Общероссийский математический портал

А. К. Гущин, Условие компактности одного класса операторов и его применение к исследованию разрешимости нелокальных задач для эллиптических уравнений, *Матем. сб.*, 2002, том 193, номер 5, 17–36

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm649>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 15:29:39

УДК 517.9

А. К. Гуцин

Условие компактности одного класса операторов и его применение к исследованию разрешимости нелокальных задач для эллиптических уравнений

Изучается класс “интегральных” операторов, возникающих при исследовании нелокальных задач, в которых значения решения на границе рассматриваемой области выражаются через его значения во внутренних точках. Эти операторы задаются мерами, близкими к мерам Карлесона. Устанавливается условие, обеспечивающее полную непрерывность таких операторов. Доказанное утверждение позволяет дополнить и усилить результаты о фредгольмовости широкого класса нелокальных задач для эллиптического уравнения второго порядка.

Библиография: 18 названий.

Настоящая работа является естественным продолжением работ [1]–[3], посвященных исследованию разрешимости следующей нелокальной задачи для эллиптического уравнения

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{i,j}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = 0, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in Q, \quad (1)$$

$$u|_{\partial Q} = Bu + u_0, \quad (2)$$

в которой значения искомого решения на границе ∂Q рассматриваемой области Q связаны с его значениями во внутренних точках области и других точках границы оператором

$$(Bu)(x) = \int_Q b(x, y) u(y) \, d\nu_x(y), \quad x \in \partial Q.$$

Здесь Q – ограниченная область $\mathbb{R}_n$ с гладкой (класса C^1) границей ∂Q ; симметрическая матрица $(a_{i,j})$, элементы которой являются измеримыми функциями, удовлетворяет условию

$$0 < \gamma = \text{const} \leq \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x) \xi_i \xi_j \leq \gamma^{-1} \quad (3)$$

для всех $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}_n$, $|\xi| = 1$, и п.в. $x \in Q$. Точное описание класса рассматриваемых операторов B будет приведено ниже.

Изучению нелокальных задач посвящено большое число работ, достаточно подробный обзор работ в данном направлении имеется, например, в [1]; см. также [4].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № № 01-01-00988 и 00-15-96073).

Отправной точкой большинства исследований в этом направлении являлась статья [5], в которой была поставлена задача (1), (2) с оператором B вида $(Bu)(x) = b_1(x)u(\psi(x))$, где ψ – отображение ∂Q в $\overline{Q}$. Именно этот пример (ν_x – единичная мера, сосредоточенная в точке $\psi(x)$, $b(x, \psi(x)) = b_1(x)$) будет в центре нашего внимания.

Мы предполагаем, что нормаль ν (единичная и внешняя) к ∂Q и коэффициенты $a_{i,j}$ уравнения (1) удовлетворяют условию Дини на границе. А именно

$$\begin{aligned} |\nu(x) - \nu(y)| &\leq \omega(|x - y|), \quad x \in \partial Q, \quad y \in \partial Q, \\ |a_{i,j}(x) - a_{i,j}(y)| &\leq \omega(|x - y|), \quad i, j = 1, \dots, n, \quad x \in \partial Q, \quad y \in Q, \end{aligned} \quad (4)$$

с такой монотонной функцией ω , что

$$\int_0^1 \frac{\omega(t)}{t} dt < \infty.$$

При этих условиях в работе [6] установлено свойство решений из $W_{2,\text{loc}}^1(Q)$, см. [7], задачи Дирихле

$$u|_{\partial Q} = v \quad (5)$$

с $v \in L_2(\partial Q)$ для уравнения (1), являющееся обобщением (на функции, имеющие следы на множествах положительной $(n-1)$ -мерной меры Хаусдорфа) непрерывности по совокупности переменных: для любой v из $L_2(\partial Q)$ решение $u = \mathcal{G}v$ задачи (1), (5) принадлежит пространству $(n-1)$ -мерно непрерывных функций $C_{n-1}(\overline{Q})$, подробнее по этому поводу см. [6]. Случай неоднородного уравнения исследован в работе [8].

Усиление этого свойства, включающее в себя и свойство непрерывности решения внутри области Q , установлено в работе [1]. Пусть $C_{n-1}^0(\overline{Q})$ – пополнение непрерывных в $\overline{Q}$ функций по норме

$$\|v\|_{C_{n-1}^0(\overline{Q})} = \sup_{\|\mu\| < \infty} \left\{ \frac{1}{\|\mu\|} \int_Q |v(x)|^2 d\mu(x) \right\}^{1/2}, \quad (6)$$

здесь точная верхняя грань берется по всем мерам Карлесона. Напомним, что мера μ с носителем в $\overline{Q}$ называется *мерой Карлесона* (в Q), см., например, [9], если ограничено множество

$$\{r^{1-n} \mu(\mathcal{B}_{x^0}(r)) : x^0 \in \partial Q, r > 0\},$$

здесь и далее $\mathcal{B}_{x^0}(r) = \{x \in \mathbb{R}_n : |x - x^0| \leq r\}$. Точную верхнюю грань этого множества будем называть *нормой меры Карлесона* μ и обозначать через $\|\mu\|$.

В [1] доказано (теорема 2), что для любой граничной функции v из $L_2(\partial Q)$ решение $u = \mathcal{G}v$ задачи (1), (5) принадлежит пространству $C_{n-1}^0(\overline{Q})$ и для него справедлива оценка

$$\|u\|_{C_{n-1}^0(\overline{Q})} \leq C \|v\|_{L_2(\partial Q)} \quad (7)$$

с постоянной C , зависящей только от размерности пространства n , области Q , постоянной эллиптичности γ (из (3)) и функции ω из условия (4). Норму оператора $\mathcal{G}$,

действующего из $L_2(\partial Q)$ в $C_{n-1}^0(\overline{Q})$, будем обозначать через $\|\mathcal{G}\|$. Отметим, что для произвольной меры Карлесона μ оценка

$$\int_{\overline{Q}} u^2(x) d\mu(x) \leq \text{const} \|v\|_{L_2(\partial Q)}^2, \quad v = u|_{\partial Q}, \quad (6')$$

для аналитической в круге функции доказана Л. Карлесоном [10], а для гармонической функции n переменных в области с дважды гладкой границей – Л. Хёрмандером [11].

Дальнейшее усиление обсуждаемого свойства решений задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка, включающее гёльдерову непрерывность решения внутри рассматриваемой области, установлено в работе [4]. В первом параграфе настоящей работы получен аналог результата из работы [4], более удобный для применения в рассматриваемой ситуации.

Перейдем к описанию класса операторов B . Их удобнее задавать с помощью меры ϕ в $\mathbb{R}_{2n}$ с носителем в $\partial Q \times \overline{Q}$ и функции $b \in L_2(\partial Q \times \overline{Q}; \phi)$. Мы будем считать функцию b определенной на всем $\mathbb{R}_{2n}$ (продолженной нулем вне носителя меры ϕ). Точку в $\mathbb{R}_{2n}$ будем обозначать через $z = (x, y)$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_n$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}_n$. Как и в [1], мы будем предполагать выполненными следующие условия.

УСЛОВИЕ I. Проекция ϕ' меры ϕ на пространство первых n переменных $x = (x_1, \dots, x_n)$ является $(n-1)$ -мерной мерой Лебега на ∂Q :

$$\phi'(G) = \phi(G \times \mathbb{R}_n) = \text{mes}_{\partial Q}(G \cap \partial Q) \quad \text{для всех (борелевских) } G \subset \mathbb{R}_n,$$

здесь и далее $\text{mes}_{\partial Q} - (n-1)$ -мерная мера Лебега на ∂Q .

УСЛОВИЕ II. Проекция μ меры $b^2 \phi$ на пространство последних n переменных $y = (y_1, \dots, y_n)$ является мерой Карлесона:

$$\mu(G) = \iint_{\partial Q \times G} b^2(x, y) d\phi(x, y), \quad G \subset \mathbb{R}_n, \quad \|\mu\| < \infty. \quad (8)$$

По мере ϕ и функции b определим оператор $B = B_{b\phi}: C_{n-1}^0(\overline{Q}) \rightarrow L_2(\partial Q)$ тождеством

$$(g, Bu)_{L_2(\partial Q)} = \iint_{\partial Q \times \overline{Q}} g(x) b(x, y) u(y) d\phi(x, y) \quad \text{для всех } g \in L_2(\partial Q). \quad (9)$$

При сделанных предположениях, как показано в [1], оператор B является ограниченным оператором и

$$\|B\| \leq \|\mu\|^{1/2}. \quad (10)$$

Под решением (из $C_{n-1}^0(\overline{Q})$) нелокальной задачи (1), (2) будем, как и в [1], понимать функцию u из $W_{2,\text{loc}}^1(\overline{Q}) \cap C_{n-1}^0(\overline{Q})$, которая удовлетворяет уравнению (1) в смысле равенства обобщенных функций и след которой на ∂Q (значение на мере Карлесона $\text{mes}_{\partial Q}$) равен правой части (2).

Легко видеть, что рассматриваемая задача (1), (2) эквивалентна уравнению

$$v = B\mathcal{G}v + u_0 \quad (11)$$

в пространстве $L_2(\partial Q)$: для любого решения u задачи (1), (2) его след на границе $v = u|_{\partial Q}$ удовлетворяет (11) и для любого решения $v \in L_2(\partial Q)$ уравнения (11) функция $u = \mathcal{G}v$ является решением задачи (1), (2). Если рассматривать (как это делалось в большинстве работ по данной тематике, в частности в [5], [12], [13]) классические решения (1), (2), то уравнение (11) следует решать в пространстве непрерывных функций; если работать с обобщенным решением из $W_2^1(Q)$, то $v \in W_2^{1/2}(\partial Q)$. Изучать (11) в пространстве $L_2(\partial Q)$, в котором операция сужения элемента на измеримое подмножество не только не выводит из пространства, но и является ортогональным проектором, значительно удобнее. Более того, как показано в [1], такое расширение понятия решения расширяет класс “хорошо разрешимых” задач: фредгольмова в $C_{n-1}^0(\overline{Q})$ -постановке задача (1), (2) может не быть даже нётеровой в классической постановке. Вопрос о непрерывности решения из $C_{n-1}^0(\overline{Q})$ изучался в [2], см. также работу [4], в которой рассматривалась более общая нелокальная задача: значения искомого решения на границе выражаются не только через значения самого решения, но и через значения его производных во внутренних точках.

Отметим простое, но важное и часто используемое в дальнейшем свойство рассматриваемого класса операторов: разбиению $\partial Q \times \overline{Q}$ на непересекающиеся (борелевские) множества E_k соответствует представление $B_{b\phi} = \sum_k B_{\chi_{E_k} b\phi}$; здесь и далее χ_E — характеристическая функция множества E , а оператор $B_{\chi_E b\phi}$ и мера μ_E определены соответственно формулами (9) и (8), в которых функция b заменена на $\chi_E b$. Далее оператор $B_{\chi_E b\phi}$ будем называть *частью оператора $B_{b\phi}$, соответствующей множеству E* .

Наименее ограничительное условие, обеспечивающее фредгольмовость задачи (1), (2), выражается, см. [1], в терминах специального подмножества пересечения S_0 носителя меры $b^2\phi$ с $\partial Q \times \partial Q$. Пусть Γ — замкнутое подмножество $\partial Q \times \partial Q$. Рассмотрим всевозможные последовательности $\{z_k\}$ точек $z_k = (x_k, y_k)$ из Γ , обладающие следующим свойством:

$$y_k = x_{k+1} \quad \text{для всех } k = 1, 2, \dots$$

Следуя [1], множество всех частичных пределов всех таких последовательностей будем обозначать через Γ^∞ . Как и в [1], обозначим через $\mathbb{B}(\overline{Q})$ банахово пространство, являющееся пополнением множества гладких в $\overline{Q}$ функций по норме

$$\|w\|_{\mathbb{B}(\overline{Q})}^2 = \|w\|_{C_{n-1}^0(\overline{Q})}^2 + \int_Q r(x) |\nabla u(x)|^2 dx, \quad (12)$$

здесь и далее $r(x) = \text{dist}(x, \partial Q)$.

Основным результатом работы [1] является

ТЕОРЕМА 1 [1]. Пусть $B = B_{b\phi} + B_c$, где B_c — вполне непрерывный оператор из $\mathbb{B}(\overline{Q})$ в $L_2(\partial Q)$, а оператор $B_{b\phi}$ определен тождеством (9) по мере ϕ и функции $b \in L_2(\partial Q \times \overline{Q}; \phi)$, удовлетворяющим условиям I и II. Предположим, что найдется такое открытое множество $\mathcal{U}$, что

$$(S_0 \setminus \mathcal{U})^\infty = \emptyset \quad (13)$$

и

$$\|\mu_{\mathcal{U}\delta}\| \rightarrow 0 \quad \text{при } \delta \rightarrow +0, \quad (14)$$

$\mathcal{U}^\delta = \{z \in \mathbb{R}_{2n} : \text{dist}(z, \mathcal{U}) < \delta\}$. Тогда задача (1), (2) фредгольмова.

Отметим, что выделение вполне непрерывного оператора B_c в приведенном утверждении существенно: включение его в оператор $B_{b\phi}$ может сильно увеличить множество S_0 и сделать неразличимой структуру определяющей фредгольмовость задачи части носителя.

Целью настоящей работы является выделение “несущественной” части носителя меры $b^2\phi$, которая определяет вполне непрерывный оператор и может быть отнесена к B_c . Предлагается рецепт выбора компактной составляющей оператора B , при котором множество S_0 , структура которого определяет полную непрерывность произведения $B_{b\phi}\mathcal{G}$, в определенном смысле минимально; подробнее по этому поводу см. теорему 4 §3. Одновременно решается и вопрос о выборе “подправляющего” множества $\mathcal{U}$. Некоторые из результатов настоящей работы анонсированы в [14].

§1. Граничное поведение решений задачи Дирихле

Пусть v – мера в $\mathbb{R}_n$ с носителем в $\overline{Q}$, Φ – мера в $\mathbb{R}_{2n}$ с носителем в $\overline{Q} \times \overline{Q}$, $\Phi'(G) = \Phi(G \times \mathbb{R}_n)$ и $\Phi''(G) = \Phi(\mathbb{R}_n \times G)$ – проекции Φ на пространства первых n переменных $(x_1, \dots, x_n) = x$ и соответственно последних n переменных $(y_1, \dots, y_n) = y$. Пусть Φ' , Φ'' и v – меры Карлесона. Для произвольного нецелого $\alpha > 0$ введем на $C^\infty(\overline{Q})$ (на множестве сужений на $\overline{Q}$ функций из $C_0^\infty(\mathbb{R}_n)$) норму

$$\begin{aligned} \|w\|_\alpha^2 = & \sum_{0 \leq |l| \leq \alpha} \sup_{\|v\| < \infty} \left[\frac{1}{\|v\|} \int_{\overline{Q}} r^{2|l|}(x) |D^l w(x)|^2 dv(x) \right] \\ & + \sum_{|l|=[\alpha]} \sup_{\Phi} \left[\frac{1}{\|\Phi'\| + \|\Phi''\|} \iint_{\overline{Q} \times \overline{Q}} r^{2\alpha}(x, y) \frac{|D^l w(x) - D^l w(y)|^2}{|x - y|^{2\{\alpha\}}} d\Phi(x, y) \right], \end{aligned}$$

$r(x, y) = \min\{r(x), r(y)\}$ (напомним, что $r(x) = \text{dist}(x, \partial Q)$), $[\alpha]$ и $\{\alpha\}$ – целая и соответственно дробная части α , $l = (l_1, \dots, l_n)$ – мультииндекс с целыми неотрицательными компонентами l_j , $|l| = l_1 + \dots + l_n$; случай натуральных α был рассмотрен в [4]. Пополнение $C^\infty(\overline{Q})$ по этой норме обозначим через $C_{n-1}^\alpha(\overline{Q})$. Введенное пространство близко к изученному в [4] пространству $\mathcal{C}_{n-1}^\alpha(\overline{Q})$: принадлежность функции $C_{n-1}^\alpha(\overline{Q})$, как и принадлежность $\mathcal{C}_{n-1}^\alpha(\overline{Q})$, влечет ее внутреннюю гладкость до порядка α , но множество следов на ∂Q функций из $C_{n-1}^\alpha(\overline{Q})$ совпадает с $L_2(\partial Q)$, а не с $L_1(\partial Q)$, как в случае $\mathcal{C}_{n-1}^\alpha(\overline{Q})$. Легко видеть, что с увеличением показателя гладкости α пространство $C_{n-1}^\alpha(\overline{Q})$ уменьшается.

Для дальнейшего нам достаточно рассмотреть только случай малых значений показателя гладкости α , когда не нужны дополнительные ограничения на гладкость коэффициентов уравнения (1). Будем считать, что $\alpha \in (0, \alpha_0)$, где $\alpha_0 = \alpha_0(n, \gamma) \in (0, 1)$ такое, что решения уравнения (1) непрерывны внутри области Q по Гёльдеру с показателем α_0 , см. [15]–[17]. Приведенная ниже теорема остается справедливой и для остальных значений $\alpha > 0$, если потребовать выполнения таких же, как и в [4], дополнительных условий на гладкость коэффициентов уравнения $a_{i,j}$.

ТЕОРЕМА 2. Для любой $v \in L_2(\partial Q)$ решение $u = \mathcal{G}v$ задачи Дирихле (1), (5) принадлежит пространству $C_{n-1}^\alpha(\overline{Q})$ и удовлетворяет оценке

$$\|u\|_\alpha \leq \text{const} \|v\|_{L_2(\partial Q)}. \quad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего отметим, что достаточно доказать справедливость для всех мер Φ (таких, что Φ' и Φ'' – меры Карлесона) оценки

$$\iint_{\overline{Q} \times \overline{Q}} r^{2\alpha}(x, y) \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{2\alpha}} d\Phi(x, y) \leq \text{const} [\|\Phi'\| + \|\Phi''\|] \|v\|_{L_2(\partial Q)}^2, \quad (15')$$

$$u = \mathcal{G}v, \quad v \in L_2(\partial Q).$$

Оценка (15) немедленно следует из (15'), так как оценка нормы в $C_{n-1}^0(\overline{Q})$ известна, см. [1]. Возможность приблизить решение u в норме пространства $C_{n-1}^\alpha(\overline{Q})$ гладкими функциями стандартным образом следует из гёльдеровой непрерывности вплоть до границы решения задачи Дирихле с гладкой граничной функцией; напомним, что $\alpha < \alpha_0$.

Заметим также, что достаточно рассмотреть случай “симметричной” меры Φ :

$$\Phi(G) = \Phi(\{(x, y) : (y, x) \in G\}), \quad (16)$$

поскольку симметрична подынтегральная функция в левой части (15'). Кроме того, так как для гладких функций

$$\frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |x - y| \rightarrow 0$$

и

$$r^\alpha(x, y) \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad r(x, y) \rightarrow 0,$$

то можно считать, что

$$\Phi(\{(x, x), x \in \overline{Q}\}) + \Phi(\partial Q \times \overline{Q}) = 0.$$

Следовательно, вместо левой части (15') можно рассматривать

$$\begin{aligned} & \iint_{\{(x, y) \in Q \times Q : |x - y| > 0\}} r^{2\alpha}(x, y) \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{2\alpha}} d\Phi(x, y) \\ &= \iint_{\{(x, y) \in Q \times Q : 0 < |x - y| < \varkappa r(x, y)\}} r^{2\alpha}(x, y) \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{2\alpha}} d\Phi(x, y) \\ &+ \iint_{\{(x, y) \in Q \times Q : |x - y| \geq \varkappa r(x, y)\}} r^{2\alpha}(x, y) \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{2\alpha}} d\Phi(x, y) \\ &\leq 2 \iint_{\{(x, y) \in Q \times Q : 0 < |x - y| < \varkappa r(x), r(x) \leq r(y)\}} r^{2\alpha}(x) \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{2\alpha}} d\Phi(x, y) \\ &+ 2 \iint_{\{(x, y) \in Q \times Q : |x - y| \geq \varkappa r(x), r(x) \leq r(y)\}} r^{2\alpha}(x) \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{2\alpha}} d\Phi(x, y) \\ &= 2(I_1 + I_2), \end{aligned} \quad (17)$$

здесь $\varkappa = \varkappa(n, \gamma)$ – достаточно малое положительное число, которое мы выберем позже.

При оценке первого слагаемого I_1 воспользуемся хорошо известной, см., например, [17], оценкой гёльдеровой нормы по строго внутренней подобласти. Так как

функция $w(x, y) = u(x) - u(y)$, $z = (x, y) \in Q \times Q$, является решением (в $Q \times Q$) равномерно эллиптического уравнения

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{i,j}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial y_i} \left(a_{i,j}(y) \frac{\partial u}{\partial y_j} \right) = 0,$$

то для любой точки $z = (x, y) \in Q \times Q$ такой, что $|x - y| < \varkappa r(x) \leq \varkappa r(y)$, справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{2\alpha}} &= \frac{|w(y, x) - w(x, y)|^2}{2^{2-\alpha}|(x, y) - (y, x)|^{2\alpha}} \\ &\leq \frac{C}{2^{2-\alpha}[\varkappa r(x)]^{n+2\alpha}} \iint_{\{\zeta \in \mathbb{R}_{2n} : 0 < |\zeta - z| < 2\varkappa r(x)\}} w^2(\zeta) d\zeta \\ &\leq \frac{C}{2^{2-\alpha}[\varkappa r(x)]^{n+2\alpha}} \iint_{\mathcal{B}_x(2\varkappa r(x)) \times \mathcal{B}_y(2\varkappa r(x))} w^2(\xi, \eta) d\xi d\eta \\ &\leq \frac{C}{2^{2-\alpha}[\varkappa r(x)]^{n+2\alpha}} \iint_{\mathcal{B}_x(3\varkappa r(x)) \times \mathcal{B}_x(3\varkappa r(x))} w^2(\xi, \eta) d\xi d\eta \end{aligned}$$

с зависящей только от n и γ постоянной C ; конечно, мы считаем, что $3\varkappa < 1$. А так как

$$\begin{aligned} &\iint_{\mathcal{B}_x(3\varkappa r(x)) \times \mathcal{B}_x(3\varkappa r(x))} w(\xi, \eta) d\xi d\eta \\ &= \iint_{\mathcal{B}_x(3\varkappa r(x)) \times \mathcal{B}_x(3\varkappa r(x))} u(\xi) d\xi d\eta - \iint_{\mathcal{B}_x(3\varkappa r(x)) \times \mathcal{B}_x(3\varkappa r(x))} u(\eta) d\xi d\eta = 0, \end{aligned}$$

то в силу неравенства Пуанкаре

$$\begin{aligned} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{2\alpha}} &\leq \frac{C(n, \gamma, \alpha, \varkappa)}{[r(x)]^{2n-2+2\alpha}} \iint_{\mathcal{B}_x(3\varkappa r(x)) \times \mathcal{B}_x(3\varkappa r(x))} |\nabla w(\xi, \eta)|^2 d\xi d\eta \\ &\leq \frac{C'(n, \gamma, \alpha, \varkappa)}{[r(x)]^{n-2+2\alpha}} \int_{\mathcal{B}_x(3\varkappa r(x))} |\nabla u(\xi)|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint_{\{(x, y) \in Q \times Q : 0 < |x - y| < \varkappa r(x), r(x) \leq r(y)\}} r^{2\alpha}(x) \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{2\alpha}} d\Phi(x, y) \\ &\leq C' \iint_{Q \times Q} r^{2-n}(x) \left[\int_{\mathcal{B}_x(3\varkappa r(x))} |\nabla u(\xi)|^2 d\xi \right] d\Phi(x, y) \\ &\leq C' \int_Q |\nabla u(\xi)|^2 \left[\int_{\mathcal{B}_\xi(\frac{3\varkappa}{1-3\varkappa}r(\xi))} \frac{1}{r^{n-2}(x)} d\Phi'(x) \right] d\xi \\ &\leq C' \int_Q |\nabla u(\xi)|^2 \left[\frac{1+3\varkappa}{r(\xi)} \right]^{n-2} \Phi' \left(\mathcal{B}_\xi \left(\frac{3\varkappa}{1-3\varkappa}r(\xi) \right) \right) d\xi \\ &\leq C''(n, \gamma, \alpha, \varkappa) \int_Q r(\xi) |\nabla u(\xi)|^2 d\xi, \end{aligned}$$

так как $\mathcal{B}_\xi\left(\frac{3\kappa}{1-3\kappa}r(\xi)\right) \subset \mathcal{B}_{x^0}\left(\left(1 + \frac{3\kappa}{1-3\kappa}\right)r(\xi)\right)$ с некоторой $x^0 \in \partial Q$, а Φ' — мера Карлесона. Тем самым требуемая оценка для первого слагаемого из (17) доказана, поскольку оценка правой части последнего неравенства через квадрат нормы граничной функции в $L_2(\partial Q)$ известна, см. [6].

Совсем просто оценивается второе слагаемое из (17):

$$\begin{aligned} I_2 &= \iint_{\{(x,y) \in Q \times Q: |x-y| \geq \kappa r(x), r(x) \leq r(y)\}} r^{2\alpha}(x) \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x-y|^{2\alpha}} d\Phi(x, y) \\ &\leq \kappa^{-2\alpha} \iint_{Q \times Q} [|u(x)| + |u(y)|]^2 d\Phi(x, y) \\ &\leq \frac{4}{\kappa^{2\alpha}} \int_Q |u(x)|^2 d\Phi(x) \leq \frac{4C}{[\kappa]^{2\alpha}} \|u_0\|_{L_2(\partial Q)}^2. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. В формулировке теоремы 2 величину $r(x, y) = \min\{r(x), r(y)\}$ можно заменить на $\max\{r(x), r(y)\}$. Мы не будем останавливаться на доказательстве этого несложного усиления теоремы 2, так как оно все равно не является точным (в смысле минимальности условий на класс рассматриваемых мер), а для дальнейшего нам достаточно уже доказанного свойства. Отметим, что справедливость оценки первого слагаемого в (17) обеспечивается более слабым условием на меру Φ : вместо условий $\|\Phi'\| < \infty$, $\|\Phi''\| < \infty$ можно потребовать, чтобы мера Ψ , определенная равенством

$$\Psi(D) = \iint_D r^{2\alpha}(x, y) d\Phi(x, y), \quad D \subset \mathbb{R}_{2n},$$

удовлетворяла условию:

$$\begin{aligned} &\text{существует такая постоянная } C, \text{ что для всех } x^0 \in \partial Q \text{ и для всех } r > 0 \\ &\Psi'(\mathcal{B}_{x^0}(r)) \leq C r^{n-1+2\alpha}, \quad \Psi''(\mathcal{B}_{x^0}(r)) \leq C r^{n-1+2\alpha}. \end{aligned} \quad (18)$$

По-видимому, выполнения условия (18) достаточно и для оценки второго слагаемого. Однако автор не располагает доказательством справедливости этого утверждения без дополнительных ограничений на структуру меры Ψ .

§ 2. Фредгольмовость нелокальной задачи

Вернемся к вопросу о разрешимости нелокальной задачи (1), (2), которому посвящена настоящая работа.

Возьмем произвольную точку $z^0 = (x^0, y^0) \in \partial Q \times \partial Q$ и произвольную окрестность $\mathcal{V}_{x^0} \subset \partial Q$ точки x^0 . Рассмотрим монотонно неубывающую функцию (переменного $\delta \in (0, +\infty)$)

$$\begin{aligned} \psi(\delta, y^0, \mathcal{V}_{x^0}) &= \|\mu_{\mathcal{V}_{x^0} \times \mathcal{U}_{y^0}(\delta)}\| \\ &= \sup_{r>0, y' \in \partial Q} r^{1-n} \iint_{\mathcal{V}_{x^0} \times (\mathcal{U}_{y^0}(\delta) \cap \mathcal{B}_{y'}(r))} b^2(x, y) d\phi(x, y), \end{aligned}$$

$\mathcal{U}_{y^0}(\delta) = \{y \in \mathbb{R}_n : |y - y^0| < \delta\}$; напомним, что $\mathcal{B}_{x^0}(r) = \{y \in \mathbb{R}_n : |y - x^0| \leq r\}$.

Если $z^0 \notin \text{supp } b^2\phi$, т.е. $z^0 \notin S_0 = \text{supp } b^2\phi \cap (\partial Q \times \partial Q)$, то существуют такие окрестность $\mathcal{V}_{x^0}$ точки x^0 и число $\delta_0 > 0$, что $(\mathcal{V}_{x^0} \times \mathcal{U}_{y^0}(\delta_0)) \cap \text{supp } b^2\phi = \emptyset$. Следовательно, $\psi(\delta, y^0, \mathcal{V}_{x^0}) = 0$ для $\delta \in (0, \delta_0)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Точку $z^0 = (x^0, y^0) \in S_0$ будем называть *существенной точкой носителя меры $b^2\phi$* , если для любой окрестности $\mathcal{V}_{x^0}$ точки x^0

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \psi(\delta, y^0, \mathcal{V}_{x^0}) > 0. \quad (19)$$

Остальные точки S_0 (как и все остальные точки носителя меры $b^2\phi$) будем называть *несущественными*.

Конечно, в определении существенной точки открытый шар $\mathcal{U}_{y^0}(\delta)$ можно заменить на замкнутый.

ТЕОРЕМА 3. Если носитель меры $b^2\phi$ не содержит существенных точек, то для любого $\alpha > 0$ оператор $B = B_{b\phi}$ является вполне непрерывным оператором из $C_{n-1}^\alpha(\overline{Q})$ в $L_2(\partial Q)$.

Можно привести пример, показывающий, что сузить множество существенных точек, заменив условие (19) более ограничительным условием

$$\lim_{\sigma \rightarrow +0} \lim_{\delta \rightarrow +0} \|\mu_{\mathcal{B}_{x^0}(\sigma) \times \mathcal{B}_{y^0}(\delta)}\| > 0,$$

нельзя.

Нетрудно видеть, что широкий класс вполне непрерывных операторов вида $B_{b\phi}$ с

$$\phi = \text{mes}_{\partial Q} \times \nu, \quad \|\nu\| < \infty, \quad b \in L_2(\partial Q \times \overline{Q}; \phi) \quad (20)$$

не подпадает под действие теоремы 3: мера μ не обязана быть мерой Карлесона. Это объясняется специальным видом меры ϕ и неоднозначностью представления таких операторов парой (ϕ, b) с помощью формулы (9). А именно, если ограничиться случаем

$$\iint_{\partial Q \times \partial Q} b^2(x, y) d\phi(x, y) = 0$$

(оставляя в стороне ситуацию, когда задачи нахождения граничного значения и решения в области расщепляются), то справедливо следующее утверждение: для любой удовлетворяющей условию (20) пары $\{\phi, b\}$ найдется другая пара $\{\widehat{\phi}, \widehat{b}\}$, задающая тот же оператор $B_{b\phi}$ и удовлетворяющая условию теоремы 3.

Доказательству теоремы 3 посвящен следующий параграф работы, там же приведено и доказательство последнего утверждения.

Ясно, что теорема 3 решает задачу выделения вполне непрерывной части оператора B : к B_c можно отнести ту часть оператора $B_{b\phi}$, которая соответствует замкнутому множеству, не содержащему существенных точек носителя $b^2\phi$. При этом решается и вопрос о выделении множества $\mathcal{U}$: из (14) следует, что все точки $\mathcal{U}$ являются несущественными.

Более того, ослабляется и условие (13) теоремы 1 из [1]. Обозначим через Γ_∞ подмножество замкнутого множества $\Gamma \subset \partial Q \times \partial Q$, состоящее из всех тех точек $z = (x, y)$, для которых существуют такие последовательности $\{z^{(k)}\}$ и $\{w^{(k)}\}$, что $z^{(1)} = w^{(1)} = (x^{(1)}, y^{(1)}) = z$, $z^{(k)} = (x^{(k)}, x^{(k-1)}) \in \Gamma$, $w^{(k)} = (y^{(k-1)}, y^{(k)}) \in \Gamma$,

$k = 2, 3, \dots$. Отметим, что используемое в формулировке теоремы 1 множество Γ^∞ вложено в Γ_∞ , см. [1], [2]; в силу леммы 2 работы [2] используемое там определение Γ_∞ и приведенное выше эквивалентны. Однако, как утверждает лемма 3 работы [1], из $\Gamma^\infty = \emptyset$ следует $\Gamma_\infty = \emptyset$. То есть условие (13) теоремы 1 эквивалентно условию

$$(S_0 \setminus \mathcal{U})_\infty = \emptyset. \quad (13')$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Замыкание множества всех существенных точек носителя меры $b^2\phi$ будем называть *существенной частью носителя меры $b^2\phi$* и обозначать через Γ_0 .

ТЕОРЕМА 1'. Если $\|\mathcal{G}\|^2 \lim_{\delta \rightarrow +0} \|\mu_{[(\Gamma_0)_\infty]^\delta}\| < 1$, то задача (1), (2) *фредгольмова*.

§ 3. Доказательство теоремы 3

Пусть ϕ — мера в $\mathbb{R}_{2n}$ с носителем в $\partial Q \times \overline{Q}$, удовлетворяющая условию I; далее будем считать ее фиксированной. Рассмотрим линейное пространство

$$\mathcal{L}_\phi = \{B = B_{b\phi} \text{ с } b \in L_2(\partial Q \times \overline{Q}; \phi) \text{ и } \|\mu\| < \infty\},$$

состоящее из линейных ограниченных операторов из $C_{n-1}^0(\overline{Q})$ в $L_2(\partial Q)$. Введем на $\mathcal{L}_\phi$ норму

$$\|B\|_{\mathcal{L}} = \|\mu\|^{1/2} = \left\{ \sup_{y' \in \partial Q, r > 0} r^{1-n} \iint_{\partial Q \times \mathcal{B}_{y'}(r)} b^2(x, y) d\phi(x, y) \right\}^{1/2}. \quad (21)$$

Нетрудно проверить, что (21) действительно задает норму, а в силу (10) эта норма не слабее нормы оператора.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пространство $\mathcal{L}_\phi$ с нормой (21) *полно*.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{B_k\}$, где $B_k = B_{b_k\phi}$, — произвольная фундаментальная последовательность элементов $\mathcal{L}_\phi$, т.е.

$$r^{1-n} \iint_{\partial Q \times \mathcal{B}_{y'}(r)} [b_k(x, y) - b_m(x, y)]^2 d\phi(x, y) \rightarrow 0 \text{ при } k, m \rightarrow \infty \quad (22)$$

равномерно по $y' \in \partial Q$ и $r > 0$.

Отсюда, в частности, при r и $y' \in \partial Q$ таких, что $\overline{Q} \subset \mathcal{B}_{y'}(r)$, получаем

$$\|b_k - b_m\|_{L_2(\partial Q \times \overline{Q}; \phi)}^2 = \iint_{\partial Q \times \overline{Q}} [b_k(x, y) - b_m(x, y)]^2 d\phi(x, y) \rightarrow 0 \text{ при } k, m \rightarrow \infty.$$

Пусть b — такая функция из $L_2(\partial Q \times \overline{Q}; \phi)$, что

$$\iint_{\partial Q \times \overline{Q}} [b(x, y) - b_k(x, y)]^2 d\phi(x, y) = \|b - b_k\|_{L_2(\partial Q \times \overline{Q}; \phi)}^2 \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty. \quad (23)$$

Из (22) и (23) немедленно получаем, что

$$r^{1-n} \iint_{\partial Q \times \mathcal{B}_{y'}(r)} [b(x, y) - b_m(x, y)]^2 d\phi(x, y) \rightarrow 0 \quad \text{при } m \rightarrow \infty$$

равномерно по $y' \in \partial Q$ и $r > 0$.

Но тогда и

$$\|B - B_m\|_{\mathcal{L}} = \left\{ \sup_{y' \in \partial Q, r > 0} r^{1-n} \iint_{\partial Q \times \mathcal{B}_{y'}(r)} [b(x, y) - b_m(x, y)] d\phi(x, y) \right\}^{1/2} \rightarrow 0$$

при $m \rightarrow \infty$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $B = B_{b\phi} \in \mathcal{L}_\phi$ и $\text{supp } b^2\phi \subset \partial Q \times Q$. Тогда для любого $\alpha > 0$ B является вполне непрерывным оператором из $C_{n-1}^\alpha(\overline{Q})$ в $L_2(\partial Q)$.

Далее удовлетворяющие условию предложения 2 операторы будем называть *финитными*.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $B = B_{b\phi}$ — произвольный финитный оператор, а α — произвольное (сколь угодно малое) положительное число, $0 < \alpha < 1$. Обозначим через $\delta_0 > 0$ расстояние между носителем меры $b^2\phi$ и $\partial Q \times \partial Q$. Отметим очевидное неравенство

$$\text{dist}(\partial Q, \{y \in Q : (x, y) \in \text{supp } b^2\phi\}) \geq \delta_0 \quad \text{для всех } x \in \partial Q. \quad (24)$$

Возьмем произвольное ограниченное множество $\mathcal{M}$ в $C_{n-1}^\alpha(\overline{Q})$: $\|v\|_\alpha \leq C_M = \text{const}$ для всех $v \in \mathcal{M}$. Выберем и зафиксируем такую функцию $\eta \in C_0^\infty(Q)$, что $\eta(y) = 1$ при $r(y) > \delta_0$, $\eta(y) = 0$ при $r(y) < \delta_0/2$ и для всех $y \in Q$ $0 \leq \eta(y) \leq 1$ и $|\nabla \eta(y)| \leq \text{const}/\delta_0$. Так как

$$\begin{aligned} \|v\eta\|_\alpha^2 &= \sup_v \left[\frac{1}{\|v\|} \int_{\overline{Q}} |v(x)\eta(x)|^2 dv(x) \right] \\ &\quad + \sup_{\Phi} \left[\frac{1}{\|\Phi'\| + \|\Phi''\|} \iint_{\overline{Q} \times \overline{Q}} r^{2\alpha}(x, y) \frac{|v(x)\eta(x) - v(y)\eta(y)|^2}{|x - y|^{2\alpha}} d\Phi(x, y) \right] \\ &\leq \sup_v \left[\frac{1}{\|v\|} \int_{\overline{Q}} |v(x)|^2 dv(x) \right] \\ &\quad + \sup_{\Phi} \left[\frac{1}{\|\Phi'\| + \|\Phi''\|} \iint_{\overline{Q} \times \overline{Q}} r^{2\alpha}(x, y) \frac{|[v(x) - v(y)]\eta(x)|^2}{|x - y|^{2\alpha}} d\Phi(x, y) \right] \\ &\quad + \sup_{\Phi} \left[\frac{1}{\|\Phi'\| + \|\Phi''\|} \iint_{\overline{Q} \times \overline{Q}} r^{2\alpha}(x, y) \frac{|[\eta(x) - \eta(y)]v(y)|^2}{|x - y|^{2\alpha}} d\Phi(x, y) \right] \\ &\leq \|v\|_\alpha^2 + C(\delta_0, Q, \alpha) \sup_{\Phi} \left[\frac{1}{\|\Phi'\| + \|\Phi''\|} \iint_{\overline{Q} \times \overline{Q}} |v(y)|^2 d\Phi(x, y) \right] \\ &\leq C(\delta_0, Q, \alpha) \|v\|_\alpha^2 \end{aligned}$$

и, как отмечалось выше, функции из $C_{n-1}^\alpha(\overline{Q})$ непрерывны по Гёльдеру внутри области Q , то для $v \in \mathcal{M}$

$$\|v\eta\|_{C^\alpha(\overline{Q})} \leq C(\delta_0, \alpha) \|v\eta\|_\alpha \leq C(\delta_0, Q, \alpha) \|v\|_\alpha \leq C(\delta_0, Q, \alpha) C_M.$$

Следовательно, множество $\{v\eta : v \in \mathcal{M}\}$ компактно в $C(\overline{Q})$. Это доказывает полную непрерывность рассматриваемого финитного оператора B , поскольку в силу (24) для всех v $B(v\eta) = B(v)$.

Замыкание линейного пространства всех финитных операторов в $\mathcal{L}_\phi$ будем обозначать через $\mathcal{L}_\phi^0$. Из предложения 2 немедленно вытекает

СЛЕДСТВИЕ. Для любого положительного числа α каждый из принадлежащих $\mathcal{L}_\phi^0$ операторов является вполне непрерывным оператором из $C_{n-1}^\alpha(\overline{Q})$ в $L_2(\partial Q)$.

Следующее утверждение дает необходимое и достаточное условие принадлежности элемента пространства $\mathcal{L}_\phi$ подпространству $\mathcal{L}_\phi^0$.

ТЕОРЕМА 4. Для того чтобы элемент $B = B_{b\phi}$ пространства $\mathcal{L}_\phi$ с удовлетворяющей условию I мерой ϕ принадлежал подпространству $\mathcal{L}_\phi^0$, необходимо и достаточно, чтобы носитель меры $b^2\phi$ не содержал существенных точек.

Прежде всего заметим, что если мера ϕ и функция $b \in L_2(\partial Q \times \overline{Q}; \phi)$ удовлетворяют условиям I и II, то определяемый ими оператор $B = B_{b\phi}$ принадлежит пространству $\mathcal{L}_\phi$. А если, дополнительно, носитель меры $b^2\phi$ не содержит существенных точек, то по теореме 4 $B = B_{b\phi} \in \mathcal{L}_\phi^0$, а тогда согласно следствию из предложения 2 оператор B является вполне непрерывным оператором из $C_{n-1}^\alpha(\overline{Q})$ в $L_2(\partial Q)$ при любом $\alpha > 0$. Таким образом, теорема 3 является немедленным следствием теоремы 4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Необходимость. Пусть $B = B_{b\phi}$ — произвольный элемент $\mathcal{L}_\phi^0$. Тогда найдется сходящаяся к B последовательность финитных операторов $B_k = B_{b_k\phi}$, т.е.

$$\|B - B_k\|_{\mathcal{L}} = \sup_{y' \in \partial Q, r > 0} r^{1-n} \iint_{\partial Q \times \mathcal{B}_{y'}(r)} [b(x, y) - b_k(x, y)]^2 d\phi(x, y) \rightarrow 0 \quad (25)$$

при $k \rightarrow \infty$.

В силу финитности операторов B_k найдутся такие положительные числа δ_k , что для всех k $\text{dist}(\text{supp } b_k^2\phi, \partial Q \times \partial Q) \geq \delta_k$. Но тогда из (25) следует, что

$$\sup_{y' \in \partial Q, r > 0} r^{1-n} \iint_{\partial Q \times [\mathcal{B}_{y'}(r) \cap \{y \in \overline{Q} : r(y) < \delta_k\}]} b^2(x, y) d\phi(x, y) \rightarrow 0 \quad (26)$$

при $k \rightarrow \infty$.

А так как для всех k , для любой точки $y^0 \in \partial Q$ и для любого положительного числа $\delta \leq \delta_k$ справедлива оценка

$$\|\mu_{\partial Q \times \mathcal{B}_{y^0}(\delta)}\| \leq \sup_{y' \in \partial Q, r > 0} r^{1-n} \iint_{\partial Q \times [\mathcal{B}_{y'}(r) \cap \{y \in \overline{Q} : r(y) < \delta_k\}]} b^2 d\phi(x, y),$$

то из (26) получаем, что для любой точки $z^0 = (x^0, y^0) \in \partial Q \times \partial Q$ и любой окрестности $\mathcal{V}_{x^0} (\subset \partial Q)$

$$\psi(\delta, y^0, \mathcal{V}_{x^0}) \leq \|\mu_{\partial Q \times \mathcal{B}_{y^0}(\delta)}\| \rightarrow 0 \quad \text{при } \delta \rightarrow +0.$$

Это и означает отсутствие существенных точек носителя меры $b^2\phi$.

Достаточность. Доказательство основывается на следующих вспомогательных утверждениях.

ЛЕММА 1. *Пусть носитель меры $b^2\phi$ не содержит существенных точек. Тогда для каждой точки $y^0 \in \partial Q$*

$$\psi(\delta, y^0, \partial Q) \rightarrow 0 \quad \text{при } \delta \rightarrow +0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Возьмем произвольную точку $y^0 \in \partial Q$. По условию для любой $x \in \partial Q$ найдется такая окрестность $\mathcal{V}_x$, что $\psi(\delta, y^0, \mathcal{V}_x) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow +0$. Из покрытия $\{\mathcal{V}_x, x \in \partial Q\}$ границы ∂Q выберем конечное подпокрытие $\{\mathcal{V}_{x(1)}, \dots, \mathcal{V}_{x(p)}\}$. Возьмем произвольное число $\delta > 0$. Для всех $y' \in \partial Q$ и $r > 0$

$$\begin{aligned} & \iint_{\partial Q \times [\mathcal{B}_{y'}(r) \cap \mathcal{B}_{y^0}(\delta)]} b^2(x, y) d\phi(x, y) \\ & \leq \sum_{k=1}^p \iint_{\mathcal{V}_{x(k)} \times [\mathcal{B}_{y'}(r) \cap \mathcal{B}_{y^0}(\delta)]} b^2(x, y) d\phi(x, y), \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \psi(\delta, y^0, \partial Q) & \leq \sup_{y' \in \partial Q, r > 0} r^{1-n} \iint_{\partial Q \times [\mathcal{B}_{y'}(r) \cap \mathcal{B}_{y^0}(\delta)]} b^2(x, y) d\phi(x, y) \\ & \leq \sum_{k=1}^p \sup_{y' \in \partial Q, r > 0} r^{1-n} \iint_{\mathcal{V}_{x(k)} \times [\mathcal{B}_{y'}(r) \cap \mathcal{B}_{y^0}(\delta)]} b^2(x, y) d\phi(x, y) \\ & = \sum_{k=1}^p \psi(\delta, y^0, \mathcal{V}_{x(k)}) \rightarrow 0 \quad \text{при } \delta \rightarrow +0. \end{aligned}$$

ЛЕММА 2. *Пусть носитель меры $b^2\phi$ не содержит существенных точек. Тогда*

$$\psi(\delta, y, \partial Q) \rightarrow 0 \quad \text{при } \delta \rightarrow +0$$

равномерно по $y \in \partial Q$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Предположим, что утверждение леммы 2 неверно, т.е. существует такое число $\varepsilon_0 > 0$, что для любого $\delta > 0$ найдется точка $y = y(\delta)$, для которой

$$\|\mu_{\partial Q \times \mathcal{B}_y(\delta)}\| \geq \varepsilon_0. \quad (27)$$

Возьмем некоторую монотонную последовательность положительных чисел $\delta_k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$. Для каждого из этих чисел найдем точку $y^{(k)}$, для которой выполнено (27). Из полученной последовательности точек выделим сходящуюся

подпоследовательность; сохраним за ней то же обозначение: $y^{(k)} \rightarrow y^0$ при $k \rightarrow \infty$. По лемме 1

$$\psi(\delta, y^0, \partial Q) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \delta \rightarrow +0,$$

откуда получаем, что существует такое число δ_0 , что для всех $r > 0$ и $y' \in \partial Q$ справедлива оценка

$$\iint_{\partial Q \times [\mathcal{B}_{y'}(r) \cap \mathcal{B}_{y^0}(\delta_0)]} b^2(x, y) d\phi(x, y) < r^{n-1} \frac{\varepsilon_0}{2}. \quad (28)$$

Выберем теперь такой номер k_0 , что для всех $k > k_0$ $|y^{(k)} - y^0| < \delta_0/2$ и $\delta_k < \delta_0/2$. Для таких k $\mathcal{B}_{y^{(k)}}(\delta_k) \subset \mathcal{B}_{y^0}(\delta_0)$. Поэтому из (28) имеем для $k > k_0$

$$\begin{aligned} \|\mu_{\partial Q \times \mathcal{B}_{y^{(k)}}(\delta_k)}\| &= \sup_{y' \in \partial Q, r > 0} r^{1-n} \iint_{\partial Q \times [\mathcal{B}_{y'}(r) \cap \mathcal{B}_{y^{(k)}}(\delta_k)]} b^2(x, y) d\phi(x, y) \\ &\leq \sup_{y' \in \partial Q, r > 0} r^{1-n} \iint_{\partial Q \times [\mathcal{B}_{y'}(r) \cap \mathcal{B}_{y^0}(\delta_0)]} b^2(x, y) d\phi(x, y) \\ &= \|\mu_{\partial Q \times \mathcal{B}_{y^0}(\delta_0)}\| \leq \frac{\varepsilon_0}{2} < \varepsilon_0, \end{aligned}$$

что противоречит (27). Таким образом, лемма 2 доказана.

Сформулируем еще раз доказанное утверждение в форме, удобной для дальнейшего применения. Лемма 2 утверждает, что монотонно неубывающая функция

$$\sigma(\delta) = \sup_{y' \in \partial Q} \|\mu_{\partial Q \times \mathcal{B}_{y'}(\delta)}\| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \delta \rightarrow 0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \iint_{\partial Q \times [\mathcal{B}_{y'}(r) \cap \mathcal{B}_{y^0}(\delta)]} b^2(x, y) d\phi(x, y) &\leq r^{n-1} \sigma(\delta) \\ \text{для любых } y^0 \in \partial Q, \quad y' \in \partial Q, \quad r > 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Так как числа r и δ входят в (29) симметрично, а пересечение $\mathcal{B}_{y^0}(\delta) \cap \mathcal{B}_{y'}(r)$ принадлежит каждому из этих шаров, то справедливо и следующее утверждение:

$$\begin{aligned} \iint_{\partial Q \times [\mathcal{B}_{y'}(r) \cap \mathcal{B}_{y^0}(\delta)]} b^2(x, y) d\phi(x, y) &\leq \min\{r, \delta\}^{n-1} \sigma(\min\{r, \delta\}) \\ \text{для любых } y^0 \in \partial Q, \quad y' \in \partial Q, \quad r > 0. \end{aligned} \quad (29')$$

Вернемся к доказательству утверждения теоремы 4 о достаточности. Покажем, что если носитель меры $b^2\phi$ не содержит существенных точек, то

$$\|\mu_{\partial Q \times \{y \in \overline{Q}: r(y) < \delta\}}\| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \delta \rightarrow +0. \quad (30)$$

Выберем такое достаточно мелкое покрытие границы ∂Q открытыми шарами $\mathcal{U}_k = \mathcal{U}_{x^{(k)}}(R_k)$, $x^{(k)} \in \partial Q$, $k = 1, \dots, p$, что пересечение шаров удвоенного радиуса $\mathcal{U}_{x^{(k)}}(2R_k)$ с областью Q записывается в местной системе координат (начало

координат расположено в точке $x^{(k)}$, а ось y_n направлена по внутренней нормали к границе в этой точке) следующим образом:

$$\mathcal{U}_{x^{(k)}}(2R_k) \cap Q = \{y = (y', y_n) \in \mathbb{R}_n : y' \in 2Q'_k, y_n > \varphi_k(y')\} \cap \mathcal{U}_{x^{(k)}}(2R_k), \quad (31)$$

где $2Q'_k = \{y' \in \mathbb{R}_{n-1} : |y'| < 2R_k\}$ – проекция шара $\mathcal{U}_{x^{(k)}}(2R_k)$ на касательную к ∂Q плоскость в точке $x^{(k)}$, а φ_k – задающая границу гладкая функция. При этом предполагаем, что

$$|\nabla \varphi_k(y')| \leq 1 \quad \text{для всех } y' \in 2Q'_k.$$

Отметим, что последнее условие обеспечивает справедливость оценки

$$r(y) \leq y_n - \varphi_k(y') \leq \sqrt{2}r(y), \quad y \in \mathcal{U}_{x^{(k)}}(2R_k) \cap Q; \quad (32)$$

напомним, что $r(y)$ – это расстояние от точки y до границы.

Так как для любого $\delta \in (0, \delta_0)$, где $\delta_0 > 0$ – расстояние от границы до множества точек Q , не входящих в $\bigcup_{k=1}^p \mathcal{U}_k$, для всех $r > 0$ и $y^0 \in \partial Q$

$$\begin{aligned} & r^{1-n} \iint_{\partial Q \times [\{y \in \overline{Q} : r(y) < \delta\} \cap \mathcal{B}_{y^0}(r)]} b^2(x, y) d\phi(x, y) \\ & \leq \sum_{k=1}^p r^{1-n} \iint_{\partial Q \times [\{y \in \overline{Q} \cap \mathcal{U}_k : r(y) < \delta\} \cap \mathcal{B}_{y^0}(r)]} b^2(x, y) d\phi(x, y) \\ & \leq \sum_{k=1}^p \|\mu_{\partial Q \times \{y \in \overline{Q} \cap \mathcal{U}_k : r(y) < \delta\}}\|, \end{aligned}$$

то достаточно доказать стремление к нулю при $\delta \rightarrow +0$ каждого из слагаемых в правой части последнего неравенства. То есть нам достаточно доказать, что при произвольном k для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех $r > 0$ и $y^0 \in \partial Q$

$$\iint_{\partial Q \times [\{y \in \overline{Q} \cap \mathcal{U}_k : r(y) < \delta\} \cap \mathcal{B}_{y^0}(r)]} b^2(x, y) d\phi(x, y) < r^{n-1}\varepsilon. \quad (33)$$

Далее индекс k мы будем, как правило, опускать: $Q'_k = Q'$, $R_k = R$ и т. д. При этом будем использовать местную систему координат.

Возьмем произвольное положительное число $\delta < \delta_0$ и покроем проекцию $Q' = \{y' \in \mathbb{R}_{n-1} : |y'| < R\}$ $(n-1)$ -мерными кубами $\Pi'_m = \{y' = (y_1, \dots, y_{n-1}) : m_i\delta \leq y_i \leq (m_i + 1)\delta\}$, $m = (m_1, \dots, m_{n-1})$ – мультииндекс с целыми компонентами; всюду далее мы будем рассматривать только те m , для которых $\Pi'_m \cap Q' \neq \emptyset$. Отметим, что число таких кубов не превосходит $C(n)\delta^{1-n}$. Обозначим через Π_m n -мерный “криволинейный куб”

$$\Pi_m = \{y = (y', y_n) \in \mathbb{R}_n : y' \in \Pi'_m, \varphi(y') \leq y_n \leq \varphi(y') + \delta\},$$

проектирующийся на Π'_m .

Возьмем произвольные $r > 0$ и $y^0 \in \partial Q$. Обозначим через $M(y^0, r)$ множество всех тех мультииндексов m , для которых $\Pi_m \cap \mathcal{B}_{y^0}(r) \neq \emptyset$. Оценим левую часть неравенства (33):

$$\begin{aligned} & \iint_{\partial Q \times [\{y \in \overline{Q} \cap \mathcal{U}_k : r(y) < \delta/\sqrt{2}\} \cap \mathcal{B}_{y^0}(r)]} b^2(x, y) d\phi(x, y) \\ & \leq \iint_{\partial Q \times [\{y \in \overline{Q} \cap \mathcal{U}_k : 0 \leq y_n - \varphi(y') < \delta\} \cap \mathcal{B}_{y^0}(r)]} b^2(x, y) d\phi(x, y) \\ & \leq \sum_{m \in M(y^0, r)} \iint_{\partial Q \times [\Pi_m \cap \mathcal{B}_{y^0}(r)]} b^2(x, y) d\phi(x, y) \\ & \leq \sum_{m \in M(y^0, r)} \iint_{\partial Q \times [\mathcal{B}_{y(m)}(\delta') \cap \mathcal{B}_{y^0}(r)]} b^2(x, y) d\phi(x, y), \end{aligned}$$

здесь $y^{(m)} = (m\delta, \varphi(m\delta))$ — одна из вершин “криволинейного куба” Π_m , а $\delta' = \sqrt{5n}\delta$. Число входящих в $M(y^0, r)$ мультииндексов не превосходит $C(n)(r/\delta)^{n-1}$, если $r \geq \delta'$, и не превосходит $C(n)$, если $r < \delta'$. Оценивая каждое из слагаемых в правой части последнего неравенства с помощью (29'), получаем

$$\begin{aligned} & \iint_{\partial Q \times [\{y \in \overline{Q} \cap \mathcal{U}_k : r(y) < \delta/\sqrt{2}\} \cap \mathcal{B}_{y^0}(r)]} b^2(x, y) d\phi(x, y) \\ & \leq C(n) \left(\frac{r}{\delta}\right)^{n-1} (\delta')^{n-1} \sigma(\delta') \leq C'(n) r^{n-1} \sigma(\delta'), \end{aligned}$$

если $r \geq \delta'$. Если же $r < \delta'$, то

$$\begin{aligned} & \iint_{\partial Q \times [\{y \in \overline{Q} \cap \mathcal{U}_k : r(y) < \delta/\sqrt{2}\} \cap \mathcal{B}_{y^0}(r)]} b^2(x, y) d\phi(x, y) \\ & \leq C(n) r^{n-1} \sigma(r) \leq C(n) r^{n-1} \sigma(\delta') \end{aligned}$$

в силу монотонности функции σ . Из полученных оценок в обоих случаях следует (30). Тем самым теорема 4 доказана.

Рассмотрим теперь операторы $B_{b\phi}$ с удовлетворяющими условию (20) мерой ϕ и функцией b :

$$\phi = \text{mes}_{\partial Q \times \nu}, \quad \|\nu\| < \infty, \quad b \in L_2(\partial Q \times \overline{Q}; \phi).$$

Очевидно, операторы $B_{b\phi}$ вполне непрерывны, что, однако, не следует непосредственно из теоремы 4, так как в этом случае мера μ не обязана быть мерой Карлесона. Как отмечалось выше, это объясняется специальным видом меры ϕ и неоднозначностью представления таких операторов парой (ϕ, b) с помощью формулы (9).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Для любой удовлетворяющей условиям (20) и

$$\iint_{\partial Q \times \partial Q} b^2(x, y) d\phi(x, y) = 0$$

пары $\{\phi, b\}$ найдется другая пара $\{\widehat{\phi}, \widehat{b}\}$, задающая тот же оператор

$$B_{b\phi} = B_{\widehat{b}\widehat{\phi}}$$

и удовлетворяющая условиям теоремы 4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Далее будем считать, что $\nu(\overline{Q}) \neq 0$; иначе B – нулевой оператор и утверждение очевидно.

Так как $\nu(\overline{Q}) < \infty$ ($\|\nu\| < \infty$), то из $b \in L_2(\partial Q \times \overline{Q}; \phi)$ следует, что этому пространству принадлежит и функция $b_1(x, y) = \max\{|b(x, y)|, 1\}$:

$$\int_{\overline{Q}} \left[\int_{\partial Q} b_1^2(x, y) d \text{mes}_{\partial Q}(x) \right] d\nu(y) = \int_Q \left[\int_{\partial Q} b_1^2(x, y) d \text{mes}_{\partial Q}(x) \right] d\nu(y) < \infty.$$

Выберем такую монотонно неубывающую непрерывную функцию $\rho(t)$, $t \geq 0$, что $\rho(0) = 0$ и

$$\int_Q \frac{1}{\rho(r(y))} \left[\int_{\partial Q} b_1^2(x, y) d \text{mes}_{\partial Q}(x) \right] d\nu(y) < \infty. \quad (34)$$

Заметим, что для п.в. $x \in \partial Q$

$$\int_Q \frac{b_1^2(x, y)}{\rho(r(y))} d\nu(y) \geq \frac{\nu(Q)}{\rho(R_0)} > 0,$$

R_0 такое, что $\{y \in Q : r(y) > R_0\} = \emptyset$. Поэтому функция

$$h(x) = \left[\int_Q \frac{b_1^2(x, y)}{\rho(r(y))} d\nu(y) \right]^{-1}, \quad x \in \partial Q,$$

ограничена:

$$0 < h(x) \leq \frac{\rho(R_0)}{\nu(Q)} = \text{const}, \quad x \in \partial Q. \quad (35)$$

А в силу (34)

$$\int_{\partial Q} \frac{1}{h(x)} d \text{mes}_{\partial Q}(x) < \infty. \quad (34')$$

Положим

$$\widehat{\phi}(D) = \iint_{D \cap \partial Q \times Q} \frac{h(x)}{\rho(r(y))} b_1^2(x, y) d\nu(y) d \text{mes}_{\partial Q}(x) \quad (36)$$

для любого (борелевского) множества $D \subset \mathbb{R}_{2n}$ ($\widehat{\phi}(\partial Q \times \partial Q) = 0$) и

$$\widehat{b}(x, y) = \frac{b(x, y)\rho(r(y))}{h(x)b_1^2(x, y)}. \quad (37)$$

Очевидно, что пара $\widehat{\phi}, \widehat{b}$ задает тот же оператор: $B_{\widehat{\phi}\widehat{b}} = B_{b\phi}$. Проверим выполнение условий теоремы 4.

Итак, из определения функции h имеем

$$\begin{aligned} \widehat{\phi}(G \times \overline{Q}) &= \widehat{\phi}(G \times Q) = \iint_{G \times Q} \frac{h(x)}{\rho(r(y))} b_1^2(x, y) d\nu(y) d \text{mes}_{\partial Q}(x) \\ &= \int_G h(x) \left[\int_Q \frac{b_1^2(x, y)}{\rho(r(y))} d\nu(y) \right] d \text{mes}_{\partial Q}(x) = \text{mes}_{\partial Q}(G), \quad G \subset \partial Q, \end{aligned}$$

т.е. выполнено условие I.

Далее, в силу (34')

$$\begin{aligned} \iint_{\partial Q \times \overline{Q}} \widehat{b}^2(x, y) d\widehat{\phi}(x, y) &= \iint_{\partial Q \times Q} \widehat{b}^2(x, y) d\widehat{\phi}(x, y) \\ &= \iint_{\partial Q \times Q} \frac{b^2(x, y) \rho^2(r(y))}{h^2(x) b_1^4(x, y)} h(x) \frac{b_1^2(x, y)}{\rho(r(y))} d\nu(y) d\text{mes}_{\partial Q}(x) \\ &\leq \rho(R_0) \nu(Q) \int_{\partial Q} \frac{1}{h(x)} d\text{mes}_{\partial Q}(x) < \infty, \end{aligned}$$

т.е. $\widehat{b} \in L_2(\partial Q \times \overline{Q}; \phi)$.

Аналогично

$$\begin{aligned} \|\widehat{\mu}\| &= \sup_{y' \in \partial Q, r > 0} r^{1-n} \iint_{\partial Q \times \mathcal{B}_{y'}(r)} \widehat{b}^2(x, y) d\widehat{\phi}(x, y) \\ &\leq \sup_{y' \in \partial Q, r > 0} r^{1-n} \rho(R_0) \nu(\mathcal{B}_{y'}(r)) \int_{\partial Q} \frac{1}{h(x)} d\text{mes}_{\partial Q}(x) \\ &\leq \rho(R_0) \|\nu\| \int_{\partial Q} \frac{1}{h(x)} d\text{mes}_{\partial Q}(x) < \infty. \end{aligned}$$

И наконец, для любой точки $z^0 = (x^0, y^0) \in \partial Q \times \partial Q$ и для любой окрестности $\mathcal{V}_{x^0}$

$$\begin{aligned} \|\widehat{\mu}_{\mathcal{V}_{x^0} \times \mathcal{U}_{y^0}(\delta)}\| &\leq \|\mu_{\partial Q \times \mathcal{B}_{y^0}(\delta)}\| \\ &= \sup_{y' \in \partial Q, r > 0} r^{1-n} \iint_{\partial Q \times [\mathcal{B}_{y'}(r) \cap \mathcal{U}_{y^0}(\delta)]} \widehat{b}^2(x, y) d\widehat{\phi}(x, y) \\ &\leq \rho(\delta) \|\nu\| \int_{\partial Q} \frac{1}{h(x)} d\text{mes}_{\partial Q}(x) \rightarrow 0 \quad \text{при } \delta \rightarrow +0. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Используемый в доказательстве предложения 3 прием, конечно, можно применить и в общем случае. Уменьшая (если это возможно) ядро $b(x, y)$ вблизи $\partial Q \times \partial Q$ и соответственно увеличивая там меру ϕ (и уменьшая ее вдали от $\partial Q \times \partial Q$ так, чтобы сохранилось условие I), можно пытаться уменьшить множество существенных точек. В частности, справедливо следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ. Пусть $B = B_{b\phi}$, а Γ_0 – замыкание множества всех существенных точек носителя меры $b^2\phi$. Пусть, кроме того, существует такая ϕ -измеримая ограниченная и неотрицательная функция $\rho(x, y)$, что $\rho(x, y) \rightarrow 0$ при $\text{dist}((x, y), \Gamma_0) \rightarrow 0$ и для любого борелевского множества G

$$\iint_{G \times \overline{Q}} \frac{1}{\rho(x, y)} d\phi(x, y) = \text{mes}_{\partial Q}(G).$$

Тогда для любого $\alpha > 0$ оператор B является вполне непрерывным оператором из $C_{n-1}^\alpha(\overline{Q})$ в $L_2(\partial Q)$.

Отметим, что такое перераспределение (между b и ϕ) возможно далеко не всегда. В частности, оно невозможно для наиболее интересного случая $(Bu)(x) = b_1(x)u(\psi(x))$, где ψ – отображение ∂Q в $\overline{Q}$.

§ 4. Доказательство теоремы 1'

Как отмечалось выше, задача (1), (2) эквивалентна уравнению (11):

$$v = B\mathcal{G}v + u_0, \quad v = u|_{\partial Q},$$

в пространстве $L_2(\partial Q)$. В силу условия теоремы 1' найдутся такие числа $q \in (0, 1)$ и δ_0 , что

$$\|\mu_{[(\Gamma_0)_\infty]^\delta_0}\|\|\mathcal{G}\|^2 \leq q^2. \quad (38)$$

Следовательно, оператор $B'\mathcal{G}$, где $B' = B_{b\chi_{[(\Gamma_0)_\infty]^\delta_0}\phi}$, является сжимающим оператором.

Возьмем $\sigma \in (0, \delta_0)$ и по нему найдем число $\rho = \rho(\sigma)$ из леммы 4 работы [2], которая утверждает, что

$$[\Gamma_0(\rho)]_\infty \subset [\Gamma_0]_\infty(\sigma), \quad (39)$$

$E(\rho) = \{z \in \partial Q \times \partial Q : \text{dist}(z, E) \leq \rho\}$, $E \subset \partial Q \times \partial Q$. Представим оператор B в виде суммы $B = B_s + B_c$, где $B_s = B_{b\chi_{[\Gamma_0]^\rho}\phi}$, а $B_c = B_{b\{1-\chi_{[\Gamma_0]^\rho}\}\phi}$. Так как множество $\partial Q \times \partial Q \setminus [\Gamma_0]^\rho$ не содержит существенных точек носителя меры $b^2\phi$, то согласно теореме 3 оператор B_c является вполне непрерывным оператором из $C_{n-1}^\alpha(\bar{Q})$ в $L_2(\partial Q)$ при любом положительном α .

Рассмотрим оператор B_s . Пересечение (обозначим его через S_0) носителя соответствующей этому оператору меры $\{b\chi_{[\Gamma_0]^\rho}\}^2\phi$ с $\partial Q \times \partial Q$, очевидно, лежит в $\Gamma_0(\rho)$. А в силу (39) $(S_0)_\infty \subset [\Gamma_0(\rho)]_\infty \subset [\Gamma_0]_\infty(\sigma)$. Поэтому

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \|\mu_{[(S_0)_\infty]^\delta}\| \leq \lim_{\delta \rightarrow +0} \|\mu_{[(\Gamma_0)_\infty(\sigma)]^\delta}\| \leq \|\mu_{[(\Gamma_0)_\infty]^\delta_0}\| < \frac{1}{\|\mathcal{G}\|^2}.$$

Тем самым выполнены условия теоремы 1 работы [2], которая утверждает фредгольмовость задачи (1), (2). Следует обратить внимание на то, что в теореме 1 работы [2] предполагается, что B_c является вполне непрерывным оператором не из $C_{n-1}^\alpha(\bar{Q})$, а из $\mathbb{B}(\bar{Q})$ в $L_2(\partial Q)$. Однако, как легко видеть, утверждение остается справедливым и в нужной нам ситуации; при этом доказательство не меняется.

В заключение отметим, что доказанные выше утверждения без труда обобщаются на случай нелокальных задач, в которых значения искомого решения на границе выражаются не только через значения самого решения, но и через значения его производных во внутренних точках. Для этого, конечно, следует наложить дополнительные условия на гладкость коэффициентов уравнения, обеспечивающие внутреннюю гладкость решения, см., например, [18]. Как и в работе [4], в определяющее оператор B тождество производные $D^l v$ должны входить вместе с множителем $r^{|l|}(y)$, см. тождество (3.3) работы [4]. Условия I и II заменяются аналогичными условиями (3.1), (3.1'), (3.2), (3.2') из [4]. Как и в [4] доказывается ограниченность этого оператора из $C_{n-1}^\alpha(\bar{Q})$ в $L_2(\partial Q)$. Определение существенных точек носителей определяющих оператор B мер $b_0\phi_0$ и $b_l\phi_l$ совпадает с определением 1. Так как входящие в оператор B слагаемые можно рассматривать как операторы изучавшегося в настоящей работе вида, действующие на произведение $r^{|l|}(y)D^l v$, то к ним можно применить доказанные утверждения.

Список литературы

1. Гуштин А. К., Михайлов В. П. О разрешимости нелокальных задач для эллиптического уравнения второго порядка // Матем. сб. 1994. Т. 185. № 1. С. 121–160.
2. Гуштин А. К., Михайлов В. П. О непрерывности решений одного класса нелокальных задач для эллиптического уравнения // Матем. сб. 1995. Т. 186. № 2. С. 37–58.
3. Гуштин А. К., Михайлов В. П. Об однозначной разрешимости нелокальных задач для эллиптического уравнения // Докл. РАН. 1996. Т. 351. № 1. С. 7–8.
4. Гуштин А. К. Некоторые свойства решений задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка // Матем. сб. 1998. Т. 189. № 7. С. 53–90.
5. Бицадзе А. В., Самарский А. А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // Докл. АН СССР. 1969. Т. 185. № 4. С. 739–740.
6. Гуштин А. К. О задаче Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка // Матем. сб. 1988. Т. 137 (179). № 1. С. 19–64.
7. Михайлов В. П. О задаче Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12. № 10. С. 1877–1891.
8. Гуштин А. К., Михайлов В. П. О существовании граничных значений решений эллиптических уравнений // Матем. сб. 1991. Т. 182. № 6. С. 787–810.
9. Garnett J. B. Bounded analytic functions. New York: Academic Press, 1981. (Pure Appl. Math. V. 96.)
10. Carleson L. An interpolation problem for bounded analytic functions // Amer. J. Math. 1958. V. 80. P. 921–930.
11. Hörmander L. L^p -estimates for (pluri-)subharmonic functions // Math. Scand. 1967. V. 20. P. 65–78.
12. Панеях Б. П. О некоторых нелокальных краевых задачах для линейных дифференциальных операторов // Матем. заметки. 1984. Т. 35. № 3. С. 425–434.
13. Галахов Е. И., Скубачевский А. Л. О сжимающих неотрицательных полугруппах с нелокальными условиями // Матем. сб. 1998. Т. 189. № 1. С. 45–78.
14. Гуштин А. К. Условие полной непрерывности операторов, возникающих в нелокальных задачах для эллиптических уравнений // Докл. РАН. 2000. Т. 373. № 2. С. 161–163.
15. DeGiorgi E. Sulla differenziabilità e l'analicità delle estremali degli integrali multipli regolari // Mem. Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (5). 1957. V. 3. P. 25–43.
16. Nash J. Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations // Amer. J. Math. 1958. V. 80. P. 931–954.
17. Ладыженская О. А., Уралъцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.
18. Гилбарг Д., Трудингер Н. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989.

Математический институт
им. В. А. Стеклова РАН

Поступила в редакцию
28.12.2001