Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Пчелинцев, О центральных идеалах конечно порожденных бинарно $(-1, 1)$ -алгебр, *Матем. сб.*, 2002, том 193, номер 4, 113–134

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm646>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 09:08:51

УДК 512.554.5

С. В. Пчелинцев

О центральных идеалах конечно порожденных бинарно $(-1, 1)$ -алгебр

В 1975 году автор доказал, что центр свободной конечно порожденной $(-1, 1)$ -алгебры содержит ненулевой идеал всей алгебры. В.Т. Филиппов доказал, что в свободной альтернативной алгебре ранга ≥ 4 существует тривиальный идеал, содержащийся в ассоциативном центре. А.В. Ильтяков установил, что ассоциативное ядро свободной альтернативной алгебры ранга 3 совпадает с идеалом тождеств алгебры Кэли–Диксона.

В настоящей работе указанная теорема автора распространяется на свободные конечно порожденные бинарно $(-1, 1)$ -алгебры. Справедлива

ТЕОРЕМА. *Центр свободной конечно порожденной бинарно $(-1, 1)$ -алгебры ранга ≥ 3 над полем характеристики, отличной от 2 и 3, содержит ненулевой идеал всей алгебры.*

Попутно доказано, что T -идеал, порожденный функцией $(z, x, (x, x, y))$ в свободной бинарно $(-1, 1)$ -алгебре конечного ранга, разрешим. Отсюда выводится бесконечность базисного ранга многообразия бинарно $(-1, 1)$ -алгебр.

Библиография: 22 названия.

Введение

В 1975 году автор доказал, что (ассоциативно-коммутативный) центр свободной конечно порожденной $(-1, 1)$ -алгебры содержит ненулевой идеал всей алгебры [1]. Существование тривиальных ядерных идеалов в свободных альтернативных алгебрах ранга ≥ 4 было доказано В.Т. Филипповым [2]. А.В. Ильтяков [3] доказал, что ассоциативное ядро свободной альтернативной алгебры ранга 3 совпадает с идеалом тождеств алгебры Кэли–Диксона. В данной работе получен аналог приведенной теоремы автора для свободных конечно порожденных бинарно $(-1, 1)$ -алгебр над полем характеристики, отличной от 2 и 3. Попутно получен ряд других результатов; в частности, доказана бесконечность базисного ранга многообразия бинарно $(-1, 1)$ -алгебр.

Прежде чем перейти к более детальному обсуждению полученных результатов, заметим, что к настоящему времени структурная теория алгебр указанного класса достаточно продвинута. Практически завершена структурная теория конечномерных алгебр [4], [5]; доказано существование важнейших радикалов, в частности, локально нильпотентного [6]; доказана локальная нильпотентность ниль-алгебры ограниченного индекса над полем характеристики нуль [7]; получен ряд результатов о строении алгебр с условиями минимальности для идеалов [8]; доказана альтернативность простых алгебр [9]–[11].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 0001-00339).

Однако о строении свободных алгебр этого многообразия известно совсем мало. Предлагаемая работа состоит из пяти параграфов и посвящена, в основном, изучению свободных бинарно $(-1, 1)$ -алгебр конечного ранга над полем характеристики, отличной от 2 и 3. § 1 носит предварительный характер. Здесь собраны основные определения и известные тождества. Кроме того, в этом параграфе доказана лемма о переработке операторных слов, из которой вытекают, в частности, известные свойства аннуляторов [8].

В § 2 получены основные свойства функции $f_k(a, b, c) := (k, a, [b, c])$, где k – элемент коммутативного центра $K(A)$, a, b, c – элементы алгебры A . В частности, для произвольной бинарно $(-1, 1)$ -алгебры A доказано, что идеал, порожденный значениями функции $f_k(a, b, c)$, аннулируется идеалом полилинейных тождеств ассоциативной алгебры Грассмана (теорема 1).

В § 3 вводится в рассмотрение коммутативное ядро $U_K(A)$ – это наибольшее подмножество коммутативного центра $K(A)$, замкнутое относительно действия операторов $R(a, b)$, где $xR(a, b) = (x, a, b)$. Хорошо известно, что в $(-1, 1)$ -алгебрах (характеристики $\neq 2, 3$) верно равенство $U_K(A) = K(A)$. Для более широкого класса бинарно $(-1, 1)$ -алгебр это утверждение неверно, как показывает соответствующий пример, приведенный в § 3. Кроме того, в теореме 2 доказано, что функция $f_k(a, b, c)$ принимает значения из коммутативного ядра.

Начиная с § 4, изучаются конечно порожденная бинарно $(-1, 1)$ -алгебра A , а в ней идеал $k_1^\wedge$, порожденный ассоциаторами вида (k, a, b) , где $k \in K(A)$, $a, b \in A$. Доказано, что идеал тождеств строго $(-1, 1)$ -алгебр действует нильпотентно на идеале $k_1^\wedge$ (теорема 3). Это позволяет построить ненулевой вполне характеристический разрешимый идеал в свободной бинарно $(-1, 1)$ -алгебре конечного ранга ≥ 3 (теорема 4); он, как T -идеал, порождается функцией Хенцеля–Смита $(z, x, (x, x, y))$, введенной в работе [8]. Отсюда выводится теорема 5 о бесконечности базисного ранга многообразия бинарно $(-1, 1)$ -алгебр.

Наконец, § 5 посвящен доказательству следующих теорем о центральных идеалах конечно порожденных бинарно $(-1, 1)$ -алгебр.

ТЕОРЕМА 6. *В любой конечно порожденной бинарно $(-1, 1)$ -алгебре A либо коммутативный центр совпадает с центром, т.е. верно равенство $K(A) = Z(A)$, либо центр $Z(A)$ содержит ненулевой идеал алгебры A .*

ТЕОРЕМА 7. *Центр свободной конечно порожденной бинарно $(-1, 1)$ -алгебры ранга ≥ 3 содержит ненулевой идеал.*

Основные результаты данной работы были анонсированы автором в [12].

§ 1. Определения, обозначения, тождества

1.1. Основные определения и обозначения. Как обычно, используются следующие общепринятые обозначения:

$[a, b] = ab - ba$ – коммутатор, $a \circ b = ab + ba$ – йорданово произведение,

$J^{(-)}(a, b, c) = [[a, b], c] + [[b, c], a] + [[c, a], b]$ – якобиан присоединенной коммутаторной алгебры $A^{(-)} = \langle A; +; [\cdot, \cdot] \rangle$,

$(a, b, c) = (ab)c - a(bc)$ – ассоциатор, (a, a, b) – альтернатор,

$S(a, b, c) = (a, b, c) + (b, c, a) + (c, a, b)$ – функция Якоби для ассоциаторов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Алгебра, удовлетворяющая тождеству $(x, y, y) = 0$, называется *правоальтернативной*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Правоальтернативная алгебра называется $(-1, 1)$ -алгеброй, если в ней выполнено тождество $J^{(-)}(x, y, z) = 0$, т.е. ее коммутаторная алгебра является алгеброй Ли.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Правоальтернативная алгебра называется *бинарно* $(-1, 1)$ -алгеброй, если в ней выполнено тождество

$$[(x, x, y), y] = 0. \quad (1)$$

Бинарно $(-1, 1)$ -алгебры были введены независимо Е. Клейнфелдом и Г. Смитом [4] и автором [6]. Известно [13], что правоальтернативная алгебра над полем характеристики 0 является бинарно $(-1, 1)$ -алгеброй $\Leftrightarrow$ каждая ее 2-порожденная подалгебра является $(-1, 1)$ -алгеброй (аналог известной теоремы Артина для альтернативных алгебр).

1.2. Основные тождества правоальтернативных алгебр. Напомним основные тождества, выполняющиеся в произвольной правоальтернативной алгебре над полем характеристики $\neq 2$. Во-первых, отметим простые следствия тождества правой альтернативности, которые в дальнейшем применяются, как правило, без пояснений:

$$\begin{aligned} (a, x, y) + (a, y, x) &= 0, \\ (a, x^2, x) &= 0, \quad (a, x^2, y) + (a, x \circ y, x) = 0, \\ (a, x \circ y, z) + (a, y \circ z, x) + (a, z \circ x, y) &= 0. \end{aligned}$$

Далее, справедливы коммутаторные тождества:

$$[a^2, c] = a \circ [a, c] + 2(a, a, c), \quad (2)$$

$$[ab, c] = a[b, c] + [a, c]b + 2(a, b, c) + (c, a, b), \quad (3)$$

$$J^{(-)}(a, b, c) = 2S(a, b, c); \quad (4)$$

правые тождества Муфанг [14]:

$$(a, x, xs) = (a, x, s)x, \quad (5)$$

$$(a, x, ys) + (a, y, xs) = (a, x, s)y + (a, y, s)x, \quad (6)$$

из тождества (6) легко выводится тождество

$$2(a, xy, s) = 2(a, x, s)y + 2(a, y, s)x + (a, x, [s, y]) + (a, y, [s, x]) + (a, [x, y], s); \quad (7)$$

тождества Клейнфелда [15]:

$$(ab, r, s) + (a, b, [r, s]) = a(b, r, s) + (a, r, s)b, \quad (8)$$

$$([a, b], r, s) + (a, b, [r, s]) - (b, a, [r, s]) = [a, (b, r, s)] + [(a, r, s), b], \quad (9)$$

$$((z, x, y), x, y) + (z, x, y)[x, y] = 0; \quad (10)$$

тождество Тэди [16]:

$$\begin{aligned} ((a, b, c), r, s) &= ((a, r, s), b, c) + (a, (b, r, s), c) + (a, b, (c, r, s)) \\ &\quad + (a, b, c[r, s]) - (a, b, c)[r, s] - (a, b, [r, s])c, \end{aligned} \quad (11)$$

из тождеств (11) и (7) легко выводится тождество

$$\begin{aligned} 2((a, b, c), r, s) &= 2((a, r, s), b, c) + 2(a, (b, r, s), c) + 2(a, b, (c, r, s)) \\ &\quad + (a, [b, c], [r, s]) + (a, [b, [r, s]], c) + (a, b, [c, [r, s]]). \end{aligned} \quad (12)$$

1.3. Центральные функции. Для центров используются следующие обозначения:

$K(A)$ – коммутативный центр; $V(A)$ – слабо альтернативный центр;

$N(A)$ – ассоциативный центр; $N_{\text{Lie}}(A)$ – лиев центр;

$Z(A) = N(A) \cap K(A)$ – (ассоциативно-коммутативный) центр.

Напомним, что

$$K(A) = N_{\text{Com}}(A) = \{k \in A \mid (\forall x) [k, x] = 0\};$$

$$V(A) = \{v \in A \mid (\forall x) (x, x, v) = 0\};$$

$$N(A) = N_{\text{Ass}}(A) = \{n \in A \mid (\forall x, y) (x, y, n) = (x, n, y) = (n, x, y) = 0\};$$

$$N_{\text{Lie}}(A) = \{n \in A \mid (\forall x, y) J^{(-)}(x, y, n) = 0\}.$$

С помощью решетки отметим некоторые соотношения между указанными центрами правоальтернативной алгебры, считая, что центр, расположенный на более низком горизонтальном уровне, содержится в центре, расположенном на более высоком уровне; например, $Z \subseteq K \subseteq N_{\text{Lie}}$.

Указанные соотношения между центрами в дальнейшем используются, как правило, без пояснений.

Отметим также, что из тождеств (4) и (3) последовательно получаем для любых $x, y \in A, k \in K(A)$:

$$(k, x, y) = 2(x, k, y), \quad (13)$$

$$[xk, y] = [x, y]k + 3(x, k, y). \quad (14)$$

1.4. Переработка операторных слов; аннуляторы.

ЛЕММА (о переработке операторных слов).

(а) *Всякое операторное слово $T(x)T(p)$ правоальтернативной алгебры является линейной комбинацией слов, имеющих тот же состав, вида*

$$T(u), \quad T(p)T(x), \quad L(p, x),$$

где $aL(p, x) = (p, x, a)$, $T(x)$ – один из операторов $R(x)$ или $L(x)$.

(б) *Пусть A – правоальтернативная алгебра; $A^{(-)}$ – бинарно лиева. Тогда всякое операторное слово $T(x)T(y)T(p)$ является линейной комбинацией слов, имеющих тот же состав, вида*

$$T(u), \quad T(v)T(w), \quad T(a)T(b)T(c), \quad \text{где } p \in \{a, b\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим свободную правоальтернативную алгебру от порождающих w, p, x, y . Пусть φ_i, ψ_j — элементы алгебры умножений одного состава (содержащего p и не содержащего w), тогда будем писать $\sum_i \varphi_i \equiv \sum_j \psi_j$, если $\sum_i \varphi_i - \sum_j \psi_j$ представимо (с сохранением состава) в виде линейной комбинации операторных слов γ_l , операторная длина которых меньше операторной длины хотя бы одного из слов φ_i , и операторных слов, в которых последний оператор имеет вид $T(x)$ или $T(y)$. Кроме того, будем писать $w\varphi \equiv w\psi$, если для элементов φ, ψ алгебры умножений справедливо сравнение $\varphi \equiv \psi$.

(а) В силу правой альтернативности имеем:

$$(w, x, p) = -(w, p, x), \quad (x, w, p) = -(x, p, w),$$

откуда вытекает $R(x)R(p) \equiv 0, L(x)R(p) \equiv 0$, т.е.

$$T(x)R(p) \equiv 0. \quad (15)$$

Аналогично, $p(w \circ x) = (pw)x + (px)w$, следовательно,

$$\{R(x) + L(x)\}L(p) \equiv 0.$$

Поэтому в силу отмеченных сравнений достаточно рассмотреть слово $L(x)L(p)$; имеем $L(x)L(p) = L(px) - L(p, x)$ по определению $L(p, x)$.

(б) Поскольку алгебра $A^{(-)}$ бинарно лиева, то в силу (4) верно тождество,

$$S([a, b], b, a) = 0,$$

а значит, и его линеаризация

$$S([w, x], p, y) + S([w, p], x, y) + S([y, x], p, w) + S([y, p], x, w) = 0.$$

Отсюда получаем $S([w, x], p, y) \equiv 0$, значит, в силу (15):

$$(p, [w, x], y) \equiv 0. \quad (16)$$

Теперь в силу тождества Муфанг (6)

$$(p, wx, y) = -(p, yx, w) + (p, x, y)w + (p, x, w)y \equiv 0. \quad (17)$$

Наконец, из (16) и (17) вытекают сравнения

$$(p, wT(x), y) \equiv 0, \quad (p, y, wT(x)) \equiv 0,$$

т.е. $T(x)T(y)L(p) \equiv 0$. Поскольку $T(x)T(y)R(p) \equiv 0$ ввиду (15), то $T(x)T(y)T(p) \equiv 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ [8]. *Аннулятором идеала I в алгебре A называется множество*

$$\text{Ann } I = \{x \in A \mid Ix = xI = (I, x, A) = (0)\}.$$

Из леммы о переработке операторных слов вытекает

СЛЕДСТВИЕ [8]. *Аннулятор двустороннего идеала I бинарно $(-1, 1)$ -алгебры A снова является двусторонним идеалом алгебры A .*

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $Ix = xI = (0)$, то следующие условия эквивалентны:

- а) $(I, A, x) = (0)$, б) $S(I, A, x) = (0)$,
- с) $[I, [x, A]] = (0)$, д) $I[x, A] = (0)$,
- е) $[I, A, x] = (0)$, где $[a, b, c] = (a, b, c) + (b, a, c)$.

В частности, если I — идеал A , $k \in K(A)$, $v \in V(A)$, то

$$(a) \quad k \in \text{Ann } I \Leftrightarrow Ik = (0); \quad (b) \quad v \in \text{Ann } I \Leftrightarrow Iv = vI = (0).$$

§ 2. Функция f_k и ее центр N_f

Всюду ниже, если не оговорено противное, используются обозначения:

A – бинарно $(-1, 1)$ -алгебра над полем характеристики $\neq 2, 3$;

$A^\#$ – алгебра, полученная из A внешним присоединением единицы;

$K_1(A)$ – линейное пространство, порожденное множеством $(K(A), A, A)$;

буква k всегда обозначает элемент коммутативного центра $K(A)$;

$D(A)$ – ассоциаторный идеал;

$St(A)$ – идеал A , порожденный элементами $[[x, y], z]$;

$M(A)$ – линейное пространство, порожденное альтернаторами;

$Alt(A)$ – альтернаторный идеал.

Основным результатом этого параграфа является

ТЕОРЕМА 1. Пусть A – бинарно $(-1, 1)$ -алгебра, $k \in K(A)$,

$$f_k(a, b, c) := (a, [b, c], k);$$

$$N_f(A) := \{n \in A \mid (\forall x, y \in A) f_k(n, x, y) = 0\} \text{ – центр функции } f_k.$$

Тогда идеал $D(A) + St(A)$ (идеал полилинейных тождеств алгебры Грассмана) содержится в центре $N_f(A)$ функции f_k . Кроме того, значения функции f_k содержатся в аннуляторе идеала полилинейных тождеств алгебры Грассмана.

2.1. Множество $K_1(A)$ и свойства его элементов.

ЛЕММА 1. В алгебре A справедливо тождество:

$$([a, b], c, k) = 2[a, (b, c, k)], \quad \text{где } k \in K(A),$$

причем функции $([a, b], c, k)$ и $[a, (b, c, k)]$ кососимметрические по a, b, c .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведя линеаризацию тождества $[(x, x, y), y] = 0$, получим $[(k, x, y) + (x, k, y), y] = 0$, откуда $3[(x, k, y), y] = 0$ в силу (13), т.е. $[(x, k, y), y] = 0$. Значит, функция $[a, (b, c, k)]$ кососимметрична по a, b, c .

Докажем теперь указанное в лемме тождество. Применяя тождество Клейнфелда (9) и используя кососимметричность функции $[a, (b, c, k)]$, получаем

$$([a, b], c, k) = [a, (b, c, k)] + [(a, c, k), b] = 2[a, (b, c, k)].$$

Кососимметричность второй функции теперь очевидна.

ЛЕММА 2. $K_1(A) \subseteq V(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя тождество Тэди (12), имеем

$$\begin{aligned} 2((a, a, k), r, s) &= 2((a, r, s), a, k) + 2(a, (a, r, s), k) + 2(a, a, (k, r, s)) \\ &\quad + (a, [a, k], [r, s]) + (a, [a, [r, s]], k) + (a, a, [k, [r, s]]). \end{aligned}$$

Поскольку $K(A) \subseteq V(A)$, то $2(a, a, (k, r, s)) + (a, [a, [r, s]], k) = 0$. Так как по лемме 1 второе слагаемое равно 0, то $(a, a, (k, r, s)) = 0$.

ЛЕММА 3. $[[K_1(A), A], A] = (0)$; $[K_1(A), [A, A]] = (0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Считая элемент k фиксированным, положим:

$$f(a, b, c) = (a, [b, c], k), \quad g(a, b, c, d) = [a, (b, [c, d], k)].$$

Заметим, что ввиду леммы 1 эти функции кососимметрические по a, b, c, d . Далее, в силу тождества Клейнфелда (9)

$$([a, b], [r, s], k) = [a, (b, [r, s], k)] + [(a, [r, s], k), b],$$

следовательно, функция $([a, b], [r, s], k)$ также кососимметрична по a, b, r, s . Переставляя элементы a и r, b и s , получим

$$([a, b], [r, s], k) = -([r, b], [a, s], k) = ([r, s], [a, b], k).$$

Поскольку $K(A) \subseteq V(A)$, то $([r, s], [a, b], k) = -([a, b], [r, s], k)$, и $2([a, b], [r, s], k) = 0$, т.е. $([a, b], [r, s], k) = 0$ и в силу кососимметричности функции f верно $([[r, s], a], b, k) = 0$, откуда ввиду леммы 1 получаем требуемые тождества.

2.2. Доказательство теоремы 1 представим в виде двух лемм.

ЛЕММА 4. $\text{Alt}(A) \subseteq N_f(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно [16], что $M(A)$ — левый идеал и $\text{Alt}(A) = M(A) \cdot A^\#$, следовательно, $\text{Alt}(A) = M(A) + [M(A), A]$. В силу леммы 2 $K_1(A) \subseteq V(A)$, значит, ввиду (1) для любых $k_1 \in K_1(A)$ и $a, b \in A$ имеем $[k_1, (a, a, b)] = -[b, (a, a, k_1)] = 0$, т.е. $[k_1, (a, a, b)] = 0$, $[k_1, M(A)] = (0)$.

Так как по лемме 3 $[k_1, [M(A), A]] = (0)$, то $[K_1(A), \text{Alt}(A)] = (0)$, откуда в силу леммы 1 имеем $(\text{Alt}(A), [A, A], k) = (0)$.

ЛЕММА 5. а) $\text{St}(A) + D(A) \subseteq N_f(A)$;

б) $f_k \in \text{Ann}(\text{St}(A) + D(A))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что из лемм 1, 3 немедленно вытекает

1°. $(a, [[x, y], z], k) = ([a, b], [r, s], k) = 0$.

В частности, для любых коммутаторов $v_1, v_2 \in [A, A]$:

$$(v_1, v_2, k) = 0.$$

Поскольку в силу тождества Клейнфелда (8) отображение $R(x, k) := R(x)R(k) - R(xk)$ является дифференцированием алгебры, то ввиду (13) получаем

2°. $(w_1, w_2, k) = 0$, если w_i ($i = 1, 2$) — произведения коммутаторов.

Следующий пункт совпадает с леммой 4:

3°. $(\text{Alt}(A), [r, s], k) = (0)$.

Обозначим через δ дифференцирование $R([r, s], k)$, считая, что элементы r, s, k фиксированы. Тогда по модулю $\text{Ker}(\delta)$ в силу предыдущего справедливы сравнения

4°. $[a, b] \equiv 0; \text{Alt}(A) \equiv (0)$.

Отсюда на основании коммутаторного тождества (4) получаем

5°. $(a, b, c) \equiv 0$.

Далее, в силу коммутаторного тождества (3) верно включение

$$[[A, A], A]A \subseteq [A, A] + [A, A] \cdot [A, A] + (A, A, A),$$

следовательно, ввиду ш. 2° и 5° верно сравнение

$$6^\circ. [[x, y], z]t \equiv 0.$$

Учитывая теперь ш. 4° и 6°, вновь на основании коммутаторного тождества (4) получаем

$$7^\circ. (a, b, c)d \equiv 0.$$

Поскольку ассоциаторный идеал $D(A)$ линейно порождается элементами вида (a, b, c) и $(a, b, c)d$, то из 5° и 7° получаем

$$8^\circ. D(A) \equiv 0.$$

Учитывая теперь, что в ассоциативной алгебре B идеал $\text{St}(B)$ линейно порождается элементами вида $[[x, y], z]$ и $[[x, y], z]t$, из ш. 8° и 6° получаем

$$9^\circ. \text{St}(A) \equiv 0.$$

10°. Для любого $a \in A$: $a\delta \in K(A)$ в силу 1° и леммы 1. Кроме того, из п. 9° следует равенство $(a\delta) \cdot \text{St}(A) = (0)$.

Применяя теперь замечание об аннуляторах, получаем последнее требуемое в лемме утверждение.

§ 3. Коммутативное ядро $U_K(A)$

3.1. Ядерность функции $f_k(a, b, c)$. Всюду в этом пункте:

$k, q \in K(A)$, v, w – коммутаторы, $a, b, c, r, s, x, y, z, t \in A$;

$R^*(A, A)$ – подалгебра (с единицей) алгебры правых умножений $R(A)$, порожденная операторами $R(a, b)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Коммутативным *ядром* алгебры A назовем множество

$$U_K(A) := \{k \in K(A) \mid (\forall \rho \in R^*(A, A)) k\rho \in K(A)\}.$$

Из леммы 1 вытекает

$$\text{ЗАМЕЧАНИЕ. } U_K(A) = K(A) \Leftrightarrow (\forall k, a, b, c) f_k(a, b, c) = 0.$$

ЛЕММА 6. $kR(a, v)R(b, w) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $q = kR(x, v)$, тогда $q \in K(A)$ в силу леммы 1.

Из тождества (14) имеем:

$$[xq, y] = [x, y]q + 3(x, q, y).$$

Докажем, что элементы $[xq, y]$ и $[x, y]q$ нулевые. В силу тождества (13) верно равенство $q = 2(x, k, v)$. Поскольку отображение $R(k, v)$ является дифференцированием, то

$$\begin{aligned} [xq, y] &= [2x(x, k, v), y] = [x \circ (x, k, v), y] = [(x^2, k, v), y] = 0, \\ [x, y]q &= q[x, y] = 2(x, k, v)[x, y] = (x, k, v) \circ [x, y] \\ &= (x \circ [x, y], k, v) - x \circ ([x, y], k, v) \\ &= (x \circ [x, y], k, v) \quad \text{ввиду леммы 5, п. 1}^\circ \\ &= ([x^2, y] - 2(x, x, y), k, v) \quad \text{в силу тождества (2)} \\ &= 0 \quad \text{ввиду леммы 5, п. 4}^\circ. \end{aligned}$$

Значит, $(x, q, y) = 0$, откуда $(q, x, y) = 0$, т.е. $((k, x, v), x, y) = 0$. После линеаризации $x \rightarrow w$ на основании $(k, w, v) = 0$ (лемма 5, п. 4°) получаем требуемое в лемме равенство $((k, x, v), w, y) = 0$.

ТЕОРЕМА 2. *Функция $f_k(a, b, c)$ является ядерной, т.е. $kR(a, v) \in U_K(A)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим идеал алгебры правых умножений $R(A)$, порожденный операторами $R(r)$, $r \in D(A) + \text{St}(A)$, через I . Тожество Тэди (12) в операторной форме имеет вид: $[R(x, y), R(z, w)] \equiv 0$ по модулю I , следовательно, $(\forall \rho \in R^*(A, A)) \quad [\rho, R(z, w)] \equiv 0$. Отсюда в силу теоремы 1 получаем

$$(\forall \rho \in R^*(A, A)) \quad q[\rho, R(z, w)] = 0, \quad \text{где } q = kR(a, v).$$

Докажем теперь, что $(\forall \rho \in R^*(A, A)) \quad q\rho \in K(A)$. Можно считать, что ρ является произведением операторов $R(x, y)$ и провести индукцию по числу сомножителей в слове ρ . Основание индукции вытекает из леммы 6. Сделав индуктивное предположение для слова ρ , рассмотрим $[q\rho R(z, t), s]$. По предположению индукции $q\rho \in K(A)$ и по лемме 1 ввиду (13) имеем

$$\begin{aligned} 2[q\rho R(z, t), s] &= 2[(q\rho, z, t), s] = 4[(z, q\rho, t), s] = 4[s, (z, t, q\rho)] \\ &= 2([s, z], t, q\rho) = -2([s, z], q\rho, t) = -(q\rho, [s, z], t) \\ &= -(q\rho, [z, t], s) = (q\rho, s, [z, t]) = q\rho R(s, w), \quad \text{где } w = [z, t], \\ &= qR(s, w)\rho = 0 \quad \text{по лемме 6.} \end{aligned}$$

Тем самым, индукция проведена и лемма доказана.

3.2. Пример. Приведем пример бинарно $(-1, 1)$ -алгебры A , в которой коммутативное ядро отлично от коммутативного центра.

Рассмотрим вспомогательную супералгебру $A = A_0 + A_1$ над полем Φ характеристики, отличной от 2, имеющую следующие базисные элементы:

$$a, b, h \quad (\text{базис } A_0); \quad k, r, p, q \quad (\text{базис } A_1).$$

Каждому из элементов припишем степень d :

v	k	r	a	b	p	q	h
$d(v)$	(1, 0)	(0, 1)	(0, 2)	(1, 1)	(1, 2)	(1, 2)	(1, 3)

Определим произведения базисных элементов, указав в первом столбце степень произведения базисных элементов:

(0, 2)	$r \cdot r = a$
(1, 1)	$k \cdot r = -r \cdot k = b$
(1, 2)	$k \cdot a = a \cdot k = p,$ $b \cdot r = p - 2q, r \cdot b = -p + q$
(1, 3)	$p \cdot r = 2h, r \cdot p = h,$ $r \cdot q = h,$ $a \cdot b = h, b \cdot h = -2h$
все остальные произведения равны нулю	

Заметим, что если произведение базисных элементов отлично от нуля, то оно является линейной комбинацией базисных элементов одной степени, совпадающей с суммой степеней сомножителей.

Проверим сначала, что алгебра A – супер-правоальтернативна, т.е. в ней выполнено супер-тождество правой альтернативности:

$$(x, y, z) + (-1)^{|y||z|}(x, z, y) = 0,$$

где x, y, z – однородные элементы, $|x|$ – индекс четности однородного элемента x .

Достаточно рассмотреть ненулевые ассоциаторы от базисных элементов, степень которых равна $(1, 2)$ или $(1, 3)$. Такие ассоциаторы могут содержать только следующие элементы:

1. один элемент k и два элемента r ;
2. один элемент b и два элемента r ;
3. по одному элементу k, r, a .

1. Сначала вычислим все ассоциаторы, содержащие один элемент k и два элемента r :

$$\begin{aligned}(k, r, r) &= (kr)r - k(rr) = br - ka = (p - 2q) - p = -2q; \\ (r, k, r) &= (rk)r - r(kr) = -br - rb = -(p - 2q) - (-p + q) = q; \\ (r, r, k) &= (rr)k - r(rk) = ak + rb = p + (-p + q) = q.\end{aligned}$$

2. Теперь вычислим все ассоциаторы, содержащие один элемент b и два элемента r :

$$\begin{aligned}(b, r, r) &= (br)r - b(rr) = (p - 2q)r - ba = pr - 2qr - ba \\ &= pr - ba = 2h + 2h = 4h; \\ (r, b, r) &= (rb)r - r(br) = (-p + q)r - r(p - 2q) \\ &= -(pr + rp) + 2rq = -3h + 2h = -h; \\ (r, r, b) &= (rr)b - r(rb) = ab - r(-p + q) = ab + rp - rq = h + h - h = h.\end{aligned}$$

3. Рассмотрим, наконец, ассоциаторы, содержащие элементы k, r, a . Имеем:

$$\begin{aligned}(k, r, a) &= (kr)a - k(ra) = ba = -2h; \\ (k, a, r) &= (ka)r - k(ar) = pr = 2h; \\ (r, k, a) &= (rk)a - r(ka) = -ba - rp = 2h - h = h; \\ (r, a, k) &= (ra)k - r(ak) = -rp = -h; \\ (a, r, k) &= (ar)k - a(rk) = -a(rk) = ab = h; \\ (a, k, r) &= (ak)r - a(kr) = pr - ab = 2h - h = h.\end{aligned}$$

Сравнив необходимые ассоциаторы, легко проверить, что на указанной тройке базисных элементов справедливо супер-тождество правой альтернативности.

Покажем теперь, что построенная алгебра является бинарно $(-1, 1)$ -супер-алгеброй, т.е. удовлетворяет суперизации тождества (1):

$$\{x, y, z, t\} + (-1)^{|x||y|}\{y, x, z, t\} = 0, \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned}\{x, y, z, t\} &= [(x, y, z), t]_s + (-1)^{|z||t|}[(x, y, t), z]_s, \\ [x, y]_s &= xy - (-1)^{|x||y|}yx \quad (\text{супер-коммутатор}).\end{aligned}$$

Заметим, что если функция $\{x, y, z, t\}$ от базисных элементов отлична от 0, то один из базисных элементов совпадает с k , а три другие равны r .

Если в левой части (18) элементы x и y равны r , то левая часть (18), очевидно, равна нулю. Если же одна из букв x и y совпадает с k , то $z = t = r$ и тогда $\{x, y, r, r\} = 0$, значит, каждое слагаемое в левой части (18) нулевое. Итак, справедливо тождество (18).

Вычислив теперь супер-коммутатор:

$$[(k, r, r), r]_s = -2[q, r]_s = -2h,$$

видим, что в грассмановой оболочке построенной супер-алгебры коммутативный центр содержит элемент ke_1 ($e_1, e_2, \dots$ — стандартные порождающие ассоциативной алгебры Грассмана) и не замкнут относительно действия операторов вида $R(a, b)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Над полем характеристики 3 построенная супералгебра альтернативна. Значит, для альтернативных алгебр понятия коммутативного ядра и коммутативного центра различны. Напомним (см., например, [14]), что для альтернативной алгебры A характеристики, отличной от 3, коммутативный центр совпадает с центром, т.е. $(K, A, A) = (0)$.

§ 4. Действие алгебры $T(A)$ на идеале $k_1^\wedge$

Пусть k — фиксированный элемент из коммутативного центра, обозначим через k_1^* множество элементов вида $kR(a, b)$, $a, b \in A$, а через $k_1^\wedge$ — идеал, порожденный множеством k_1^* .

Множество операторов правого умножения обозначим через R_A . Алгебра умножений обозначается через $T(A)$, алгебра правых умножений — $R(A)$; при этом мы считаем, что каждая из этих алгебр имеет единицу.

4.1. Переработка операторов, действующих на идеале $k_1^\wedge$.

ЛЕММА 7. $k_1^\wedge = k_1^*R(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $K_{[s]}$ линейное подпространство в алгебре A , порожденное множеством $k_1^*R_{A^\#}^s$. Докажем индукцией по числу s справедливость включения $xK_{[s]} \subseteq K_{[s+1]}$, из которого немедленно вытекает требуемое в лемме равенство. Основание индукции $s = 0$:

$$xK_{[0]} \subseteq K_1x + [K_1, x] \subseteq K_{[1]} \quad \text{в силу леммы 1.}$$

Если $s = 1$, то в силу леммы 1 и предыдущего случая имеем:

$$2x(k_1y) = x([k_1, y] + k_1 \circ y) \in xK_1 + (xy)k_1 + (xk_1)y \subseteq K_{[2]}.$$

Сделаем индуктивное предположение и, считая $s \geq 0$, рассмотрим $xK_{[s+2]}$. Ясно, что $K_{[s+2]} = K_{[s+1]} + (K_{[s]}, A, A)$, следовательно, достаточно проверить справедливость включения $x(k_s, a, b) \in K_{[s+3]}$, если $k_s \in K_{[s]}$.

На основании тождества Клейнфелда (8) имеем

$$x(k_s, a, b) = (xk_s, a, b) + (x, k_s, [a, b]) - (x, a, b)k_s \in K_{[s+3]}.$$

Из леммы 7 немедленно получается

СЛЕДСТВИЕ. Для произвольного $k \in K(A)$ верно равенство $k^\wedge = kR(A)$.

4.2. Аддитивная система порождающих идеала $k_1^\wedge$. Всюду в этом пункте, если не оговорено противное, A — конечно порожденная бинарно $(-1, 1)$ -алгебра с множеством $X_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ порождающих. Как обычно, мы считаем, что элементы множества X_n упорядочены по возрастанию индексов.

ЛЕММА 8. Пусть z — элемент из A такой, что $(z, [A, A], A) = (0)$. Тогда правый идеал, порожденный множеством (z, A, A) , линейно порождается правильными элементами вида

$$(z, a, t_1)R(t_2) \cdots R(t_q), \quad t_i \in X_n, \quad a \in A, \quad t_1 < t_2 < \cdots < t_q, \quad q \leq n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть W_s — линейное пространство, порожденное элементами вида $(z, a, b_1)R(b_2) \cdots R(b_s)$, $a, b_i \in A^\#$. Будем писать $x \equiv y \pmod{W_s}$, если $x - y \in W_s$. Заметим, что

$$x \equiv y \pmod{W_s} \implies (\forall v) \quad xv \equiv yv \pmod{W_{s+1}}. \quad (19)$$

Докажем, что всякий элемент

$$w := (z, a, b_1)R(b_2) \cdots R(b_{s+1}), \quad b_i \in A, \quad (20)$$

по модулю W_s линейно представим в виде линейной комбинации *регулярных* элементов вида

$$(z, a, t_1)R(t_2) \cdots R(t_{s+1}), \quad t_i \in X_n, \quad a \in A. \quad (21)$$

Заметим, что в регулярных словах, в отличие от правильных, нет ограничений на упорядоченность символов t_i .

Проведем индукцию по s . Основание индукции: $s = 0$. Из тождества

$$(z, a \circ b, c) + (z, b \circ c, a) + (z, c \circ a, b) = 0$$

и условия $(z, [A, A], A) = (0)$ вытекает, что $(z, a, bc) = (z, ab, c) + (z, ac, b)$, следовательно, пространство (z, A, A) линейно порождается регулярными элементами вида (21), в которых отсутствуют операторы $R(t_i)$.

Сделаем индуктивное предположение, рассмотрим элемент w вида (20) и заметим, что по модулю W_s порядок операторов $R(b_2) \cdots R(b_{s+1})$ в элементе w не играет роли. Кроме того, учитывая предположение индукции и импликацию (19), можно считать, что w имеет вид:

$$w = (z, a, t_1)R(t_2) \cdots R(t_s)R(b), \quad t_i \in X_n, \quad b \in A.$$

Применяя правое тождество Муфанг (6)

$$(z, a, t_1)b = (z, ba, t_1) + (z, t_1a, b) - (z, a, b)t_1,$$

видим, что элемент w по модулю W_s представим линейной комбинацией элементов

$$(z, a, b)R(t_1)R(t_2) \cdots R(t_s), \quad t_i \in X_n, \quad a, b \in A. \quad (22)$$

Воспользовавшись теперь основанием индукции, ассоциатор (z, a, b) , а значит, и элемент (22) представим в виде линейной комбинации регулярных. Поскольку по модулю W_s порядок переменных t_i в элементах вида (22) не играет роли, то любой регулярный элемент является линейной комбинацией правильных.

ЛЕММА 9. Идеал $k_1^\wedge$ линейно порождается элементами вида

$$k_1 R(a_1, a_2) \cdots R(a_{2q-1}, a_{2q}) R(a_{2q+1}), \quad a_i \in A, \quad 2 \leq 2q \leq n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим вначале, что в силу предыдущего пункта идеал $k_1^\wedge$ совпадает с правым идеалом $k_1^* R(A)$. В силу леммы 8 всякий элемент этого правого идеала представим в виде линейной комбинации элементов вида

- а) $k R(a_1, a_2) R(a_3, a_4) \cdots R(a_{2q-1}, a_{2q}) R(a_{2q+1})$, $a_i \in A$, $2 \leq 2q \leq n$;
- б) $(k, [A, A], A) R(A)$.

Пусть $z \in (k, [A, A], A)$. Тогда по лемме 6 имеем $(z, [A, A], A) = (0)$. Далее, в силу леммы 8 всякий элемент вида б) является линейной комбинацией слов вида

- с) $(k, [a, b], c) R(a_1, a_2) \cdots R(a_{2q-1}, a_{2q}) R(a_{2q+1})$, $a_i \in A$, $2 \leq 2q \leq n$.

Учитывая, наконец, что каждое из слов типа а) и с) имеет указанный в лемме вид, получаем требуемое утверждение.

4.3. Нильпотентность действия идеала $\text{St}(A)$ на $k_1^\wedge$.

Пусть I – идеал алгебры A . Обозначим через $T(I)^\wedge$ идеал, порожденный в алгебре умножений $T(A)$ операторами $T(x)$, $x \in I$. Заметим, что аннуляторы идеалов $T(I)^\wedge$ и I :

$$\begin{aligned} \text{Ann } T(I)^\wedge &:= \{x \in A \mid x T(I)^\wedge = (0)\}, \\ \text{Ann } I &= \{x \in A \mid x I = I x = (I, x, A) = (0)\} \end{aligned}$$

совпадают в силу леммы о переработке операторных слов.

ТЕОРЕМА 3. Пусть A – конечно порожденная бинарно $(-1, 1)$ -алгебра от n порождающих, $K(A)$ – ее коммутативный центр. Тогда идеал $\text{St}(A)$ тождеств строго $(-1, 1)$ -алгебр¹ действует нильпотентно на идеале $(K(A), A, A)^\wedge$, причем индекс нильпотентности не превосходит числа $[n/2] + 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО представим в виде последовательности шагов.

1°. Проверим вначале справедливость включений:

$$[K_i(A), A] + (K_{i-1}(A), A, [A, A]) \subseteq \text{Ann}_p \text{St}(A) \quad (i \leq p),$$

где $\text{Ann}_p(I) = \text{Ann}[T(I)^\wedge]^p$; $K_1(A) := (K(A), A, A)$, $K_p(A) := (K_{p-1}(A), A, A)$.

Заметим, что в силу теоремы 1 верно: $(K(A), A, [A, A]) \subseteq \text{Ann St}(A)$. Отсюда на основании леммы 1 $[K_1(A), A] \subseteq \text{Ann St}(A)$, т.е. в факторалгебре $B = A / \text{Ann St}(A)$ верно включение: $(K_1(B), B, [B, B]) \subseteq \text{Ann St}(B)$, следовательно,

$$(K_1(A), A, [A, A]) \subseteq \text{Ann}_2 \text{St}(A) \quad \text{или} \quad [K_2(A), A] \subseteq \text{Ann}_2 \text{St}(A).$$

Рассуждая аналогично, получаем требуемые включения.

2°. Положим $\text{St}_0(B) = [[B, B], B]$ и докажем, что если элемент $k_0 \in K(B)$ удовлетворяет условию

$$(k_0, B, B) + ((k_0, B, B), B, B) \subseteq K(B), \quad (23)$$

¹ Алгебра называется *строгой*, если она удовлетворяет тождеству $[[x, y], z] = 0$.

то

$$(k_0, B, B)B^\# \cdot \text{St}_0(B) + \text{St}_0(B) \cdot (k_0, B, B)B^\# = (0). \quad (24)$$

Прежде всего заметим, что ввиду леммы 1 из включений (23) получаются равенства:

$$(k_0, B, [B, B]) = ((k_0, B, B), B, [B, B]) = (0). \quad (25)$$

Следуя доказательству теоремы 1 и учитывая, что отображение $R(x, k_0)$ является дифференцированием алгебры B , последовательно получаем:

а) $(w, x, k_0) = 0$, где w – произведение коммутаторов;

б) $(B, B, [B, B])R(x, k_0) = (0)$.

Действительно, в силу (25) имеем:

$$\begin{aligned} (B, B, [B, B])R(x, k_0) &\subseteq (BR(x, k_0), B, [B, B]) \\ &\quad + (B, BR(x, k_0), [B, B]) + (B, B, [BR(x, k_0), B]) = (0); \end{aligned}$$

в) $[[B, B], B]B \subseteq [B, B] + [B, B] \cdot [B, B] + (B, B, [B, B])$.

Достаточно воспользоваться тождествами (3) и (4);

г) $(\text{St}_0(B) \cdot B, B, k_0) = (0)$;

е) $\text{St}_0(B) \cdot (k_0, B, B) = (0)$.

Отсюда немедленно следует справедливость требуемых равенств (24).

3°. Пусть m – максимальное число операторов вида $R(a, b)$, участвующих в записи линейных порождающих идеала $k_1^\wedge$; $m \leq [n/2] + 1$ в силу леммы 9. На основании п. 1° в алгебре A по модулю $\text{Ann}_m \text{St}(A)$ выполнены равенства:

$$[K_i(A), A] = (0), \quad \text{если } i \leq m.$$

Применяя теперь п. 2°, получаем

$$(k, A, A)^\wedge \cdot \text{St}_0(A) + \text{St}_0(A) \cdot (k, A, A)^\wedge \subseteq \text{Ann}_m \text{St}(A),$$

откуда вытекает включение $(K(A), A, A) \subseteq \text{Ann}_{m+1} \text{St}(A)$.

4.4. Базисный ранг многообразия бинарно $(-1, 1)$ -алгебр. Обозначим через $H(x, y)$ отображение $zH(x, y) = (z, x, (x, x, y))$, являющееся дифференцированием во всякой бинарно $(-1, 1)$ -алгебре. Функцию $zH(x, y)$ назовем *функцией Хенцеля–Смита*. В работе [8] доказано, что эта функция на любой бинарно $(-1, 1)$ -алгебре принимает значения из коммутативного центра.

ТЕОРЕМА 4. Пусть A – свободная конечно порожденная бинарно $(-1, 1)$ -алгебра ранга $n \geq 3$. Вполне характеристический идеал $HS(A)$, порожденный функцией Хенцеля–Смита, разреши́м.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим сначала, что произведение дифференцирований Хенцеля–Смита равно нулю:

$$H(a, b)H(x, y) = 0. \quad (26)$$

В самом деле, поскольку $cH(a, b) \in K(A) \subseteq V(A)$, то, положив $k := cH(a, b)$, имеем на основании линеаризованного тождества $(y, x, (x, x, y)) = 0$ (см. [4]):

$$kH(x, y) = (k, x, (x, x, y)) = -(y, x, (x, x, k)) = 0.$$

Далее, в силу теоремы 3 для некоторого числа $q = q(n)$ справедливо включение

$$(K(A), A, A) \subseteq \text{Ann}_q \text{St}(A).$$

Следовательно, по модулю $\text{Ann}_q \text{St}(A)$ имеем $k \in Z(A)$, $k^\wedge = k \cdot A^\#$ и

$$(HS(A))^N = (k_1 k_2 \cdots k_N) \cdot A^\#,$$

где k_i – элементы Хенцеля–Смита. Поскольку отображение $H(a, b)$ является дифференцированием, то можно считать, что k_i имеют вид $k_i = x_i H(a, b)$, где x_i – подходящие порождающие алгебры A . Осталось понять, что для некоторого числа N верно равенство $k_1 k_2 \cdots k_N = 0$. В силу равенства (26) имеем

$$0 = (z^2)H(a, b)H(x, y) = 2[zH(a, b) \cdot z]H(x, y) = 2zH(a, b) \cdot zH(x, y),$$

откуда ввиду центральности элементов k_i получаем равенство $k_1 k_2 \cdots k_N = 0$ для числа N равного $n + 1$. Тем самым, доказана нильпотентность T -идеала $HS(A)$ по модулю $\text{Ann}_q \text{St}(A)$. Применив теперь теорему о нильпотентности ассоциаторного идеала конечно порожденной $(-1, 1)$ -алгебры [1], получаем разрешимость идеала $HS(A)$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Во всякой 2-порожденной $(-1, 1)$ -алгебре идеал Хенцеля–Смита равен нулю (это вытекает из центральности ассоциаторного идеала 2-порожденной $(-1, 1)$ -алгебры [20]).

ТЕОРЕМА 5. *Многообразие бинарно $(-1, 1)$ -алгебр имеет бесконечный базисный ранг.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду теоремы 4 достаточно проверить, что функция HS отлична от нуля в первичной неассоциативной $(-1, 1)$ -алгебре P (существование таких алгебр доказано в [17]). От противного, пусть в алгебре P верно тождество $zH(x, y) = 0$, т.е.

$$(z, x, (x, x, y)) = 0. \quad (27)$$

Напомним, что во всякой $(-1, 1)$ -алгебре справедливо тождество Роомельди [18]:

$$(y, x, (x, x, z)) = 2(x, x, (y, z, x)).$$

Следовательно, ввиду тождества (27) получаем

$$(x, x, (y, z, x)) = 0. \quad (28)$$

Пусть $k \in K(P)$. Проведя линейаризации тождеств (27) и (28), ввиду тождества (13) и включения $(x, y, k) \in K(P)$ получаем

$$(z, k, (x, x, y)) + 3(z, x, (x, k, y)) = 0, \quad (29)$$

$$(k, x, (y, z, x)) = 0. \quad (30)$$

Учитывая, что $R(x, k)$ – дифференцирование алгебры P , имеем

$$0 = ((y, z, x), x, k) = ((y, x, k), z, x) + (y, (z, x, k), x). \quad (31)$$

Заметим, что ввиду (29) и (30) функция $(y, (z, x, k), x)$ кососимметрична по y, z . Тогда ввиду (31) имеем:

$$\begin{aligned} 0 &= ((y, x, k), z, x) - (z, (y, x, k), x) = ((y, x, k), z, x) + (z, x, (y, x, k)) \\ &= -(x, (y, x, k), z) = (z, (y, x, k), x). \end{aligned}$$

Следовательно, $(z, x, (x, k, y)) = 0$ и из (29) $(z, k, (x, x, y)) = 0$. Отсюда немедленно получаем $(P, P, k) \cdot D(P) = (0)$, а значит, $K(P) = Z(P)$, что невозможно ввиду тождества строгости $[[x, y], z] = 0$, выполняющегося в алгебре P .

ЗАМЕЧАНИЕ. Напомним, что многообразия $(-1, 1)$ -алгебр и альтернативных алгебр имеют бесконечный базисный ранг [1], [13]. Проблема бесконечности базисного ранга многообразия правоальтернативных (впрочем, как и йордановых) алгебр до сих пор остается открытой.

§ 5. Теоремы о центральных идеалах

Всюду в этом параграфе, если не оговорено противное:

A — конечно порожденная бинарно $(-1, 1)$ -алгебра, $X_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ — множество ее порождающих;

M — модуль над алгеброй A в многообразии бинарно $(-1, 1)$ -алгебр, т.е. расщепляемое нулевое расширение $S = A \oplus M$ алгебры A и модуля M является бинарно $(-1, 1)$ -алгеброй;

$m \in M$; $k \in K(M) := K(S) \cap M$; $a, b, x, y, z \in A$.

5.1. Модули над ассоциативно-коммутативными алгебрами. В этом пункте мы считаем, что A — ассоциативно-коммутативная алгебра, и будем следовать схеме, впервые предложенной И. П. Шестаковым [19] для случая альтернативных модулей.

ЛЕММА 10. *Идеал $R(A, A)^\wedge$, порожденный в алгебре умножений $T^M(A)$ операторами $R(x, y)$, где $x, y \in A$, нильпотентен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу тождества Клейнфелда (8) оператор $R(x, y)$ является дифференцированием, т.е.

$$[R(x, y), T(z)] = 0. \quad (32)$$

Значит, оператор $R(x, y)$ лежит в центре алгебры $T^M(A)$. Отсюда вытекает, что для доказательства нильпотентности идеала $R(A, A)^\wedge$ достаточно проверить нильпотентность множества $R(A, A)$.

Заметим, что тождество (7) ввиду коммутативности алгебры A позволяет записать операторное равенство:

$$R(xy, z) = R(x, z)R(y) + R(y, z)R(x). \quad (33)$$

Используя соотношения (32) и (33), легко понять, что множество $R(A, A)$ нильпотентно индекса $\leq [n/2] + 1$, где n — число порождающих алгебры A . В самом деле, в силу тождества Клейнфелда (10) $R(x, y)^2 = 0$, и после линеаризации по переменной y на основании (32) имеем:

$$R(x, y)R(x, z) = 0. \quad (34)$$

Далее, в силу тождеств (32) и (33) всякое операторное слово вида

$$R(a_1, b_1)R(a_2, b_2) \cdots R(a_p, b_p)$$

представимо в виде линейной комбинации слов

$$R(y_1, z_1)R(y_2, z_2) \cdots R(y_p, z_p) \cdot \rho, \quad (35)$$

где y_i, z_i — порождающие алгебры A , $\rho \in R(A)$. Рассмотрим ненулевое слово вида (36). В силу (34) можно считать, что все порождающие y_i, z_i , входящие в запись слова (35), попарно различны. Тогда $2p \leq n$, в противном случае слово (35) равно нулю.

ЛЕММА 11. Идеал $T(A, A)^\wedge$, порожденный в алгебре умножений $T^M(A)$ операторами $R(x, y)$ и $L(x, y)$, где $x, y \in A$, нильпотентен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 10 идеал $R(A, A)^\wedge$ нильпотентен, и, следовательно, рассуждая индукцией по индексу его нильпотентности, без ограничения общности можно считать, что верны следующие утверждения.

1°. Модуль M ассоциативен справа.

Пусть $L(A, A)^\wedge$ – идеал алгебры умножений $T^M(A)$, порожденный операторами $L(x, y)$.

2°. Идеал $L(A, A)^\wedge$ линейно порождается элементами вида

$$L(x, y)\xi, \quad \text{где } x, y \in A, \quad \xi \in T^M(A).$$

Из тождества Тейхмюллера $(xy, z, t) - (x, yz, t) + (x, y, zt) = x(y, z, m) + (x, y, z)t$ имеем: $(xy, z, m) - (x, yz, m) + (x, y, zm) = x(y, z, m)$, значит,

$$L(z)L(x, y) = -L(xy, z) + L(x, yz) + L(y, z)L(x).$$

Используя правое тождество Муфанг, получаем

$$(x, y, mz) + (x, m, yz) = (x, m, y)z,$$

откуда

$$R(z)L(x, y) = L(x, yz) - L(x, y)R(z).$$

Из указанных операторных соотношений и получается требуемое утверждение.

3°. Идеал $L(A, A)^\wedge$ действует нулевым образом на центре $K(M)$.

В самом деле, достаточно проверить в силу п. 2°, что

$$K(M)L(x, y) = (0).$$

Однако, это равенство немедленно вытекает из тождества (13) и ассоциативности справа модуля M .

В силу п. 3° можно считать без ограничения общности, что

4°. $K(M) = (0)$.

5°. (а) Функция $L(x, y)$ кососимметрична по x, y ;

(б) $L(xy, z) + L(yz, x) + L(zx, y) = 0$;

(с) $L(x, y)L(x, z) = 0$.

Для доказательства (а) линеаризуем тождество (1)

$$[(x, x, m), y] + [(x, x, y), m] = 0,$$

откуда ввиду ассоциативности алгебры A второе слагаемое равно нулю, т.е. $(x, x, m) \in K(M)$. Ввиду п. 4° отсюда получаем $(x, x, m) = 0$ или $L(x, x) = 0$, откуда и вытекает требуемое утверждение (а).

Для доказательства (б) проверим сначала, что $L(x^2, x) = 0$. Используя (а) и правую альтернативность, имеем:

$$2aL(x^2, x) = (x^2, x, a) - (x, x^2, a) = S(x^2, x, a) - (a, x^2, x) = 0.$$

Из коммутативности алгебры A и линейаризации тождества $L(x^2, x) = 0$ получается равенство, указанное в (b).

Для проверки (c) проведем линейаризацию центральной функции Хенцеля–Смита $(z, x, (x, x, y)) \in K(S)$:

$$(z, m, (x, x, y)) + (z, x, (m, x, y)) + (z, x, (x, m, y)) \in K(M).$$

Учитывая теперь снова п. 4°, ассоциативность алгебры A , ассоциативность справа модуля M , тождество правой альтернативности, а также (a), получаем требуемое равенство из (c).

6°. Функция $f(a_1, b_1, \dots, a_p, b_p) := L(a_1, b_1) \cdots L(a_p, b_p)$ является кососимметрической по всем переменным и удовлетворяет свойству:

$$f(xy, z) + f(yz, x) + f(zx, y) = 0, \quad (36)$$

где $f(x, y) = f(x, y, a_2, b_2, \dots, a_p, b_p)$.

Эти утверждения немедленно получаются из предыдущего пункта.

7°. $f(a_1, b_1, \dots, a_p, b_p) = 0$, если $p \geq [(n+1)/2] + 1$.

Допустим, что значение функции f в указанной точке отлично от 0. Тогда в силу кососимметричности функции f и равенства (36) можно считать, что элементы $a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_{p-1}$ являются различными порождающими из множества X_n . Значит, $2p-1 \leq n$, $2p \leq n+1$, $p \leq [(n+1)/2]$.

8°. Из пп. 2° и 7° вытекает нильпотентность идеала $L(A, A)^\wedge$, а значит, в силу леммы 10 и нильпотентность идеала $T(A, A)^\wedge$.

5.2. Вспомогательные леммы.

ЛЕММА 12. Пусть A – конечно порожденная бинарно $(-1, 1)$ -алгебра; k – ядерный элемент, т.е. $k \in U_K(A)$. Тогда идеал $T^A(A')$, порожденный в алгебре умножений $T(A)$ операторами $T(w)$, где $w \in A'$, действует нильпотентно на идеале $k_1^\wedge$, причем индекс нильпотентности не превосходит некоторого числа, зависящего только от ранга алгебры A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $k_1 \in (k, A, A)$, $k_1^\wedge$ – идеал, порожденный данным элементом. Заметим сначала, что из доказательства теоремы 3 (см. п. 2°) вытекает включение $k_1 \in \text{Ann St}(A)$.

Далее, если $a_1, a_2, \dots, a_t \in A$, то по лемме 9 любой элемент вида

$$k_1 T(a_1) \cdots T(a_t) \quad (37)$$

представим (с сохранением состава) в виде линейной комбинации элементов

$$k_1 R(b_1) \cdots R(b_p), \quad \text{где } p \leq n+1. \quad (38)$$

Известно [21], что коммутант конечно порожденной строго $(-1, 1)$ -алгебры порождается конечным множеством элементов; пусть $\{u_1, \dots, u_m\}$ – множество порождающих коммутанта. Обозначим через Y_m множество $\{y_1, \dots, y_m\}$. Для доказательства нильпотентности действия коммутанта A' на идеале $k_1^\wedge$ рассмотрим произвольное слово ξ вида (37) такое, что среди элементов $a_1, \dots, a_t$ найдется N элементов $w_1, w_2, \dots$ из коммутанта A' . Заменяем в слове ξ каждый элемент u_i на y_i . Обозначим новое слово через $\xi(y)$. Тогда, переработав слово $\xi(y)$ в линейную комбинацию слов вида (38), можно считать, что слово $\xi(y)$ имеет вид

$\xi(y) = R(b_1) \cdots R(b_p)$, степень которого относительно множества Y_m равна N . Взяв достаточно большое число N , получим, что хотя бы одно из слов b_i имеет достаточно высокую степень относительно множества Y_m . Но тогда при подстановке вместо переменных y_i коммутаторов u_i элемент b_j окажется в идеале $\text{St}(A)$. Поскольку идеал $\text{St}(A)$ действует тривиально на идеал $k_1^\wedge$, то идеал $T^A(A')$ действует на идеале $k_1^\wedge$ нильпотентно.

ЛЕММА 13. *Если k – ядерный элемент, то на идеале $(k, A, A)^\wedge$ алгебра $R^{(-)}$ действует нильпотентно индекса 2.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что поскольку k – ядерный элемент, то по лемме 1 справедливо равенство

$$(k, a, [x, y]) = 0. \quad (39)$$

Поскольку $L(k, a) \in \text{Der}(A)$, т.е. является дифференцированием алгебры A , ввиду тождеств (13) и (8), то из (39) имеем

$$(k, a, [x, y] \cdot [z, t]) = 0. \quad (40)$$

Аналогично,

$$(k, a, ([x, y], b, c)) = ((k, a, [x, y]), b, c) + ([x, y], (k, a, b), c) + ([x, y], b, (k, a, c)) = 0$$

и

$$(k, a, (b, c, [x, y])) = (0),$$

т.е.

$$(k, a, ([x, y], b, c)) = (k, a, (b, c, [x, y])) = 0. \quad (41)$$

Проверим, что $[[k_1 c, x], y] = 0$, где $k_1 = (k, a, b) \in K(A)$. Поскольку k_1 – ядерный элемент, то в силу леммы 1 верно равенство

$$(k_1, c, [x, y]) = 0. \quad (42)$$

Далее, используя (14), последовательно получаем

$$\begin{aligned} 2[k_1 c, x] &= 2k_1[c, x] + 3(k_1, c, x), \\ 2[[k_1 c, x], y] &= 2k_1[[c, x], y] + 3(k_1, [c, x], y) = 2k_1[[c, x], y] \quad \text{ввиду (42),} \\ k_1[[c, x], y] &= (k, a, b)[[c, x], y] = (k, a[[c, x], y], b) \quad \text{ввиду (7) и (39)} \\ &= (k, [a[c, x], y] - [a, y][c, x] - 2(a, [c, x], y) - (y, a, [c, x]), b) \quad \text{ввиду (3)} \\ &= -(k, 2(a, [c, x], y) + (y, a, [c, x]), b) \quad \text{ввиду (39) и (40)} \\ &= 0 \quad \text{ввиду (41).} \end{aligned}$$

5.3. Теоремы о существовании центральных идеалов. В работе [22] Хеншель, Клейнфелди Смит доказали, что в первичной конечно порожденной правовальтернативной алгебре коммутативный центр совпадает с центром. Для бинарно $(-1, 1)$ -алгебр справедлив следующий более сильный результат.

ТЕОРЕМА 6. *В любой конечно порожденной бинарно $(-1, 1)$ -алгебре A либо коммутативный центр совпадает с центром, т.е. верно равенство $K(A) = Z(A)$, либо центр $Z(A)$ содержит ненулевой идеал алгебры A .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что существует ядерный элемент k , не лежащий в центре $Z(A)$. Тогда существует ненулевой элемент $k_1 \in (K, A, A)$. На идеале $k_1^\wedge$ идеал J алгебры умножений, порожденный операторами вида $R(x, y)$, $L(x, y)$, $T(w)$, где $w \in A'$, действует нильпотентно (см. леммы 10–12). Значит, существует элемент $0 \neq u \in k_1^\wedge$ такой, что $uJ = (0)$. Далее, в силу леммы 13, тождества (3) и равенства $u^\wedge J = (0)$ получаем, что $[[u^\wedge, A]^\wedge, A] = (0)$. Покажем, что отсюда вытекает существование ненулевого центрального идеала. Заметим, что идеал $u^\wedge$ лежит в ассоциативном центре, поскольку он аннулируется идеалом J . Если этот идеал не содержится в центре $Z(A)$, то $[u^\wedge, A] \neq (0)$ и тогда идеал $[u^\wedge, A]^\wedge$ является центральным.

Итак, можно считать, что каждый ядерный элемент из (K, A, A) равен нулю. Значит, в силу теоремы 2 получаем тождество $(k, a, [b, c]) = 0$, из которого вытекает ядерность произвольного элемента из (K, A, A) , значит, $(K, A, A) = (0)$ и $K(A) = Z(A)$.

ТЕОРЕМА 7. *Свободная бинарно $(-1, 1)$ -алгебра A_n конечного ранга $n \geq 3$ содержит ненулевой идеал, лежащий в ее центре $Z(A_n)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что свободная алгебра A_n не содержит идеалов из центра $Z(A_n)$. Тогда $K(A_n) = Z(A_n)$ по теореме 6.

Пусть $z_0 = ((x_1, x_1, x_2), x_3, (x_3, x_3, x_4))$. Так как $R(x_3, (x_3, x_3, x_4)) \in \text{Der}(A_n)$, то в силу центральности элементов Хенцеля–Смита имеем $z_0 \in K_1(A_n) = (0)$.

Если $n \geq 4$, то $z_0 \neq 0$ (см. теорему 5), противоречие.

Если же $n = 3$ и $z_0 = 0$, то рассмотрим в качестве z_1 элемент Хенцеля–Смита $x_1 H(x_2, x_3)$. Так как $z_1 \in Z(A_3)$, то, считая $H := H(x_2, x_3)$, получаем включения $[a, b]$, $(a, b, c) \in \text{Ker } H$. Следовательно, подпространство U , порожденное всевозможными коммутаторами и ассоциаторами, лежит в ядре $\text{Ker } H$, но тогда в $\text{Ker } H$ содержится и подалгебра U^* , порожденная множеством U .

Кроме того, $a[a, b]$, $a(a, b, c)$, $a(b, c, a) \in U$. Значит,

$$(aH)[a, b] = 0, \quad (aH)(a, b, c) = 0, \quad (aH)(b, c, a) = 0.$$

Рассмотрим функцию f вида

$$f = (aH)u_1 \cdots u_s, \quad (43)$$

где u_i – либо коммутаторы $[y_i, y_j]$, либо ассоциаторы (y_i, y_j, y_k) , и на указанном произведении некоторым образом расставлены скобки. Эта функция кососимметрична по переменным $a, y_1, y_2, \dots$, поскольку элемент (aH) центральный и, значит, может быть переставлен в произведении к любому из сомножителей u_i . Кроме того, эта функция обращается в нуль, если вместо одной из переменных $a, y_1, y_2, \dots$ подставить элемент из U^* . Далее, в силу тождеств

$$\begin{aligned} [ab, c] + [bc, a] + [ca, b] &= \frac{1}{2}J^{(-)}(a, b, c), \\ (a, x \circ y, z) + (a, y \circ z, x) + (a, z \circ x, y) &= 0 \end{aligned}$$

можно считать, что один из элементов, входящих в запись u_i , является порождающим, а поскольку ранг алгебры A_3 равен 3, то

$$(\exists s \leq 3) \quad f_s \in z_1 T(U^*)^s \neq 0, \quad f_s T(U) = (0).$$

Из тождеств (3) и (8) вытекает, что f_s — центральный элемент:

$$\begin{aligned} [f_s, c] &\in [z_1 T(U^*)^s, c] = z_1 [1 T(U^*)^s, c] = (0), \\ (f_s, r, s) &\in (z_1 T(U^*)^s, r, s) = z_1 (1 T(U^*)^s, r, s) = (0), \end{aligned}$$

поскольку элементы $z_1 [1 T(U^*)^s, c]$ и $z_1 (1 T(U^*)^s, r, s)$ имеют вид (43) и вместо одной из переменных, входящих в запись элемента u_1 , подставлен элемент из U^* .

Точно так же проверяется, что $f_s A_3 \subseteq Z(A_3)$, т.е. f_s порождает ненулевой центральный идеал алгебры A_3 .

Список литературы

1. Пчелинцев С. В. Нильпотентность ассоциаторного идеала свободного конечно порожденного $(-1, 1)$ -кольца // Алгебра и логика. 1975. Т. 14. №5. С. 543–571.
2. Филиппов В. Т. Тривиальные ядерные идеалы свободной альтернативной алгебры // Алгебра и логика. 1985. Т. 24. №6. С. 696–717.
3. Ильтяков А. В. Свободные альтернативные алгебры ранга 3 // Алгебра и логика. 1984. Т. 23. №2. С. 136–158.
4. Kleinfeld E., Smith H. F. Locally $(-1, 1)$ -rings // Comm. Algebra. 1975. V. 3. P. 219–237.
5. Smith H. F. Finite-dimensional locally $(-1, 1)$ -algebras // Comm. Algebra. 1979. V. 7. P. 177–191.
6. Пчелинцев С. В. О локально нильпотентном радикале в некоторых классах правоальтернативных колец // Сиб. матем. журн. 1976. Т. 17. №2. С. 340–360.
7. Пчелинцев С. В. Бинарно $(-1, 1)$ -ниль-алгебры // Матем. заметки. 1990. Т. 48. №1. С. 103–109.
8. Hentzel I. R., Smith H. F. Semiprime locally $(-1, 1)$ rings with minimal condition // Algebras Groups Geom. 1985. V. 2. P. 26–52.
9. Hentzel I. R., Smith H. F. Simple locally $(-1, 1)$ nil rings // J. Algebra. 1986. V. 101. P. 262–272.
10. Hentzel I. R. Nil-semisimple locally $(-1, 1)$ -rings // Bull. Iranian Math. Soc. 1981. V. 9. P. 11–14.
11. Скозырский В. Г. Правоальтернативные алгебры // Алгебра и логика. 1984. Т. 23. №2. С. 185–192.
12. Пчелинцев С. В. О центральных идеалах бинарно $(-1, 1)$ -алгебр конечного ранга // Международный алгебраический семинар. Тезисы докладов. М.: МГУ, мех-мат, 2000. С. 47–48.
13. Пчелинцев С. В. Определяющие тождества одного многообразия правоальтернативных алгебр // Матем. заметки. 1976. Т. 20. №2. С. 161–176.
14. Жевлаков К. А., Слинко А. М., Шестаков И. П., Ширинов А. И. Кольца, близкие к ассоциативным. М.: Наука, 1978.
15. Kleinfeld E. Right alternative rings // Proc. Amer. Math. Soc. 1953. V. 4. P. 939–944.
16. Thedy A. Right alternative rings // J. Algebra. 1975. V. 37. P. 1–43.
17. Пчелинцев С. В. Первичные алгебры и абсолютные делители нуля // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1986. Т. 50. №1. С. 79–100.
18. Роомельди Р. Э. Центры свободного $(-1, 1)$ -кольца // Сиб. матем. журн. 1977. Т. 18. №4. С. 861–867.
19. Шестаков И. П. Альтернативные алгебры с тождеством $[x, y]^m = 0$ // Алгебра и логика. 1981. Т. 20. №5. С. 575–596.

- 20. *Hentzel I. R.* The characterization of $(-1, 1)$ -rings // *J. Algebra*. 1974. V. 30. № 1–3. P. 236–258.
- 21. *Пчелинцев С. В.* Теорема о высоте для альтернативных алгебр // *Матем. сб.* 1984. Т. 124. № 4. С. 557–567.
- 22. *Hentzel I. R., Kleinfeld E., Smith H. F.* Commutative center = center in a prime finitely generated right alternative ring // *Comm. Algebra*. 1997. V. 25. № 10. P. 3147–3153.

Московский городской
педагогический университет

Поступила в редакцию
10.07.2001