mu)^2}, \quad q_1 \geq \frac{a}{(1 + 1/\mu)^2}.$$

Отсюда

$$\sqrt{q_0} \geq \frac{\sqrt{a}}{1 + \mu}, \quad \sqrt{q_1} \geq \frac{\sqrt{a}}{1 + 1/\mu}.$$

Складывая, получаем: $\sqrt{q_0} + \sqrt{q_1} \geq \sqrt{a}$.

Пусть теперь $\kappa < 0$. Тогда

$$\sqrt{q_0} < \frac{a}{1 + \mu}, \quad \sqrt{q_1} < \frac{a}{1 + 1/\mu},$$

откуда $\sqrt{q_0} + \sqrt{q_1} < \sqrt{a}$. Итак, условие, эквивалентное неравенству $\kappa \geq 0$, имеет вид:

$$\sqrt{q_0} + \sqrt{q_1} \geq \sqrt{a}. \quad (6.13)$$

Заметим, что из неравенства $\sqrt{q_0} + \sqrt{q_1} < \sqrt{a}$ следует неравенство (6.12). Поэтому условие неотрицательности можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \sqrt{q_0} + \sqrt{q_1} &\geq \sqrt{a} \\ \forall \bar{x}_0, \bar{x}_1: |\bar{x}_0| = |\bar{x}_1| = 1, \quad (\bar{x}_0, \bar{x}_1) = 0, \quad (Q\bar{x}_0, \bar{x}_1) = 0. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Это условие ранее не было известно. Такое условие для двумерного случая получил и обосновал А. В. Дмитрук [2]. Условие (6.14) можно трактовать как требование выполнения условия Дмитрука для любой плоскости.

Действительно, рассмотрим траектории, лежащие в плоскости Γ . Тогда форму Φ можно записать в виде:

$$\Phi = u^2 + 2(PAPx, u) + (PQP x, x),$$

где P — ортогональный проектор на Γ . Тогда q_0 и q_1 — собственные векторы оператора PQP , а величина $\sqrt{a}/2$ равна модулю множителя, соответствующего оператору PAP при повороте на $\pi/2$. Тогда (6.14) как раз совпадает с условием Дмитрука для траекторий плоскости Γ . Условие Дмитрука можно получить и исходя из частотного критерия, однако оно не вытекает из последнего естественным путем.

**§ 7. Некоторый класс квадратичных форм,
приводящихся к формам с постоянными коэффициентами**

Рассмотрим пару Φ, V вида

$$\begin{aligned}\Phi &= a^2(t)u^2 + 2m(t)(Ax, u) + q^2(t)(Qx, x), \\ V: \dot{x} &= k(t)Kx + b(t)Bu.\end{aligned}\tag{7.1}$$

Соответствующая форма имеет вид $J = \int_0^\infty \Phi(x(t), u(t), t) dt$ и рассматривается на $L(V)$. Матрицы A, Q, K, B постоянны. Коэффициенты $a(t), m(t), q(t), k(t), b(t)$ положительны на полуоси. Будем считать, что выполнены требования:

$$m = aq; \tag{7.2_1}$$

$$\frac{q^2}{k} = \frac{m}{b}; \tag{7.2_2}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m}{b} \right) = \lambda_0 K \frac{m}{b}, \quad \lambda_0 = \text{const}; \tag{7.2_3}$$

$$\int_0^\infty k(t) dt = +\infty. \tag{7.2_4}$$

7.1. В этом пункте мы покажем, что коль скоро выполнены (7.2₁)–(7.2₄), то пару Φ, V и форму J можно привести заменой переменных к паре и форме с постоянными коэффициентами. Положим $\tau(t) = \int_0^t k(t) dt$. Докажем, что

$$e^{-\lambda_0 \tau(t)} = \frac{m(0)}{b(0)} \cdot \frac{b(t)}{m(t)}. \tag{7.3}$$

Действительно, из (7.2₁)–(7.2₃) вытекает

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m}{b} e^{-\lambda_0 \tau} \right) = \left(\lambda_0 k \frac{m}{b} - \lambda_0 k \frac{m}{b} \right) e^{-\lambda_0 \tau} = 0,$$

откуда следует (7.3).

Рассмотрим теперь замену: $(x, u, t) \rightarrow (\bar{x}, \bar{u}, \tau)$, где

$$\begin{aligned}\tau &= \tau(t), \\ x &= e^{-\frac{\lambda_0}{2}\tau} \bar{x}, \\ u &= \frac{q}{a} e^{-\frac{\lambda_0}{2}\tau} \bar{u}.\end{aligned}\tag{7.4}$$

Тогда

$$\Phi(x, u, t) = q^2(t) e^{-\lambda_0 \tau(t)} (\bar{u}^2 + 2A\bar{x}\bar{u} + Q\bar{x}\bar{x}).$$

Полагая $\bar{\Phi}(\bar{x}, \bar{u}) = \bar{u}^2 + 2A\bar{x}\bar{u} + Q\bar{x}\bar{x}$, получаем:

$$\Phi(x, u, t) = q^2(t) e^{-\lambda_0 \tau(t)} \bar{\Phi}(\bar{x}, \bar{u}). \tag{7.5}$$

Согласно (7.3) получаем отсюда:

$$\Phi(x, u, t) dt = \frac{m(0)}{b(0)} \bar{\Phi}(\bar{x}, \bar{u}) d\tau. \quad (7.6)$$

Подставляя далее в V вместо x, u, t их выражения через $\bar{x}, \bar{u}, \tau$, получаем:

$$k \frac{d}{d\tau} e^{-\frac{\lambda_0}{2}\tau} \bar{x} = k e^{-\frac{\lambda_0}{2}\tau} K \bar{x} + \frac{bq}{a} e^{-\frac{\lambda_0}{2}\tau} B \bar{u}.$$

Сокращая на экспоненту и k , получаем:

$$\frac{d\bar{x}}{d\tau} = \left(\frac{\lambda_0}{2} I + K \right) \bar{x} + \frac{bq}{ka} B \bar{u}.$$

Но из (7.2₁), (7.2₂) следует $\frac{bq}{ka} = 1$. Таким образом, управляемая система V переходит в управляемую систему $\bar{V}$:

$$\frac{d\bar{x}}{d\tau} = \left(\frac{\lambda_0}{2} I + K \right) \bar{x} + B \bar{u}. \quad (7.7)$$

При этом форма J переходит, с точностью до постоянного множителя, в форму $\bar{J} = \int_0^\infty \bar{\Phi} d\tau$. Итак, доказано, что если коэффициенты a, m, q, k, b удовлетворяют (7.2₁)–(7.2₄), то заменой (7.4) пара Φ, V переходит в пару $\bar{\Phi}, \bar{V}$ с постоянными коэффициентами, а форма J в $\bar{J}$. Очевидно, $L(V)$ переходит в $L(\bar{V})$. Поэтому условие неотрицательности $\bar{J}$ на $L(\bar{V})$ является условием неотрицательности J на $L(V)$.

7.2. Пусть пара Φ, V имеет вид (7.1). Полагая $v = b(t)u$, получаем новую пару Φ_1, V_1 , где Φ_1 и правая часть V_1 зависят от x, v, t так же, как в (7.1), с коэффициентами

$$\frac{a^2}{b^2}, \quad \frac{m}{b}, \quad q^2, \quad k, \quad 1.$$

Нетрудно проверить, что если старые коэффициенты a^2, m, q^2, k, b удовлетворяли условиям (7.2₁)–(7.2₄), то и новые коэффициенты удовлетворяют этим условиям. Поэтому можно ограничиться случаем, когда $b = 1$. Ниже мы будем считать это равенство выполненным.

Пусть пара Φ, V имеет вид:

$$\begin{aligned} \Phi &= z(t) \left(\frac{1}{\rho(t)} u^2 + 2A x u + \rho(t) Q x x \right), \\ V: \dot{x} &= \rho K x + B u, \end{aligned} \quad (7.8)$$

где $\rho(t), z(t) > 0$; $\frac{dz}{dt} = \lambda \rho z$; $\lambda = \text{const}$; $\int_0^\infty \rho dt = +\infty$.

Мы докажем два предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть пара Φ, V имеет вид (7.8). Тогда коэффициенты a, m, q, k, b , где

$$a = \sqrt{\frac{z}{\rho}}, \quad m = z, \quad q = \sqrt{z\rho}, \quad k = \rho, \quad b = 1,$$

удовлетворяют условиям (7.2₁)–(7.2₄), причем $\lambda_0 = \lambda$.

Доказательство представляет собой простую проверку этих условий.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть пара Φ, V вида (7.1) такова, что a, m, q, k, b удовлетворяют (7.2₁)–(7.2₄), причем $b = 1$. Тогда пару Φ, V можно записать в виде (7.8).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $z(t) = m(t), \rho(t) = k(t)$. Тогда

$$\Phi(x, u, t) = z(t) \left(\frac{a^2}{m} u^2 + 2A x u + \frac{q^2}{m} Q x x \right).$$

Так как $b = 1$, то из (7.2₁)–(7.2₃) следует:

$$\frac{a^2}{m} = \frac{1}{k}, \quad \frac{q^2}{m} = k, \quad \frac{dm}{dt} = \lambda_0 k m.$$

Тем самым предложение доказано.

Форма записи (7.8) весьма проста. Вместо четырех коэффициентов a, m, q, k ($b = 1$!) она оперирует двумя: z и ρ . Если $\rho = 1$, то к классу (7.8) относится пара:

$$\begin{aligned} \Phi &= e^{\lambda t} (u^2 + 2A x u + Q x x), \\ V: \dot{x} &= K x + B u \end{aligned}$$

при любом λ . Согласно п. 7.1 любая такая пара приводится к паре $\bar{\Phi}, \bar{V}$ с постоянными коэффициентами, где

$$\begin{aligned} \bar{\Phi} &= \bar{u}^2 + 2A \bar{x} \bar{u} + Q \bar{x} \bar{x}, \\ \bar{V}: \frac{d\bar{x}}{d\tau} &= \left(\frac{\lambda}{2} I + K \right) \bar{x} + B \bar{u}. \end{aligned}$$

7.3. В этом пункте мы рассмотрим форму:

$$\int_0^1 (\theta^\alpha u^2 + 2\theta^\beta (A x, u) + \theta^\gamma (Q x, x)) d\theta, \quad (7.9)$$

где

$$\frac{dx}{d\theta} = \theta^\mu K x + B u, \quad x(1) = 0 \quad (7.10)$$

и $x(\theta) = 0, u(\theta) = 0$ в некоторой окрестности нуля. Формы такого вида рассматривал В. А. Арутюнов [3] в связи с нарушением усиленного условия Лежандра.

Мы выясним, при каких $\alpha, \beta, \gamma, \mu$ форма (7.9) и управляемая система (7.10) могут быть приведены к форме и управляемой системе с постоянными коэффициентами на полуоси. Положим $\kappa(t) = 1 + t$ и рассмотрим замену $\theta = 1/\kappa$. Тогда подынтегральное выражение в (7.9) примет вид

$$\Phi(x, u, t) dt = \left(\frac{1}{\kappa^{\alpha+2}} u^2 + 2 \frac{1}{\kappa^{\beta+2}} A x u + \frac{1}{\kappa^{\gamma+2}} Q x x \right) dt,$$

а управляемая система (7.10) – вид

$$V: \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{\kappa^{\mu+2}} K x - \frac{1}{\kappa^2} B u. \quad (7.11)$$

Выясним, когда для коэффициентов этой системы выполнены условия (7.2₁)–(7.2₄). Полагая $v = u/\kappa^2$, переходим к паре Φ_1, V_1 :

$$\begin{aligned} \Phi_1(x, v, t) &= \kappa^{-\beta} (\kappa^{\beta-\alpha+2} v^2 + 2 A x v + \kappa^{\beta-\sigma-2} Q x x), \\ V_1: \frac{dx}{dt} &= -\frac{1}{\kappa^{\mu+2}} K x - B v. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Из предложений 3 и 4 следует, что

$$\alpha + \gamma = 2\beta, \quad \beta - \gamma = -\mu, \quad \mu + 2 \leq 1.$$

Если $\beta \neq 0$, то $\frac{d}{dt}(\kappa^{-\beta}) = -\beta \kappa^{-\beta-1}$, откуда

$$\lambda = -\beta, \quad \rho = \kappa^{-1}, \quad \mu = -1.$$

Если $\beta = 0$, то

$$\lambda = 0, \quad \gamma = -\alpha = \mu, \quad \mu \leq -1, \quad \rho = \kappa^{-\mu-2}, \quad z = 1.$$

При этом пара $\bar{\Phi}_1, \bar{V}_1$ имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_1 &= \bar{v}^2 + 2 A \bar{x} \bar{v} + Q \bar{x} \bar{x}, \\ \bar{V}_1: \frac{d\bar{x}}{d\tau} &= \left(-\frac{\beta}{2} I - K \right) \bar{x} - B \bar{v}, \end{aligned}$$

а квадратичная форма $\bar{J}$ имеет вид

$$\bar{J} = \int_0^\infty \bar{\Phi}_1(\bar{x}, \bar{v}) d\tau.$$

Список литературы

1. Барабанов Н. Е., Гелиз А. Х., Леонов Г. А., Литарников А. Л., Матвеев А. С., Смирнова В. Б., Фрадков А. Л. Частотная теорема (лемма Якубовича–Калмана) в теории управления // Автоматика и телемеханика. 1996. № 10. С. 3–40.
2. Дмитриук А. В. Критерий неотрицательности вырожденной квадратичной формы с двумерным управлением // Итоги науки и техн. Соврем. матем. и ее прилож. (в печати).
3. Арутюнов А. В. Условия экстремума. Аномальные и вырожденные задачи. М.: Факториал, 1997.