Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Обломков, О спектральных свойствах двух классов разностных периодических операторов, *Матем. сб.*, 2002, том 193, номер 4, 87–112

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm645>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 15:55:21

УДК 517.958

А. А. Обломков

О спектральных свойствах двух классов разностных периодических операторов

В работе изучается изоэнергетическая спектральная задача для двух классов многомерных разностных периодических операторов. Первый класс операторов определен на правильной симплицальной решетке. Второй класс операторов определен на стандартной прямоугольной решетке и является разностным аналогом многомерного оператора Шрёдингера. Описаны возникающие при прямой спектральной задаче многообразия, а также дивизор определенной на спектральном многообразии собственной функции соответствующего оператора. Приведены многомерные аналоги соотношений Веселова–Новикова, которые связывают дивизоры собственной функции с каноническим дивизором спектрального многообразия. Также предложен метод решения обратной спектральной задачи в терминах θ -функций кривых, лежащих на “бесконечности” спектрального многообразия.

Библиография: 13 названий.

Введение

Изоэнергетической спектральной задачей называется спектральная задача, при которой спектральные данные собираются с одного энергетического уровня. Изоэнергетическая спектральная задача для многомерного оператора Шрёдингера активно изучалась такими учеными, как Р. Ньютон, П. Сабатье, Б. М. Левитан и многими другими (см. [1], где имеется замечательный исторический обзор и обширный список литературы). Случай двумерного оператора Шрёдингера с периодическими коэффициентами оказался тесно связанным с геометрией алгебраических кривых. Эта связь была выявлена А. Б. Дубровиным, С. П. Новиковым и И. М. Кричевером в известной работе [2], где введен класс двумерных операторов Шрёдингера, конечнозонных по отношению к одному уровню энергии. Собственная функция конечнозонного оператора определена на алгебраической кривой и мероморфна вне выделенных точек, в которых она имеет экспоненциальные особенности (так называемая функция Бэйкера–Ахиезера). В последующих работах А. П. Веселов и С. П. Новиков нашли достаточные условия на спектральную кривую и дивизор полюсов собственной функции, при выполнении которых соответствующий оператор чисто потенциален [3]–[5].

Исследование разностных операторов с аналогичными свойствами было начато И. М. Кричевером в [6]; в работе [7] предложена конструкция для решения обратной задачи на фиксированном уровне энергии двумерного разностного оператора

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 01-01-00803).

и подсчетом параметров показано, что получаемые операторы составляют всюду плотное множество в множестве всех разностных периодических операторов. В работе [8] предложено более явное решение для прямой задачи, в этой работе также даны ответы на некоторые вопросы, поставленные в работе [7], и построена теория разностных периодических операторов на правильной треугольной решетке. В вышеупомянутых работах разбирается случай двумерных разностных операторов с нулевой диагональю, случаю операторов с ненулевой диагональю посвящена работа [9].

В §1 настоящей работы исследуются прямая и обратная задачи (в смысле определений из работы [6]) на одном уровне энергии для пары операторов $L_\gamma^t: V_{\gamma,N}^{t+1} \rightarrow V_{\gamma,N}^t$, $L_{-\gamma}^{-t-1}: V_{\gamma,N}^t \rightarrow V_{\gamma,N}^{t+1}$, где $V_{\gamma,N}^s$ является пространством функций на симплицальной решетке $\Gamma_{\gamma,N}^s = \{\xi \in \mathbb{Z}^N : (\gamma, \xi) = s\}$, $\gamma \in \mathbb{Z}^N$, $\gamma_f = \pm 1$, $f = 1, \dots, N$. Действие этих операторов определяется следующими формулами:

$$(L_\gamma^t \psi)(n) = \sum_{r=1}^N a_{\gamma_r}(r; n) \psi(n + \gamma_r e_r), \quad n \in \Gamma_{\gamma,N}^t, \quad (1)$$

$$(L_{-\gamma}^{-t-1} \psi)(n) = \sum_{r=1}^N a_{-\gamma_r}(r; n) \psi(n - \gamma_r e_r), \quad n \in \Gamma_{\gamma,N}^{t+1}, \quad (2)$$

причем выполнены условие (“сопряженности” операторов $L_\gamma^t, L_{-\gamma}^{-t-1}$) $a_{\gamma_r}(r; n) = a_{-\gamma_r}(r; n + \gamma_r e_r)$ и условие периодичности $a_{\gamma_r}(r; n + T e_i) = a_{\gamma_r}(r; n)$, $r = 1, \dots, N$, $T \in \mathbb{Z}$. Этот класс операторов введен в работе [10], где были выявлены его замечательные свойства, связанные с многомерным разностным преобразованием Дарбу. Следуя работе [10], мы называем эти операторы *симплициальными операторами*. В нашей работе изучение симплициальных операторов является необходимым техническим шагом на пути к спектральной теории разностного многомерного оператора Шрёдингера, который рассматривается в §2. Этот оператор действует в пространстве функций на стандартной решетке $\Gamma_N = \mathbb{Z}^N$ по следующей формуле:

$$(L\psi)(n) = \sum_{\varepsilon=\pm 1} \sum_{r=1}^N a_\varepsilon(r; n) \psi(n + \varepsilon e_r), \quad (3)$$

и выполнены те же условия на a , что и в симплициальном случае, но $T \in 2\mathbb{Z}$. По аналогии с симплициальным случаем мы будем называть эти операторы *октаэдральными*. В п. 2.3 рассмотрен случай нечетного периода, т.е. случай, когда помимо уже описанных условий периодичности имеется еще условие

$$a_{\pm 1}(r; n + T e_1/2) = a_{\pm 1}(r; n), \quad r = 1, \dots, N, \quad T/2 = 1 \pmod{2}.$$

Основным результатом работы является описание данных прямой спектральной задачи для вышеописанных классов операторов и построение метода решения обратной спектральной задачи в терминах θ -функций кривых, лежащих на бесконечности спектрального многообразия. Спектральные данные состоят из компактифицированного спектрального многообразия размерности $N - 1$ в октаэдральном случае или $N - 2$ в симплициальном случае и набора дивизоров на этом

многообразии, удовлетворяющего многомерным аналогам соотношений Веселова–Новикова [4].

В работе [11] аналогичная теория развита для оператора вида:

$$(L\psi)(n) = \sum_{v=(\pm 1, \dots, \pm 1)} a(v; n)\psi(n+v),$$

$a(v; n) = a(-v; n+v)$, $a(v; n+T_j e_j) = a(v; n)$, который, продолжая аналогию, следовало бы назвать кубическим оператором. Таким образом, настоящая работа вместе с работой [11] предлагает для каждого стабильного правильного многогранника разностный оператор с хорошими спектральными свойствами.

Отметим, что спектральные задачи существенно зависят от того, на какой решетке определен оператор. Впервые это было отмечено в работах Кричевера и Новикова [6], [7]. В частности, в многомерном случае это различие проявляется в различии способов компактификации спектральных многообразий операторов, определенных на различных решетках. Спектральные многообразия компактифицируются посредством вложения в торическое многообразие, отвечающее некоторому многограннику. При этом спектральное многообразие симплицеального оператора компактифицируется с помощью торического многообразия, отвечающего симплексу, спектральное многообразие октаэдрального оператора – с помощью торического многообразия, отвечающего октаэдру, а спектральное многообразие кубического оператора – с помощью торического многообразия, отвечающего кубу.

Автор благодарен А. П. Веселову за постановку задачи в двумерном случае и полезные обсуждения.

§1. Симплициальные операторы

Далее в тексте использованы следующие соглашения. Если $\mu \in k^s$, где k – некоторое кольцо, $l \in \mathbb{N}^t$, $u \in \mathbb{Z}^s$, $t \leq s$, то $\mu_l = (\mu_{l_1}, \dots, \mu_{l_t})$, $\mu^u = \prod_{r=1}^s \mu_r^{u_r}$. Символы i, k, j, N, M имеют фиксированное значение: $i, k \in \mathbb{Z}^{N-M}$, $j \in \mathbb{Z}^M$, при этом $\{i_1, \dots, i_{N-M}\} \cup \{j_1, \dots, j_M\} = \{1, \dots, N\}$. Символом γ (возможно, с какими-нибудь индексами) обычно обозначается вектор из ± 1 , размерность вектора либо ясна из контекста, либо указана. Символ ε обычно равен ± 1 . Символом $\Gamma_{\gamma, M}^t$, $\gamma \in \mathbb{Z}^M$, мы обозначаем решетку $\{\xi \in \mathbb{Z}^M : (\gamma, \xi) = t\}$, символом $V_{\gamma, M}^t$ – пространство функций на решетке $\Gamma_{\gamma, M}^t$.

1.1. Формулировка основной теоремы. Помимо уже введенных симплицеальных операторов (1), (2) нам понадобятся операторы $L_{\gamma, j}^t \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix} : V_{\gamma, M}^{t-(\gamma_i, k)+1} \rightarrow V_{\gamma, M}^{t-(\gamma_i, k)}$, $\gamma \in \mathbb{Z}^N$:

$$(L_{\gamma, j}^t \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix} \psi^{t+1} \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix})(m) = \sum_{r=1}^M a_{\gamma_{j_r}}(j_r; \widehat{m}) \psi_{\gamma}^{t+1} \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}(m + \gamma_{j_r} e_r),$$

где $m \in \Gamma_{\gamma, M}^{t-(\gamma_i, k)}$, $\widehat{m}_j = m$, $\widehat{m}_i = k$. Вектор j фиксирует порядок переменных, и когда нам будет неважен порядок переменных, мы будем опускать j . Опера-

тор $L_{\gamma,j}^t \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right]$ – того же типа, что и оператор L_{γ}^t , но действует в пространстве функций на решетке меньшей размерности. Символом $\mathbb{P}_{\gamma,\lambda}^{N-1}$ будем обозначать проективное пространство вместе с фиксированным набором однородных координат $(\lambda_1^{\gamma_1} : \dots : \lambda_N^{\gamma_N})$, $\mathbb{P}_{\gamma,\lambda}^{M-1}(i) \subset \mathbb{P}_{\gamma,\lambda}^{N-1}$ – проективное подпространство $\lambda_{i_r}^{\gamma_{i_r}} = 0$, $r = 1, \dots, N - M$. Между $\mathbb{P}_{\gamma}^{N-1}$ и $\mathbb{P}_{-\gamma}^{N-1}$ имеется естественный изоморфизм $\text{inv}: \lambda \rightarrow \lambda^{-1}$, который также индуцирует изоморфизм между $\mathbb{P}_{\gamma}^{M-1}(i)$ и $\mathbb{P}_{-\gamma}^{M-1}(i)$. Пусть

$$V_{q,\gamma_j}^t \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right](\lambda) = \{ \psi \in V_{\gamma_j,M}^t \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right] : \psi(m + T(\gamma_{j_v} e_v - \gamma_{j_u} e_u)) = \lambda_{j_v}^{\gamma_{j_v}} \lambda_{j_u}^{-\gamma_{j_u}} \psi(m) \},$$

пространство $V_{q,\gamma_j}^t \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right](\lambda)$ называется *пространством квазипериодических функций с множителями Флоке* λ_j . Множество $X_{\gamma}^t \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right] \subset \mathbb{P}_{\gamma,\lambda}^{M-1}$,

$$X_{\gamma}^t \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right] = \{ p \in \mathbb{P}_{\gamma,\lambda}^{M-1} : \ker L_{\gamma}^t \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right] \cap V_{q,\varepsilon}^s \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right](\lambda(p)) \neq 0 \},$$

будем называть *спектральным многообразием* оператора $L_{\gamma}^t \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right]$. Иногда будет использоваться обозначение $X_{\gamma}^t \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right](L)$, чтобы подчеркнуть зависимость $X_{\gamma}^t \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right]$ от коэффициентов L . Пусть

$$X_{\gamma}^{t,\infty} \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right] = \bigcup_{r=1}^M \mathbb{P}^{M-2}(i, j_r) \cap X_{\gamma}^t \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right]$$

и $X_{\gamma}^{t,\text{aff}} \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right] = X_{\gamma}^t \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right] \setminus X_{\gamma}^{t,\infty} \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right]$. Дивизор $\mathcal{D} \subset X_{\gamma}^t \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right]$ будем называть *конечным*, если $\dim \mathcal{D} \cap X_{\gamma}^{t,\infty} \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right] < M - 2$. Так как коэффициенты оператора T -периодичны, то $X_{\gamma}^t \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right]$ – гиперповерхность в $\mathbb{P}_{\gamma,\lambda}^{M-1}(i)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пара $\{X_{\gamma}^t, X_{-\gamma}^{t-1}\}$ неприводимых гиперповерхностей $X_{\gamma}^t \subset \mathbb{P}_{\gamma,\lambda}^{N-1}$, $X_{-\gamma}^{t-1} \subset \mathbb{P}_{-\gamma,\lambda}^{N-1}$ является парой многообразий, *совместимой* с периодом T в направлении γ , если для любых $M < N$, $i \in \mathbb{Z}^{N-M}$ выполнено

$$\begin{aligned} \deg X_{\pm\gamma}^{\pm(t+\frac{1}{2})-\frac{1}{2}} &= T^{N-2}, \\ X_{\pm\gamma}^{\pm(t+\frac{1}{2})-\frac{1}{2}} \cap \mathbb{P}_{\pm\gamma,\lambda}^{M-1}(i) &= \bigcup_k X_{\pm\gamma}^{\pm(t+\frac{1}{2}-(\gamma,k))-\frac{1}{2}} \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right], \end{aligned} \quad (4)$$

где k пробегает множество $\mathbb{Z}^{N-M}$, $0 \leq k_s < T$, $s = 1, \dots, N - M$, и $X_{\pm\gamma}^{\pm(t+\frac{1}{2})-\frac{1}{2}} \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right]$ – неприводимая гладкая проективная гиперповерхность,

$$\begin{aligned} \deg X_{\pm\gamma}^{\pm(t+\frac{1}{2})-\frac{1}{2}} \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right] &= T^{M-2}, \\ X_{\pm\gamma}^{\pm(t+\frac{1}{2})-\frac{1}{2}} \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right] &= X_{\pm\gamma}^{\pm(t+\frac{1}{2})-\frac{1}{2}} \left[\begin{smallmatrix} i \\ k+Te_r \end{smallmatrix} \right], \quad r = 1, \dots, N - M, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\text{inv}(X_{\gamma}^t \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right]) = X_{-\gamma}^{t-1} \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right]. \quad (6)$$

Заметим, что из данного определения следует, что для X_γ^t из пары, совместимой с T в направлении γ , верно:

$$X_\gamma^t \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right] \cap X_\gamma^t \left[\begin{smallmatrix} i' \\ k' \end{smallmatrix} \right] = X_\gamma^t \left[\begin{smallmatrix} i, i' \\ k, k' \end{smallmatrix} \right] \quad (7)$$

при $\{i_1, \dots, i_M\} \cap \{i'_1, \dots, i'_{M'}\} = \emptyset$.

Чуть далее будет доказана

ЛЕММА 1. *Для общего L верно: пара $X_\gamma^t(L)$, $X_{-\gamma}^{t-1}(L)$ является парой, совместимой с периодом T .*

Каждой точке $p \in X_\gamma^t \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right]$ соответствует квазипериодическая функция

$$\psi_\gamma^{t+1} \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right] (\cdot, p) \in \ker L_\gamma^t \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right],$$

которая определена с точностью до умножения на константу, следовательно, отношение

$\frac{\psi_\gamma^{t+1} \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right] (m, \cdot)}{\psi_\gamma^{t+1} \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right] (m', \cdot)}$, где $m, m' \in \Gamma_{\gamma, M}^{t+1} \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right]$, является корректно определенной

мероморфной функцией на $X_\gamma^t \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right]$. Далее ψ будет встречаться лишь в подобных

отношениях, и для $\psi_\gamma^{t+1} \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right] (m, \cdot)$ как мероморфной функции на соответствующем

спектральном многообразии мы будем использовать обозначение $\psi_\gamma^{t+1} \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right] (m)$, где $m \in \Gamma_{\gamma, M}^{t+1}$, а второй аргумент опущен. Главный дивизор, отвечающий указанному отношению собственных функций, может быть описан, его свойства аналогичны свойствам дивизоров полюсов функций Бейкера–Ахиезера, используемых для решения обратной задачи в случае двумерных чистопотенциальных операторов [3], [4], и соотношения (10) являются многомерными аналогами соотношений Веселова–Новикова.

ЛЕММА 2. *Для общего L существуют эффективные конечные дивизоры $\mathcal{D}_{\gamma, j, m}^t \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right] \subset X_\gamma^t \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right]$, $m \in \Gamma_{\gamma, M}^t$, такие, что:*

$$\left(\frac{\psi_\gamma^{t+1} \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right] (m^1)}{\psi_\gamma^{t+1} \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right] (m^0)} \right) \sim \mathcal{D}_{\gamma, j, m^1}^t \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right] - \mathcal{D}_{\gamma, j, m^0}^t \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right] + Q_{\gamma, j}^t \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right] \left[\begin{smallmatrix} m^1 \\ m^0 \end{smallmatrix} \right] - Q_{\gamma, j}^t \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right] \left[\begin{smallmatrix} m^0 \\ m^1 \end{smallmatrix} \right], \quad (8)$$

$$Q_{\gamma, j}^t \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right] \left[\begin{smallmatrix} m^1 \\ m^0 \end{smallmatrix} \right] = \sum_{g=1}^M \sum_{w=\gamma_{jg} m_{i_g}^0}^{\gamma_{jg} (m_{i_g}^1 - 1)} X_\gamma^t \left[\begin{smallmatrix} i, jg \\ k, w \end{smallmatrix} \right], \quad (9)$$

$$\mathcal{K}_{X_\gamma^t \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right]} \sim \mathcal{D}_{\gamma, j, m_j + \gamma_{ju} e_u}^t \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right] + \text{inv}(\mathcal{D}_{-\gamma, j, -m_j}^{t-1} \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right]) - \sum_{\substack{f=1, \dots, M \\ f \neq u}} X_{\gamma_{jf}}^t \left[\begin{smallmatrix} i, j_f \\ k, m_{j_f} \end{smallmatrix} \right], \quad (10)$$

где $\mathcal{K}_{X_\gamma^t \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right]}$ – канонический класс, $m^0, m^1 \in \Gamma_{\gamma, M}^{t-(k, \gamma)}$, $m_j \in \Gamma_{\gamma, M}^{t+1-(k, \gamma)}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Набор $\{X_\gamma^t, X_{-\gamma}^{-t-1}, \mathcal{D}_{\gamma,m}^t, \mathcal{D}_{-\gamma,m'}^{-t-1}\}$, $m \in \Gamma_\gamma^t$, $m' \in \Gamma_{-\gamma}^{-t-1}$, является набором спектральных данных, *совместимых* с периодом T в направлении γ , если пара $\{X_\gamma^t, X_{-\gamma}^{-t-1}\}$ является парой многообразий, совместимой с периодом T в направлении γ , и выполнены следующие условия на наборы эффективных конечных дивизоров $\mathcal{D}_{\gamma,m}^t \subset X_\gamma^t$, $\mathcal{D}_{-\gamma,m'}^{-t-1} \subset X_{-\gamma}^{-t-1}$:

$$\mathcal{D}_{\gamma,n}^{\pm(t+\frac{1}{2})-\frac{1}{2}} = \mathcal{D}_{\gamma,n+T(\gamma_f e_f - \gamma_g e_g)}^{\pm(t+\frac{1}{2})-\frac{1}{2}}, \quad (11)$$

$$\mathcal{K}_{X_\gamma^t} \sim \mathcal{D}_{\gamma,n+\gamma_u e_u}^t \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right] + \text{inv}(\mathcal{D}_{-\gamma,-n}^{-t-1}) - \sum_{\substack{f=1,\dots,N \\ f \neq u}} X_{n_f}^f, \quad (12)$$

$$\mathcal{D}_{\gamma,n^1} - \mathcal{D}_{\gamma,n^0} + Q_\gamma \left[\begin{smallmatrix} n^1 \\ n^0 \end{smallmatrix} \right] - Q_\gamma \left[\begin{smallmatrix} n^0 \\ n^1 \end{smallmatrix} \right] \sim 0 \quad (13)$$

при всех $n^0, n^1 \in \Gamma_{\gamma,N}^t$, $n \in \Gamma_{\gamma,N}^{t+1}$, $u, f, g = 1, \dots, N$ (здесь использована формула (9) при $j = (1, \dots, N)$).

Множество наборов данных, совместимых с периодом T , будем обозначать через $\mathfrak{M}_{T,N}^{\gamma,\text{simp}}$.

На пространстве операторов типа L действует калибровочная группа GG_T . А именно для любой T -периодической на решетке $\mathbb{Z}^N$ функции g , не обращающейся в 0 ни в каком узле этой решетки, определено отображение $F_g: F_g(L) = \tilde{L}$,

$$\tilde{a}_\varepsilon(r; n) = g(n)g(n - \varepsilon e_r)a_\varepsilon(r; n). \quad (14)$$

Это действие может быть ограничено на пространство пар операторов $L_\gamma^t, L_{-\gamma}^{-t-1}$. Факторпространства пар таких операторов по действию группы GG_T будем обозначать через $\mathfrak{L}_{T,N}^{\gamma,\text{simp}}$. Из лемм 1, 2 следует, что на всюду плотном подмножестве $\mathfrak{L}_{T,N}^{\gamma,\text{simp}}$ определено отображение $\mathfrak{D}: \mathfrak{L}_{T,N}^{\gamma,\text{simp}} \rightarrow \mathfrak{M}_{T,N}^{\gamma,\text{simp}}$, являющееся прямой спектральной задачей. Более того, отображение $\mathfrak{D}$ обратимо на образе $\mathfrak{D}(\mathfrak{L}_{T,N}^{\gamma,\text{simp}}) = \widetilde{\mathfrak{M}}_{T,N}^{\gamma,\text{simp}}$.

ТЕОРЕМА 1. *Отображение $\mathfrak{D}: \mathfrak{L}_{T,N}^{\gamma,\text{simp}} \rightarrow \widetilde{\mathfrak{M}}_{T,N}^{\gamma,\text{simp}}$ обратимо на некотором всюду плотном подмножестве $\widetilde{\mathfrak{M}}_{T,N}^{\gamma,\text{simp}}$. Отображение $\mathfrak{I} = \mathfrak{D}^{-1}$ может быть описано с помощью θ -функций кривых $X_\varepsilon \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right]$, $i, k \in \mathbb{Z}^{N-3}$, и лежащих на них дивизоров $\mathcal{D}_{\gamma,j,n_j}$.*

В случае $N = 3$ это утверждение доказано в [8]. Причем в этом случае имеется также равенство $\mathfrak{M}_{T,3}^{\gamma,\text{simp}} = \widetilde{\mathfrak{M}}_{T,3}^{\gamma,\text{simp}}$, т.е. отображение $\mathfrak{D}$ эпиморфно. В общем случае доказательство будет проводиться индукцией по N .

1.2. Доказательства. Выберем удобный базис $\{e_{\gamma,j,\cdot}^t \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right]\}$ в $V_{q,\gamma,j,M}^t \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right]$. Пусть $0 \leq p_r < T$, $r = 1, \dots, M$, тогда $e_{\gamma,j,a}^t \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right]$, $a = 1 + \sum_{b=1}^M p_b T^{M-b-1}$, однозначно определяется из условий

$$e_{\gamma,j,a}^t \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right](j) \in V_{q,\gamma,j}^t \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right], \quad e_{\gamma,j,a}^t \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right](j)(m) = \prod_{b=1}^{M-1} \delta_{\gamma_{j_b} p_b}^{m_b},$$

$0 \leq \gamma_{j_f} m_f < T$, $f = 1, \dots, M-1$. Матрицу оператора $L_{\gamma,j}^t \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right]$, записанную в базисах $\{e_{\gamma,j,\cdot}^{t+1-(\gamma_i,k)} \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right]\}$, $\{e_{\gamma,j,\cdot}^{t-(\gamma_i,k)} \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right]\}$, будем обозначать символом $\mathbf{M}_{\gamma,j}^t \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right](\lambda_j)$. Эта матрица имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}_{\gamma,\tilde{j}}^t \left[\begin{smallmatrix} i,j_1 \\ k,0 \end{smallmatrix} \right](\lambda_{\tilde{j}}) & \mathbf{D}_{\gamma,\tilde{j}}^t \left[\begin{smallmatrix} i,j_1 \\ k,\gamma_{j_1} \end{smallmatrix} \right] & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_{\gamma,\tilde{j}}^t \left[\begin{smallmatrix} i,j_1 \\ k,\gamma_{j_1} \end{smallmatrix} \right](\lambda_{\tilde{j}}) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{D}_{\gamma,\tilde{j}}^t \left[\begin{smallmatrix} i,j_1 \\ k,0 \end{smallmatrix} \right] \lambda_{j_1}^{\gamma_{j_1}} \lambda_{j_M}^{-\gamma_{j_M}} & 0 & \dots & \mathbf{M}_{\gamma,\tilde{j}}^t \left[\begin{smallmatrix} i,j_1 \\ k,\gamma_{j_1} \end{smallmatrix} \right](\lambda_{\tilde{j}}) \end{pmatrix},$$

где $\tilde{j} = (j_2, \dots, j_M)$ и $\mathbf{D}_{\gamma,\tilde{j}}^t \left[\begin{smallmatrix} i,j_1 \\ k,\cdot \end{smallmatrix} \right]$ – диагональная матрица с постоянными коэффициентами. Заметим, что $\{e_{\gamma,j,\cdot}^{t-(\gamma_j,k)} \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right](\lambda_j^{-1})\}$ является базисом в $V_{q,-\gamma_j,M}^{-t+(\gamma_j,k)} \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right](\lambda)$. Выпишем матрицу $\widehat{\mathbf{M}}_{-\gamma,j}^{-t} \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right](\lambda_j)$ оператора $L_{-\gamma,j}^{-t} \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right]$ в базисах $\{e_{\gamma,j,\cdot}^{t-(\gamma_j,k)} \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right](\lambda_j)\}$, $\{e_{\gamma,j,\cdot}^{t-(\gamma_j,k)-1} \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right](\lambda_j)\}$:

$$\begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{M}}_{-\gamma,\tilde{j}}^{-t} \left[\begin{smallmatrix} i,j_1 \\ k,0 \end{smallmatrix} \right](\lambda_{\tilde{j}}) & 0 & \dots & \widehat{\mathbf{D}}_{-\gamma,\tilde{j}}^{-t} \left[\begin{smallmatrix} i,j_1 \\ k,\gamma_{j_1} \end{smallmatrix} \right] \lambda_{j_M}^{\gamma_{j_M}} \lambda_{j_1}^{\gamma_{j_1}} \\ \widehat{\mathbf{D}}_{-\gamma,\tilde{j}}^{-t} \left[\begin{smallmatrix} i,j_1 \\ k,0 \end{smallmatrix} \right] & \widehat{\mathbf{M}}_{-\gamma,\tilde{j}}^{-t} \left[\begin{smallmatrix} i,j_1 \\ k,\gamma_{j_1} \end{smallmatrix} \right](\lambda_{\tilde{j}}) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \widehat{\mathbf{M}}_{-\gamma,\tilde{j}}^{-t} \left[\begin{smallmatrix} i,j_1 \\ k,\gamma_{j_1} \end{smallmatrix} \right](\lambda_{\tilde{j}}) \end{pmatrix},$$

здесь $\tilde{j} = (j_2, \dots, j_M)$, $\widehat{\mathbf{D}}_{-\gamma,\tilde{j}}^{-t} \left[\begin{smallmatrix} i,j_1 \\ k,\cdot \end{smallmatrix} \right]$ – диагональная матрица с постоянными коэффициентами. Индукцией по размерности, используя блочно-диагональную структуру матрицы, показываем, что

$$(\mathbf{M}_{\gamma,j}^t \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right](\lambda_j))^* = \mathbf{M}_{-\gamma,j}^{-t-1} \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right](\lambda_j^{-1}), \quad (15)$$

здесь $*$ – обозначение для операции транспонирования.

Положим $R_{\gamma,j}^t \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right](\lambda_j) = \det \mathbf{M}_{\gamma,j}^t \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right](\lambda_j)$, $\widehat{R}_{\gamma,j}^t \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right](\lambda_j) = \det \widehat{\mathbf{M}}_{\gamma,j}^t \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right](\lambda_j)$. Базис $\{e_{\gamma,j,\cdot}^{t-(\gamma_j,k)} \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right](\lambda_j)\}$ получается из $\{e_{-\gamma,j,\cdot}^{-t+(\gamma_j,k)} \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right](\lambda_j^{-1})\}$ четной перестановкой и последующим домножением на мономы вида λ_j^u , и нетрудно проверить, что имеет место равенство $\widehat{R}_{\gamma,j}^t \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right](\lambda_j) = R_{\gamma,j}^t \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right](\lambda_j)$. Последнее равенство вместе с (15) дает:

$$R_{\gamma,j}^t \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right](\lambda_j) = R_{-\gamma,j}^{-t-1} \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right](\lambda_j^{-1}). \quad (16)$$

Символом $G_\gamma^t \begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} (\lambda_j)$ будем обозначать однородный полином от $\lambda_{j_w}^{\gamma_{j_w}}$, $w = 1, \dots, M$, получаемый из $R_{\gamma,j}^t \begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix}$. Из определения многообразия $X_\gamma^t \begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix}$ следует, что оно задается уравнением $G_\gamma^t \begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} (\lambda_j) = 0$. Для последующих доказательств нам понадобятся некоторые свойства $G_\gamma^t \begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix}$ и $R_{\gamma,j}^t \begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix}$.

ЛЕММА 3. Для общего оператора L верно: $R_{\gamma,j}^t \begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} (\lambda_j)$ является полиномом от $\bar{\lambda}_u = \lambda_{j_u}^{\gamma_{j_u}} \lambda_{j_M}^{-\gamma_{j_M}}$, $u = 1, \dots, M-1$, и

$$\deg_{\bar{\lambda}_u} R_{\gamma,j}^t \begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} = T^{M-2}, \quad (17)$$

$$\deg G_\gamma^t \begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} (\bar{\lambda}_u) = T^{M-2}, \quad (18)$$

$$\deg \frac{\partial G_\gamma^t \begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} (\lambda_\varepsilon)}{\partial a(j_r; m)} = T^{M-2} \quad (19)$$

при $m_j = k$ (степень $\deg$ понимается как степень полинома от многих переменных или как степень гиперповерхности);

$$R_{\gamma,j}^t \begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} = R_{\gamma,j}^t \begin{smallmatrix} i \\ k+T(\gamma_{j_u} e_u - \gamma_{j_v} e_v) \end{smallmatrix}, \quad (20)$$

$u, v = 1, \dots, N-M$;

$$G_\gamma^t \begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} (\lambda_j) \big|_{\lambda_{j_u}^{\gamma_{j_u}}=0} = \prod_{r=0}^{T-1} G_\gamma^t \begin{smallmatrix} i, j_u \\ k, r \end{smallmatrix} (\lambda_{\tilde{j}}), \quad (21)$$

где $u = 1, \dots, M$, $\tilde{j} = (\lambda_1, \dots, \hat{\lambda}_u, \dots, \lambda_M)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формулы (21) и (17) для $u = j_1$ следуют непосредственно из вида матриц $\mathbf{M}_{\gamma,j}^t \begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix}$. Заметим, что

$$R_{\gamma,j}^t \begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} (\lambda_j) = R_{\gamma,\sigma(j)}^t \begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} (\lambda_{\sigma(j)}), \quad (22)$$

где $\sigma \in S_M$ – перестановка такая, что $\sigma(M) = M$. Из этой формулы следует выполнение (21) и (17) при произвольном u . Формула (20) следует из периодичности коэффициентов операторов L_γ^t . Теперь заметим, что из формулы (21) следует, что для общего оператора L_γ^t свободный член $R_{\gamma,j}^t \begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix}$ не равен нулю и линейно зависит от $a_\varepsilon(j_r; m)$. Из этого факта и формул (22), (17) следуют формулы (18), (19).

Пусть $X_\gamma^t(L) \subset \mathbb{P}_\lambda^{N-1}$ – спектральное многообразие оператора L_γ^t , тогда в этих обозначениях верна

ЛЕММА 4. Для γ , t верно $\bigcap_L X_\gamma^t(L) = \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем индукцию по N . При $N = 3$ из результатов [8] следует эпиморфность $\mathfrak{D}$, а следовательно, и утверждение леммы.

Фиксируем произвольные числа $1 \leq r \leq N$, $k \in \mathbb{Z}$, $\mu \in \mathbb{C}^*$ и заметим, что если нам даны два оператора L и $\tilde{L}$ такие, что $a_\varepsilon(u; n) = \tilde{a}_\varepsilon(u; n)$ при $n_r \neq k \pmod{T}$ и $\tilde{a}_\varepsilon(u; n) = \mu a_\varepsilon(u; n)$ при $n_r = k \pmod{T}$, то отображение $\varphi_\mu^r: \mathbb{P}_{\gamma, \lambda}^{N-1} \rightarrow \mathbb{P}_{\gamma, \lambda}^{N-1}$, $\varphi_\mu(\lambda)_s = \lambda_s \mu^{\delta_s^r}$, $s = 1, \dots, N$ (это отображение растягивает r -ю координату), устанавливает взаимно однозначное соответствие между $X_\gamma^t(\tilde{L})$ и $X_\gamma^t(L)$. Следовательно, если $\lambda \in \bigcap_L X_\gamma^t(L)$, то $\varphi_\mu^r(\lambda) \in \bigcap_L X_\gamma^t(L)$ для произвольных r, μ . Таким образом, получаем $\bigcap_L X_\gamma^t(L) \subset \bigcap_L X_\gamma^{t, \infty}(L)$. Далее мы можем применить предположение индукции, так как $X_\gamma^{t, \infty}(L)$ является объединением спектральных многообразий операторов $L_\gamma^t[\frac{z}{w}]$.

ЛЕММА 5. Для общего оператора L спектральные многообразия $X_\gamma^t[\frac{i}{k}]$ являются гладкими неприводимыми проективными многообразиями и для произвольных i, k, t, γ выполнены следующие неравенства:

$$\frac{\partial G_\gamma^t[\frac{i, z}{k, u}]}{\partial a_{\gamma_{j_r}}(j_r; m)} \Big|_{X_\gamma^t[\frac{i, z}{k, u}]} \neq 0 \quad (23)$$

при любых $z, u, r \in \mathbb{Z}$, $j_r \neq z$ и $m_i = k$, $m_z = u$, $m \in \Gamma_\gamma^t$;

$$\frac{\partial G_\gamma^t[\frac{i}{k}]}{\partial a(j_w; m)} \lambda_{j_v}^{-\gamma_{j_v}} \Big|_{X_\gamma^t[\frac{i, j_v}{k, a}]} \neq 0 \quad (24)$$

при любых $m \in \Gamma_\gamma^t$, $m_i = k$, $v, w, a \in \mathbb{Z}$ таких, что либо $w = v$, либо $a \neq m_{j_v}$;

$$X_\gamma^t[\frac{i, z}{k, u}] \neq X_\gamma^t[\frac{i, z}{k, u'}] \quad (25)$$

при любых $z, u, u' \in \mathbb{Z}$, $u \neq u' \pmod{T}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае $N = 3$ эта лемма доказана в [8]: эпиморфность и инъективность отображения $\mathfrak{D}$ влечет все что нужно. В общем случае доказательство проводится по индукции.

Неравенство (25) следует из леммы 4.

Докажем, что для общего L спектральное многообразие $X_\gamma^t[\frac{i}{k}]$ — гладкое неприводимое проективное многообразие. Действительно, полиномы $G_\gamma^t[\frac{i}{k}]$ линейно зависят от коэффициентов $a_\varepsilon(u, n)$, т.е. $X_\gamma^t[\frac{i}{k}](L)$ образуют линейную систему дивизоров. Теорема Бертини о линейных системах утверждает, что общий

член линейной системы не имеет особых точек вне базисного множества, т.е. если $z(L) \in \text{Sing } X_\gamma^t[k^i](L)$ для общего L , то $z(L) \in X_\gamma^t[k^i](L')$ для всех L' . Таким образом, лемма 4 завершает доказательство неособости. Так как приводимая проективная гиперповерхность имеет особенности в точках пересечения своих неприводимых компонент, то $X_\gamma^t[k^i](L)$ неприводим для общего L .

Докажем (23) индукцией по N . Пусть существуют $\gamma, z, u, r, t \in \mathbb{Z}$, $m \in \Gamma_{\gamma, N}^t$,

$m_i = k$, $j_r \neq z$ такие, что $\frac{\partial G_\gamma^t[k, u]^{i, z}}{\partial a_{\gamma_{j_r}}(j_r; m)} \Big|_{X_\gamma^t[k, u]^{i, z}} \equiv 0$. Пусть $x \neq z$, тогда из (21) следует:

$$\frac{\partial G_\gamma^t[k, u]^{i, z}}{\partial a_{\gamma_{j_r}}(j_r; m)} \Big|_{X_\gamma^t[k, u]^{z, x}} = \frac{\partial G_\gamma^t[k, u, m_x]^{i, z, x}}{\partial a_{\gamma_{j_r}}(j_r; m)} \prod_{w \neq m_x} G_\gamma^t[k, u, w]^{i, z, x} \Big|_{X_\gamma^t[k, u]^{z, x}} \equiv 0. \quad (26)$$

Так как для общего L верно (25), то из (26) следует $\frac{\partial G_\gamma^t[k, u, m_x]^{i, z, x}}{\partial a_{\gamma_{j_r}}(j_r; m)} \Big|_{X_\gamma^t[k, u]^{z, x}} \equiv 0$,

а это противоречит предположению индукции. Неравенство (24) доказывается аналогично.

Заметим, что лемма 1 является следствием формул (18), (21) и леммы 5.

Из построения матриц $\mathbf{M}_\gamma^t[k^i]$ следует формула:

$$\frac{\partial G_\gamma^t[k^i]}{\partial a_{\gamma_{j_u}}(j_u; n)} \Big/ \frac{\partial G_\gamma^t[k^i]}{\partial a_{\gamma_{j_v}}(j_v; n)} = \frac{\partial R_{\gamma, j}^t[k^i]}{\partial a_{\gamma_{j_u}}(j_u; n)} \Big/ \frac{\partial R_{\gamma, j}^t[k^i]}{\partial a_{\gamma_{j_v}}(j_v; n)} = \frac{\psi_\gamma^{t+1}[k^i](n_j + \gamma_{j_u} e_u)}{\psi_\gamma^{t+1}[k^i](n_j + \gamma_{j_v} e_v)}, \quad (27)$$

где $n_i = k$, $n \in \Gamma_{\gamma, N}^t$.

ЛЕММА 6. Для общего L и произвольных $z, u, v, w \in \mathbb{Z}$ верно:

$$\text{ord}_{X_\gamma^t[k, u]^{i, z}} \frac{\psi_\gamma^{t+1}[k^i](m + \gamma_{j_v} e_v)}{\psi_\gamma^{t+1}[k^i](m + \gamma_{j_w} e_w)} = \delta_{u, m_z} (\delta_{j_v, z} - \delta_{j_w, z}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала случай $z \neq j_v, j_w$. Распишем формулу (27) с помощью (21) и с учетом (25):

$$\begin{aligned} \frac{\psi_\gamma^{t+1}[k^i](m + \gamma_{j_v} e_v)}{\psi_\gamma^{t+1}[k^i](m + \gamma_{j_w} e_w)} \Big|_{X_\gamma^t[k, u]^{i, z}} &= \frac{\partial G_\gamma^t[k^i]}{\partial a_{\gamma_{j_v}}(j_v; m)} \Big/ \frac{\partial G_\gamma^t[k^i]}{\partial a_{\gamma_{j_w}}(j_w; m)} \Big|_{X_\gamma^t[k, u]^{i, z}} \\ &= \frac{\partial G_\gamma^t[k, u]^{i, z}}{\partial a_{\gamma_{j_v}}(j_v; m)} \Big/ \frac{\partial G_\gamma^t[k, u]^{i, z}}{\partial a_{\gamma_{j_w}}(j_w; m)} \Big|_{X_\gamma^t[k, u]^{i, z}}. \end{aligned} \quad (28)$$

Теперь утверждение очевидным образом следует из (23).

Рассмотрим теперь случай $z = j_v$ (случай $z = j_w$ разбирается аналогично). Пусть $\bar{\lambda}_s = \lambda_{j_s}^{\gamma_{j_s}} \lambda_{j_N}^{-\gamma_{j_N}}$, $s = 1, \dots, M-1$. В силу (25) существует $g \neq v$ такое, что

$\frac{\partial R_{\gamma}^t[\frac{i}{k}](j)}{\partial \bar{\lambda}_g} \Big|_{\bar{\lambda}_v=0} \neq 0$, следовательно, $\bar{\lambda}_1, \dots, \widehat{\bar{\lambda}_g}, \dots, \bar{\lambda}_{M-1}$ являются координатами на $X_{\gamma}^t[\frac{i}{k}]$ в окрестности $X_{\gamma}^t[\frac{i,z}{k,u}]$ и в этих координатах $X_{\gamma}^t[\frac{i,z}{k,u}]$ задается уравнением $\bar{\lambda}_v = 0$. Используя (27) и (21), выпишем разложение в терминах этих координат:

$$\frac{\psi_{\gamma}^{t+1}[\frac{i}{k}](m + \gamma_{j_v} e_v)}{\psi_{\gamma}^{t+1}[\frac{i}{k}](m + \gamma_{j_w} e_w)} = \frac{\partial R_{\gamma,j}^t[\frac{i}{k}]}{\partial a_{\gamma_z}(z; m)} \Big/ \frac{\partial R_{\gamma,j}^t[\frac{i}{k}]}{\partial a_{\gamma_{j_w}}(j_w; m)} = \left(\frac{R_{\gamma,j}^t[\frac{i}{k}]}{\partial a_{\gamma_z}(z; m)} \bar{\lambda}_v^{-1} \right) \times \bar{\lambda}_v \left(\frac{\partial R_{\gamma}^t[\frac{i,z}{k,m_z}](\tilde{j})}{\partial a_{\gamma_{j_w}}(j_w; m)} (R_{\gamma}^t[\frac{i,z}{k,m_z}](\tilde{j}))^{-1} \prod_{r=0}^{T-1} R_{\gamma}^r[\frac{i,z}{k,u}](\tilde{j}) + \bar{\lambda}_v Q(\lambda) \right)^{-1},$$

где $\tilde{j} = (j_1, \dots, \widehat{j_v}, \dots, j_M)$. Так как из (24) следует

$$\text{ord}_{X_{\gamma}^t[\frac{i,z}{k,u}]} Q(\lambda) = \text{ord}_{X_{\gamma}^t[\frac{i,z}{k,u}]} \frac{\partial R_{\gamma,j}^t[\frac{i}{k}]}{\partial a_{\gamma_z}(z; m)} \bar{\lambda}_v^{-1} = 0,$$

то элементарным анализом полученной формулы в окрестности $\bar{\lambda}_v = 0$ получаем утверждение леммы.

Определим конечный дивизор $\mathcal{D}_{\gamma,m}^t[\frac{i}{k}] \subset X_{\gamma,m}^t[\frac{i}{k}]$ формулой:

$$\mathcal{D}_{\gamma,m}^t[\frac{i}{k}] = \sum_{\mathcal{C}} \mathcal{C} \max_{m' \in \Gamma_{\gamma,M}^{t-(\gamma,k)}} \text{ord}_{\mathcal{C}} \frac{\psi_{\gamma}^{t+1}[\frac{i}{k}](m)}{\psi_{\gamma}^{t+1}[\frac{i}{k}](m')},$$

где суммирование идет по всем конечным дивизорам. Из определения следует, что $\mathcal{D}_{\gamma,n}^t[\frac{i}{k}] > 0$ (при $m = m'$), а из леммы 6 следует выполнение формул (8)–(10).

Заметим, что из (28) вытекает равенство

$$\frac{\psi_{\gamma}^{t+1}[\frac{i}{k}](n'_j)}{\psi_{\gamma}^{t+1}[\frac{i}{k}](n_j)} = \frac{\psi_{\gamma}^{t+1}(n')}{\psi_{\gamma}^{t+1}(n)} \Big|_{X_{\gamma}^t[\frac{i}{k}]}, \quad (29)$$

а из (9) и (7), (8) следует, что

$$Q_{\gamma}^t[\frac{i}{k}][\frac{n'_j}{n_j}] = Q_{\gamma}^t[\frac{n'}{n}] \cap X_{\gamma}^t[\frac{i}{k}], \quad (30)$$

$$\mathcal{D}_{\gamma,j,n_j}^t[\frac{i}{k}] = \mathcal{D}_{\gamma,n}^t \cap X_{\gamma}^t[\frac{i}{k}] \quad (31)$$

при $n, n' \in \Gamma_{\gamma,N}^t$, $n_i = n'_i = k$.

Далее в тексте используется следующее обозначение: $\sigma_\gamma^t \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right](m, m')$ – алгебраическое дополнение к $(M_{\gamma,j}^t \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right])_{u,w}$, где $u = 1 + \sum_{b=1}^{M-1} m_b T^{M-b-1}$ и $w = 1 + \sum_{b=1}^{M-1} m'_b T^{M-b-1}$, $0 \leq m_f, m'_f < T$, $f = 1, \dots, M-1$. Введем определение дивизора $\mathcal{E}_\gamma^t \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right] \subset X_\gamma^t \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right]$:

$$\mathcal{E}_\gamma^t \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right] = \sum_{\mathcal{C}} \mathcal{C} \min_{m, m'} (\text{ord}_{\mathcal{C}} \sigma_\gamma^t \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right](m, m')),$$

где суммирование идет по всем конечным дивизорам.

Пусть $\Omega_{\gamma;j;n;u;r}^t \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right]$ – мероморфный дифференциал на $X_\gamma^t \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right]$:

$$\Omega_{\gamma;j;n;u;r}^t \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right] = \frac{\partial R_{\gamma,j}^t \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right]}{\partial a_{\gamma_u}(u; n)} \frac{\bigwedge_{g \neq r} d\bar{\lambda}_g}{\prod_{s=1}^{M-1} \bar{\lambda}_s} \left(\frac{\partial R_{\gamma,j}^t \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right]}{\partial \bar{\lambda}_{j_r}} \right)^{-1},$$

$n \in \Gamma_{\gamma,N}^{t+1}$, $n_i = k$, $u \in \{j_1, \dots, j_M\}$, $\bar{\lambda}_s = \lambda_{j_s}^{\gamma_{j_s}} \lambda_{j_M}^{-\gamma_{j_M}}$.

ЛЕММА 7. Для общего оператора L верно:

$$\Omega_{\gamma;j;n;u;r}^t \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right] = C(r, r') \Omega_{\gamma;j;n;u;r'}^t \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right], \quad (32)$$

$$\Omega_{\gamma;j;n;u;r}^t \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right] = C(\sigma) \sigma^* (\Omega_{\gamma;\sigma(j);n;u;\sigma(r)}^t \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right]), \quad (33)$$

где $\sigma \in S_M$ – перестановка, $\sigma: \mathbb{P}_{\gamma,\lambda}^{M-1} \rightarrow \mathbb{P}_{\gamma,\mu}^{M-1}$, $\lambda_i = \sigma^*(\mu_{\sigma(i)})$, $\sigma(j) = (j_{\sigma(1)}, \dots, j_{\sigma(M)})$, $C(\sigma) = \pm 1$, $C(r, r') = \pm 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формула (32) получается домножением

$$\sum_{w=1}^{M-1} \frac{\partial R_{\gamma,j}^t}{\partial \bar{\lambda}_w} d\bar{\lambda}_w \equiv 0$$

на $d\bar{\lambda}_1 \wedge \dots \wedge \widehat{d\bar{\lambda}_r} \wedge \dots \wedge \widehat{d\bar{\lambda}_{r'}} \wedge \dots \wedge d\bar{\lambda}_{M-1}$.

Если $\sigma(M) = M$, то доказательство (33) тривиально. Пусть это не так, тогда

$$\bar{\lambda}_{\sigma^{-1}(M)} = \frac{1}{\bar{\mu}_{\sigma(M)}}, \quad \bar{\lambda}_w = \sigma^* \left(\frac{\bar{\mu}_{\sigma(w)}}{\bar{\mu}_{\sigma(M)}} \right), \quad w = 1, \dots, \sigma^{-1}(M), \dots, M-1.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial R_{\gamma,\sigma(j)}^t \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right]}{\partial \bar{\mu}_{\sigma(r)}} = (\bar{\mu}_{\sigma(M)})^{T^{M-1}-1} \frac{\partial R_{\gamma,\sigma(j)}^t \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right] (\bar{\mu}_1 / \bar{\mu}_{\sigma(M)}, \dots, \bar{\mu}_{M-1} / \bar{\mu}_{\sigma(M)})}{\partial (\bar{\mu}_{\sigma(r)} / \bar{\mu}_{\sigma(M)})}.$$

Подставляя полученную формулу в выражение для $\sigma^* (\Omega_{\gamma;\sigma(j);n;u;\sigma(r)}^t \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right])$ и учитывая формулу (19), получаем (33).

Нас будет интересовать класс пропорциональности дифференциала $\Omega_{\gamma;j;n;u;r}^t \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right]$, поэтому мы будем иногда опускать индексы r, j . Для этого класса пропорциональности верно следующее утверждение.

ЛЕММА 8. Для общего L верно:

$$(\Omega_{\gamma;n;j_u}^t \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right]) \sim \mathcal{E}_{\gamma}^t \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right] + \mathcal{D}_{\gamma;j,n_j+\gamma_{j_u}}^t e_u \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right] + \text{inv}(\mathcal{D}_{-\gamma;j,-n_j}^{-t-1} \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right]) - \sum_{\substack{f=1,\dots,M \\ f \neq u}} X_{\gamma}^t \left[\begin{smallmatrix} i, j_f \\ k, n_{j_f} \end{smallmatrix} \right], \quad (34)$$

где $n \in \Gamma_{\gamma}^{t+1}$, $n_i = k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Исследуем поведение дифференциала $\Omega_{\gamma;n;j_u}^t \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right]$ в окрестности множества $X_{\gamma}^{t,\infty} \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right]$. Из формулы (33) следует, что достаточно исследовать поведение $\Omega_{\gamma;n;j_u;r}^t \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right](j)$ в окрестностях множеств $\bar{\lambda}_w = 0$, $w = 1, \dots, M-1$.

Из (25) следует существование $r \neq w$ такого, что $\frac{\partial R_{\gamma,j} \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right]}{\partial \bar{\lambda}_r} \Big|_{X_{\gamma}^t \left[\begin{smallmatrix} i, j_w \\ k, z \end{smallmatrix} \right]} \neq 0$, и, следовательно,

$$\text{ord}_{X_{\gamma}^t \left[\begin{smallmatrix} i, j_w \\ k, z \end{smallmatrix} \right]} \Omega_{\gamma;j;j_u;r}^t = \text{ord}_{X_{\gamma}^t \left[\begin{smallmatrix} i, j_w \\ k, z \end{smallmatrix} \right]} \frac{\partial R_{\gamma,j} \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right]}{\partial a_{\gamma_{j_u}}(n; j_u)} \frac{\bigwedge_{g \neq r} d\bar{\lambda}_g}{\prod_{s=1}^M \bar{\lambda}_s}. \quad (35)$$

Пусть $w \neq u$, тогда в координатах $\bar{\lambda}_1, \dots, \widehat{\bar{\lambda}_r}, \dots, \bar{\lambda}_{M-1}$ имеет место разложение:

$$\frac{\partial R_{\gamma,j} \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right]}{\partial a_{\gamma_{j_u}}(n; j_u)} = \frac{\partial R_{\gamma,\tilde{j}} \left[\begin{smallmatrix} i, j_w \\ k, n_{j_w} \end{smallmatrix} \right]}{\partial a_{\gamma_{j_u}}(n; j_u)} (R_{\gamma,\tilde{j}} \left[\begin{smallmatrix} i, j_w \\ k, n_{j_w} \end{smallmatrix} \right])^{-1} \prod_{z=0}^{T-1} R_{\gamma,\tilde{j}} \left[\begin{smallmatrix} i, j_w \\ k, z \end{smallmatrix} \right] + \bar{\lambda}_w Q(\lambda),$$

где $\tilde{j} = (j_1, \dots, \widehat{j_w}, \dots, j_M)$. Из (24) следует, что $\text{ord}_{X_{\gamma}^t \left[\begin{smallmatrix} i, j_w \\ k, z \end{smallmatrix} \right]} Q(\lambda) = 0$ при $z \neq$

$n_{j_w} \pmod{T}$, а из (23) — что $\text{ord}_{X_{\gamma}^t \left[\begin{smallmatrix} i, j_w \\ k, n_{j_w} \end{smallmatrix} \right]} \frac{\partial R_{\gamma,\tilde{j}} \left[\begin{smallmatrix} i, j_w \\ k, n_{j_w} \end{smallmatrix} \right]}{\partial a_{\varepsilon}(n; j_u)} = 0$. Следовательно,

$$\text{ord}_{X_{\gamma}^t \left[\begin{smallmatrix} i, j_w \\ k, z \end{smallmatrix} \right]} \Omega_{\gamma;j;n;j_u;r}^t \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right](j) = -\delta_{z, n_{j_w}}.$$

При $w = u$ соотношение (24) имеет вид $\text{ord}_{X_{\gamma}^t \left[\begin{smallmatrix} i, j_w \\ k, z \end{smallmatrix} \right]} \frac{\partial R_{\gamma,j} \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right]}{\partial a_{\gamma_{j_u}}(n; j_u)} (\bar{\lambda}_u)^{-1} = 0$, и с учетом (35) получаем

$$\text{ord}_{X_{\gamma}^t \left[\begin{smallmatrix} i, j_u \\ k, z \end{smallmatrix} \right]} \Omega_{\gamma;j;n;j_u;r}^t \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right] = 0.$$

Таким образом, доказана формула:

$$(\Omega_{\gamma;n;j_u}^t \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right]) \sim \widetilde{\mathcal{D}} - \sum_{\substack{f=1,\dots,M \\ f \neq u}} X_{\gamma}^t \left[\begin{smallmatrix} i, j_f \\ k, n_{j_f} \end{smallmatrix} \right],$$

где $\widetilde{\mathcal{D}} > 0$ — конечный дивизор.

В силу T -периодичности оператора L можем считать $0 \leq n_f < T$, $f = 1, \dots, N$. Пусть $\mathcal{C} \subset X_\gamma^t[k]^i$, $\dim X_\gamma^{t,\infty}[k]^i \cap \mathcal{C} \leq M - 4$. Из гладкости $X_\gamma^t[k]^i$ следует,

что дифференциал $\frac{\bigwedge_{g \neq r} d\bar{\lambda}_g}{\prod_{u=1}^{M-1} \lambda_u^{(M)}} \left(\frac{\partial R_\varepsilon[k]^i(j)}{\partial \lambda_r^{(M)}} \right)^{-1}$ голоморфен на $X_\gamma^{t,\text{aff}}[k]^i$. Так как

$$\frac{\partial R_{\gamma,j}[k]^i}{\partial a_{\gamma_{j_u}}(j_u; n)} = \lambda^l \sigma_\gamma^t[k]^i(n_j, n_j + \gamma_{j_u} e_u) \text{ и выполнено (15), то}$$

$$\begin{aligned} & \text{ord}_{\mathcal{C}}(\tilde{\mathcal{D}} - \mathcal{D}_{\gamma, n_j + \gamma_{j_u} e_u}^t[k]^i - \text{inv}(\mathcal{D}_{-\gamma, -n_j}^t[k]^i)) \\ &= \min_{n', n''} \text{ord}_{\mathcal{C}} \left(\frac{\psi_\varepsilon[k]^i(n')}{\psi_\gamma^{t+1}[k]^i(n_j + \gamma_{j_u} e_u)} \frac{\psi_{-\gamma}^{-t}[k]^i(n'')}{\psi_{-\gamma}[k]^i(-n_j)} \sigma_\gamma^t[k]^i(n_j, n_j + \gamma_{j_u} e_u) \right) \\ &= \min_{n'', n'} \text{ord}_{\mathcal{C}} \left(\frac{\sigma_\gamma^t[k]^i(n'', n')}{\sigma_\gamma^t[k]^i(n'', n_j + \gamma_{j_u} e_u)} \frac{\sigma_\gamma^t[k]^i(n'', n_j + \gamma_{j_u} e_u)}{\sigma_\gamma^t[k]^i(n_j, n_j - \gamma_{j_u} e_u)} \right. \\ & \quad \left. \times \sigma_\gamma^t[k]^i(n_j, n_j + \gamma_{j_u} e_u) \right) \\ &= \min_{n'', n'} \text{ord}_{\mathcal{C}} \sigma_\gamma^t[k]^i(n'', n') = \text{ord}_{\mathcal{C}} \mathcal{E}_\gamma^t[k]^i. \end{aligned}$$

ЛЕММА 9. Для общего L верно: $\mathcal{E}_\gamma^t[k]^i = 0$ при любых i, k, γ, t .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формул (7), (31), (34) и формулы присоединения следует:

$$\mathcal{E}_\gamma^t[k]^i = \mathcal{E}_\gamma^t \cap X_\gamma^t[k]^i. \quad (36)$$

Доказательство получается индукцией по N . При $N = 3$ утверждение доказано в [8]. Если $\mathcal{E}_\gamma^t[k]^i \neq 0$, то по формуле (36) и свойствам проективных многообразий (любое многообразие размерности более нуля пересекает гиперплоскость) имеем $\mathcal{E}_\gamma^t[k, u]^i \neq 0$, что противоречит предположению индукции.

Лемма 2 является непосредственным следствием лемм 9, 8.

ЛЕММА 10. Если $\{X_\gamma^t, \mathcal{D}_{\gamma, n}^t, X_{-\gamma}^{-t-1}, \mathcal{D}_{-\gamma, n'}^{-t-1}\} \in \mathfrak{M}_{N, T}^{\gamma, \text{simp}}$, то

$$\{X_\gamma^t[k]^i, \mathcal{D}_{\gamma, n_j}^t[k]^i, X_{-\gamma}^{-t-1}[k]^i, \mathcal{D}_{-\gamma, -n'_j}^{-t-1}[k]^i\} \in \mathfrak{M}_{M, T}^{\gamma_j, \text{simp}},$$

где $\mathcal{D}_{\pm\gamma, \cdot}^t[k]^i$ определено формулой (31).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать утверждение при $M = N - 1$, общее утверждение получается индукцией. Итак, считаем $M = N - 1$, $i = i_1 \in \mathbb{Z}$. Заметим, что формула присоединения дает нам:

$$\mathcal{K}_{X_\gamma^t[k]^i} = (\mathcal{K}_{X_\gamma^t} + X_\gamma^t[k]^i) \cap X_\gamma^t[k]^i. \quad (37)$$

Подставляя формулу (12) в (37) и используя (31), (7), получаем:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{X_\gamma^t[k]^i} &= \left(\mathcal{D}_{\gamma, n_j + \gamma_{ju} e_u}^t + \text{inv}(\mathcal{D}_{-\gamma, -n_j}^{-t-1}) - \sum_{\substack{f=1, \dots, N \\ f \neq j_u}} X_\gamma^t[n_f]^f + X_\gamma^t[k]^i \right) \cap X_\gamma^t[k]^i \\ &= \mathcal{D}_{\gamma, n_j + \gamma_{ju} e_u}^t[k]^i + \mathcal{D}_{-\gamma, -n_j}^t[k]^i - \sum_{\substack{f=1, \dots, N \\ f \neq j_u, i_1}} X_\gamma^t[n_f, k_1]^{f, i_1}. \end{aligned}$$

Доказательство необходимых свойств $\mathcal{D}_{-\gamma}^{-t-1}[k]^i$ проводится аналогично.

Выполнение условия (13) тривиально следует из (30), (7).

В двумерном случае метод решения обратной спектральной задачи для операторов на квадратной решетке (решение обратной задачи рассеяния эквивалентно построению отображения $\mathfrak{J}$) предложен в [6]. В работе [8] этот метод модифицирован для операторов на симплицальной решетке. В общем случае решение обратной задачи сводится к решению большого числа обратных задач для двумерных операторов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Для собственной функции ψ_γ^{t+1} , $L_\gamma^t \psi_\gamma^{t+1} = 0$, верно:

$$\frac{a_{\gamma_{j_1}}(j_1; m)}{a_{\gamma_{j_2}}(j_2; m)} = - \frac{\psi_\gamma^{t+1}[k]^i(m + \gamma_{j_2} e_2)}{\psi_\gamma^{t+1}[k]^i(m + \gamma_{j_1} e_1)}, \quad (38)$$

$i, k \in \mathbb{Z}^{N-2}$ (т.е. $M = 2$), $m_i = k$. Учитывая равенство $a_\varepsilon(w; m) = a_{-\varepsilon}(w; m + \varepsilon e_w)$ и уравнение, аналогичное (38) для $\psi_{-\gamma}^{-t}[k]^i$, получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{a_{\gamma_{j_1}}(u; m + \gamma_{j_2} e_{j_2} - \gamma_{j_1} e_{j_1})}{a_{\gamma_{j_1}}(u; m)} &= \frac{\psi_\gamma^{t+1}[k]^i(m_j + \gamma_{j_1} e_1)}{\psi_\gamma^{t+1}[k]^i(m_j + \gamma_{j_2} e_2)} \\ &\quad \times \frac{\psi_{-\gamma}^{-t}[k]^i(m_j)}{\psi_{-\gamma}^{-t}[k]^i(m_j - \gamma_{j_1} e_1 + \gamma_{j_2} e_2)}. \end{aligned} \quad (39)$$

Пусть $\mathfrak{m} = \{X_\gamma^t, \mathcal{D}_{\gamma, n}^t; X_{-\gamma}^{-t-1}, \mathcal{D}_{-\gamma, n'}^{-t-1}\} \in \widetilde{\mathfrak{M}}_{N, T}^{\gamma, \text{simp}}$, т.е. $\mathfrak{m} = \mathfrak{D}(\widetilde{L})$ для некоторого $\widetilde{L}$. Выберем функции $\psi_\gamma^{t+1}(n) \in \mathcal{M}_{X_\gamma^t}$, $n \in \Gamma_{\gamma, N}^{t+1}$, $\psi_{-\gamma}^{-t}(n') \in \mathcal{M}_{X_{-\gamma}^{-t-1}}$,

$n' \in \Gamma_{-\gamma, N}^{-t}$, так, чтобы выполнялось (8) и построенные функции были T -квазипериодичны с множителями Флоке λ_i . Очевидно, что $\mathfrak{m}$ определяет функции с точностью до константы, точнее,

$$\frac{\psi_{\gamma}^{t+1}(n)}{\psi_{\gamma}^{t+1}(n')} = \frac{C(n)\tilde{\psi}_{\gamma}^{t+1}(n)}{C(n')\tilde{\psi}_{\gamma}^{t+1}(n')}, \quad (40)$$

где $\tilde{\psi}_{\gamma}^{t+1}(\cdot)$ — собственная функция оператора $\tilde{L}$. Для $\psi_{-\gamma}^{-t}$ верна аналогичная формула. Нетрудно видеть, что система уравнений (38), (39) имеет единственное с точностью до коэффициента пропорциональности решение (уравнения системы позволяют выразить все $a_{\varepsilon}(u; n)$ через $a_{\varepsilon_0}(u_0; n_0)$ для фиксированных ε_0, u_0, n_0). Единственная сложность — это доказательство совместности этой системы, но в силу (40) оператор $\tilde{L}$, откалиброванный константами $C(\cdot)$, дает решение нашей системы. Таким образом, доказана обратимость $\mathfrak{D}$.

Теперь заметим, что функции $\frac{\psi_{\gamma}^{t+1}[\frac{i'}{k'}](n)}{\psi_{\gamma}^{t+1}[\frac{i'}{k'}](\hat{n})}$ (соответственно $\frac{\psi_{-\gamma}^{-t}[\frac{i'}{k'}](n)}{\psi_{-\gamma}^{-t}[\frac{i'}{k'}](\hat{n})}$), где $i', k' \in \mathbb{Z}^{N-3}$, в силу леммы 10 являются разностными аналогами функции Бейкера–Ахизера, введенными в работе [8], и, следовательно, могут быть выписаны явно в терминах θ -функций кривых $X_{\gamma}^{t+1}[\frac{i'}{k'}]$ (соответственно $X_{-\gamma}^{-t-1}[\frac{i'}{k'}]$) и дивизоров $\mathcal{D}_{\gamma}^t$ (соответственно $\mathcal{D}_{-\gamma}^{-t-1}$). А из формул (38), (39), (29) следует, что коэффициенты оператора $L = \mathfrak{I}(\mathfrak{m})$ тоже можно выписать в тех же терминах.

§ 2. Октаэдральные операторы

Случай октаэдральных операторов во многом аналогичен уже разобранному случаю симплициальных операторов. Доказательства для этого случая получаются незначительной модификацией доказательств из предыдущего параграфа или сведением к уже доказанным для симплициальных операторов утверждениям. В этом параграфе приняты те же соглашения относительно обозначений, что и в § 1, но также добавлены некоторые новые.

Символом $\Gamma_{\delta, N}$ обозначим решетку $\Gamma_{\delta, N} = \{\xi \in \mathbb{Z}^N : \sum_{r=1}^N \xi_r = \delta \pmod{2}\}$, $\delta = 0, 1$. Символ V_N обозначает пространство на решетке $\mathbb{Z}^N$, $V_{\delta, N} \subset V_N$ — пространство функций с носителем в $\Gamma_{\delta, N}$. Символ δ (безо всяких индексов) обычно обозначает либо 0, либо 1. В этом разделе нам придется работать с таким объектом, как многогранник Ньютона: если $P = \sum_{m \in \mathbb{Z}^K} b_m \mu^m$ — некоторый полином Лорана, то $\Delta(P) \subset \mathbb{Z}^K$ — выпуклая оболочка точек $m \in \mathbb{Z}^K$ таких, что $b_m \neq 0$, — называется *многогранником Ньютона* полинома Лорана P . Символом $\Xi_N \subset \mathbb{Z}^N$ будем обозначать стандартный октаэдр с вершинами $\pm e_f$, $f = 1, \dots, N$.

Как и в § 1, L имеет T -периодические коэффициенты. Здесь мы предполагаем, что T чётно, а в последнем пункте мы предполагаем, что $T/2$ нечётно.

2.1. Формулировка основной теоремы.

Пусть $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_M) \in (\mathbb{C}^*)^{M-1}$, тогда

$$V_{q, \delta, N}(\lambda) = \{\psi_{\delta} \in V_{\delta, N} : \psi(n + Te_v) = \lambda_v \psi_{\delta}(n), u = 1, \dots, N\}.$$

Так как сдвиг на период не смешивает узлы решетки $\Gamma_{0,N}$ с узлами решетки $\Gamma_{1,N}$, то имеем разложение $V_{q,N}(\lambda) = V_{q,0,N} \oplus V_{q,1,N}$, $V_{q,\delta,N} = V_{\delta,N} \cap V_{q,N}$. Это разложение индуцирует разложение $L|_{V_{q,N}} = L_0 \oplus L_1$, где $L_0: V_{q,0,N} \rightarrow V_{q,1,N}$, $L_1: V_{q,1,N} \rightarrow V_{q,0,N}$. Пусть

$$X_{\delta}^{\text{aff}} = \{\lambda \in (\mathbb{C}^*)^N : \ker L_{\delta} \cap V_{q,\delta,N}(\lambda) \neq 0\},$$

тогда множество $X^{\text{aff}} = X_0^{\text{aff}} \cup X_1^{\text{aff}}$ будем называть *аффинной частью спектрального многообразия* оператора L .

Многообразие X_{δ}^{aff} является гиперповерхностью и задается условием обращения в 0 некоего полинома Лорана. В следующем пункте будет показано, что многогранник Ньютона этого полинома Лорана имеет форму октаэдра $T^{N-1}\Xi_N$. Работа [12] предлагает канонический метод построения компактификации гиперповерхности $Y \subset (\mathbb{C}^*)^N$, заданной полиномом Лорана с многогранником Ньютона Δ : необходимо вложить Y в компактное торическое многообразие M_{Δ^*} , где Δ^* – двойственный Δ конический полиэдр (описание конструкции M_{Δ^*} и определение двойственного конического полиэдра см. в [12]). Таким образом, в нашем случае необходимо вложить X_{δ}^{aff} в $M_{\Xi_N^*}$. Будем обозначать соответствующее торическое многообразие, снабженное индуцированным из $(\mathbb{C}^*)^N$ набором “координат” $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)$, символом $\Upsilon_{N,\lambda}$, а получившуюся компактификацию аффинного многообразия X_{δ}^{aff} – символом X_{δ} . Многообразие $X = X_0 \cup X_1$ будем называть *спектральным многообразием* оператора L . Пусть $X^{\infty} = X \setminus X^{\text{aff}}$, *конечными дивизорами* будем называть дивизоры $\mathcal{D} \subset X$ со свойством $\dim \mathcal{D} \cap X^{\infty} < N - 2$.

Приведем конструкцию для торического многообразия $\Upsilon_{N,\lambda}$. Символом $\Xi_{N,\gamma}(i)$ будем обозначать грань многогранника Ξ_N , заданную уравнениями

$$w_{i_f} = 0, \quad f = 1, \dots, N - M, \quad (\gamma, w) = 1, \quad \gamma_s w_s \geq 0, \quad s = 1, \dots, N.$$

Пусть даны две решетки $\mathcal{N}_{\mathbb{Q}}$, $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}$ и $\Xi_N \subset \mathcal{M}_{\mathbb{Q}}$ – наш октаэдр. По Ξ_N строим конический полиэдр $\Xi_N^* \subset \mathcal{N}_{\mathbb{Q}}$ следующим образом. С вектором $a \in \mathcal{N}_{\mathbb{Q}}$ связана грань Ξ_N^a , на которой скалярное произведение векторов, лежащих в Ξ_N , с вектором a минимально. Вектор a эквивалентен вектору b , если $\Xi_N^a = \Xi_N^b$. Замыкание класса эквивалентности векторов, связанных с гранью $\Xi_{N,\gamma}(i)$, образует конус $\Xi_{N,\gamma}^*(i) \subset \mathcal{N}_{\mathbb{Q}}$. Объединение конусов $\Xi_{N,\gamma}^*(i)$ образует конический полиэдр Ξ_N^* . Теперь каждому конусу $\Xi_{N,\gamma}^*(i)$ поставим в соответствие конус $\check{\Xi}_{N,\gamma}^*(i) \subset \mathcal{M}_{\mathbb{Q}}$ по следующему правилу:

$$\check{\Xi}_{N,\gamma}^*(i) = \{m \in \mathcal{M}_{\mathbb{Q}} : (n, m) \leq 0 \quad \forall n \in \Xi_{N,\gamma}^*(i)\}.$$

Символом $\mathbb{C}[\sigma \cap \mathcal{M}]$, где σ – конус в $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}$, будем обозначать алгебру лорановских полиномов $\sum_{m \in \sigma \cap \mathcal{M}} c_m \lambda^m$. С каждой гранью $\Xi_{N,\gamma}(i)$ ассоциировано аффинное торическое многообразие $Y_{N,\gamma,\lambda}(i) = \text{Spec}(\mathbb{C}[\check{\Xi}_{N,\gamma}^*(i) \cap \mathcal{M}])$. Вложение $\check{\Xi}_{N,\gamma}(i) \hookrightarrow \check{\Xi}_{N,\gamma'}(i')$ индуцирует сюръективное отображение соответствующих колец, а следовательно, и вложение $Y_{N,\gamma,\lambda}(i) \hookrightarrow Y_{N,\gamma',\lambda}(i')$, при этом вложении образ будет всюду плотным открытым по Зарискому подмножеством $Y_{N,\gamma',\lambda}(i')$. Эти отождествления позволяют склеить из аффинных многообразий $Y_{N,\gamma,\lambda}(i)$ полное (компактное) торическое многообразие Υ_N .

Грани $\Xi_{N,\gamma}(i)$ отвечает замкнутое торическое подмногообразие $\mathbb{P}_{\gamma,\lambda}^{M-1}(i)$, приведем конструкцию для этих множеств и опишем их свойства. Каждой грани $\Xi_{N,\gamma}(i)$ соответствует сюръективный морфизм $u_{N,\gamma}(i) : \mathbb{C}[\mathcal{M}] \rightarrow \mathbb{C}[\mathcal{M}_\gamma(i)]$, где

$$\mathcal{M}_\gamma(i) = \{m \in \mathcal{M} : (\gamma, m) = 0, m_{i_s} = 0, s = 1, \dots, N - M\},$$

морфизм действует на мономах по формуле: $u_{N,\gamma}(i)(\lambda^m) = \chi_{\mathcal{M}_\gamma(i)}(m)\lambda^m$, где $\chi_{\mathcal{M}_\gamma(i)}(m)$ – характеристическая функция $\mathcal{M}_\gamma(i)$ (т.е. равна 1 на $\mathcal{M}_\gamma(i)$ и 0 вне). Для любой грани $\Xi_{N,\gamma'}(i') \subset \Xi_{N,\gamma}(i)$ гомоморфизм $u_{n,\gamma}(i)$ индуцирует сюръективный морфизм $\mathbb{C}[\mathcal{M} \cap \Xi_{\gamma'}(i')] \rightarrow \mathbb{C}[\mathcal{M}_\gamma(i) \cap \Xi_{\gamma'}(i')]$, который индуцирует замкнутое вложение $\text{Spec}(\mathbb{C}[\mathcal{M}_\gamma(i) \cap \Xi_{\gamma'}(i')]) \hookrightarrow Y_{N,\gamma,\lambda}(i')$. Нетрудно видеть, что эти вложения будут согласованными для различных i', γ' . Таким образом, аффинные торические многообразия $\text{Spec}(\mathbb{C}[\mathcal{M}_\gamma(i) \cap \Xi_{\gamma'}(i')])$ склеиваются в замкнутое торическое подмногообразие $\mathbb{P}_{\gamma,\lambda}^{M-1}(i)$. Из конструкции этого многообразия видно, что оно строится по коническому вееру $\Xi_N \cap \mathcal{M}_\gamma(i)$ и является проективным пространством с однородными координатами $(\lambda_{j_1}^{\gamma_{j_1}} : \dots : \lambda_{j_M}^{\gamma_{j_M}})$. Несложное вычисление показывает, что

$$\mathbb{P}_{\gamma,\lambda}^{M-1}(i) \cap \mathbb{P}_{\gamma',\lambda}^{M'-1}(i') = \mathbb{P}_{\tilde{\gamma},\lambda}^{\tilde{M}-1}(\tilde{i})$$

при $\Xi_\gamma(i) \cap \Xi_{\gamma'}(i') = \Xi_{\tilde{\gamma}}(\tilde{i})$. Совпадения с обозначениями из предыдущего параграфа не являются случайными.

В этом параграфе нас будут больше всего интересовать дивизоры $\mathbb{P}_\gamma^{N-1}$. В аффинной “карте” $Y_{N,\gamma,\lambda}$ многообразия $\mathbb{P}_\gamma^{N-1}$ задается уравнением $\lambda_s^{-\gamma_s} = 0$ (для любого s), и набор функций $\lambda_s^{-\gamma_s}, \bar{\lambda}_r = \lambda^{-\gamma_r} \lambda^{\gamma_s}, r = 1, \dots, \hat{s}, \dots, N$, образует локальную систему координат в общей точке $\mathbb{P}_\gamma^{N-1} \cap Y_{N,\gamma,\lambda}$. Если гиперповерхность $W \subset Y_{N,\lambda}$ получена как компактификация гиперповерхности $\{P_W = 0\} \subset (\mathbb{C}^*)^N$, то $W \cap \mathbb{P}_{\gamma,N}^{N-1}$ задается уравнением $\text{Tr}^\gamma P_W = 0$.

Из того, что любой конус размерности больше 1, входящий в конический полиэдр Ξ_N^* , не является простым симплицальным, следует $\text{Sing } Y_{N,\lambda} = \bigcup_{\gamma,i} \mathbb{P}_{\gamma,i}^{N-2}(i)$, т.е. особенности имеют коразмерность 2.

Сформулируем определение пары многообразий, совместимых с периодом T .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пара многообразий $X_1, X_0 \subset Y_{N,\lambda}$ является парой многообразий, *совместимых* с периодом T , если X_δ получено компактификацией многообразия $X_\delta^{\text{aff}} \subset (\mathbb{C}^*)^N$, многогранник Ньютона которого является октаэдром $T^{N-1}\Xi$, и выполнены следующие условия:

$$X_\delta \cap \mathbb{P}_\gamma^{N-1} = \bigcup_{0 \leq u < T/2} X_\gamma^{\delta+2u}, \quad (41)$$

где пара $\{X_\gamma^{\delta+2u}, X_{-\gamma}^{-1-\delta-2u}\}$ – пара многообразий, совместимая с периодом T в направлении γ (в смысле определения 1),

$$\text{inv}(X_0) = X_1, \quad (42)$$

$$\text{Sing } X_\delta \subset \text{Sing } Y_{N,\gamma} \cap X_\delta. \quad (43)$$

В следующем пункте будет доказана

ЛЕММА 11. Для общего оператора L пара $X_0(L)$, $X_1(L)$ является парой многообразий, совместимых с периодом T .

Как и в симплицальном случае, $\psi_\delta(n)$, $n \in \Gamma_\delta$, в каждой точке спектрального многообразия определена с точностью до умножения на константу, и не имеет смысла говорить о $\psi_\delta(n)$ как о функции на спектральном многообразии. Но отношение $\psi_\delta(n)/\psi_\delta(n')$, $n, n' \in \Gamma_\delta$, является однозначно определенной мероморфной функцией, и верно следующее утверждение.

ЛЕММА 12. На $X_\delta(L)$ существуют такие конечные эффективные дивизоры $\mathcal{D}_{\delta,n}(L)$, $n \in \Gamma_{\delta,N}$, что

$$\mathcal{D}_{\delta,n+Te_g} = \mathcal{D}_{\delta,n}, \quad (44)$$

$$\left(\frac{\psi_\delta(n^1)}{\psi_\delta(n^0)} \right) \sim \mathcal{D}_{\delta,n^1} - \mathcal{D}_{\delta,n^0} + Q_\delta \left[\begin{smallmatrix} n^0 \\ n^1 \end{smallmatrix} \right] - Q_\delta \left[\begin{smallmatrix} n^1 \\ n^0 \end{smallmatrix} \right] \sim 0, \quad (45)$$

$$Q_\delta \left[\begin{smallmatrix} n^0 \\ n^1 \end{smallmatrix} \right] = \sum_{\gamma=(\pm 1, \dots, \pm 1)} \sum_{r=\frac{(\gamma, n^0)-\delta}{2}}^{\frac{(\gamma, n^1)-\delta}{2}} X_\gamma^{\delta+2r}, \quad (46)$$

$$\mathcal{K}_{X_\delta} \sim \mathcal{D}_{\delta,n} + \text{inv}(\mathcal{D}_{1-\delta,n+\varepsilon e_g}) - \sum_{\substack{\gamma=(\pm 1, \dots, \pm 1) \\ \gamma_g \neq \varepsilon}} X_\gamma^{(\gamma, n)} \quad (47)$$

для всех $n, n^0, n^1 \in \Gamma_\delta$, $g \in \mathbb{Z}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Набор $\{X_0, X_1; \mathcal{D}_{0,n}, \mathcal{D}_{1,n}\}$, где X_0, X_1 — парамногообразий, совместимых с периодом T , а для $\mathcal{D}_{\delta,n}$ выполнены соотношения (44)–(47) ((45) без первого знака $\sim$), будем называть *набором данных, совместимых с периодом T* .

Множество всех спектральных данных, совместимых с периодом T , будем обозначать символом $\mathfrak{M}_{T,N}^{\text{oct}}$.

Как уже отмечалось в предыдущем параграфе, на пространстве операторов типа L действует калибровочная группа GG_T (по формуле (14)). Факторпространства операторов типа L по действию группы GG_T будем обозначать через $\mathfrak{L}_{T,N}^{\text{oct}}$. Таким образом, корректно определено отображение $\mathfrak{D}: \mathfrak{L}_{T,N}^{\text{oct}} \rightarrow \mathfrak{M}_{T,N}^{\text{oct}}$, являющееся прямой спектральной задачей, и это отображение обратимо (на своем образе). Введем обозначение для образа этого отображения: $\widetilde{\mathfrak{M}}_{T,N}^{\text{oct}} = \mathfrak{D}(\mathfrak{L}_{T,N}^{\text{oct}})$.

ТЕОРЕМА 2. Отображение $\mathfrak{D}: \mathfrak{L}_{T,N}^{\text{oct}} \rightarrow \widetilde{\mathfrak{M}}_{T,N}^{\text{oct}}$ обратимо на некотором всюду плотном множестве. Отображение $\mathfrak{I} = \mathfrak{D}^{-1}$ может быть описано с помощью θ -функций кривых $X_\gamma \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right]$, $i, k \in \mathbb{Z}^{N-2}$.

2.2. Доказательства. По аналогии с симплицальным случаем построим базисы $\{e_{\delta;\gamma;j;\cdot}\}$ в $V_{q,\delta,N}$. Пусть $0 \leq p_r < T$, $r = 1, \dots, N-1$, $0 \leq p_0 < T/2$, тогда $e_{\delta;\gamma;j;a}$, $a = 1 + \sum_{b=1}^N p_b T^{N-b-1}$, однозначно определяется из условий $e_{\delta;\gamma;j;a} \in V_{q,\delta,N}$, $e_{\delta;\gamma;j;a}(m) = \delta_{(\gamma,m), 2p_0+\delta} \prod_{b=1}^{N-1} \delta_{p_b, \gamma_{j_b} m_b}$, $0 \leq \gamma_{j_f} m_f < T$,

$f = 1, \dots, N-1$, $0 \leq (\gamma, m) < T$. Матрицу оператора L , записанную в базисах $\{e_{\delta;\gamma;j;\cdot}\}, \{e_{1-\delta;\gamma;j;\cdot}\}$, будем обозначать символом $\mathbf{K}_{\delta;\gamma;j}(\lambda)$. Имеем:

$$\mathbf{K}_{0;\gamma;j}(\lambda) = \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{M}}_{-\gamma;j}^{-1}(\lambda_j) & \mathbf{M}_{\gamma;j}^1(\lambda) & \dots & 0 \\ 0 & \widehat{\mathbf{M}}_{-\gamma;j}^{-3}(\lambda) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{jN}^{\gamma_{jN}} \mathbf{M}_{\gamma;j}^{-1}(\lambda) & 0 & \dots & \mathbf{M}(L_{-\gamma;j}^{-T+1}(\lambda)) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{K}_{1;\gamma;j}(\lambda) = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{\gamma;j}^0(\lambda) & 0 & \dots & \lambda_{jN}^{-\gamma_{jN}} \mathbf{M}_{-\gamma;j}^0(\lambda) \\ \widehat{\mathbf{M}}_{-\gamma;j}^{-2}(\lambda) & \mathbf{M}_{\gamma;j}^2(\lambda) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{M}_{\gamma;j}^{2(T-1)}(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Из (15) следует:

$$(\mathbf{K}_{1;\gamma;j}(\lambda))^* = \mathbf{K}_{0;\gamma;j}(\lambda^{-1}).$$

Пусть $P_{\delta,\gamma,j}(\lambda) = \lambda^{\gamma_{jN}(2\delta-1)T^{N-1}/2} \det \mathbf{K}_{\delta;\gamma;j}(\lambda)$; очевидно, $P_{\delta,\gamma,j}$ — полином Лорана. Из определения многообразия X_δ следует, что оно задается уравнением $P_{\delta,\gamma,j}(\lambda) = 0$.

Приведем несколько полезных определений из [12] и заодно зафиксируем обозначения. Если $\Delta \subset \mathbb{Z}^N$ — выпуклый многогранник, $a \in \mathbb{R}^N$, то Δ^a — это грань многогранника Δ , на которой скалярное произведение с a достигает максимума. Пусть $P = \sum_{m \in \mathbb{Z}^N} c_m \lambda^m$ — полином Лорана, тогда полином Лорана $\text{Tr}^a(P) = \sum_{m \in \Delta^a(P)} c_m \lambda^m$ называется *укорочением P в направлении a* . Теперь в этих терминах мы можем сформулировать лемму.

ЛЕММА 13. *Для общего оператора L верно: $P_{\delta,\gamma,j}(\lambda)$ является полиномом Лорана по λ и*

$$P_{1,\gamma,j}(\lambda) = R_{0,\gamma,j}(\lambda^{-1}), \quad (48)$$

$$P_{\delta,\gamma,j}(\lambda) = P_{\delta,\gamma',j'}(\lambda), \quad (49)$$

$$\Delta(P_{\delta,\gamma,j}(\lambda)) = \frac{T^{N-1}}{2} \Xi_N, \quad (50)$$

$$\text{Tr}^\gamma(P_{\delta,\gamma,j}(\lambda)) = \prod_{r=0}^{T-1} G_\gamma^{\delta+2u}(\lambda). \quad (51)$$

Доказательство проводится прямым вычислением, аналогичным проведенному в лемме 3. Из леммы 13 вытекает формула (41). Из леммы также следует, что $P_{\delta,\gamma,j}$, на самом деле, не зависит от γ, j , поэтому далее в тексте мы будем опускать эти индексы.

Пусть $X_\delta(L)$ — спектральное многообразие оператора L_γ , тогда в этих обозначениях верна

$$\text{ЛЕММА 14. Для произвольного } \delta \quad \bigcap_L X_\delta(L) = \emptyset.$$

Доказательство этой леммы почти дословно повторяет доказательство леммы 4.

ЛЕММА 15. Для общего оператора L спектральные многообразия X_δ являются неприводимыми многообразиями, верна формула (43) и выполнены следующие соотношения:

$$\lambda^{-\gamma_s \frac{T^{N-1}}{2}} \frac{\partial P_\delta}{\partial a_{\gamma_u}(u; n)} \Big|_{X_\gamma^t} \neq 0, \quad (52)$$

$$\lambda^{-\gamma_s (\frac{T^{N-1}}{2} - 1)} \frac{\partial P_\delta}{\partial a_{\gamma'}(u; n')} \Big|_{X_\gamma^t} \neq 0, \quad (53)$$

здесь либо $\gamma' = -\gamma_u$, либо $(n', \gamma) \neq t \pmod{T}$,

$$X_\gamma^t \neq X_\gamma^{t'} \quad (54)$$

при любых $\gamma, u, t, t' \in \mathbb{Z}$, $t \neq t' \pmod{T}$, $(n, \gamma) = t$, $t = \delta \pmod{2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выполнение формул (54), (43) и неприводимость X_δ выводятся из теоремы Бертини и леммы 14 аналогично тому, как это было сделано в лемме 5.

Неравенство (52) сводится к (23) следующим образом. Пусть это неравенство не выполнено, тогда оно не выполнено и при ограничении на $X_\gamma^t \big|_u^z$ для любых z, u , а следовательно, используя (51), получаем противоречие с (23). Неравенство (53) сводится к неравенству (24) аналогичным образом.

Заметим, что лемма 11 является следствием формулы (51) и леммы 15.

Из построения матриц $\mathbf{K}_{\delta; \gamma; j}$ вытекает формула:

$$\frac{\partial P_\delta}{\partial a_{\gamma_u}(u; n)} \Big/ \frac{\partial P_\delta}{\partial a_{\gamma_v}(v; n)} = \frac{\psi_\delta \big|_k^i(n + \gamma_u e_u)}{\psi_\delta(n + \gamma_v e_v)}, \quad (55)$$

где $n \in \Gamma_{1-\delta}$.

ЛЕММА 16. Для общего L и произвольных $\gamma'_u, \gamma'_v = \pm 1$, $t \in \mathbb{Z}$, γ верно:

$$\text{ord}_{X_\gamma^t} \frac{\psi_\delta(n + \gamma'_u e_u)}{\psi_\delta(n + \gamma'_v e_v)} = \delta_{(n, \gamma)}^t (\gamma_v \gamma'_v - \gamma_u \gamma'_u).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой леммы аналогично доказательству леммы 6. Рассмотрим случай $\gamma'_u = \gamma_u, \gamma'_v = \gamma_v$. Из (55), (51), (54) следует:

$$\begin{aligned} \frac{\psi_\delta(n + \gamma'_u e_u)}{\psi_\delta(n + \gamma'_v e_v)} \Big|_{X_\gamma^t} &= \frac{\partial P_\delta}{\partial a_{\gamma_u}(u; m)} \Big/ \frac{\partial P_\delta}{\partial a_{\gamma_v}(v; m)} \Big|_{X_\gamma^t} \\ &= \frac{\partial G_\gamma^t}{\partial a_{\gamma_u}(u; m)} \Big/ \frac{\partial G_\gamma^t}{\partial a(v; m)} \Big|_{X_\gamma^t}. \end{aligned} \quad (56)$$

Теперь утверждение очевидным образом следует из (52). Случай $\gamma_u = -\gamma'_u$, $\gamma_v = -\gamma'_v$ разбирается аналогично.

Рассмотрим теперь случай $\gamma_u = -\gamma'_u$, $\gamma_v = \gamma'_v$ (случай $\gamma_u = \gamma'_u$, $\gamma_v = -\gamma'_v$ разбирается аналогично). Из (54) следует существование $s, g \in \mathbb{Z}$ таких, что $\lambda_s^{-\gamma_s}, \bar{\lambda}_r = \lambda_r^{\gamma_r} \lambda_s^{-\gamma_s}$, $r = 1, \dots, N$, $r \neq s, g$, являются локальными координатами на X_δ в окрестности общей точки X_γ^t . В этих координатах имеем разложение:

$$\begin{aligned} \frac{\psi_\delta(n + \gamma_u e_u)}{\psi_\delta(n + \gamma'_v e_v)} &= \frac{\partial P_\delta}{\partial a_{-\gamma_u}(u; m)} \Big/ \frac{\partial P_\delta}{\partial a_{\gamma_v}(v; m)} \\ &= \frac{\partial P_\delta}{\partial a_{\gamma_z}(z; m)} \lambda_s^{-\gamma_s \left(\frac{T^{N-1}}{2} - 1 \right)} \\ &\quad \times \lambda_s^{-\gamma_s} \left(\lambda_s^{-\gamma_s \frac{T^{N-1}}{2}} \frac{\partial G_\gamma^t}{\partial a_{\gamma_v}(v; n)} (G_\gamma^t)^{-1} \prod_{r=0}^{T-1} G_\gamma^r + \lambda_s^{-\gamma_s} Q(\lambda) \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Формула (53), примененная к полученному разложению, завершает доказательство.

Положим

$$\mathcal{D}_{\delta, n} = \sum_{\mathcal{C}} \mathcal{C} \max_{n' \in \Gamma_\delta} \frac{\psi_\delta(n)}{\psi_\delta(n')},$$

где суммирование идет по всем дивизорам $\mathcal{C}$ таким, что $\dim X_\delta^\infty \cap \mathcal{C} \leq N - 2$, тогда лемма 12 немедленно следует из леммы 16.

Заметим, что из (56) имеем

$$\frac{\psi_\gamma^{t+1}(n')}{\psi_\gamma^{t+1}(n)} = \frac{\psi_\delta(n')}{\psi_\delta(n)} \Big|_{X_\gamma^t}, \quad (57)$$

а из (46) и (41), (57) следует, что

$$Q_\gamma^t \left[\begin{smallmatrix} n' \\ n \end{smallmatrix} \right] = Q_\delta \left[\begin{smallmatrix} n' \\ n \end{smallmatrix} \right] \cap X_\gamma^t, \quad (58)$$

$$\mathcal{D}_{\gamma, n}^t \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right] = \mathcal{D}_{\delta, n} \cap X_\gamma^t \quad (59)$$

при $n, n' \in \Gamma_{\delta, N}^t$.

Введем определение дивизора $\mathcal{E}_\delta \subset X_\delta$:

$$\mathcal{E}_\delta = \sum_{\mathcal{C}} \mathcal{C} \min_{u, w} (\text{ord}_{\mathcal{C}} A_{u, w}(\mathbf{K}_{\delta; \gamma; j})),$$

где суммирование идет по всем дивизорам $\mathcal{C}$ таким, что $\dim X_\delta^\infty \cap \mathcal{C} \leq N - 2$, а $A_{u, w}(\cdot)$ — алгебраическое дополнение элемента матрицы, стоящего в u -й строке и в w -м столбце.

Пусть $\Omega_{\delta; n; u; \varepsilon}$ — мероморфный дифференциал на X_δ :

$$\Omega_{\delta; n; u; \varepsilon} = \frac{\partial P_\delta}{\partial a_\varepsilon(u; n)} \frac{\bigwedge_{g \neq r} d\lambda_g}{\prod_{s=1}^{M-1} \lambda_s} \left(\frac{\partial P_\delta}{\partial \lambda_r} \right)^{-1},$$

$n \in \Gamma_{\delta, N}$.

ЛЕММА 17. Для общего L верно

$$(\Omega_{\delta; n; u; \varepsilon}) \sim \mathcal{E}_\delta + \mathcal{D}_{\delta, n} + \text{inv}(\mathcal{D}_{1-\delta, n+\varepsilon e_u}) - \sum_{\gamma: \gamma_u \neq \varepsilon} X_\gamma^{(n, \gamma)}, \quad (60)$$

где $n \in \Gamma_\gamma$, $\varepsilon = \pm 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы проводится аналогично доказательству леммы 8.

Исследуем поведение дифференциала $\Omega_{\delta;n;u;\varepsilon}$ в окрестности X_γ^t , $t = \delta \pmod{2}$. Функции $\bar{\lambda}_0 = \lambda^{-\gamma_u}$, $\bar{\lambda}_s = \lambda_s^{\gamma_s} \lambda_u^{-\gamma_u}$ являются локальными координатами на Υ_N в общей точке $\mathbb{P}_\gamma^{N-1}$. Из (54) следует существование r такого, что $\frac{\partial P_\delta}{\partial \lambda_r} \Big|_{X_\gamma^t} \neq 0$.

Таким образом, функции $\bar{\lambda}_s$, $s = 1, \dots, \hat{r}, \dots, N$, являются локальными координатами на X_δ в окрестности общей точки X_γ^t . Перепишем наш дифференциал в терминах этих координат:

$$\Omega_{\delta;n;u;\varepsilon} = \frac{\partial \tilde{P}_\delta(\bar{\lambda})}{\partial a_\varepsilon(u; n)} \frac{\bigwedge_{g \neq r} d\bar{\lambda}_g}{\prod_{s=1}^{M-1} \bar{\lambda}_s} \left(\frac{\partial \tilde{P}_\delta(\bar{\lambda})}{\partial \lambda_r} \right)^{-1},$$

где $\tilde{P}_\delta(\bar{\lambda}) = P_\delta \lambda^{-\gamma_u} \frac{T^{N-1}}{2}$. В координатах $\bar{\lambda}$ многообразие X_γ^t задается уравнением $\bar{\lambda}_0 = 0$. Используя разложение

$$\frac{\partial \tilde{P}_\delta}{\partial a_\varepsilon(u; n)} = \frac{\partial \tilde{G}_\gamma^{(n, \gamma)}}{\partial a_\varepsilon(u; n)} (\tilde{G}_\gamma^{(n, \gamma)})^{-1} \prod_{z=1}^{T/2} \tilde{G}_\gamma^{\delta+2z} + \bar{\lambda}_0 Q(\bar{\lambda}),$$

в котором $\tilde{G}_\gamma = G_\gamma \lambda_u^{-\gamma_u T^{N-2}}$, а также соотношения (52), (53), получаем:

$$(\Omega_{\delta;n;u;\varepsilon}) \sim \tilde{\mathcal{D}} - \sum_{\gamma: \gamma_u \neq \varepsilon} X_\gamma^{(\gamma, n)},$$

где $\tilde{D} > 0$ и $\dim \tilde{D} \cap X_\delta \leq N - 2$.

Доказательство равенства $\tilde{\mathcal{D}} = \mathcal{D}_{\delta, n} + \mathcal{D}_{1-\delta, n+\varepsilon e_u} + \mathcal{E}$ проводится рассуждениями с алгебраическими дополнениями, аналогичными приведенным в лемме 8.

ЛЕММА 18. Для общего L верно: $\mathcal{E}_\gamma^t \big[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \big] = 0$ при любых i, k, γ, t .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формул (41), (59), (60) и формулы присоединения имеем

$$\mathcal{E}_\gamma^t = \mathcal{E} \cap X_\gamma^t. \quad (61)$$

Следовательно, по лемме 9 $\mathcal{E} \cap \mathbb{P}_\gamma^{N-1} = 0$ для всех γ . Но тогда по свойствам полных торических многообразий (см. [13]) имеем $\mathcal{E} = 0$.

Лемма 12 является непосредственным следствием лемм 18, 17.

ЛЕММА 19. Если $\{X_0, \mathcal{D}_{0, n}; X_1, \mathcal{D}_{1, n'}\} \in \mathfrak{M}_{N, T}^{\delta, \text{oct}}$, то

$$\{X_\gamma^t, \mathcal{D}_{\gamma, n}^t \big[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \big]; X_{-\gamma}^{-t-1}, \mathcal{D}_{-\gamma, -n}^{-t-1}\} \in \mathfrak{M}_{M, T}^{\gamma, \text{simp}},$$

где $\mathcal{D}_{\pm\gamma, \cdot}$ определено формулой (59).

Доказательство этой леммы проводится аналогично доказательству леммы 10 с помощью формулы присоединения и формул (41), (59), (58).

Доказательство теоремы 2 почти дословно повторяет доказательство теоремы 1: отображение, обратное к $\mathfrak{D}$, строится с помощью формул (38), (39).

2.3. Нечетный случай. Как уже отмечалось в вводной части этого параграфа, помимо стандартных условий T -периодичности коэффициентов оператора L мы будем требовать выполнения дополнительного условия

$$a_\varepsilon(r; n + T'e_1) = a_\varepsilon(r; n), \quad (62)$$

где $\varepsilon = \pm 1$, $r = 1, \dots, N$ и $T' = T/2$, при этом T' нечетно. Решетка периода (все сдвиги, относительно которых инвариантен наш оператор L) имеет вид $\Lambda = T'\mathbb{Z} \oplus T\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus T\mathbb{Z}$. В нечетном случае пространством квазипериодических функций с множителем Флоке $\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_N)$ было бы естественно назвать пространство

$$\tilde{V}_{q,N} = \{\psi \in V_{q,0,N}(\tilde{\lambda}_1^2, \dots, \tilde{\lambda}_N) \oplus V_{q,1,N}(\tilde{\lambda}_1^2, \dots, \tilde{\lambda}_N) : \psi(n + T'e_1) = \tilde{\lambda}_1 \psi(n)\}$$

и соответственно аффинной частью спектрального многообразия оператора L было бы естественно называть

$$\tilde{X} = \{\tilde{\lambda} \in (\mathbb{C})^N : \tilde{V}_{q,N}(\tilde{\lambda}) \cap \ker L \neq \emptyset\}.$$

Так как сдвиг на вектор $T'e_1$ перемешивает узлы решеток Γ_0 с узлами решетки Γ_1 , то нет разложения оператора L в сумму двух Λ -периодических операторов (как это было в четном случае), и поэтому естественно ожидать, что X будет неприводимым многообразием. Действительно, если мы будем рассматривать оператор L как T -периодический оператор, то, поскольку сдвиг на вектор $T'e_1$ переводит решетку Γ_δ в решетку $\Gamma_{1-\delta}$, имеет место равенство

$$X_0 = X_1$$

и нетрудно видеть, что X_δ является фактором $\tilde{X}$ по инволюции $\tau: \tilde{\lambda}_1 \rightarrow \tilde{\lambda}_1$, т.е. уравнение $\tilde{X}$ получается из уравнения X_δ заменой $\lambda_1 = \tilde{\lambda}_1^2$, $\tilde{\lambda}_r = \lambda_r$, $r = 2, \dots, N$. Поэтому естественно введение нового объекта – *модифицированного спектрального многообразия оператора L* : модифицированным спектральным многообразием Λ -периодического оператора L является $X_\delta(L)$.

Нетрудно видеть, что из Λ -периодичности оператора L также следуют равенства:

$$X_\gamma^t \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix} = X_\gamma^{t+T'} \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix} = X_\gamma^t \begin{bmatrix} i \\ k+\xi_j \end{bmatrix}, \quad (63)$$

$$\mathcal{D}_{\delta,n} = \mathcal{D}_{1-\delta,n+T'e_1}, \quad (64)$$

где $\xi \in \Lambda$. Опираясь на полученные равенства, введем определение набора данных, совместимых с решеткой периода Λ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Набор $\{X, \mathcal{D}_n\}$, $n \in \mathbb{Z}^N$, является *набором данных, совместимых с решеткой периода Λ* , если и только если набор $\{X_0, \mathcal{D}_{0,n_0}; X_1, \mathcal{D}_{1,n_1}\}$, где $X = X_0 = X_1$, $\mathcal{D}_{\delta,n_\delta} = \mathcal{D}_{n_\delta}$ (при $n \in \Gamma_\delta$), является набором данных, совместимых с периодом T (в смысле определения 4), и при этом выполнены условия (63), (64).

Множество данных, совместимых с решеткой периода Λ , будем обозначать символом $\mathfrak{M}_{\Lambda, N}^{\text{oct}}$.

Как и в четном случае, в нечетном случае элементы пространства Λ -периодических нигде не обращающихся в нуль функций естественным образом действует на пространстве Λ -периодических операторов L (формула для калибровки та же самая, что и в предыдущих пунктах). Обозначим факторпространство Λ -периодических операторов по действию этой калибровочной группы символом $\mathfrak{L}_{\Lambda, N}^{\text{oct}}$. Из теоремы 2 следует, что корректно определено отображение $\mathfrak{D}: \mathfrak{L}_{\Lambda, N}^{\text{oct}} \rightarrow \mathfrak{M}_{\Lambda, N}^{\text{oct}}$. Теперь заметим, что ключевые формулы (38), (39), которые позволяют восстановить оператор L (с точностью до калибровки), инвариантны относительно сдвигов на векторы решетки Λ , если данные (кривая и дивизор на ней, см. доказательство теоремы 2) получены формулами (41), (7), (59), (31) из данных, совместимых с решеткой периода Λ . Таким образом, непосредственно из теоремы 2 вытекает

СЛЕДСТВИЕ. Отображение $\mathfrak{D}: \mathfrak{L}_{\Lambda, N}^{\text{oct}} \rightarrow \mathfrak{M}_{\Lambda, N}^{\text{oct}}$ обратимо на некотором всюду плотном множестве. Отображение $\mathfrak{I} = \mathfrak{D}^{-1}$ может быть описано с помощью θ -функций кривых $X_{\gamma}^{\cdot} \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}$ и лежащих на них дивизоров $\mathcal{D}_{\gamma} \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}$, $i, k \in \mathbb{Z}^{N-2}$.

§ 3. Заключительные замечания

В настоящей работе изучается спектральная теория оператора L при наиболее простых условиях периодичности. Вообще же можно было бы с самого начала налагать наиболее общие условия периодичности (как это сделано в [8] для двумерного случая), а именно потребовать инвариантности коэффициентов оператора L относительно сдвигов на векторы некоторой подрешетки $\Lambda \subset \mathbb{Z}^N$. Нетрудно видеть, что в этом случае решетки разбиваются на два класса: четные и нечетные. Решетка является четной тогда и только тогда, когда для любого $\xi \in \Lambda$ выполнено $\sum_{r=1}^N \xi_r = 0 \pmod{2}$.

В случае четной решетки периода наш оператор L представляется в виде суммы двух операторов $L = L_0 \oplus L_1$, соответственно спектральное многообразие является объединением двух изоморфных неприводимых компонент. Спектральная теория таких операторов аналогична теории рассмотренных T -периодических операторов: локальные рассуждения в точности повторяют приведенные в тексте, единственное различие заключается в том, что построение компактификации аффинной части спектрального многообразия (построение правильной компактификации требует нелокальных рассуждений) проводится по стандартной, но довольно громоздкой схеме из [12].

Случай нечетной решетки сводится к четной решетке трюком, использованным в предыдущем параграфе. Необходимо найти четную решетку Λ' такую, что $[\Lambda' : \Lambda] = 2$, и рассматривать наш оператор как Λ' -периодический.

Для симплициальных операторов (а точнее, для пар симплициальных операторов) также может быть построена спектральная теория в более общих предположениях периодичности, т.е. в предположениях Λ -периодичности для некоторой решетки Λ . Но в отличие от октаэдрального случая, здесь четность решетки не играет никакой роли.

В целом же случай общих условий периодичности отличается от уже разобранных случаев лишь существенным усложнением обозначений и более громоздкими выкладками, поэтому в статье разобраны наиболее простые случаи, которые дают представление о том, как выглядит спектральная теория рассмотренных классов операторов при общих условиях периодичности.

Список литературы

1. *Шадан К., Сабатье П.* Обратные задачи в квантовой теории рассеяния. М.: Мир, 1980.
2. *Дубровин А. Б., Кричевер И. М., Новиков С. П.* Уравнение Шрёдингера в периодическом поле и римановы поверхности // Докл. АН СССР. 1976. Т. 229. №1. С. 15–18.
3. *Novikov S. P., Veselov A. P.* Two-dimensional Schrödinger operator: inverse scattering problem and evolutionary equations // Phys. D. 1986. V. 18. P. 267–273.
4. *Вeselov A. P., Novikov S. P.* Конечнозонные двумерные операторы Шрёдингера. Потенциальные операторы // Докл. АН СССР. 1984. Т. 1984. №4. С. 784–788.
5. *Novikov S. P., Veselov A. P.* Exactly solvable two-dimensional Schrödinger operator and Laplace transformation // Solitons, geometry, and topology: on the crossroad. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1997. P. 109–132. (Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. V. 179 (33).)
6. *Кричевер И. М.* Двумерные периодические разностные операторы и алгебраическая геометрия // Докл. АН СССР. 1985. Т. 285. №1. С. 31–36.
7. *Veselov A. P., Krichever I. M., Novikov S. P.* Two-dimensional periodic Schrödinger operators and Prym's θ -functions // Geometry today. Internat. Conf. Rome, 1984. Progr. Math. 1985. V. 60. P. 283–301.
8. *Обломков А. А.* О разностных операторах на двумерных правильных решетках // ТМФ. 2001. Т. 127. №1. С. 34–46.
9. *Oblovkov A. A., Penskoï A. V.* Two-dimensional algebro-geometric operators // J. Phys. A. 2000. V. 33. P. 9255–9264.
10. *Новиков С. П., Дынников И. А.* Дискретные симметрии маломерных операторов и разностных операторов на правильных решетках и двумерных многообразиях // УМН. 1997. Т. 52. №5. С. 175–234.
11. *Обломков А. А.* Изоэнергетическая спектральная задача для многомерных разностных операторов // Функциональный анализ и его приложения. (в печати).
12. *Хованский А. Г.* Многогранники Ньютона (разрешение особенностей) // Итоги науки и техн. Современ. пробл. матем. Т. 22. М.: ВИНТИ, 1983. С. 207–239.
13. *Данилов В. И.* Геометрия торических многообразий // УМН. 1978. Т. 33. №2. С. 85–134.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Поступила в редакцию
 Московский независимый университет 18.04.2001
E-mail: oblovkov@math.mit.edu