Общероссийский математический портал

Н. Н. Холщевникова, Объединение множеств единственности кратных рядов – Уолша и тригонометрических, *Матем. сб.*, 2002, том 193, номер 4, 135–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm647>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 15:53:44

УДК 517.5

Н. Н. Холщевникова

Объединение множеств единственности кратных рядов – Уолша и тригонометрических

Для случая сходимости кратных рядов Уолша и тригонометрических по прямоугольникам исследуются вопросы об объединении множеств единственности, о формальном произведении рядов, о принципе локализации для суммируемых функций и аналогах теоремы И. И. Привалова о единственности представления функции рядом.

Библиография: 15 названий.

Напомним результаты о единственности кратных рядов Уолша и кратных тригонометрических рядов для случая сходимости по прямоугольникам, на которые будем ссылаться в дальнейшем.

В работах В. А. Скворцова [1] и Х. О. Мовсисяна [2] доказана

ТЕОРЕМА А (Скворцов, Мовсисян). *Пусть кратный ряд Уолша сходится по прямоугольникам всюду, кроме, быть может, счетного множества, к конечной суммируемой функции f . Тогда этот ряд является рядом Фурье функции f .*

Из теоремы А следует, что счетное множество является множеством единственности кратных рядов Уолша. В 1989 г. С. Ф. Лукомский [3] доказал, что не только счетные множества будут множествами единственности. В частности, справедливы:

ТЕОРЕМА В (Лукомский). *Пусть $E \subset [0, 1)^{d-1}$ ($d \geq 2$). Множество $E \times [0, 1)$ есть множество единственности для d -кратного ряда Уолша тогда и только тогда, когда E есть множество единственности для $(d-1)$ -кратного ряда Уолша.*

ТЕОРЕМА С (Лукомский). *Пусть $E \subset [0, 1)^d$ ($d \geq 2$), $E_{x_2, \dots, x_d} = \{x_1 : (x_1, x_2, \dots, x_d) \in E\}$, $(x_2, \dots, x_d) \in [0, 1)^{d-1}$, $A = \{(x_2, \dots, x_d) : E_{x_2, \dots, x_d} \text{ более чем счетно}\}$. Если A – множество единственности для $(d-1)$ -кратного ряда Уолша, то E – множество единственности для d -кратного ряда Уолша.*

Отсюда, в частности, следует, что множество $E \subset [0, 1)^d$, состоящее из конечного или счетного числа частей гиперплоскостей, является множеством единственности.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00355).

Это редкий случай, когда результаты единственности для рядов Уолша опередили соответствующие результаты для тригонометрических рядов. До 1990 г. было неизвестно, является ли пустое множество множеством единственности для кратных тригонометрических рядов (для сходимости по прямоугольникам) в случае размерности большей двух. Для двойных тригонометрических рядов Дж. М. Эш и Г. В. Вэлланд в 1972 г. [4] доказали, что пустое множество и одноточечное множество являются множествами единственности, но будет ли также и двухточечное множество множеством единственности было неизвестно. В 1990 г. Ш. Т. Тетунашвили [5] доказал, что любое счетное множество является множеством единственности для d -кратного тригонометрического ряда. Ш. Т. Тетунашвили также доказаны для кратных тригонометрических рядов теоремы в духе теорем А, В и С.

Фундаментальным структурным результатом для множеств единственности тригонометрических рядов является полученная Н. К. Бари в 1923 году

ТЕОРЕМА БАРИ. *Объединение счетного числа замкнутых множеств единственности является множеством единственности.*

Для рядов по системе Уолша в нумерации Пэли аналог теоремы Бари в случае объединения конечного числа замкнутых множеств единственности доказал А. А. Шнейдер в 1949 г., а для счетного объединения – В. Р. Вэйд в 1971 г. В доказательствах этих теорем существенно используются теоремы о формальном произведении и принцип локализации, которые в общем не выполняются для кратных рядов. Сужая классы кратных рядов Уолша и кратных тригонометрических рядов таким образом, чтобы поведение рядов этих классов было подобно поведению одномерных рядов, мы получим с их помощью ряд результатов об объединении множеств единственности для кратных рядов. Сформулируем один из них.

ТЕОРЕМА 9'. *Пусть $E_k \subset (0, 1)^d$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) – замкнутые множества единственности меры 0 для d -кратных рядов Уолша (для сходимости по прямоугольникам). Тогда $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ тоже является множеством единственности.*

Заметим, что по сравнению с одномерным случаем в этой теореме два дополнительных условия: $E_k \subset (0, 1)^d$, а не $E_k \subset [0, 1)^d$, и E_k меры 0, которые обсуждаются в дальнейшем.

§1. Кратные ряды Уолша

Приведем теперь необходимые определения и обозначения.

Обозначим через Q_2 множество двоично-рациональных чисел из отрезка $[0, 1]$.

Функции Уолша в нумерации Пэли определяются следующим образом (см., например, [6; (1.2.12)]):

$$w_n(x) = (-1)^{\sum_{i=0}^k \varepsilon_i x_i}, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad x \in [0, 1), \quad (1)$$

где $\{x_i\}$ – последовательность знаков двоичного разложения числа x (т.е. $x = \sum_{i=0}^{\infty} x_i 2^{-i-1}$, где $x_i = 0$ или 1), причем для $x \in Q_2$ берется разложение с конечным числом единиц; а ε_i определены равенством $n = \sum_{i=0}^k \varepsilon_i 2^i$ ($k = k(n)$), где $\varepsilon_i = 0$ или 1 ($i = 0, 1, \dots, k$).

Если $n = \sum_{i=0}^k \varepsilon_i 2^i$ и $\nu = \sum_{i=0}^k \eta_i 2^i$, где $\varepsilon_i, \eta_i = 0$ или 1 , то по определению

$$n + \nu = \sum_{i=0}^k \theta_i 2^i, \quad \text{где } \theta_i = \varepsilon_i + \eta_i \pmod{2} \quad (i = 0, 1, \dots, k). \quad (2)$$

Равенство (см. [6; (1.2.17)])

$$w_n(x) \cdot w_\nu(x) = w_{n+\nu}(x), \quad (3)$$

вытекающее из (1) и (2), позволяет, в частности, определить формальное произведение ряда по системе Уолша на полином.

Рассмотрим кратные ряды Уолша и сходимость по прямоугольникам: d -кратный ряд Уолша

$$\sum_{k_1=0, \dots, k_d=0}^{\infty} a_{k_1 \dots k_d} w_{k_1}(x_1) \cdots w_{k_d}(x_d) \quad (4)$$

сходится по прямоугольникам в точке $(t_1, \dots, t_d)$ к числу s , если его частные суммы

$$S_{N_1 \dots N_d}(t_1, \dots, t_d) = \sum_{k_1=0}^{N_1} \cdots \sum_{k_d=0}^{N_d} a_{k_1 \dots k_d} w_{k_1}(t_1) \cdots w_{k_d}(t_d)$$

стремятся к s , когда $\min(N_1, \dots, N_d) \rightarrow \infty$.

Далее под сходимостью кратного ряда везде понимаем сходимость по прямоугольникам.

Через $\mathcal{H}_d$ обозначим класс d -кратных рядов Уолша (4) таких, что для каждого $1 \leq i \leq d$

$$\lim_{\min_{1 \leq j \leq d} N_j \rightarrow \infty} \sum_{k_1=0}^{N_1} \cdots \sum_{k_{i-1}=0}^{N_{i-1}} \sum_{k_{i+1}=0}^{N_{i+1}} \cdots \sum_{k_d=0}^{N_d} a_{k_1 \dots k_{i-1} N_i k_{i+1} \dots k_d} \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^d w_{k_r}(x_r) = 0 \quad (5)$$

для всех $(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_d) \in [0, 1)^{d-1}$.

Укажем некоторые достаточные условия принадлежности ряда классу $\mathcal{H}_d$.

Множество $A \subset [0, 1)^d$ назовем *существенным* (для d -кратных рядов Уолша), если на всяком координатном отрезке

$$t_i = t, \quad 0 \leq t < 1, \quad t_j = c_j \quad (j \neq i), \quad \text{где } c_j \in [0, 1) \quad (i = 1, 2, \dots, d),$$

найдется точка множества A .

Другими словами, множество A существенное, если оно содержит d поверхностей вида

$$x_i = f_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_d) \quad (i = 1, 2, \dots, d), \quad (6)$$

где f_i — произвольные функции из $[0, 1)^{d-1}$ в $[0, 1)$.

В частности, множество A , состоящее из d сечений куба координатными гиперплоскостями $x_i = c_i, c_i \in [0, 1)$ ($i = 1, 2, \dots, d$), является существенным.

ЛЕММА 1. Если ряд S вида (4) сходится на некотором существенном множестве A , то S — ряд класса $\mathcal{H}_d$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как отмечено, множество A содержит d поверхностей вида (6). Пусть $i, 1 \leq i \leq d$, фиксировано. Тогда ввиду сходимости S на i -й поверхности

$$S_{N_1 \dots N_i \dots N_d}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_d) - S_{N_1 \dots N_i - 1 \dots N_d}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_d) \rightarrow 0,$$

если $\min_{i \leq j \leq d} N_j \rightarrow \infty$,

$$x_i = f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_d), \quad (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_d) \in [0, 1)^{d-1}.$$

Данная разность частичных сумм отличается от суммы в формуле (5) множителем $w_i(f_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_d))$, и так как $w_i(t) = \pm 1$, то отсюда следует, что условие (5) выполняется. Лемма доказана.

Множество $E \subset [0, 1)^d$ называется *множеством единственности для d -кратных рядов Уолша*, коротко, *U -множеством*, если из сходимости ряда вида (4) к нулю на $[0, 1)^d \setminus E$ следует, что все коэффициенты ряда равны нулю.

Множество $E \subset [0, 1)^d$ называется *множеством единственности для класса $\mathcal{K}_d$* , коротко, *$U(\mathcal{K}_d)$ -множеством*, если из сходимости ряда класса $\mathcal{K}_d$ к нулю на $[0, 1)^d \setminus E$ следует, что все коэффициенты ряда равны нулю.

Множество $E \subset [0, 1)^d$ называется *M -множеством* (*M -множеством для класса $\mathcal{K}_d$* , коротко, *$M(\mathcal{K}_d)$ -множеством*), если оно не является U -множеством ($U(\mathcal{K}_d)$ -множеством).

Обозначим также через $U, U(\mathcal{K}_d), M, M(\mathcal{K}_d)$ семейства соответствующих множеств.

Из определений следует, что $U \subset U(\mathcal{K}_d), M(\mathcal{K}_d) \subset M$, т.е. всякое U -множество является $U(\mathcal{K}_d)$ -множеством и всякое $M(\mathcal{K}_d)$ -множество является M -множеством.

ЛЕММА 2. Пусть $E \in U(\mathcal{K}_d)$ и A – существенное множество такое, что $E \cap A = \emptyset$. Тогда $E \in U$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует непосредственно из определений класса $\mathcal{K}_d$, U и $U(\mathcal{K}_d)$ -множеств и леммы 1.

Ряды S_1 и S_2 называются *равносходящимися на множестве E* , если их разность $S_1 - S_2$ сходится к нулю на E .

Если $E \subset [0, 1)^d$, то через $\chi_E(x_1, \dots, x_d)$ обозначается характеристическая функция множества E , т.е. функция, равная 1 на E и 0 вне E .

Для простоты будем дальше рассматривать двойные ряды Уолша, поясняя при необходимости результаты для d -мерного случая.

Пусть $p(x, y)$ – полином по системе Уолша

$$p(x, y) = \sum_{l=0}^r \sum_{s=0}^p c_{ls} w_l(x) w_s(y).$$

Равенство (3) позволяет определить формальное произведение двойного ряда S по системе Уолша

$$S = \sum_{k, m=0}^{\infty} a_{km} w_k(x) w_m(y) \quad (7)$$

на полином $p(x, y)$ как ряд

$$\tilde{S} = \sum_{k, m=0}^{\infty} \tilde{a}_{km} w_k(x) w_m(y), \quad \text{где} \quad \tilde{a}_{km} = \sum_{l=0}^r \sum_{s=0}^p c_{ls} a_{k+l, m+s}. \quad (8)$$

Нетрудно видеть, что если $f(x, y)$ – суммируемая функция и $S(f)$ – ее ряд Фурье–Уолша, то формальное произведение $S(f)$ на $p(x, y)$ есть ряд Фурье–Уолша функции $p(x, y) \cdot f(x, y)$:

$$\tilde{S}(f) = S(p \cdot f). \quad (9)$$

Условия (5) принадлежности классу $\mathcal{K}_d$ для двойного ряда (7) выглядят следующим образом

$$\lim_{\min(N, M) \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N a_{kM} w_k(x) = 0, \quad x \in [0, 1), \quad (10)$$

и

$$\lim_{\min(N, M) \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^M a_{Nm} w_m(y) = 0, \quad y \in [0, 1). \quad (11)$$

Обозначим через $\mathcal{P}$ множество прямоугольников вида $\Pi = [\alpha, \beta) \times [\gamma, \delta)$, где $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in Q_2$.

Как известно (см., например, [6; п. 1.3.2]), если $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in Q_2$, то характеристические функции $\chi_{[\alpha, \beta)}(x)$ и $\chi_{[\gamma, \delta)}(y)$ являются полиномами по системе Уолша:

$$\chi_{[\alpha, \beta)}(x) = \sum_{l=0}^r c_l w_l(x), \quad \chi_{[\gamma, \delta)}(y) = \sum_{s=0}^p b_s w_s(y).$$

Так как $\chi_{\Pi}(x, y) = \chi_{[\alpha, \beta)}(x) \cdot \chi_{[\gamma, \delta)}(y)$, то в случае, когда $\Pi \in \mathcal{P}$,

$$\chi_{\Pi}(x, y) = \sum_{l=0}^r \sum_{s=0}^p c_l b_s w_l(x) w_s(y). \quad (12)$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть S – двойной ряд по системе Уолша класса $\mathcal{K}_2$. Для любого прямоугольника $\Pi \in \mathcal{P}$ существует ряд $\tilde{S}$ класса $\mathcal{K}_2$, равносходящийся с S на Π и сходящийся к нулю вне Π ($\tilde{S}$ есть формальное произведение S на полином $\chi_{\Pi}(x, y)$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\tilde{S}$ – формальное произведение S на полином $\chi_{\Pi}(x, y)$ (см. (12)) и q таково, что $p < 2^q$, $r < 2^q$. Рассмотрим разность частичных сумм рядов S и $\tilde{S}$ порядка N, M :

$$\begin{aligned} R_{NM}(x, y) &= S_{NM}(x, y) - \tilde{S}_{NM}(x, y) \\ &= \sum_{k=0}^N \sum_{m=0}^M a_{km} w_k(x) w_m(y) - \sum_{k=0}^N \sum_{m=0}^M \tilde{a}_{km} w_k(x) w_m(y) \end{aligned}$$

при $\min(N, M) \geq 2^q - 1$.

Заметим, что

$$\nu \cdot 2^q - 1 \leq N < (\nu + 1)2^q - 1, \quad \mu \cdot 2^q - 1 \leq M < (\mu + 1)2^q - 1 \quad (13)$$

для некоторых натуральных $\nu = \nu(N)$, $\mu = \mu(M)$.

Из формулы сложения (2) вытекает, что если $l < 2^q$, то $l + k$ пробегает все значения $0, 1, \dots, \nu \cdot 2^q - 1$, когда k пробегает значения от 0 до $\nu \cdot 2^q - 1$. Пользуясь этим результатом и формулой (3), получим

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{\nu \cdot 2^q - 1, \mu \cdot 2^q - 1}(x, y) &= \sum_{k=0}^{\nu \cdot 2^q - 1} \sum_{m=0}^{\mu \cdot 2^q - 1} \tilde{a}_{km} w_k(x) w_m(y) \\ &= \sum_{k=0}^{\nu \cdot 2^q - 1} \sum_{m=0}^{\mu \cdot 2^q - 1} \sum_{l=0}^r \sum_{s=0}^p c_l b_s a_{k+l, m+s} w_k(x) w_m(y) w_l^2(x) w_s^2(y) \\ &= \sum_{l=0}^r c_l w_l(x) \sum_{s=0}^p b_s w_s(y) \sum_{k=0}^{\nu \cdot 2^q - 1} \sum_{m=0}^{\mu \cdot 2^q - 1} a_{k+l, m+s} w_{k+l}(x) w_{m+s}(y) \\ &= \chi_{\Pi}(x, y) \cdot S_{\nu \cdot 2^q - 1, \mu \cdot 2^q - 1}(x, y). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\tilde{S}_{\nu \cdot 2^q - 1, \mu \cdot 2^q - 1}(x, y) = \begin{cases} S_{\nu \cdot 2^q - 1, \mu \cdot 2^q - 1}(x, y), & (x, y) \in \Pi, \\ 0, & (x, y) \in [0, 1]^2 \setminus \Pi. \end{cases} \quad (14)$$

Тогда для $(x, y) \in \Pi$

$$\begin{aligned} R_{NM}(x, y) &= \sum_{k=0}^N \sum_{m=\mu \cdot 2^q}^M (a_{km} - \tilde{a}_{km}) w_k(x) w_m(y) \\ &\quad + \sum_{k=\nu \cdot 2^q}^N \sum_{m=0}^{\mu \cdot 2^q} (a_{km} - \tilde{a}_{km}) w_k(x) w_m(y). \end{aligned} \quad (15)$$

Из (10), (11) и (13) следует, что

$$\lim_{\min(N, M) \rightarrow \infty} (S_{NM}(x, y) - S_{\nu \cdot 2^q - 1, \mu \cdot 2^q - 1}(x, y)) = 0, \quad (x, y) \in [0, 1]^2. \quad (16)$$

Покажем, что для ряда $\tilde{S}$ тоже выполняется условие (10). Действительно,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^N \tilde{a}_{kM} w_k(x) &= \sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^r \sum_{s=0}^p c_l s a_{k+l, m+s} w_k(x) w_l^2(x) \\ &= \sum_{l=0}^r \sum_{s=0}^p c_l s w_l(x) \sum_{k=0}^N a_{k+l, m+s} w_{k+l}(x) \\ &= \sum_{l=0}^r \sum_{s=0}^p c_l s w_l(x) \sum_{k=0}^{\nu \cdot 2^q - 1} a_{k, m+s} w_k(x) \\ &\quad + \sum_{l=0}^r \sum_{s=0}^p c_l s w_l(x) \sum_{k=\nu \cdot 2^q}^N a_{k+l, m+s} w_{k+l}(x). \end{aligned}$$

Так как $s \leq p$, $l \leq r$, то $m \div s \rightarrow \infty$, если $m \rightarrow \infty$, и $k \div l \rightarrow \infty$, если $k \rightarrow \infty$. Тогда из последних формул и условия (10) для ряда S вытекает, что для ряда $\tilde{S}$ тоже выполняется условие (10). Аналогично можно показать, что для ряда $\tilde{S}$ выполняется условие (11). Отсюда следует, что ряд $\tilde{S}$ является рядом класса $\mathcal{H}_2$. Тогда, аналогично формуле (16) для ряда S , для ряда $\tilde{S}$ имеем

$$\lim_{\min(N,M) \rightarrow \infty} (\tilde{S}_{NM}(x, y) - \tilde{S}_{\nu \cdot 2^q - 1, \mu \cdot 2^q - 1}(x, y)) = 0, \quad (x, y) \in [0, 1]^2. \quad (17)$$

Из (15), (16) и (17) следует, что

$$\lim_{\min(N,M) \rightarrow \infty} R_{NM}(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Pi,$$

т.е. ряды S и $\tilde{S}$ равносходятся на Π , а из (14) и (17) следует, что

$$\lim_{\min(N,M) \rightarrow \infty} \tilde{S}_{NM}(x, y) = 0, \quad (x, y) \in [0, 1]^2 \setminus \Pi.$$

Теорема доказана.

Доказанная теорема позволяет получить принцип локализации для рядов Фурье–Уолша класса $\mathcal{H}_2$, а именно справедлива

ТЕОРЕМА 2. Пусть $f(x, y)$ и $g(x, y)$ – суммируемые функции, ряды Фурье–Уолша которых $S(f)$ и $S(g)$ принадлежат классу $\mathcal{H}_2$. Если f и g совпадают на некотором открытом множестве G , то $S(f)$ и $S(g)$ равносходятся на G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(x_0, y_0) \in G$, и $\Pi \in \mathcal{P}$ – такой прямоугольник, что $(x_0, y_0) \in \Pi \subset G$. В силу теоремы 1 формальное произведение ряда $S(f)$ на полином $\chi_\Pi(x, y)$ – ряд $\tilde{S}_1$ – равносходится с $S(f)$ на Π , при этом ввиду (9) $\tilde{S}_1$ есть ряд Фурье функции $\chi_\Pi(x, y) \cdot f(x, y)$. Аналогично, формальное произведение ряда $S(g)$ на полином $\chi_\Pi(x, y)$ – ряд $\tilde{S}_2$ – равносходится с $S(g)$ на Π , причем $\tilde{S}_2$ есть ряд Фурье функции $\chi_\Pi(x, y) \cdot g(x, y)$. Но f и g совпадают на Π , поэтому $\tilde{S}_1 = \tilde{S}_2$. Отсюда вытекает, что $S(f)$ и $S(g)$ равносходятся на Π . Следовательно, $S(f)$ и $S(g)$ равносходятся и на G . Теорема доказана.

В 1923 г. И. И. Привалов [7] доказал следующую теорему:

если тригонометрический ряд сходится к конечной суммируемой функции f всюду, кроме, быть может, некоторого замкнутого U -множества, то этот ряд есть ряд Фурье функции f .

Аналог теоремы Привалова для системы Уолша получен В. А. Скворцовым [8] в 1973 г. Докажем некоторый аналог теоремы Привалова для кратных рядов Уолша класса $\mathcal{H}_2$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть ряд S класса $\mathcal{H}_2$ сходится по прямоугольникам всюду, за исключением, быть может, замкнутого $U(\mathcal{H}_2)$ -множества E , к конечной суммируемой функции f , причем ряд Фурье $S(f)$ функции f тоже класса $\mathcal{H}_2$. Тогда $S = S(f)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(x_0, y_0) \notin E$. Тогда найдется прямоугольник $\Pi \in \mathcal{P}$ такой, что $(x_0, y_0) \in \Pi$, $\Pi \cap E = \emptyset$. Ряд $\tilde{S}$, являющийся формальным произведением ряда S на полином $\chi_\Pi(x, y)$, равносходится с $\chi_\Pi \cdot S$ в силу теоремы 1. Следовательно, $\tilde{S}$ всюду сходится к суммируемой функции $\chi_\Pi \cdot f$. По теореме А Скворцова–Мовсисяна ряд $\tilde{S}$ является рядом Фурье–Уолша функции $\chi_\Pi \cdot f$: $\tilde{S} = S(\chi_\Pi \cdot f)$. Но в силу (9) ряд $S(\chi_\Pi \cdot f)$ совпадает с формальным произведением $S(f)$ на полином χ_Π , т. е. рядом $\tilde{S}(f)$ и, значит, $\tilde{S} = \tilde{S}(f)$. Так как $S(f)$ – ряд класса $\mathcal{K}_2$, то $\tilde{S}(f)$ равносходится с $\chi_\Pi \cdot S(f)$ и, следовательно, $S(f)$ сходится к f на Π . Отсюда вытекает, что $S(f)$ сходится к f всюду вне E . Таким образом, $S - S(f)$ сходится к нулю всюду вне E , и так как E является $U(\mathcal{K}_2)$ -множеством, то $S = S(f)$. Теорема доказана.

Ядром ряда S называется множество всех тех точек, в которых S не сходится к нулю.

ЛЕММА 3. Если $\mathcal{E}$ – ядро ряда S класса $\mathcal{K}_2$ и $\mathcal{E} \cap G \neq \emptyset$ для некоторого открытого множества G , то найдется ряд $\tilde{S}$ класса $\mathcal{K}_2$ с ядром $\mathcal{E}_1$, $\emptyset \neq \mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E} \cap G$; в частности, множество $\mathcal{E} \cap G$ является $M(\mathcal{K}_2)$ -множеством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем $(x_0, y_0) \in \mathcal{E} \cap G$ и прямоугольник $\Pi \in \mathcal{P}$ так, что $(x_0, y_0) \in \Pi \subset G$. Ряд $\tilde{S}$, являющийся формальным произведением S на полином $\chi_\Pi(x, y)$, в силу теоремы 1 будет искомым. Лемма доказана.

Приведем теперь некоторые результаты из [9], с помощью которых получим теоремы об объединении U -множеств.

Пусть X – топологическое пространство, $\mathcal{U}$ – семейство подмножеств X , обладающее тем свойством, что

$$\text{если } A \in \mathcal{U} \text{ и } A_1 \subset A, \text{ то } A_1 \in \mathcal{U}.$$

Такое семейство $\mathcal{U}$ называется *наследственным*.

Пусть $\mathcal{M}$ – семейство, дополнительное к $\mathcal{U}$, т. е. семейство множеств, не принадлежащих $\mathcal{U}$:

$$\mathcal{M} = \{A \subset X : A \notin \mathcal{U}\}.$$

Назовем множество $A \in \mathcal{M}$ *ядром*, если для всякого открытого множества G такого, что $A \cap G \neq \emptyset$, множество $A \cap G \in \mathcal{M}$.

Скажем, что $\mathcal{M}$ – *семейство со свойством ядра*, если каждое множество $E \in \mathcal{M}$ содержит подмножество A , являющееся ядром.

Замыкание множества $E \subset X$ будем обозначать через $\overline{E}$.

Множество N назовем *приведенным ядром ядра A* , если $N \subset A \subset \overline{N}$ и N не является множеством первой категории на себе.

Назовем $\mathcal{M}$ *семейством со свойством приведенного ядра*, если всякое ядро $A \in \mathcal{M}$ содержит приведенное ядро.

ТЕОРЕМА Д. Пусть X – топологическое пространство, $\mathcal{U}$ – наследственное семейство подмножеств X , $\mathcal{M}$ – дополнительное к $\mathcal{U}$ семейство со свойством ядра и со свойством приведенного ядра. Если $E_n \in \mathcal{U}$ и E_n замкнуты относительно своего объединения $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, то $E \in \mathcal{U}$.

Пусть $\mathcal{M}_1$ – подсемейство семейства $\mathcal{M}$. Скажем, что $\mathcal{M}_1$ – *подсемейство со свойством ядра*, если каждое множество $E \in \mathcal{M}_1$ содержит ядро, и что $\mathcal{M}_1$ –

подсемейство со свойством приведенного ядра, если всякое ядро A из $\mathcal{M}_1$ содержит приведенное ядро.

ТЕОРЕМА Е. Пусть X – топологическое пространство, $\mathcal{U}$ – наследственное семейство подмножеств X , $\mathcal{M}$ – дополнительное к $\mathcal{U}$ семейство, $\mathcal{M}_1$ – подсемейство $\mathcal{M}$ со свойством ядра и со свойством приведенного ядра. Если $E_n \in \mathcal{U}$, E_n ($n \in \mathbb{N}$) замкнуты относительно своего объединения $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ и $E \in \mathcal{U} \cup \mathcal{M}_1$, то $E \in \mathcal{U}$.

Напомним, что топологическое пространство X называется *полным метризуемым пространством* (в топологическом смысле), если на X можно определить метрику, порождающую топологию пространства X , и относительно этой метрики X – полное метрическое пространство. (Так $[0, 1]^d$ – полное метризуемое пространство, хотя как метрическое пространство с евклидовой метрикой в $\mathbb{R}^d$ не является полным.)

ТЕОРЕМА F. Пусть X – полное метризуемое пространство, $\mathcal{U}$ – наследственное семейство подмножеств X , $\mathcal{M}$ – дополнительное к $\mathcal{U}$ семейство со свойством ядра. Если $E_n \in \mathcal{U}$ ($n \in \mathbb{N}$), E_n замкнуты относительно своего объединения $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ и E типа G_δ , то $E \in \mathcal{U}$. Если, в частности, $E_n \in \mathcal{U}$, E_n замкнуты и E – замкнутое множество, то $E \in \mathcal{U}$.

ТЕОРЕМА K. Пусть X – полное метризуемое пространство, $\mathcal{U}$ – наследственное семейство подмножеств X , $\mathcal{M}$ – дополнительное к $\mathcal{U}$ семейство со свойством ядра. Тогда если $E_1, E_2 \in \mathcal{U}$ и

- 1) E_1 и E_2 – множества типа G_δ , а $E_1 \cap E_2$ – типа F_σ (в частности, пусто)

или

- 2) E_1 – множество типа G_δ и F_σ одновременно,

то $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{U}$.

Семейство $U(\mathcal{K}_2)$ является наследственным семейством, а $M(\mathcal{K}_2)$ – дополнительное к $U(\mathcal{K}_2)$ семейство – является в силу леммы 3 семейством со свойством ядра.

Отсюда и из теоремы F следует

ТЕОРЕМА 4. Пусть E_n – $U(\mathcal{K}_2)$ -множества, замкнутые относительно своего объединения $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, причем E имеет тип G_δ . Тогда E тоже является $U(\mathcal{K}_2)$ -множеством.

Из теоремы K и леммы 2 следует

ТЕОРЕМА 5. Пусть E_1 и E_2 являются U -множествами для двойных рядов Уолша, причем множество $[0, 1)^2 \setminus (E_1 \cup E_2)$ содержит какое-нибудь существовавшее множество. Тогда если

- 1) E_1 и E_2 – множества типа G_δ , а $E_1 \cap E_2$ – типа F_σ (в частности, пусто)

или

- 2) E_1 – множество типа G_δ и F_σ одновременно,

то $E_1 \cup E_2$ является U -множеством.

Теоремы 1–5 справедливы также для d -кратного случая ($d > 2$).

§ 2. Результаты, связанные со свойством приведенного ядра

В. А. Скворцовым [1] доказана теорема о том, что из сходимости двойного ряда Уолша (7) по прямоугольникам во всех точках “креста” $\{a \times [0, 1)\} \cup \{[0, 1) \times b\}$, за исключением, быть может, некоторого счетного множества, следует, что $\lim_{k+m \rightarrow \infty} a_{km} = 0$.

Покажем, что для рядов класса $\mathcal{K}_2$ поведение коэффициентов такое же.

ТЕОРЕМА 6. *Пусть для двойного ряда Уолша (7) выполнены условия*

$$\lim_{\min(N, M) \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N a_{kM} w_k(x) = 0, \quad x \in [0, 1) \setminus A, \quad (18)$$

и

$$\lim_{\min(N, M) \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^M a_{Nm} w_m(y) = 0, \quad y \in [0, 1) \setminus B, \quad (19)$$

где A и B имеют мощность меньше континуума. Тогда

$$\lim_{k+m \rightarrow \infty} a_{km} = 0. \quad (20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из выполнения равенства в формуле (18) или (19) хотя бы в одной точке следует, что

$$\lim_{\min(k, m) \rightarrow \infty} a_{km} = 0. \quad (21)$$

Допустим, что (20) не выполняется. Пусть, для определенности, найдется такой номер l и последовательность номеров $k_1 < k_2 < \dots$, что

$$|a_{k_i l}| > C > 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots) \quad (22)$$

для некоторой постоянной C .

Каждая функция $w_n(x)$ с номером $2^s \leq n < 2^{s+1}$ постоянна на полуинтервалах $\Delta_{s+1}^{2r} = \left[\frac{2r}{2^{s+1}}, \frac{2r+1}{2^{s+1}} \right)$ и $\Delta_{s+1}^{2r+1} = \left[\frac{2r+1}{2^{s+1}}, \frac{2r+2}{2^{s+1}} \right)$, причем принимает на них значения разных знаков ($r = 0, 1, \dots, 2^s - 1$).

Поэтому суммы вида $\sum_{n=2^s}^{2^{s+1}-1} b_n w_n(x)$ на Δ_{s+1}^{2r} и на Δ_{s+1}^{2r+1} тоже постоянны и принимают значения разных знаков.

Полуинтервалы вида $\left[\frac{r}{2^s}, \frac{r+1}{2^s} \right)$ называют интервалами ранга s .

Пусть $K_j \subset \mathbb{N}$ – бесконечное множество натуральных чисел и Δ_j – интервал ранга j . Покажем, что если

$$\left| \sum_{m=0}^{2^j-1} a_{km} w_m(y) \right| > C > 0 \quad \text{для } k \in K_j, \quad y \in \Delta_j, \quad (23)$$

то найдутся бесконечное множество $K_{j+1} \subset K_j$ и интервал Δ_{j+1} ранга $j+1$ такие, что

$$\left| \sum_{m=0}^{2^{j+1}-1} a_{km} w_m(y) \right| > C, \quad k \in K_{j+1}, \quad y \in \Delta_{j+1} \subset \Delta_j. \quad (24)$$

Действительно, обозначим через $\Delta(k)$ ту из половин интервала Δ_j , на которой сумма $\sum_{m=2^j}^{2^{j+1}-1} a_{km} w_m(y)$ имеет тот же знак, что и $\sum_{m=0}^{2^j-1} a_{km} w_m(y)$ на Δ_j (если эта сумма равна нулю, то возьмем, например, левую половину интервала Δ_j). Тогда для бесконечного числа k из K_j интервалы $\Delta(k)$ совпадают. Ту из половин Δ_j , с которой совпадает бесконечное число $\Delta(k)$ (если их две, то левую половину), обозначим через Δ_{j+1} . Отсюда видно, что из (23) следует (24).

Пусть s – наименьшее натуральное число такое, что $2^s - 1 > l$. Тогда

$$\begin{aligned} \left| \sum_{m=0}^{2^s-1} a_{km} w_m(y) \right| &= \left| \sum_{m=0}^{2^s-1} a_{km} w_m(y) w_l(y) \right| = \left| \sum_{m=0}^{2^s-1} a_{km} w_{m+l}(y) \right| \\ &= \left| a_{kl} + \sum_{\nu=1}^{2^s-1} a_{k, \nu+l} w_\nu(y) \right| = \left| a_{kl} + \sum_{r=1}^s \sum_{\nu=2^{r-1}}^{2^r-1} a_{k, \nu+l} w_\nu(y) \right|. \end{aligned}$$

Из (22)–(24) следует, что найдется интервал Δ_s ранга s и бесконечное множество $K_s \subset \{k_i\}_{i=1}^\infty$ такие, что

$$\left| \sum_{m=0}^{2^s-1} a_{km} w_m(y) \right| > C, \quad k \in K_s, \quad y \in \Delta_s.$$

Отсюда ввиду (23), (24) следует, что для $j \geq s$ выполняется (24), причем $K_j \subset \{k_i\}_{i=1}^\infty$. Выберем $\nu_j \in K_j$ так, чтобы $\nu_j > \nu_{j-1}$. Тогда имеем

$$\left| \sum_{m=0}^{2^j-1} a_{\nu_j m} w_m(y) \right| > C, \quad i \geq j, \quad y \in \Delta_j \quad (j \geq s). \quad (25)$$

Пусть $0 < C' < C$. Покажем, что для всякого $j_0 > s$ найдется номер $j_1 > j_0$ такой, что для бесконечного числа номеров i

$$\left| \sum_{m=0}^{2^{j_1}-1} a_{\nu_i m} w_m(y) \right| > C', \quad y \in \Delta'_{j_1} = \Delta_{j_1-1} \setminus \Delta_{j_1}. \quad (26)$$

Положим

$$\delta_{ij} = \left| \sum_{m=2^{j-1}}^{2^j-1} a_{\nu_i m} w_m(y) \right|, \quad y \in \Delta_j. \quad (27)$$

Если для некоторого номера $j_1 > j_0$ для бесконечного числа номеров i выполняется неравенство $\delta_{ij_1} \geq \delta_{i, j_1+1}$, то на интервале Δ'_{j_1+1} имеем

$$\left| \sum_{m=0}^{2^{j_1+1}-1} a_{\nu_i m} w_m(y) \right| = \left| \sum_{m=0}^{2^{j_1}-1} a_{\nu_i m} w_m(y) \right| + \delta_{ij_1} - \delta_{i, j_1+1} > C,$$

и для таких номеров j_0 утверждение (26) доказано.

Пусть теперь номер j_0 таков, что для любого $j > j_0$

$$\delta_{ij} < \delta_{i,j+1} \quad \text{для всех } i, \text{ начиная с некоторого } i(j). \quad (28)$$

Из (21), (27) и (28) следует, что последовательности $\{\delta_{ij}\}$ ($j > j_0$) ограничены по i :

$$0 \leq \delta_{ij} < k(j) \quad (i \in \mathbb{N}).$$

Тогда можно выбрать такую последовательность $\{i_r\}$, что существуют конечные пределы

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \delta_{i_r j} = \delta_j \quad (j > j_0). \quad (29)$$

При этом, как следует из (28), $\delta_j \leq \delta_{j+1}$ ($j > j_0$).

Пусть $\delta = \lim_{j \rightarrow \infty} \delta_j$.

Рассмотрим три возможных случая: а) $\delta = 0$, б) $0 < \delta < \infty$, в) $\delta = \infty$.

В случае а) $\delta_j = 0$ для $j > j_0$. Положим $j_1 = j_0 + 1$. В силу (29) найдется такой номер N , что $|\delta_{i_r j_1}| < C - C'$ для $r > N$. Тогда на интервале Δ'_{j_1} имеем

$$\left| \sum_{m=0}^{2^{j_1}-1} a_{km} w_m(y) \right| > \left| \sum_{m=0}^{2^{j_0}-1} a_{km} w_m(y) \right| - \delta_{kj_1} > C'$$

для $k \in \{\nu_{i_r}\}_{r > N}$.

В случае б) выберем такое q , что

$$\frac{2}{3}\delta < \delta_q \leq \delta_{q+1} \leq \delta_{q+2} \leq \delta, \quad q > j_0.$$

Пусть N таково, что при $r \geq N$

$$\frac{2}{3}\delta < \delta_{i_r p} < \frac{4}{3}\delta \quad (p = q, q+1, q+2).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \left| \sum_{m=0}^{2^{q+2}-1} a_{km} w_m(y) \right| &= \left| \sum_{m=0}^{2^{q-1}-1} a_{km} w_m(y) \right| + \delta_{kq} + \delta_{k,q+1} - \delta_{k,q+2} \\ &> C + \frac{2}{3}\delta + \frac{2}{3}\delta - \frac{4}{3}\delta = C \end{aligned}$$

при $y \in \Delta'_{q+2}$ и $k \in \{\nu_{i_r}\}_{r \geq N}$, т.е. выполняется (26) для $j_1 = q+2$.

В случае в) покажем, что найдется номер n такой, что

$$\delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_n > \delta_{n+1} - (C - C'). \quad (30)$$

Из (21), (27) и (29) следует, что $\delta_j = o(2^j)$. Положим $\varepsilon_j = \frac{\delta_j}{2^j}$. Пусть $p > j_0$ таково, что $\varepsilon_j > 0$, начиная с номера p ; $\lim_{j \rightarrow \infty} \varepsilon_j = 0$. Имеем

$$\begin{aligned} \delta_p + \delta_{p+1} + \dots + \delta_n &= \varepsilon_p \cdot 2^p + \varepsilon_{p+1} \cdot 2^{p+1} + \dots + \varepsilon_n \cdot 2^n \\ &\geq \min_{p \leq r \leq n} \{\varepsilon_r\} \cdot (2^p + 2^{p+1} + \dots + 2^n) = \min_{p \leq r \leq n} \{\varepsilon_r\} \cdot (2^{n+1} - 2^p). \end{aligned}$$

Выберем $n > j_0$ таким, чтобы $\min_{p \leq r \leq n} \{\varepsilon_r\} \cdot 2^p < C - C'$ и $\varepsilon_{n+1} < \min_{p \leq r \leq n} \{\varepsilon_r\}$. Тогда выполняется (30).

Ввиду (29) найдется номер N такой, что

$$\delta_{i_r p} + \dots + \delta_{i_r n} > \delta_{i_r, n+1} - (C - C') \quad \text{при } r \geq N.$$

Отсюда и из (25) следует, что

$$\begin{aligned} \left| \sum_{m=0}^{2^{n+1}-1} a_{km} w_m(y) \right| &= \left| \sum_{m=0}^{2^{p-1}-1} a_{km} w_m(y) + \sum_{m=2^{p-1}}^{2^{n+1}-1} a_{km} w_m(y) \right| \\ &> C + \delta_{kp} + \dots + \delta_{kn} - \delta_{kn+1} > C' \end{aligned}$$

на Δ'_{n+1} при $k \in \{i_r\}_{r \geq N}$. Значит, и в случае в) (26) выполняется для $j_1 = n + 1$. Таким образом, формула (26) доказана.

Пусть $\{C_n\}$ — убывающая последовательность чисел таких, что $\frac{C}{2} < C_n < C$ ($n = 1, 2, 3, \dots$).

В силу (25) и (26) найдутся два непересекающихся интервала Δ^0 и Δ^1 ранга $j(1) > s$, на каждом из которых $\left| \sum_{m=0}^{2^{j(1)}-1} a_{km} w_m(y) \right| > C_1$ для некоторого $k = N_1$. На каждом из интервалов Δ^0 и Δ^1 в силу (24)–(26) также найдутся по два непересекающихся интервала ранга $j(2) > j(1)$ (Δ^{00} и Δ^{01} на Δ^0 и Δ^{10} и Δ^{11} на Δ^1), на которых $\left| \sum_{m=0}^{2^{j(2)}-1} a_{km} w_m(y) \right| > C_2$ для $k = N_2 > N_1$.

Продолжая это построение далее, на n -м шаге определим с помощью (24)–(26) 2^n непересекающихся интервалов $\Delta^{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n}$ (где $\varepsilon_i = 0, 1$; $i = 1, 2, \dots, n$) ранга $j(n) > j(n-1)$ таких, что

$$\Delta^{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{n-1} \varepsilon_n} \subset \Delta^{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{n-1}}, \quad \Delta^{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{n-1} 0} \cap \Delta^{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{n-1} 1} = \emptyset,$$

на каждом из интервалов $\Delta^{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n}$

$$\left| \sum_{m=0}^{2^{j(n)}-1} a_{km} w_m(y) \right| > C_n \quad \text{для } k = N_n > N_{n-1}. \quad (31)$$

Пусть $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \dots)$ — последовательности из нулей и единиц. Из свойств интервалов $\Delta^{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n}$ следует, что найдется точка $t(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \dots)$ такая, что

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\Delta^{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n}} = \{t(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \dots)\},$$

где $\overline{\Delta}$ — замыкание Δ .

Заметим, что для разных последовательностей $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \dots)$ числа $t(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \dots)$ могут совпасть, только если в этих последовательностях все ε_i , начиная с некоторого, равны 0, либо все ε_i , начиная с некоторого, равны 1. Таких последовательностей счетное число. Следовательно, найдется континуум различных двоично-иррациональных и не принадлежащих множеству B чисел $y = t(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \dots)$.

Но в таком случае для этих чисел $\bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta^{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n} = \{t(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)\}$. Для таких чисел y в силу (31) выполняются неравенства

$$\left| \sum_{m=0}^{2^{j(n)}-1} a_{N_n m} w_m(y) \right| > \frac{C}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

что противоречит условию (19) теоремы. Следовательно, условие (20) выполняется и теорема доказана.

В. А. Скворцов и А. А. Талалян [10] доказали теорему единственности для кратных рядов Хаара, которая допускает переформулировку для кратных рядов Уолша, так как речь в теореме идет о частичных суммах с номерами $2^{k_1}, \dots, 2^{k_d}$. Нам понадобится

СЛЕДСТВИЕ ТЕОРЕМЫ СКВОРЦОВА–ТАЛАЛЯНА. Пусть для двойного ряда S по системе Уолша выполняются условия

$$\lim_{\min(N, M) \rightarrow \infty} S_{2^N, 2^M}(x, y) \leq f(x, y) \leq \overline{\lim}_{\min(N, M) \rightarrow \infty} S_{2^N, 2^M}(x, y)$$

всюду на $[0, 1)^2$, за исключением, быть может, счетного множества, где $f(x, y)$ – конечная, суммируемая на $[0, 1)^2$ функция, и

$$\lim_{\min(N, M) \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{N+M}} S_{2^N, 2^M}(x, y) = 0 \quad \text{для всех } (x, y) \in [0, 1)^2.$$

Тогда S является рядом Фурье–Уолша функции $f(x, y)$.

Приведенным ядром ряда S (7) называется множество точек, где он неограниченно расходится, т.е. множество

$$\mathcal{N} = \{(x, y) : \overline{\lim}_{\min(N, M) \rightarrow \infty} |S_{NM}(x, y)| = \infty\}.$$

Ряд S называется *нуль-рядом*, если он почти всюду сходится к нулю, но не все его коэффициенты равны нулю.

В качестве примера нуль-ряда класса $\mathcal{K}_2$ можно взять ряд, являющийся формальным произведением какого-нибудь одномерного нуль-ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n w_n(x)$ на полином $w_0(y) + w_1(y)$.

Покажем, что приведенное ядро нуль-ряда класса $\mathcal{K}_2$ несчетно и не первой категории на себе, аналогично соответствующему свойству одномерных нуль-рядов.

ЛЕММА 4. Пусть S – нуль-ряд класса $\mathcal{K}_2$, $\mathcal{E}$ – ядро и $\mathcal{N}$ – приведенное ядро S . Если $\mathcal{E} \cap G \neq \emptyset$ для некоторого открытого множества G , то множество $\mathcal{N} \cap G$ несчетно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(x_0, y_0) \in \mathcal{E} \cap G$, $\Pi \in \mathcal{P}$ и $(x_0, y_0) \in \Pi \subset G$. Рассмотрим формальное произведение $\tilde{S}$ ряда S на полином $\chi_\Pi(x, y)$. В силу теоремы 1 $\tilde{S}$ – нуль-ряд класса $\mathcal{K}_2$ с ядром $\mathcal{E} \cap \Pi$ и приведенным ядром $\mathcal{N} \cap \Pi$. Если $\mathcal{N} \cap G$ счетно, то частичные суммы ряда $\tilde{S}$ ограничены в каждой точке $[0, 1]^2$, за исключением, быть может, счетного множества. Так как $\tilde{S}$ – класса $\mathcal{K}_2$, то в силу теоремы 6 его коэффициенты $\tilde{a}_{km} \rightarrow 0$ при $k + m \rightarrow \infty$. Следовательно, выполняется условие

$$\left| \frac{1}{2^{N+M}} \tilde{S}_{2^N, 2^M}(x, y) \right| \leq \frac{1}{2^{N+M}} \sum_{k=0}^{2^N-1} \sum_{m=0}^{2^M-1} |\tilde{a}_{km}| \rightarrow 0,$$

если $\min(N, M) \rightarrow +\infty$. Тогда в силу следствия из теоремы Скворцова–Талаляна ряд $\tilde{S}$ является рядом Фурье своей суммы, т.е. $\tilde{S} \equiv 0$. Это противоречит тому, что $\tilde{S}$ – нуль-ряд. Следовательно, множество $\mathcal{N} \cap G$ несчетно. Лемма доказана.

ЛЕММА 5. Пусть S – нуль-ряд класса $\mathcal{K}_2$, $\mathcal{E}$ – ядро и $\mathcal{N}$ – приведенное ядро этого нуль-ряда; L – множество, состоящее из конечного числа вертикальных $x = c_i$ ($c_i \in Q_2$) и горизонтальных отрезков $y = d_i$ ($d_i \in Q_2$) на $[0, 1]^2$; $\Pi \in \mathcal{P}$ – прямоугольник такой, что $\mathcal{N} \cap \Pi \neq \emptyset$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда найдутся два прямоугольника Π_0 и Π_1 из $\mathcal{P}$ такие, что $\overline{\Pi_0} \cap \overline{\Pi_1} = \emptyset$, $\Pi_i \subset \Pi$, $\overline{\Pi_i} \cap L = \emptyset$, $\mathcal{N} \cap \Pi_i \neq \emptyset$ ($i = 0, 1$) и

$$|S_{N_i M_i}(x, y)| > k$$

для $(x, y) \in \Pi_i$ и некоторых $N_i > k$, $M_i > k$ ($i = 0, 1$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Γ – граница прямоугольника Π . Покажем, что найдется точка $(x_0, y_0) \in (\mathcal{N} \cap \Pi) \setminus (\Gamma \cup L)$. Рассмотрим формальное произведение ряда S на полином $\chi_\Pi(x, y)$ – ряд $\tilde{S}$. В силу теоремы 1 это тоже нуль-ряд класса $\mathcal{K}_2$ с ядром $\mathcal{E} \cap \Pi$ и приведенным ядром $\mathcal{N} \cap \Pi$. Допустим, что $\mathcal{N} \cap \Pi \subset \Gamma \cup L$. Тогда в силу леммы 4 $\mathcal{E} \cap \Pi \subset \Gamma \cup L$. Но множество $\Gamma \cup L$ является U -множеством в силу теоремы С Лукомского. Следовательно, $\tilde{S}$ сходится к нулю всюду вне U -множества и все его коэффициенты равны нулю. Это противоречит тому, что $\tilde{S}$ – нуль-ряд. Следовательно, $(\mathcal{N} \cap \Pi) \setminus (\Gamma \cup L) \neq \emptyset$.

Пусть $(x_0, y_0) \in (\mathcal{N} \cap \Pi) \setminus (\Gamma \cup L)$. Тогда найдется окрестность точки (x_0, y_0) , не пересекающаяся с $\Gamma \cup L$, и в силу леммы 4 найдется другая точка $(x_1, y_1) \in (\mathcal{N} \cap \Pi) \setminus (\Gamma \cup L)$. Так как (x_i, y_i) ($i = 0, 1$) – точки приведенного ядра, то найдутся номера $N_i, M_i > k$ такие, что

$$|S_{N_i M_i}(x_i, y_i)| > k \quad (i = 0, 1).$$

Так как частичные суммы $S_{N_i M_i}$ постоянны на прямоугольниках, являющихся прямыми произведениями двоичных интервалов рангов N_i и M_i , то можно выбрать такие прямоугольники $\Pi_i \in \mathcal{P}$ ($i = 0, 1$), что выполняются все условия леммы. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 7. Пусть S – нуль-ряд класса $\mathcal{K}_2$, $\mathcal{E}$ – ядро и $\mathcal{N}$ – приведенное ядро этого нуль-ряда; J – объединение всех вертикальных и горизонтальных отрезков вида $x = r$, $r \in Q_2$, и $y = r$, $r \in Q_2$, из $[0, 1]^2$. Тогда множество $\mathcal{N} \setminus J$ несчетно и $\mathcal{N}$ не первой категории на себе.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множество $\mathcal{N}$ можно представить в виде

$$\mathcal{N} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{N=k}^{\infty} \bigcup_{M=k}^{\infty} \{(x, y) : |S_{NM}(x, y)| > k\}. \quad (32)$$

Функция $S_{NM}(x, y)$ непрерывна всюду на $[0, 1]^2$, за исключением, быть может, замкнутого множества I_{NM} , содержащегося в объединении конечного числа вертикальных и горизонтальных отрезков, $I_{NM} \subset J$. Положим

$$A_{kNM} = \{(x, y) : |S_{NM}(x, y)| > k\}.$$

Так как на $[0, 1]^2 \setminus I_{NM}$ функция $S_{NM}(x, y)$ непрерывна, то $V_{kNM} = A_{kNM} \setminus I_{NM}$ – открытое множество. Введем обозначение $Z_{kNM} = A_{kNM} \cap I_{NM}$. Следовательно, $A_{kNM} = V_{kNM} \cup Z_{kNM}$, где V_{kNM} – открытое подмножество $[0, 1]^2$, $Z_{kNM} \subset J$ и $V_{kNM} \cap Z_{kNM} = \emptyset$. Положим $V_k = \bigcup_{N=k}^{\infty} \bigcup_{M=k}^{\infty} V_{kNM}$, тогда V_k – открытое множество и в силу (32)

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} V_k \subset \mathcal{N} \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} V_k \cup J.$$

Представим множество J в виде $J = \bigcup_{n=1}^{\infty} L_n$, где каждое множество L_n является объединением конечного числа вертикальных и горизонтальных отрезков. Пусть $\Pi = [0, 1]^2$, $k = 1$, $L = L_1$. С помощью леммы 5 определим прямоугольники Π_0 и Π_1 с указанными в лемме свойствами. На n -м шаге с помощью леммы 5 построим 2^n прямоугольников $\Pi_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n} \in \mathcal{P}$ ($\varepsilon_i = 0, 1$) со свойствами

$$\begin{aligned} \Pi_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n} &\subset \Pi_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{n-1}}, \quad \overline{\Pi}_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{n-1}0} \cap \overline{\Pi}_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{n-1}1} = \emptyset, \\ |S_{NM}(x, y)| &> n \quad \text{для } (x, y) \in \Pi_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n} \quad \text{и для некоторых } M, N > n, \\ \overline{\Pi}_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n} \cap L_n &= \emptyset. \end{aligned} \quad (33)$$

Можно считать, что с ростом n диаметры прямоугольников $\Pi_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n}$ стремятся к нулю (уменьшая, если нужно, их диаметр на каждом шаге). Тогда каждой последовательности $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n, \dots)$ из нулей и единиц соответствует точка $\{(x, y)\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\Pi}_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n}$. Из (33) следует, что разным последовательностям $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n, \dots)$ соответствуют разные точки (x, y) , и таких точек – континуум, причем $(x, y) \notin J$. Следовательно, обе координаты таких точек (x, y) двоично-иррациональные. Отсюда следует, что $\{(x, y)\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Pi_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n}$ и, следовательно, $(x, y) \in \mathcal{N} \setminus J$. Таким образом, множество $\mathcal{N} \setminus J$ имеет мощность континуума и $V = \bigcap_{k=1}^{\infty} V_k$ – континуальное G_δ -множество.

Покажем, что $\mathcal{N} \subset \overline{V}$. Так как $\mathcal{N} \setminus J \subset V$, то достаточно показать, что $\mathcal{N} \cap J \subset \overline{V}$. Допустим, что $(\mathcal{N} \cap J) \setminus \overline{V} \neq \emptyset$. Положим $G = [0, 1]^2 \setminus \overline{V}$. Тогда найдется прямоугольник $\Pi \in \mathcal{P}$ такой, что $\Pi \subset G$, $\Pi \cap \mathcal{N} \cap J \neq \emptyset$. Рассмотрим ряд $\tilde{S}$, являющийся формальным произведением S на полином $\chi_\Pi(x, y)$. В силу теоремы 1 это – нуль-ряд класса $\mathcal{K}_2$ с приведенным ядром $\mathcal{N}_1 = \Pi \cap \mathcal{N} \cap J \subset J$. Но это противоречит только что доказанному, тому, что $\mathcal{N}_1 \setminus J \neq \emptyset$. Таким образом $\mathcal{N} \subset \overline{V}$.

Если $\mathcal{N}$ первой категории на себе, то $\mathcal{N} = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, где A_k нигде не плотны в $\mathcal{N}$.

Тогда $V = V \cap \mathcal{N} = \bigcup_{k=1}^{\infty} (V \cap A_k)$.

Так как V — непустое G_δ -множество, то V не первой категории на себе (см., например, [11; §34, ш. IV, V]). Следовательно, найдется номер k_0 и открытое множество G_1 такие, что $V \cap A_{k_0}$ плотно в $G_1 \cap V \neq \emptyset$. Так как $V \cap A_{k_0}$ нигде не плотно в $\mathcal{N}$, то найдется открытое множество $G_2 \subset G_1$ такое, что $\mathcal{N} \cap G_2 \neq \emptyset$, $G_2 \cap V \cap A_{k_0} = \emptyset$. Тогда и $G_2 \cap V = \emptyset$, так как $V \cap A_{k_0}$ плотно в $G_1 \cap V$. Но это противоречит тому, что $\mathcal{N} \subset \overline{V}$. Следовательно, $\mathcal{N}$ не первой категории на себе. Теорема доказана.

Из теоремы 7 и леммы 4 следует, что семейство $M(\mathcal{K}_2)$ -множеств меры нуль является семейством со свойством приведенного ядра. Следовательно, в силу теоремы E справедлива

ТЕОРЕМА 8. Пусть E_k — $U(\mathcal{K}_2)$ -множества меры нуль, замкнутые относительно $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. Тогда E — $U(\mathcal{K}_2)$ -множество.

Из теоремы 8 и леммы 2 следует результат для обычных U -множеств.

ТЕОРЕМА 9. Пусть E_k — U -множества меры нуль для двойных рядов Уолша, замкнутые относительно $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. Если $[0, 1]^2 \setminus E$ содержит какое-нибудь существенное множество, то E является U -множеством.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если в теореме 9 потребовать, что $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ замкнуто или хотя бы типа G_δ , то теорема 9 справедлива без дополнительного требования — мера E_k равна нулю.

Теоремы 6–9 также переносятся на кратный случай. Во введении сформулирована теорема 9' для d -кратного случая и существенного множества, состоящего из объединения поверхностей $x_i = 0$ ($i = 1, \dots, d$).

Приведем пример U -множества, полученного с помощью теоремы 9. Пусть A — совершенное U -множество на $[0, 1]$, $0 \notin A$. Тогда множество $(A \times (0, 1)) \cup ((0, 1) \times A)$ не содержит существенное множество, $x = 0$ и $y = 0$, и является в силу теоремы 9 U -множеством.

Один из фундаментальных результатов теории единственности однократных рядов состоит в том, что множество положительной меры является M -множеством и для тригонометрических рядов, и для рядов Уолша. В кратном случае это — открытый как для рядов Уолша, так и для тригонометрических рядов

ВОПРОС. Является ли множество положительной меры обязательно M -множеством?

§3. Тригонометрический случай

Обратимся теперь к тригонометрическому случаю.

Обозначим через $\mathcal{K}_2(T)$ класс двойных тригонометрических рядов

$$\sum_{m,n=-\infty}^{\infty} c_{mn} e^{imx} e^{iny}, \quad c_{-m,-n} = \overline{c_{mn}}, \quad (34)$$

таких, что

$$\lim_{\min(|M|, N) \rightarrow \infty} \sum_{|n| \leq N} c_{Mn} e^{iny} = 0, \quad y \in [0, 2\pi), \quad (35)$$

$$\lim_{\min(M, |N|) \rightarrow \infty} \sum_{|m| \leq M} c_{mN} e^{imx} = 0, \quad x \in [0, 2\pi), \quad (36)$$

$$\sup_{M, N} \left| \sum_{|n| \leq N} c_{Mn} e^{iny} \right| \leq C(y) < \infty, \quad y \in [0, 2\pi), \quad (37)$$

$$\sup_{M, N} \left| \sum_{|m| \leq M} c_{mN} e^{imx} \right| \leq C(x) < \infty, \quad x \in [0, 2\pi). \quad (38)$$

Отметим, что из условий (35), (36) не следуют, вообще говоря, условия (37), (38). Действительно, рассмотрим тригонометрический ряд (34), у которого $c_{00} = 1$, $c_{0n} = \frac{1}{|n|}$, если $n \neq 0$, $c_{mn} = 0$, если $m \neq 0$. Тогда $\sum_{|n| \leq N} c_{Mn} e^{iny} \equiv 0$ при $M \neq 0$ и $\sum_{|m| \leq M} c_{mN} e^{imx} = \frac{1}{|N|}$ при $N \neq 0$, следовательно, условия (35) и (36) выполняются. Но при $m = 0$, $y = 0$ имеем $\sum_{|n| \leq N} c_{0n} e^{in0} = 1 + 2 \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$; т.е. не выполняется условие (37).

Укажем некоторые достаточные условия принадлежности ряда классу $\mathcal{H}_2(T)$.

Напомним, что множество $E \subset [0, 2\pi)$ называется *R-множеством*, если существует тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

который сходится на E , а коэффициенты его не стремятся к нулю.

Множество $E \subset [0, 2\pi)$ называется *множеством Арбо*, кратко, *Аг-множеством*, если существует возрастающая последовательность натуральных чисел $\{n_k\}$ такая, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \sin n_k x = 0$, $x \in E$.

Известно (см. [12; гл. XIV, § 23]), что *R-множества* являются множествами меры 0 и первой категории, счетные множества являются *R-множествами*, а, например, канторовские множества с постоянным отношением разбиения не являются *R-множествами*.

Долгое время вопрос о взаимоотношении классов *R*- и *Аг*-множеств был открыт. В 1992 г. С. Кахан [13] доказал, что всякое *R-множество* является *Аг-множеством*, а С. В. Конягин [14] — что всякое *Аг-множество* является *R-множеством*.

Назовем множество $A \subset [0, 2\pi)^2$ *существенным для двойных тригонометрических рядов*, если для каждого $x \in [0, 2\pi)$ и каждого $y \in [0, 2\pi)$ множества

$$A_x = \{y : (x, y) \in A\} \quad \text{и} \quad E_y = \{x : (x, y) \in A\}$$

не являются *R-множествами*.

ЛЕММА 6. Пусть $A_{mn}, B_{mn} \in \mathbb{R}$ ($m, n = 0, 1, 2, \dots$), $E \subset [0, 2\pi)$, E не является R -множеством. Если

$$\sup_{m,n} |A_{mn} \cos mx + B_{mn} \sin mx| \leq C_1 = \text{const}, \quad x \in E, \quad (39)$$

то найдется константа C такая, что

$$|A_{mn}| \leq C \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots), \quad |B_{mn}| \leq C \quad (n = 0, \quad m, n = 1, 2, 3, \dots). \quad (40)$$

Если

$$\lim_{\min(m,n) \rightarrow \infty} (A_{mn} \cos mx + B_{mn} \sin mx) = 0, \quad x \in E, \quad (41)$$

то

$$\lim_{\min(m,n) \rightarrow \infty} A_{mn} = \lim_{\min(m,n) \rightarrow \infty} B_{mn} = 0. \quad (42)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $m = 0$ из (39) следует, что $|A_{0n}| \leq C_1$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Далее рассматриваем $m \geq 1$. Положим $\rho_{mn} = \sqrt{A_{mn}^2 + B_{mn}^2}$. Тогда

$$A_{mn} \cos mx + B_{mn} \sin mx = \rho_{mn} \sin(mx + \varphi_{mn}), \quad \text{где } \varphi_{mn} \in [0, 2\pi).$$

Если (40) не выполняется, то найдутся номера m_k, n_k ($k \in \mathbb{N}$) такие, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \rho_{m_k n_k} = \infty, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{m_k n_k} = \varphi.$$

Отсюда и из (39) следует, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sin(m_k x + \varphi) = 0, \quad x \in E.$$

Если $m_k = l \neq 0$ для бесконечного числа номеров k , то последнее равенство невозможно, так как E – бесконечное множество. Значит, $\lim_{k \rightarrow \infty} m_k = \infty$. Выберем такую последовательность номеров k_r , что последовательность $\nu_r = m_{k_{r+1}} - m_{k_r}$ возрастает. Тогда

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sin \nu_r x = \lim_{r \rightarrow \infty} \sin((m_{k_{r+1}} x + \varphi) - (m_{k_r} x + \varphi)) = 0, \quad x \in E.$$

Но это противоречит тому, что E не является R -множеством. Следовательно, выполняется условие (40). То, что из (41) следует (42), доказывается аналогично (доказательство есть в [15]). Лемма доказана.

Из леммы 6 легко следует

ЛЕММА 7. Из условия (35) (а также из (36)) следует, что

$$\lim_{\min(|m|, |n|) \rightarrow \infty} c_{mn} = 0. \quad (43)$$

Из условия (37) (а также из (38)) следует, что

$$|c_{mn}| \leq C = \text{const} \quad (m, n \in \mathbb{Z}). \quad (44)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $c_{mn} = a_{mn} + ib_{mn}$, $a_{mn}, b_{mn} \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{|n| \leq N} c_{Mn} e^{iny} - \sum_{|n| \leq N-1} c_{Mn} e^{iny} &= \sum_{|n|=N} c_{Mn} e^{iny} \\ &= (a_{MN} + a_{M,-N}) \cos Ny + (b_{M,-N} - b_{MN}) \sin Ny \\ &\quad + i[(b_{MN} + b_{M,-N}) \cos Ny + (a_{MN} - a_{M,-N}) \sin Ny]. \end{aligned}$$

Так как $[0, 2\pi)$ не является R -множеством, то отсюда, из (35) и леммы 6 следует сходимость к нулю коэффициентов этого выражения $a_{MN} \pm a_{M,-N}$, $b_{M,-N} \pm b_{MN}$ при $\min(M, N) \rightarrow \infty$ и выполнение условия (43). Аналогично, из условия (37) и леммы 6 следует (44). (Рассматривая $\sum_{|m| \leq M} c_{mN} e^{imx} - \sum_{|m| \leq M-1} c_{mN} e^{imx}$, придем к доказательству (43) и (44) из (36) и (38) соответственно.) Лемма доказана.

ЛЕММА 8. Если двойной тригонометрический ряд (34) сходится (по прямоугольникам) на некотором существенном множестве A , то для этого ряда выполняются условия (35) и (36). Если частичные суммы ряда (34) ограничены на A , то выполняются условия (37) и (38).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $S_{MN}(x, y) = \sum_{|m| \leq M} \sum_{|n| \leq N} c_{mn} e^{imx} e^{iny}$. Из сходимости ряда на множестве A следует, что

$$\lim_{\min(M, N) \rightarrow \infty} (S_{MN}(x, y) - S_{M-1, N}(x, y)) = 0, \quad (x, y) \in A.$$

При этом

$$\begin{aligned} S_{MN}(x, y) - S_{M-1, N}(x, y) &= \sum_{|m|=M} \sum_{|n| \leq N} c_{mn} e^{imx} e^{iny} \\ &= 2 \operatorname{Re} \left(e^{iMx} \sum_{|n| \leq N} c_{Mn} e^{iny} \right). \end{aligned}$$

Зафиксируем $y \in [0, 2\pi)$ и обозначим

$$\sum_{|n| \leq N} c_{Mn} e^{iny} = \alpha_{MN} + i\beta_{MN}, \quad \alpha_{MN}, \beta_{MN} \in \mathbb{R}, \quad M > 0.$$

В силу предыдущего

$$\lim_{\min(M, N) \rightarrow \infty} \operatorname{Re}((\cos Mx + i \sin Mx)(\alpha_{MN} + i\beta_{MN})) = 0, \quad x \in E_y,$$

т. е.

$$\lim_{\min(M, N) \rightarrow \infty} (\alpha_{MN} \cos Mx - \beta_{MN} \sin Mx) = 0, \quad x \in E_y.$$

Так как E_y не R -множество (в силу того, что A — существенное множество), то отсюда и из леммы 6 следует, что

$$\lim_{\min(M, N) \rightarrow \infty} \alpha_{MN} = \lim_{\min(M, N) \rightarrow \infty} \beta_{MN} = 0.$$

Таким образом,

$$\lim_{\min(M, N) \rightarrow \infty} \sum_{|n| \leq N} c_{Mn} e^{iny} = 0, \quad y \in [0, 2\pi), \quad M > 0.$$

Так как для $M > 0$ имеем $\sum_{|n| \leq N} c_{Mn} e^{iny} = \overline{\sum_{|n| \leq N} c_{Mn} e^{iny}}$, то (35) выполняется. Из ограниченности $S_{MN}(x, y)$ на A подобным же образом следует (37). Аналогично доказываются формулы (36), (38). Лемма доказана.

Аналогично одномерному случаю, формальным произведением ряда S (34) на ряд $\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{imx}$ называется ряд

$$\sum_{m, n=-\infty}^{\infty} K_{mn} e^{imx} e^{iny}, \quad K_{mn} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_{\nu n} a_{m-\nu}, \quad (45)$$

в предположении, что ряды, определяющие K_{mn} , сходятся.

Подобно лемме Райхмана для однократного тригонометрического ряда (см. [12; гл. I, § 71, лемма 1]) доказывается

ЛЕММА 9. Пусть коэффициенты ряда S (34) удовлетворяют условиям $|c_{mn}| < C$ и $\lim_{\min(|m|, |n|) \rightarrow \infty} c_{mn} = 0$ и $\sum_{m=-\infty}^{\infty} |a_m| < \infty$. Тогда для коэффициентов формального произведения ряда S на $\lambda_1(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{imx}$ — ряда (45) — выполняются условия

$$|K_{mn}| < \text{const}, \quad \lim_{\min(|m|, |n|) \rightarrow \infty} K_{mn} = 0.$$

ТЕОРЕМА 10. Пусть S — ряд класса $\mathcal{K}_2(T)$, функция $\lambda_1(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_{\nu} e^{i\nu x}$ задается абсолютно сходящимся тригонометрическим рядом, причем

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} |\nu a_{\nu}| < \infty.$$

Тогда формальное произведение ряда S на ряд Фурье функции $\lambda_1(x)$ — ряд σ — равносходится с рядом $\lambda_1(x) \cdot S$, т.е. разность частичных сумм $\sigma_{MN}(x, y) - \lambda_1(x) S_{MN}(x, y)$ сходится к нулю при $\min(M, N) \rightarrow \infty$ для $(x, y) \in [0, 2\pi)^2$. Ряд σ тоже класса $\mathcal{K}_2(T)$. Аналогично, если $\lambda_2(y) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} b_{\nu} e^{i\nu y}$,

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} |\nu b_{\nu}| < \infty,$$

то формальное произведение ряда S на $\lambda_2(y)$ равносходится с рядом $\lambda_2(y) \cdot S$ и является рядом класса $\mathcal{K}_2(T)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$a_\nu^* = \begin{cases} a_0 - \lambda_1(x), & \nu = 0, \\ a_\nu, & \nu \neq 0. \end{cases}$$

Тогда $\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu^* e^{i\nu x} = 0$. Рассмотрим ряд

$$S^* = \sum_{m,n} \left(\sum_{\nu} c_{\nu n} a_{m-\nu}^* \right) e^{imx} e^{iny}.$$

Из определения ряда S^* следует, что частичные суммы рядов S^* , S и σ связаны равенством

$$S_{MN}^* = \sigma_{MN} - \lambda_1(x) S_{MN}. \quad (46)$$

Покажем, что ряд S^* всюду на $[0, 2\pi)^2$ сходится к нулю.

Положим $R_k(x) = \sum_{\nu=k}^{\infty} a_\nu^* e^{i\nu x}$. Для каждого натурального k

$$\begin{aligned} R_{-k}(x) &= \sum_{\nu=-k}^{\infty} a_\nu^* e^{i\nu x} = \sum_{\nu=-k}^{\infty} a_\nu^* e^{i\nu x} - \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu^* e^{i\nu x} \\ &= - \sum_{\nu=-\infty}^{-(k+1)} a_\nu^* e^{i\nu x} = - \sum_{\nu=k+1}^{\infty} a_{-\nu} e^{-i\nu x} = - \sum_{\nu=k+1}^{\infty} \overline{a_\nu e^{i\nu x}} = -\overline{R_{k+1}}(x). \end{aligned}$$

Так как

$$\sum_{k=0}^{\infty} |R_k(x)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\nu=k}^{\infty} |a_\nu^*| \leq 2 \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} |a_\nu| + \sum_{k=1}^{\infty} k |a_k| < \infty,$$

то и ряд $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |R_k(x)|$ сходится.

Преобразуем теперь

$$\begin{aligned} S_{MN}^* &= \sum_{|m| \leq M} \sum_{|n| \leq N} \left(\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_{\nu n} a_{m-\nu}^* \right) e^{imx} e^{iny} \\ &= \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \sum_{|n| \leq N} c_{\nu n} e^{iny} \sum_{|m| \leq M} a_{m-\nu}^* e^{imx} \\ &= \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \sum_{|n| \leq N} c_{\nu n} e^{iny} \sum_{p=-M-\nu}^{M-\nu} a_p^* e^{ipx} e^{i\nu x} \\ &= \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{i\nu x} \sum_{|n| \leq N} c_{\nu n} e^{iny} (R_{-M-\nu}(x) - R_{M-\nu+1}(x)). \end{aligned}$$

Заметим далее, что

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} |R_{-M-\nu}(x) - R_{M-\nu+1}(x)| \leq 2 \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} |R_\nu(x)| < \infty.$$

По лемме 7 (рассматривая в качестве c_{mn} последовательность $\sum_{|n| \leq N} c_{mn} e^{iny}$ и в качестве $\sum_{m=-\infty}^{\infty} |a_m|$ ряд $\sum_{m=-\infty}^{\infty} |R_{-M-m}(x) - R_{-M-m+1}(x)|$), получаем

$$\lim_{\min(M, N) \rightarrow \infty} S_{MN}^*(x, y) = 0, \quad (x, y) \in [0, 2\pi)^2.$$

В силу формулы (46) ряды σ и $\lambda_1(x) \cdot S$ равносходятся на $[0, 2\pi)^2$. Покажем, что σ – ряд класса $\mathcal{K}_2(T)$. Рассмотрим сначала

$$\sum_{|n| \leq N} K_{Mn} e^{iny} = \sum_{|n| \leq N} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_{\nu} c_{M-\nu, n} e^{iny} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_{\nu} \sum_{|n| \leq N} c_{M-\nu, n} e^{iny}.$$

Свойства (35) и (37) для ряда σ следуют из свойств (35) и (37) для ряда S и леммы 7, где в качестве c_{mn} берется $\sum_{|k| \leq n} c_{mk} e^{iky}$. Рассмотрим теперь

$$\begin{aligned} \sum_{|m| \leq M} K_{mN} e^{imx} &= \sum_{|m| \leq M} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_{\nu} c_{m-\nu, N} e^{imx} \\ &= \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_{\nu} \left(\sum_{|m| \leq M} c_{m-\nu, N} e^{i(m-\nu)x} \right) e^{i\nu x} \\ &= \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_{\nu} e^{i\nu x} \sum_{k=-M-\nu}^{M-\nu} c_{kN} e^{ikx} \\ &= \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_{\nu} e^{i\nu x} \sum_{|k| \leq M-\nu} c_{kN} e^{ikx} \\ &\quad - \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_{\nu} e^{i\nu x} \sum_{k=-M-\nu}^{-M+\nu-1} c_{kN} e^{ikx}. \end{aligned}$$

В силу леммы 6 $|c_{kN}| \leq C = \text{const}$. Учитывая еще свойство (38), получим

$$\left| \sum_{|m| \leq M} K_{mN} e^{imx} \right| \leq \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} |a_{\nu}| \cdot C(x) + \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} 2|\nu a_{\nu}| \cdot C,$$

т.е. для ряда σ тоже выполняется свойство (38). Из свойства (36) для ряда S и леммы 7, если в ней в качестве c_{mn} взять $\sum_{|k| \leq m} c_{kn} e^{ikx}$, следует, что

$$\lim_{\min(M, N) \rightarrow \infty} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_{\nu} e^{i\nu x} \sum_{|k| \leq M-\nu} c_{kN} e^{ikx} = 0.$$

Заметим далее, что

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_{\nu} e^{i\nu x} \sum_{k=-M-\nu}^{-M+\nu-1} c_{kN} e^{ikx} \right| \\ &\leq \sum_{|\nu| \leq \frac{M}{2}} 2|\nu a_{\nu}| \cdot \max_{-\frac{3}{2}M \leq k \leq -\frac{M}{2}} |c_{kN}| + \sum_{|\nu| > \frac{M}{2}} 2|\nu a_{\nu}| \cdot C. \end{aligned}$$

Отсюда, из свойства (36) для ряда S и сходимости ряда $\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} |\nu a_{\nu}|$ вытекает, что

$$\lim_{\min(M, |N|) \rightarrow \infty} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_{\nu} e^{i\nu x} \sum_{k=-M-\nu}^{-M+\nu-1} c_{kN} e^{ikx} = 0.$$

Отсюда следует, что для ряда σ выполняется свойство (36) и $\sigma \in \mathcal{K}_2(T)$.

Аналогично рассматривается случай умножения на $\lambda_2(y)$. Теорема доказана.

Подобно тому, как с помощью теоремы 1 доказываются теоремы 2, 3 и лемма 3 для кратных рядов Уолша, с помощью теоремы 10 доказываются теоремы 11, 12 и лемма 10. Мы сформулируем все эти утверждения и дадим доказательство первой из теорем. Следующий принцип локализации для суммируемых функций дает

ТЕОРЕМА 11. Пусть f и g — суммируемые на $[0, 2\pi)^2$ функции, ряды Фурье которых $S(f)$ и $S(g)$ принадлежат $\mathcal{K}_2(T)$. Если f и g совпадают на некотором открытом множестве G , то $S(f)$ и $S(g)$ равносходятся на G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(x_0, y_0) \in G$ и $\Pi = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$ (где $a_i, b_i \in [0, 2\pi)$) — такой прямоугольник, что $(x_0, y_0) \in \Pi \subset G$. Положим

$$\lambda_1(x) = \begin{cases} 1, & x \in (a_1 + \varepsilon, b_1 - \varepsilon), \\ 0, & x \notin (a_1, b_1), \end{cases} \quad \lambda_2(y) = \begin{cases} 1, & y \in (a_2 + \varepsilon, b_2 - \varepsilon), \\ 0, & y \notin (a_2, b_2), \end{cases}$$

где $\varepsilon > 0$ таково, что $\lambda_1(x_0) = 1$, $\lambda_2(y_0) = 1$; $\lambda_1(x), \lambda_2(y) \geq 0$, $\lambda_1(x)$ и $\lambda_2(y)$ имеют три непрерывные производные, так что их ряды Фурье $\lambda_1(x) = \sum a_{\nu} e^{i\nu x}$, $\lambda_2(y) = \sum b_{\nu} e^{i\nu y}$ удовлетворяют условию $\sum |\nu a_{\nu}| < \infty$, $\sum |\nu b_{\nu}| < \infty$. Умножим ряд $S(f)$ формально на ряд Фурье $\lambda_1(x)$, а затем $\lambda_2(y)$. Тогда полученный ряд S_1 будет рядом Фурье функции $\lambda_1(x)\lambda_2(y)f(x, y)$ и будет равносходиться с рядом $\lambda_1(x)\lambda_2(y)S(f)$ в силу теоремы 10. Аналогично определим ряд S_2 , умножая $S(g)$ формально на ряд Фурье $\lambda_1(x)$, а затем $\lambda_2(y)$. Тогда S_2 — ряд Фурье функции $\lambda_1(x)\lambda_2(y)g(x, y)$ и равносходится с $\lambda_1(x)\lambda_2(y)S(g)$. Так как f и g совпадают на Π , то $S_1 = S_2$. Значит, ряды $\lambda_1(x)\lambda_2(y)S(f)$ и $\lambda_1(x)\lambda_2(y)S(g)$ равносходятся на $[0, 2\pi)^2$. В силу определения функций λ_1 и λ_2 отсюда следует, что $S(f)$ и $S(g)$ равносходятся в точке (x_0, y_0) , а значит, и на G . Теорема доказана.

Определения множеств и семейств множеств $U(\mathcal{K}_2(T))$, $M(\mathcal{K}_2(T))$ даются так же, как для рядов Уолша. Аналогом теоремы Привалова для кратных тригонометрических рядов является

ТЕОРЕМА 12. Пусть ряд S класса $\mathcal{K}_2(T)$ сходится по прямоугольникам всюду, за исключением, быть может, замкнутого U -множества, к конечной суммируемой на $[0, 2\pi)^2$ функции f , причем ряд Фурье функции f тоже класса $\mathcal{K}_2(T)$. Тогда $S = S(f)$.

(При доказательстве теоремы 3 мы ссылались на теорему А, а здесь доказательство опирается на аналогичную теорему Тетунашвили [5] для кратных тригонометрических рядов.)

ЛЕММА 10. Если $\mathcal{E}$ – ядро ряда S класса $\mathcal{H}_2(T)$ и $\mathcal{E} \cap G \neq \emptyset$ для некоторого открытого множества G , то найдется ряд класса $\mathcal{H}_2(T)$ с ядром $\mathcal{E}_1$, $\emptyset \neq \mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E} \cap G$; в частности, множество $\mathcal{E} \cap G$ является $M(\mathcal{H}_2(T))$ -множеством.

Из леммы 10 следует, что дополнительное к наследственному семейству $U(\mathcal{H}_2(T))$ семейство $M(\mathcal{H}_2(T))$ является семейством со свойством ядра. Отсюда и из теорем F и K следуют

ТЕОРЕМА 13. Пусть E_k – $U(\mathcal{H}_2(T))$ -множества, замкнутые относительно своего объединения $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, причем E имеет тип G_δ . Тогда E тоже является $U(\mathcal{H}_2(T))$ -множеством.

ТЕОРЕМА 14. Пусть E_1 и E_2 являются U -множествами для двойных тригонометрических рядов, причем множество $[0, 2\pi)^2 \setminus (E_1 \cup E_2)$ содержит какое-нибудь существенное множество. Тогда если

- 1) E_1 и E_2 – множества типа G_δ , а $E_1 \cap E_2$ – типа F_σ (в частности, пусто)

или

- 2) E_1 – множество типа F_σ и G_δ одновременно,

то $E_1 \cup E_2$ является U -множеством.

Доказанные результаты допускают обобщение на d -кратные тригонометрические ряды ($d > 2$). При этом условия (35)–(38) переходят для класса $\mathcal{H}_d(T)$ в $2d$ условий, которые выполняются в $[0, 2\pi)^{d-1}$, и суммирование в которых ведется по всем, кроме одной, переменным.

Список литературы

1. Скворцов В. А. О коэффициентах сходящихся кратных рядов Хаара и Уолша // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1973. №6. С. 77–79.
2. Мовсисян Х. О. О единственности двойных рядов по системам Хаара и Уолша // Изв. АН Арм. ССР. Матем. 1974. Т. 9. №1. С. 40–61.
3. Лукомский С. Ф. О некоторых классах множеств единственности кратных рядов Уолша // Матем. сб. 1989. Т. 180. №7. С. 937–945.
4. Ash J. M., Welland G. V. Convergence, uniqueness and summability of multiple trigonometric series // Trans. Amer. Math. Soc. 1972. V. 163. №1. P. 401–436.
5. Тетунашвили Ш. Т. О некоторых функциональных рядах и решение проблемы единственности кратных тригонометрических рядов для сходимости по Прингсхейму // Матем. сб. 1991. Т. 182. №8. С. 1158–1176.
6. Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А. Ряды и преобразования Уолша. М.: Наука, 1987.
7. Привалов И. И. Обобщение теоремы Р. Du Bois-Reymond'a // Матем. сб. 1923. Т. 31. №2. С. 229–231.
8. Скворцов В. А. Некоторые обобщения теоремы единственности для рядов по системе Уолша // Матем. заметки. 1973. Т. 13. №3. С. 367–372.
9. Холщевникова Н. Н. Теоремы об объединении U -множеств // Матем. заметки. 2000. Т. 67. №5. С. 778–787.
10. Скворцов В. А., Талалян А. А. Некоторые вопросы единственности кратных рядов по системе Хаара и тригонометрической системе // Матем. заметки. 1989. Т. 46. №2. С. 104–113.
11. Куратовский К. Топология. Т. 1. М.: Мир, 1966.

12. *Барн* *Н. К.* Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961.
13. *Kahane S.* Antistable classes of thin sets in harmonic analysis // Illinois J. Math. 1993. V. 37. P. 186–223.
14. *Konyagin S. V.* Every set of resolution is an Arbault set // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I Math. 1992. V. 314. P. 101–104.
15. *Холщевникова Н. Н.* О теореме Кантора–Лебега для кратных тригонометрических рядов // Фундамент. физико-матем. проблемы . . . Сб. научных трудов. 2000. № 3. С. 35–40.

Московский государственный
технологический университет “Станкин”
E-mail: kholsh@stanmat.mian.su

Поступила в редакцию
31.05.2001