Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Б. Банару, Эрмитова геометрия 6-мерных подмногообразий алгебры Кэли, *Матем. сб.*, 2002, том 193, номер 5, 3–16

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm648>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 18:08:05

УДК 513.74

М. Б. Банару

Эрмитова геометрия 6-мерных подмногообразий алгебры Кэли

Исследуются 6-мерные ориентируемые подмногообразия (общего типа) алгебры Кэли, на которых 3-векторные произведения в алгебре октав индуцируют эрмитову структуру. Доказано, что такие подмногообразия алгебры Кэли минимальны, некомпактны и паракелеровы, их голоморфная бисекционная кривизна неположительна, причем обращается в нуль в геодезических точках и только в них.

Доказано также, что косимплектические гиперповерхности 6-мерных эрмитовых подмногообразий алгебры октав линейчатые. Получен простой критерий минимальности таких гиперповерхностей. Установлено, что 6-мерные эрмитовы подмногообразия алгебры Кэли, удовлетворяющие аксиоме g -косимплектических гиперповерхностей, являются келеровыми многообразиями.

Библиография: 32 названия.

§ 1. Введение

Настоящая работа содержит ряд результатов, относящихся к геометрии 6-мерных эрмитовых подмногообразий алгебры Кэли. Исследуются некоторые свойства (минимальность, компактность, паракелеровость и др.) таких подмногообразий и их косимплектических гиперповерхностей.

Один из наиболее богатых и интересных источников примеров почти эрмитовых структур обусловлен существованием 3-векторных произведений на пространстве $\mathbb{R}^8$, несущем структуру алгебры Кэли. Напомним, что понятие r -векторного произведения в n -мерном евклидовом пространстве $\{E, \langle \cdot, \cdot \rangle\}$ введено Экмманом [1]: r -векторным произведением называется непрерывное отображение

$$P: E^r \rightarrow E,$$

обладающее свойствами

- 1) $\langle P(x_1, \dots, x_r), x_i \rangle = 0$,
- 2) $\|P(x_1, \dots, x_r)\|^2 = \det(\langle x_i, x_j \rangle)$,

где $x_1, \dots, x_r \in E$, $i, j = 1, \dots, r$.

В [1], [2] Экмман и Уайтхед средствами алгебраической топологии доказали, что r -векторные произведения существуют только в следующих случаях:

- 1) n – четное, $r = 1$;
- 2) n – произвольное натуральное число, $r = n - 1$;
- 3) $n = 7$, $r = 2$;
- 4) $n = 8$, $r = 3$.

С точки зрения геометрии наибольший интерес представляют r -векторные произведения, являющиеся r -линейными отображениями. Этот случай в предположении псевдоевклидовости метрики $\langle \cdot, \cdot \rangle$ был изучен Брауном и А. Греем чисто алгебраическими средствами. Оказалось, что в этом случае результат Экмманна и Уайтхеда сохраняет силу [3]. Более того, Браун и Грей указали явную конструкцию таких r -векторных произведений. Так, например, $(n-1)$ -векторное произведение – это просто тензор типа $(n-1, 1)$, полученный при помощи операции поднятия индекса у элемента объема евклидова пространства. Кроме того, Грей доказал [4], что r -векторное произведение в n -мерном евклидовом пространстве индуцирует $(m-n+r)$ -векторное произведение в m -мерном его подпространстве.

Что касается 3-векторного произведения, то его существование тесно связано с существованием классической структуры алгебры Кэли в 8-мерном евклидовом пространстве. Браун и Грей указали два неизоморфных 3-векторных произведения в алгебре октав

$$\begin{aligned} P_1(X, Y, Z) &= -X(\overline{Y}Z) + \langle X, Y \rangle Z + \langle Y, Z \rangle X - \langle Z, X \rangle Y, \\ P_2(X, Y, Z) &= -(X\overline{Y})Z + \langle X, Y \rangle Z + \langle Y, Z \rangle X - \langle Z, X \rangle Y, \end{aligned} \quad (1)$$

где $X, Y, Z \in \mathbb{O}$, $\mathbb{O} \equiv \mathbb{R}^8$ – алгебра октав, $X \rightarrow \overline{X}$ – оператор сопряжения в $\mathbb{O}$; $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в $\mathbb{O}$. Оказалось, что при этом любое другое 3-векторное произведение в алгебре Кэли изоморфно одному из приведенных. Существование 2-векторного произведения в $\mathbb{R}^7$, установленное Экмманом и Уайтхедом, следует из вышеуказанного результата Брауна и Грея и включения $\mathbb{R}^7 \subset \mathbb{R}^8 \equiv \mathbb{O}$.

С другой стороны, из упомянутого результата Брауна и Грея следует, что на любом 6-мерном ориентируемом подмногообразии $M^6 \subset \mathbb{R}^8 \equiv \mathbb{O}$ каждое из канонических 3-векторных произведений индуцирует 1-векторное произведение, т.е. почти эрмитову структуру. Подобные почти эрмитовы структуры на 6-мерных подмногообразиях алгебры октав хорошо изучены лишь в случае так называемых структур Калаби. Калаби [5] указал несколько конкретных почти эрмитовых 6-мерных подмногообразий алгебры Кэли. Структуры Калаби индуцируются 2-векторными произведениями в $\mathbb{R}^7$. Эти произведения, как мы уже упоминали, могут быть рассмотрены как индуцированные вложением $\mathbb{R}^7 \subset \mathbb{R}^8$. Таким образом, структуры Калаби можно рассматривать как частный случай почти эрмитовых структур, индуцированных на $M^6 \subset \mathbb{O}$. Самые значительные работы о структурах Калаби, на наш взгляд, принадлежат Грею [6], [7], а также Яно и Сумитомо [8].

Об общем случае ориентируемых 6-мерных почти эрмитовых подмногообразий алгебры октав известно гораздо меньше. Из полученных ранее результатов, несомненно, следует отметить принадлежащую Кириченко полную классификацию келеровых [9] и приближенно келеровых [10] 6-мерных подмногообразий алгебры Кэли, а также изученные им же $M^6 \subset \mathbb{O}$ с так называемой устойчивой почти эрмитовой структурой [11]. Кроме того, выделим и самые последние работы (Чо и Секигава [12], Дещ и др. [13]), посвященные, в основном, изучению келеровых и квазикелеровых структур на $M^6 \subset \mathbb{O}$.

Геометрия эрмитовых (т.е. интегрируемых почти эрмитовых) структур на $M^6 \subset \mathbb{O}$ изучалась сравнительно мало и только в частных случаях. Здесь можно выделить работу Кириченко [14], получившего полную классификацию локально

симметрических эрмитовых $M^6 \subset \mathbb{O}$. В предлагаемой статье приведен ряд новых результатов, полученных автором в этом направлении.

§ 2. Минимальность 6-мерных эрмитовых подмногообразий алгебры октав

Пусть $M^6 \subset \mathbb{O}$ – 6-мерное ориентируемое подмногообразие алгебры Кэли. Тогда каждое из 3-векторных произведений (1) индуцирует на M^6 почти эрмитову структуру $\{J_\alpha, \langle \cdot, \cdot \rangle\}$, определяемую в каждой точке $p \in M^6$ соотношением:

$$J_\alpha(X) = P_\alpha(X, e_1, e_2), \quad \alpha = 1, 2,$$

где $\{e_1, e_2\}$ – произвольный ортонормированный базис нормального к M^6 подпространства в точке p , $X \in T_p(M^6)$ [4]. Как мы уже отмечали, подмногообразие $M^6 \subset \mathbb{O}$ называется *эрмитовым*, если индуцируемая на нем почти эрмитова структура интегрируема.

Напомним [10], что точка $p \in M^6$ называется *общей*, если

$$e_0 \notin T_p(M^6) \quad \text{и} \quad T_p(M^6) \subseteq L(e_0)^\perp,$$

где $e_0 \in \mathbb{O}$ – единица алгебры Кэли, $L(e_0)^\perp$ – ее ортогональное дополнение. Подмногообразие $M^6 \subset \mathbb{O}$, состоящее из общих точек, называется *подмногообразием общего типа* [10]. Все рассматриваемые далее подмногообразия $M^6 \subset \mathbb{O}$ подразумеваются подмногообразиями общего типа.

Воспользуемся полученными Кириченко [9] структурными уравнениями почти эрмитова $M^6 \subset \mathbb{O}$:

$$\begin{aligned} d\omega^a &= \omega_b^a \wedge \omega^b + \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon^{abh} D_{hc} \omega^c \wedge \omega_b + \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon^{ah[b} D_{h^c]} \omega_b \wedge \omega_c, \\ d\omega_a &= -\omega_a^b \wedge \omega_b + \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_{abh} D^{hc} \omega_c \wedge \omega^b + \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_{ah[b} D^{h^c]} \omega_b \wedge \omega^c, \\ d\omega_b^a &= \omega_c^a \wedge \omega_b^c - \left(\frac{1}{2} \delta_{bg}^{ah} D_{h[k} D_{j]}^g + \sum_{\varphi} T_{a[k}^{\varphi} T_{j]b}^{\varphi} \right) \omega^k \wedge \omega^j. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $\varepsilon_{abc} = \varepsilon_{abc}^{123}$, $\varepsilon^{abc} = \varepsilon_{123}^{abc}$ – компоненты тензора Кронекера порядка 3 [14], $\delta_{bg}^{ah} = \delta_b^a \delta_g^h - \delta_g^a \delta_b^h$,

$$\begin{aligned} D^{ch} &= D_{\widehat{ch}}, \quad D_h^c = D_{h\widehat{c}}, \quad D^h_c = D_{\widehat{h}c}, \\ D_{cj} &= \pm T_{cj}^8 + iT_{cj}^7, \quad D_{\widehat{c}j} = \pm T_{cj}^8 - iT_{cj}^7, \end{aligned}$$

где T_{kj}^{φ} – компоненты конфигурационного тензора (в терминологии Грея [6]), или тензора эйлеровой кривизны (см. [15]), $i = \sqrt{-1}$. Здесь и далее $\varphi = 7, 8$; $a, b, c, d, g, h = 1, 2, 3$; $\widehat{a} = a + 3$; $k, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Известно [16], что почти эрмитово $M^6 \subset \mathbb{O}$ является эрмитовым тогда и только тогда, когда $D_{\widehat{a}b} = D_{a\widehat{b}} = 0$.

С учетом этого структурные уравнения (2) примут вид:

$$\begin{aligned} d\omega^a &= \omega_b^a \wedge \omega^b + \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon^{abh} D_{hc} \omega^c \wedge \omega_b, \\ d\omega_a &= -\omega_a^b \wedge \omega_b + \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_{abh} D^{hc} \omega_c \wedge \omega^b, \\ d\omega_b^a &= \omega_c^a \wedge \omega_b^c + \left(\frac{1}{2} \delta_{bg}^{ah} D_{hd} D^{gc} - \sum_{\varphi} T_{\widehat{ac}}^{\varphi} T_{bd}^{\varphi} \right) \omega_c \wedge \omega^d. \end{aligned}$$

Теперь воспользуемся значениями спектра метрического тензора [17]:

$$g_{ab} = 0, \quad g_{a\widehat{b}} = \delta_a^b, \quad g_{\widehat{a}b} = \delta_b^a, \quad g_{\widehat{a}\widehat{b}} = 0.$$

Тогда

$$g^{kj} T_{kj}^{\varphi} = g^{ab} T_{ab}^{\varphi} + g^{\widehat{a}b} T_{\widehat{a}b}^{\varphi} + g^{a\widehat{b}} T_{a\widehat{b}}^{\varphi} + g^{\widehat{a}\widehat{b}} T_{\widehat{a}\widehat{b}}^{\varphi} = g^{\widehat{a}b} T_{\widehat{a}b}^{\varphi} + g^{a\widehat{b}} T_{a\widehat{b}}^{\varphi}.$$

Можно показать, что $T_{a\widehat{b}}^{\varphi} = T_{\widehat{a}b}^{\varphi} = 0$. В самом деле, так как $D_{a\widehat{b}} = D_{\widehat{a}b} = 0$, то

$$\begin{cases} \pm T_{a\widehat{b}}^8 + iT_{a\widehat{b}}^7 = 0, \\ \pm T_{\widehat{a}b}^8 - iT_{\widehat{a}b}^7 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pm T_{a\widehat{b}}^8 + iT_{a\widehat{b}}^7 = 0, \\ \pm T_{a\widehat{b}}^8 - iT_{a\widehat{b}}^7 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_{a\widehat{b}}^8 = 0, \\ T_{a\widehat{b}}^7 = 0. \end{cases}$$

(Аналогично получаем, что и $T_{\widehat{a}b}^8 = T_{\widehat{a}b}^7 = 0$.)

В итоге,

$$g^{kj} T_{kj}^{\varphi} = 0.$$

А это – критерий минимальности подмногообразия риманова многообразия [18]. Таким образом, справедлива

ТЕОРЕМА 1. *Всякое 6-мерное эрмитово подмногообразие алгебры Кэли является минимальным подмногообразием.*

Из того, что минимальные подмногообразия евклидова пространства не могут быть компактными [18], вытекает важное

СЛЕДСТВИЕ. *Всякое 6-мерное эрмитово подмногообразие алгебры Кэли некомпактно.*

Вышеприведенные результаты обобщают и усиливают результаты Грея [19] и Кириченко [9], полученные для 6-мерных келеровых подмногообразий алгебры октав.

§ 3. Скалярная кривизна и кривизна Риччи эрмитовых $M^6 \subset \mathbb{O}$

Напомним [18], что компоненты тензора Риччи риманова многообразия связаны с компонентами тензора римановой кривизны (тензора Римана–Кристоффеля) соотношением

$$\text{ric}_{ij} = R_{ijk}^k.$$

Вычислим спектр этого тензора, используя значения спектра тензора римановой кривизны, полученные в [17]:

$$\begin{aligned} R_{abcd} &= R_{\widehat{a}bcd} = R_{\widehat{a}\widehat{b}cd} = 0, \\ R_{\widehat{a}b\widehat{c}d} &= -\sum_{\varphi} T_{\widehat{a}\widehat{c}}^{\varphi} T_{bd}^{\varphi}. \end{aligned} \quad (3)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \text{ric}_{ab} &= R_{abc}^c + R_{ab\widehat{c}}^{\widehat{c}} = R_{cab\widehat{c}} + R_{\widehat{c}abc} = 0, \\ \text{ric}_{\widehat{a}b} &= R_{\widehat{a}bc}^c + R_{\widehat{a}b\widehat{c}}^{\widehat{c}} = R_{\widehat{c}\widehat{a}bc} + R_{c\widehat{a}b\widehat{c}} = R_{\widehat{c}\widehat{a}b\widehat{c}} = R_{\widehat{a}c\widehat{c}b} = -\sum_{\varphi} T_{\widehat{a}\widehat{c}}^{\varphi} T_{cb}^{\varphi}, \\ \text{ric}_{a\widehat{b}} &= R_{a\widehat{b}c}^c + R_{a\widehat{b}\widehat{c}}^{\widehat{c}} = R_{\widehat{c}a\widehat{b}c} + R_{ca\widehat{b}\widehat{c}} = R_{\widehat{c}a\widehat{b}c} = -\sum_{\varphi} T_{\widehat{c}\widehat{b}}^{\varphi} T_{ac}^{\varphi}, \\ \text{ric}_{\widehat{a}\widehat{b}} &= R_{\widehat{a}\widehat{b}c}^c + R_{\widehat{a}\widehat{b}\widehat{c}}^{\widehat{c}} = R_{\widehat{c}\widehat{a}\widehat{b}c} + R_{c\widehat{a}\widehat{b}\widehat{c}} = 0. \end{aligned}$$

В силу вещественности тензора Риччи

$$\text{ric}_{ab} = \overline{\text{ric}_{\widehat{a}\widehat{b}}}, \quad \text{ric}_{\widehat{a}b} = \overline{\text{ric}_{a\widehat{b}}}.$$

Следовательно, спектр тензора Риччи определяется так:

$$\text{ric}_{ab} = 0, \quad \text{ric}_{\widehat{a}b} = -\sum_{\varphi} T_{\widehat{a}\widehat{c}}^{\varphi} T_{cb}^{\varphi}. \quad (4)$$

Значения (4) позволяют сразу же вычислить скалярную кривизну K эрмитова $M^6 \subset \mathbb{O}$:

$$K = \text{ric}_j^j = -2 \sum_{\varphi, a, b} |T_{ab}^{\varphi}|^2.$$

Отметим, что $K \leq 0$, причем обращение в нуль происходит в точках, где $T_{ab}^{\varphi} = 0$, и только в них. Нами доказана

ТЕОРЕМА 2. *Скалярная кривизна 6-мерного эрмитова подмногообразия алгебры Кэли неположительна, причем обращается в нуль в геодезических точках и только в них.*

Отсюда немедленно вытекает важное

СЛЕДСТВИЕ. Если $K \equiv 0$, то эрмитово $M^6 \subset \mathbb{O}$ является областью на келеровой плоскости.

Этот параграф завершим вычислением кривизны Риччи эрмитова $M^6 \subset \mathbb{O}$. Согласно определению [18] имеем

$$S(X) = \text{ric}_{jk} X^j X^k, \quad X \in \mathfrak{X}(M^6), \quad \|X\| = 1.$$

Следовательно, с учетом (4)

$$\begin{aligned} S(X) &= -2 \sum_{\varphi} T_{\bar{a}\bar{c}}^{\varphi} T_{bc}^{\varphi} X^b X_a = -2 \sum_{\varphi} (T_{\bar{a}\bar{c}}^{\varphi} X_a) (T_{bc}^{\varphi} X^b) \\ &= -2 \sum_{\varphi, a} (\overline{T_{ab}^{\varphi} X^b}) (T_{ab}^{\varphi} X^b) = -2 \sum_{\varphi, a} |T_{ab}^{\varphi} X^b|^2. \end{aligned}$$

Итак,

$$S(X) = -2 \sum_{\varphi, a} |T_{ab}^{\varphi} X^b|^2 \leq 0.$$

При этом $S(X) = 0 \Leftrightarrow T_{ab}^{\varphi} = 0$.

Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 3. *Кривизна Риччи 6-мерного эрмитова подмногообразия алгебры Кэли неположительна, причем обращается в нуль в геодезических точках и только в них.*

СЛЕДСТВИЕ. Эрмитово $M^6 \subset \mathbb{O}$ является Риччи-плоским тогда и только тогда, когда M^6 – область на келеровой плоскости.

§4. Паракелеровость 6-мерных эрмитовых подмногообразий алгебры октав

В работе [20] Грей отмечал, что ключом к геометрии почти эрмитовых многообразий являются тождества, которым удовлетворяет их тензор римановой кривизны. Грей выделил несколько классов почти эрмитовых многообразий, характеризуемых тождествами:

$$\begin{aligned} \text{класс } R_1: & \langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle R(X, Y)JZ, JW \rangle, \\ \text{класс } R_2: & \langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle R(JX, JY)Z, W \rangle \\ & + \langle R(JX, Y)JZ, W \rangle + \langle R(JX, Y)Z, JW \rangle, \\ \text{класс } R_3: & \langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle R(JX, JY)JZ, JW \rangle. \end{aligned}$$

Многообразия класса R_1 изучались под названием паракелеровых многообразий (например, [21]) или F -пространств [22], многообразия класса R_3 – под названием RK -многообразий [23]. Грей доказал [20], что

$$R_1 \subset R_2 \subset R_3,$$

причем приближенно келеровы многообразия являются R_2 -многообразиями, а келеровы многообразия принадлежат классу R_1 .

Заметим, что известно мало примеров почти эрмитовых многообразий класса R_1 , отличных от келеровых. В настоящем параграфе мы существенно расширим число таких примеров, показав, что R_1 -многообразиями являются 6-мерные эрмитовы подмногообразия алгебры октав.

ТЕОРЕМА 4. *Всякое 6-мерное эрмитово подмногообразие алгебры Кэли является паракелеровым многообразием.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку компоненты R_{abcd} , $R_{\widehat{a}bcd}$, $R_{\widehat{a}\widehat{b}cd}$, $R_{\widehat{a}b\widehat{c}d}$ полностью определяют спектр тензора римановой кривизны [17], то достаточно провести такие рассуждения:

1. $R_{abcd} = \langle R(e_a, e_b)e_c, e_d \rangle$,
 $\langle R(e_a, e_b)Je_c, Je_d \rangle = \langle R(e_a, e_b)ie_c, ie_d \rangle$
 $= i^2 \langle R(e_a, e_b)e_c, e_d \rangle = -\langle R(e_a, e_b)e_c, e_d \rangle$,
 $R_{abcd} = -R_{abcd} \Leftrightarrow R_{abcd} = 0$;
2. $\langle R(e_{\widehat{a}}, e_{\widehat{b}})Je_c, Je_d \rangle = \langle R(e_{\widehat{a}}, e_{\widehat{b}})ie_c, ie_d \rangle$
 $= i^2 \langle R(e_{\widehat{a}}, e_{\widehat{b}})e_c, e_d \rangle = -\langle R(e_{\widehat{a}}, e_{\widehat{b}})e_c, e_d \rangle$,
 $R_{\widehat{a}\widehat{b}cd} = -R_{\widehat{a}\widehat{b}cd} \Leftrightarrow R_{\widehat{a}\widehat{b}cd} = 0$;
3. $\langle R(e_{\widehat{a}}, e_b)Je_c, Je_d \rangle = \langle R(e_{\widehat{a}}, e_b)ie_c, ie_d \rangle$
 $= i^2 \langle R(e_{\widehat{a}}, e_b)e_c, e_d \rangle = -\langle R(e_{\widehat{a}}, e_b)e_c, e_d \rangle$,
 $R_{\widehat{a}bcd} = -R_{\widehat{a}bcd} \Leftrightarrow R_{\widehat{a}bcd} = 0$;
4. $R_{\widehat{a}b\widehat{c}d} = \langle R(e_{\widehat{a}}, e_b)e_{\widehat{c}}, e_d \rangle$,
 $\langle R(e_{\widehat{a}}, e_b)Je_{\widehat{c}}, Je_d \rangle = \langle R(e_{\widehat{a}}, e_b)(-i)e_{\widehat{c}}, ie_d \rangle$
 $= -i^2 \langle R(e_{\widehat{a}}, e_b)e_{\widehat{c}}, e_d \rangle = \langle R(e_{\widehat{a}}, e_b)e_{\widehat{c}}, e_d \rangle$.

Таким образом, условие паракелеровости равносильно тому, что

$$R_{abcd} = R_{\widehat{a}bcd} = R_{\widehat{a}\widehat{b}cd} = 0.$$

Так как эти тождества для 6-мерных эрмитовых подмногообразий алгебры октав выполняются всегда (см. (3)), то теорема полностью доказана.

СЛЕДСТВИЕ. *Всякое 6-мерное эрмитово подмногообразие алгебры Кэли является R_2 - и RK -многообразием.*

§ 5. Бисекционная голоморфная кривизна эрмитовых $M^6 \subset \mathbb{O}$

Важнейшей характеристикой почти эрмитова многообразия является его голоморфная бисекционная (BS-)кривизна. (Напомним, что это понятие ввели Голдберг и Кобаяси [24].) Важность BS-кривизны обусловлена тем, что она во многом определяет не только геометрию, но и топологию многообразия. Вычислим BS-кривизну 6-мерного эрмитова подмногообразия алгебры октав. Согласно определению голоморфная бисекционная кривизна в направлении бивектора $X \wedge Y$ [24] задается соотношением:

$$BS_{X \wedge Y} = R(X, JX, Y, JY), \quad \text{где } \|X\| = \|Y\| = 1.$$

Тогда

$$\begin{aligned} BS_{X \wedge Y} = & R_{abcd}X^c JX^d Y^b JY^a + R_{\widehat{a}bcd}X^c JX^d Y^b JY^{\widehat{a}} \\ & + R_{a\widehat{b}cd}X^c JX^d Y^{\widehat{b}} JY^a + R_{ab\widehat{c}d}X^c JX^d Y^b JY^{\widehat{a}} \\ & + R_{abc\widehat{d}}X^c JX^{\widehat{d}} Y^b JY^a + R_{\widehat{a}bcd}X^c JX^d Y^{\widehat{b}} JY^{\widehat{a}} \\ & + R_{\widehat{a}b\widehat{c}d}X^{\widehat{c}} JX^d Y^b JY^{\widehat{a}} + R_{\widehat{a}bc\widehat{d}}X^c JX^{\widehat{d}} Y^b JY^{\widehat{a}} \\ & + R_{a\widehat{b}\widehat{c}d}X^{\widehat{c}} JX^d Y^{\widehat{b}} JY^a + R_{\widehat{a}b\widehat{c}d}X^c JX^{\widehat{d}} Y^{\widehat{b}} JY^{\widehat{a}} \\ & + R_{ab\widehat{c}\widehat{d}}X^{\widehat{c}} JX^{\widehat{d}} Y^b JY^a + R_{\widehat{a}b\widehat{c}d}X^{\widehat{c}} JX^d Y^{\widehat{b}} JY^{\widehat{a}} \\ & + R_{\widehat{a}\widehat{b}cd}X^c JX^{\widehat{d}} Y^{\widehat{b}} JY^{\widehat{a}} + R_{\widehat{a}b\widehat{c}d}X^{\widehat{c}} JX^{\widehat{d}} Y^b JY^{\widehat{a}} \\ & + R_{\widehat{a}b\widehat{c}\widehat{d}}X^{\widehat{c}} JX^{\widehat{d}} Y^{\widehat{b}} JY^{\widehat{a}} + R_{\widehat{a}\widehat{b}cd}X^{\widehat{c}} JX^d Y^{\widehat{b}} JY^{\widehat{a}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= R_{\widehat{a}b\widehat{c}d}X^{\widehat{c}}JX^dY^bJY^{\widehat{a}} + R_{\widehat{a}b\widehat{c}d}X^cJX^{\widehat{d}}Y^bJY^{\widehat{a}} \\
&\quad + R_{\widehat{a}\widehat{b}\widehat{c}d}X^{\widehat{c}}JX^dY^{\widehat{b}}JY^a + R_{\widehat{a}\widehat{b}\widehat{c}d}X^cJX^{\widehat{d}}Y^{\widehat{b}}JY^a \\
&= R_{\widehat{a}b\widehat{c}d}X^{\widehat{c}}X^dY^bY^{\widehat{a}} - R_{\widehat{a}b\widehat{c}d}X^cX^{\widehat{d}}Y^bY^{\widehat{a}} \\
&\quad + R_{\widehat{a}\widehat{b}\widehat{c}d}X^{\widehat{c}}X^dY^{\widehat{b}}Y^a - R_{\widehat{a}\widehat{b}\widehat{c}d}X^cX^{\widehat{d}}Y^{\widehat{b}}Y^a \\
&= R_{\widehat{a}b\widehat{c}d}X^{\widehat{c}}X^dY^bY^{\widehat{a}} + R_{\widehat{a}b\widehat{c}d}X^cX^{\widehat{d}}Y^bY^{\widehat{a}} \\
&\quad + R_{\widehat{b}a\widehat{c}d}X^{\widehat{c}}X^dY^{\widehat{b}}Y^a + R_{\widehat{b}a\widehat{c}d}X^cX^{\widehat{d}}Y^{\widehat{b}}Y^a \\
&= R_{\widehat{a}b\widehat{c}d}X^{\widehat{c}}X^dY^bY^{\widehat{a}} + R_{\widehat{a}b\widehat{c}d}X^{\widehat{c}}X^dY^bY^{\widehat{a}} \\
&\quad + R_{\widehat{a}b\widehat{c}d}X^{\widehat{c}}X^dY^bY^{\widehat{a}} + R_{\widehat{a}b\widehat{c}d}X^{\widehat{c}}X^dY^bY^{\widehat{a}} \\
&= 4R_{\widehat{a}b\widehat{c}d}X^{\widehat{c}}X^dY^bY^{\widehat{a}}.
\end{aligned}$$

С учетом (3) получаем

$$\begin{aligned}
\text{BS}_{X \wedge Y} &= -4 \sum_{\varphi} T_{\widehat{a}\widehat{c}}^{\varphi} T_{bd}^{\varphi} X^{\widehat{c}} X^d Y^b Y^{\widehat{a}} \\
&= -4 \sum_{\varphi} (T_{ab}^{\varphi} X^a Y^b) (\overline{T_{ab}^{\varphi} X^a Y^b}) = -4 \sum_{\varphi} |T_{ab}^{\varphi} X^a Y^b|^2.
\end{aligned}$$

Итак,

$$\text{BS}_{X \wedge Y} = -4 \sum_{\varphi} |T_{ab}^{\varphi} X^a Y^b|^2 \leq 0. \quad (5)$$

Отметим, что $\text{BS}_{X \wedge Y} = 0 \Leftrightarrow T_{ab}^{\varphi} = 0$. Поэтому справедлива

ТЕОРЕМА 5. *Голоморфная бисекционная кривизна 6-мерного эрмитова подмногообразия алгебры Кэли неположительна, причем обращается в нуль в геодезических точках и только в них.*

СЛЕДСТВИЕ. *Эрмитово $M^6 \subset \mathbb{O}$ является многообразием нулевой голоморфной бисекционной кривизны в том и только том случае, когда M^6 – область на келеровой плоскости.*

Формула (5) обобщает известный результат Кириченко для 6-мерных келеро-вых подмногообразий алгебры октав. Действительно, если

$$T_{ab}^8 = \pm i T_{ab}^7, \quad T_{\widehat{a}\widehat{b}}^8 = \mp i T_{\widehat{a}\widehat{b}}^7 \quad (6)$$

(это необходимое и достаточное условие, при котором 6-мерное почти эрмитово подмногообразие алгебры Кэли является келеровым [9], [25]), то получим формулу для бисекционной голоморфной кривизны 6-мерного келерова подмногообразия алгебры октав:

$$\text{BS}_{X \wedge Y} = -8 |T_{ab}^7 X^a Y^b|^2.$$

Это – формула Кириченко [9].

§ 6. Об уплощающихся 6-мерных эрмитовых подмногообразиях алгебры октав

ОПРЕДЕЛЕНИЕ [26]. Шестимерное подмногообразие алгебры Кэли называется *уплощающимся*, если оно является подмногообразием гиперплоскости в $\mathbb{O}$.

Заметим, что упомянутые подмногообразия Калаби являются уплощающимися. К числу уплощающихся относятся и 6-мерные келеровы подмногообразия алгебры октав. Поскольку эрмитово M^6 является уплощающимся тогда и только тогда [26], когда

$$T_{ab}^8 = \pm \mu T_{ab}^7, \quad T_{\widehat{a}\widehat{b}}^8 = \mp \mu T_{\widehat{a}\widehat{b}}^7, \quad \mu = \text{const}, \quad (7)$$

а для келеровых M^6 выполняются равенства (6), то справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Всякое 6-мерное келерово подмногообразие алгебры Кэли является уплощающимся.*

Из соотношений (7) и из равенств

$$D_{ab} = \pm T_{ab}^8 + iT_{ab}^7, \quad D_{\widehat{a}\widehat{b}} = \pm T_{\widehat{a}\widehat{b}}^8 - iT_{\widehat{a}\widehat{b}}^7$$

следует, что ранг матрицы (D_{jk}) равен рангу матрицы (T_{jk}^φ) . Поскольку матрица (D_{jk}) вырожденная [26] ($\text{rang}(D_{jk}) \leq 2$), то вырожденной является и каждая из матриц (T_{jk}^8) и (T_{jk}^7) . Это означает, что справедлива

ТЕОРЕМА 6. *Уплощающиеся 6-мерные эрмитовы подмногообразия алгебры Кэли являются линейчатыми.*

§ 7. О косимплектических гиперповерхностях эрмитовых $M^6 \subset \mathbb{O}$

Важнейшими примерами почти контактных метрических структур, в значительной мере определяющими их роль в дифференциальной геометрии, служат структуры, индуцируемые на ориентируемой гиперповерхности почти эрмитова многообразия [27].

Пусть N – ориентируемая гиперповерхность эрмитова $M^6 \subset \mathbb{O}$, σ – вторая квадратичная форма ее погружения в M^6 . Как хорошо известно [27], [28], на N внутренним образом индуцируется почти контактная метрическая структура. Напомним [29], что *почти контактной метрической структурой* на многообразии N называется система $\{\Phi, \xi, \eta, g\}$ тензорных полей на этом многообразии, где ξ – векторное поле, η – ковекторное поле, Φ – поле тензора типа $(1, 1)$, g – риманова метрика на N . При этом

$$\begin{aligned} \eta(\xi) &= 1, \quad \Phi(\xi) = 0, \quad \eta \circ \Phi = 0, \quad \Phi^2 = -\text{id} + \xi \otimes \eta, \\ \langle \Phi X, \Phi Y \rangle &= \langle X, Y \rangle - \eta(X)\eta(Y), \quad X, Y \in \mathfrak{X}(N). \end{aligned}$$

Почти контактная метрическая структура называется *косимплектической* [30], если

$$\nabla \eta = \nabla \Phi = 0.$$

(Здесь ∇ – риманова связность метрики g .) Первая группа структурных уравнений гиперповерхности N эрмитова многообразия M^6 имеет вид [30]:

$$\begin{aligned}
d\omega^\alpha &= \omega_\beta^\alpha \wedge \omega^\beta + B^{\alpha\beta}{}_\gamma \omega^\gamma \wedge \omega_\beta + (\sqrt{2} B^{\alpha 3}{}_\beta + i\sigma_\beta^\alpha) \omega^\beta \wedge \omega \\
&\quad + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} B^{\alpha\beta}{}_3 + i\sigma^{\alpha\beta} \right) \omega_\beta \wedge \omega, \\
d\omega_\alpha &= -\omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta + B_{\alpha\beta}{}^\gamma \omega_\gamma \wedge \omega^\beta + (\sqrt{2} B_{\alpha 3}{}^\beta - i\sigma_\alpha^\beta) \omega_\beta \wedge \omega \\
&\quad + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} B_{\alpha\beta}{}^3 - i\sigma_{\alpha\beta} \right) \omega^\beta \wedge \omega, \\
d\omega &= (\sqrt{2} B^{3\alpha}{}_\beta - \sqrt{2} B_{3\beta}{}^\alpha - 2i\sigma_\beta^\alpha) \omega^\beta \wedge \omega_\alpha + (B_{3\beta}{}^3 + i\sigma_{3\beta}) \omega \wedge \omega^\beta \\
&\quad + (B^{3\beta}{}_3 - i\sigma_3^\beta) \omega \wedge \omega_\beta.
\end{aligned} \tag{8}$$

Здесь B – структурные тензоры Кириченко [16], [25] эрмитова многообразия $M^6 \subset \mathbb{O}$, $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \hat{\alpha} = \alpha + 3$. Принимая во внимание, что первая группа структурных уравнений косимплектической структуры должна иметь следующий вид [31]:

$$\begin{aligned}
d\omega^\alpha &= \omega_\beta^\alpha \wedge \omega^\beta, \\
d\omega_\alpha &= -\omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta, \\
d\omega &= 0,
\end{aligned}$$

получаем условия, одновременное выполнение которых есть критерий косимплектичности гиперповерхности N :

$$B^{\alpha\beta}{}_\gamma = 0, \tag{91}$$

$$\sqrt{2} B^{\alpha 3}{}_\beta + i\sigma_\beta^\alpha = 0, \tag{92}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} B^{\alpha\beta}{}_3 + i\sigma^{\alpha\beta} = 0, \tag{93}$$

$$B^{3\alpha}{}_\beta - \sqrt{2} B_{3\beta}{}^\alpha - 2i\sigma_\beta^\alpha = 0, \tag{94}$$

$$B^{3\beta}{}_3 - i\sigma_3^\beta = 0, \tag{95}$$

и формулы комплексного сопряжения (ф.к.с.), запись которых мы опустим.

Проанализируем полученные условия. Из (93) следует, что

$$\sigma^{\alpha\beta} = -\frac{i}{\sqrt{2}} B^{\alpha\beta}{}_3.$$

Проальтернируем это соотношение:

$$0 = \sigma^{[\alpha\beta]} = -\frac{i}{\sqrt{2}} B^{[\alpha\beta]}{}_3 = -\frac{i}{2\sqrt{2}} (B^{\alpha\beta}{}_3 - B^{\beta\alpha}{}_3) = -\frac{i}{\sqrt{2}} B^{\alpha\beta}{}_3.$$

Следовательно, $B^{\alpha\beta}{}_3 = 0$, а значит, и $\sigma^{\alpha\beta} = 0$. Из (92) получаем, что $B^{3\alpha}{}_\beta = \frac{i}{\sqrt{2}} \sigma_\beta^\alpha$. Подставим в (94). В итоге окажется:

$$\sigma_\beta^\alpha = i\sqrt{2} B_{3\beta}{}^\alpha.$$

Теперь воспользуемся выражениями для структурных тензоров Кириченко 6-мерных почти эрмитовых подмногообразий алгебры Кэли:

$$B^{ab}{}_c = \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^{abh}D_{hc}, \quad B_{ab}{}^c = \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_{abh}D^{hc}.$$

Из (9₁) можем извлечь:

$$B^{\alpha\beta}{}_{\gamma} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^{\alpha\beta c}D_{c\gamma} = 0 \Leftrightarrow \varepsilon^{\alpha\beta 3}D_{3\gamma} = 0 \Leftrightarrow D_{3\gamma} = 0.$$

Точно такие же рассуждения применим к условию $B^{\alpha\beta}{}_3 = 0$, полученному выше:

$$B^{\alpha\beta}{}_3 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^{\alpha\beta c}D_{c3} = 0 \Leftrightarrow \varepsilon^{\alpha\beta 3}D_{33} = 0 \Leftrightarrow D_{33} = 0.$$

Итак, $D_{3\gamma} = D_{33} = 0$, т.е.

$$D_{3c} = 0. \quad (10)$$

Из (9₅) имеем:

$$\sigma_3^\beta = \sigma_{3\hat{\beta}} = -iB^{3b}{}_3 = -i\frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^{3\beta c}D_{c3} = 0.$$

Следовательно, $\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = \sigma_{3\beta} = \sigma_{3\hat{\beta}} = 0$. Вычислим остальные компоненты σ , используя (9₂):

$$\sigma_{\hat{\alpha}\beta} = \sigma_{\beta}^\alpha = i\sqrt{2}B^{\alpha 3}{}_{\beta} = i\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^{\alpha 3 c}D_{c\beta} = i\varepsilon^{\alpha 3 \gamma}D_{\gamma\beta}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sigma_{\hat{1}1} &= i\varepsilon^{13\gamma}D_{\gamma 1} = i\varepsilon^{132}D_{21} = -iD_{21}, \\ \sigma_{\hat{1}2} &= i\varepsilon^{13\gamma}D_{\gamma 2} = i\varepsilon^{132}D_{22} = -iD_{22}, \\ \sigma_{\hat{2}1} &= i\varepsilon^{23\gamma}D_{\gamma 1} = i\varepsilon^{231}D_{11} = iD_{11}, \\ \sigma_{\hat{2}2} &= i\varepsilon^{23\gamma}D_{\gamma 2} = i\varepsilon^{231}D_{12} = iD_{12}, \\ \sigma_{1\hat{1}} &= \overline{\sigma}_{\hat{1}1} = iD^{12}, \\ \sigma_{1\hat{2}} &= \overline{\sigma}_{\hat{1}2} = iD^{22}, \\ \sigma_{2\hat{1}} &= \overline{\sigma}_{\hat{2}1} = -iD^{11}, \\ \sigma_{2\hat{2}} &= \overline{\sigma}_{\hat{2}2} = -iD^{12}. \end{aligned}$$

Получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 7. *Матрица второй квадратичной формы погружения косимплектической гиперповерхности N в эрмитово 6-мерное подмногообразие алгебры Кэли имеет следующий вид:*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & iD^{12} & -iD^{11} \\ 0 & 0 & 0 & iD^{22} & -iD^{12} \\ 0 & 0 & \sigma_{33} & 0 & 0 \\ -iD_{12} & -iD_{22} & 0 & 0 & 0 \\ iD_{11} & iD_{12} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Воспользовавшись тождествами, установленными в [32]:

$$D^{11}D^{22} = (D^{12})^2 \quad \text{и} \quad D_{11}D_{22} = (D_{12})^2,$$

убеждаемся в том, что каждая из матриц

$$\begin{pmatrix} -iD_{12} & -iD_{22} \\ iD_{11} & iD_{12} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} iD^{12} & -iD^{11} \\ iD^{22} & -iD^{12} \end{pmatrix}$$

является вырожденной. Следовательно, вырождена и матрица второй квадратичной формы σ ($\text{rang } \sigma \leq 3$). Поэтому справедлива

ТЕОРЕМА 8. *Всякая косимплектическая гиперповерхность 6-мерного эрмитова подмногообразия алгебры Кэли линейчатая.*

Исследуя матрицу σ , мы приходим еще к одному результату.

ТЕОРЕМА 9. *Косимплектическая гиперповерхность 6-мерного эрмитова подмногообразия алгебры Кэли минимальна тогда и только тогда, когда*

$$\sigma(\xi, \xi) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку критерием минимальности гиперповерхности может служить тождество (мы использовали этот факт в §2)

$$g^{kl}\sigma_{kl} = 0,$$

а матрица метрического тензора выглядит следующим образом [17], [30]:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

то

$$\begin{aligned} g^{kj}\sigma_{kj} &= g^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta} + g^{\widehat{\alpha}\beta}\sigma_{\widehat{\alpha}\beta} + g^{\alpha\widehat{\beta}}\sigma_{\alpha\widehat{\beta}} + g^{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}\sigma_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}} + g^{33}\sigma_{33} \\ &= iD_{12} - iD_{12} + iD^{12} - iD^{12} + \sigma_{33} = \sigma_{33}. \end{aligned}$$

Поэтому $g^{kj}\sigma_{kj} = 0 \Leftrightarrow \sigma_{33} = 0$. Последнее равенство означает ни что иное, как $\sigma(\xi, \xi) = 0$. Теорема полностью доказана.

§8. Аксиома g -косимплектических гиперповерхностей и 6-мерные эрмитовы подмногообразия алгебры октав

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Почти эрмитово многообразие называется *удовлетворяющим аксиоме g -косимплектических гиперповерхностей*, если через каждую его точку проходит вполне геодезическая косимплектическая гиперповерхность.

ТЕОРЕМА 10. *Всякое 6-мерное эрмитово подмногообразие алгебры Кэли, удовлетворяющее аксиоме g -косимплектических гиперповерхностей, является келеровым многообразием.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку гиперповерхность N будет вполне геодезическим подмногообразием эрмитова $M^6 \subset \mathbb{O}$ тогда и только тогда, когда матрица второй квадратичной формы погружения N в M^6 (11) окажется нулевой, то условие

$$D_{11} = D_{12} = D_{22} = D^{11} = D^{12} = D^{22} = \sigma_{33} = 0 \quad (12)$$

является критерием того, что косимплектическая гиперповерхность N – вполне геодезическое подмногообразие эрмитова $M^6 \subset \mathbb{O}$.

Матрица D 6-мерных эрмитовых подмногообразий алгебры октав имеет вид [6], [25]:

$$D = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 & 0 & 0 \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & 0 & 0 & 0 \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D^{11} & D^{12} & D^{13} \\ 0 & 0 & 0 & D^{21} & D^{22} & D^{23} \\ 0 & 0 & 0 & D^{31} & D^{32} & D^{33} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что при выполнении (10) и (12) эта матрица окажется нулевой.

Но матрица D является нулевой в том и только том случае, если M^6 – келерово многообразие [9], [16], [25].

Итак, если $M^6 \subset \mathbb{O}$ удовлетворяет аксиоме g -косимплектических поверхностей, то M^6 – келерово многообразие, что и требовалось доказать.

Список литературы

1. *Eckmann B.* Stetige Lösungen linearer Gleichungssysteme // Comment. Math. Helv. 1942–1943. V. 15. P. 318–339.
2. *Whitehead G.* Note on cross-sections in Stiefel manifolds // Comment. Math. Helv. 1963. V. 37. P. 239–240.
3. *Brown R. B., Gray A.* Vector cross products // Comment. Math. Helv. 1967. V. 42. P. 222–236.
4. *Gray A.* Vector cross products on manifolds // Trans. Amer. Math. Soc. 1969. V. 141. P. 465–504.
5. *Calabi E.* Construction and properties of some 6-dimensional almost complex manifolds // Trans. Amer. Math. Soc. 1958. V. 87. P. 407–438.
6. *Gray A.* Some examples of almost Hermitian manifolds // Illinois J. Math. 1966. V. 10. №2. P. 353–366.
7. *Gray A.* Six dimensional almost complex manifolds defined by means of three-fold vector cross products // Tôhoku Math. J. (2). 1969. V. 21. P. 614–620.
8. *Yano K., Sumitomo T.* Differential geometry of hypersurfaces in a Cayley space // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. 1963–1964. V. 66. P. 216–231.

9. *Кириченко В. Ф.* Классификация келеровых структур, индуцированных 3-векторными произведениями на 6-мерных подмногообразиях алгебры Кэли // Изв. вузов. Сер. матем. 1980. № 8. С. 32–38.
10. *Кириченко В. Ф.* Почти келеровы структуры, индуцированные 3-векторными произведениями на 6-мерных подмногообразиях алгебры Кэли // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1973. № 3. С. 70–75.
11. *Кириченко В. Ф.* Устойчивость почти эрмитовых структур, индуцированных 3-векторными произведениями на 6-мерных подмногообразиях алгебры Кэли // Укр. геом. сб. 1982. Т. 25. С. 60–68.
12. *Cho J. T., Sekigawa K.* Six-dimensional quasi-Kähler manifolds of constant sectional curvature // Tsukuba J. Math. 1998. V. 22. № 3. P. 611–627.
13. *Deszcz R., Dillen F., Verstraelen L., Vrancken L.* Quasi-Einstein totally real submanifolds of the nearly Kähler 6-sphere // Tôhoku Math. J. (2). 1999. V. 51. № 4. P. 461–478.
14. *Лизнерович А.* Теория связностей в целом и группы голономий. М.: ИЛ, 1960.
15. *Карпан Э.* Риманова геометрия в ортогональном репере. М.: Изд-во МГУ, 1960.
16. *Банару М. Б.* Классы Грея–Хервеллы почти эрмитовых структур на 6-мерных подмногообразиях алгебры Кэли // Научные труды МПГУ им. В. И. Ленина. М.: Прометей, 1994. С. 36–38.
17. *Банару М. Б.* О спектрах важнейших тензоров 6-мерных эрмитовых подмногообразий алгебры Кэли // Новейшие проблемы теории поля. Казань: Изд-во КГУ, 2000. С. 18–22.
18. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. Т. 2. М.: Наука, 1981.
19. *Gray A.* Minimal varieties and almost Hermitian submanifolds // Michigan Math. J. 1966. V. 12. P. 273–287.
20. *Gray A.* Curvature identities for Hermitian and almost Hermitian manifolds // Tôhoku Math. J. (2). 1976. V. 28. № 4. P. 601–612.
21. *Rizza G. B.* Varietà parakähleriane // Ann. Mat. Pura Appl. (4). 1974. V. 98. № 4. P. 47–61.
22. *Sawaki S., Sekigawa K.* Almost Hermitian manifolds with constant holomorphic sectional curvature // J. Differential Geom. 1974. V. 9. P. 123–134.
23. *Vanhecke L.* Almost Hermitian manifolds with J -invariant Riemann curvature tensor // Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino. 1975–1977. V. 34. P. 487–498.
24. *Goldberg S., Kobayashi S.* Holomorphic bisectional curvature // J. Differential Geom. 1967. V. 1. P. 229–233.
25. *Банару М. Б.* О почти эрмитовых структурах, индуцированных 3-векторными произведениями на 6-мерных ориентируемых многообразиях алгебры октав // Полианалитические функции. Смоленск: Изд-во СГПУ, 1997. С. 113–117.
26. *Банару М. Б.* Об уплющающихся 6-мерных эрмитовых подмногообразиях алгебры Кэли // Избранные вопросы математики и методики ее преподавания. Смоленск: Изд-во СГПУ, 1998. С. 31–32.
27. *Goldberg S.* Totally geodesic hypersurfaces of Kähler manifolds // Pacific J. Math. 1968. V. 27. № 2. P. 275–281.
28. *Tashiro Y.* On contact structure of hypersurfaces in complex manifolds. I // Tôhoku Math. J. (2). 1963. V. 15. № 1. P. 62–78.
29. *Blair D.* The theory of quasi-Sasakian structures // J. Differential Geom. 1967. V. 1. P. 331–345.
30. *Степанова Л. В.* Квазисасакиева структура на гиперповерхностях эрмитовых многообразий // Научные труды МПГУ им. В. И. Ленина. М.: Прометей, 1995. С. 187–191.
31. *Кириченко В. Ф.* Методы обобщенной эрмитовой геометрии в теории почти контактных многообразий // Итоги науки и техн. Пробл. геом. Т. 18. М.: ВИНТИ, 1986. С. 25–71.
32. *Банару М. Б.* Эрмитова геометрия 6-мерных подмногообразий алгебры Кэли // Дисс. ... канд. физ.-матем. наук. М.: МПГУ им. В. И. Ленина, 1993.