Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. И. Зеликин, Накопление переключений на оптимальных траекториях гёльдеровых задач, *Матем. сб.*, 2002, том 193, номер 5, 37–52

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm650>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 18:24:21

УДК 517.977

М. И. Зеликин

Накопление переключений на оптимальных траекториях гёльдеровых задач

В работе изучается задача минимизации среднеквадратичного отклонения от начала координат на классе функций, заданных на полуоси, производные которых удовлетворяют условию Гёльдера. Показано, что носителем решения является отрезок конечной длины, а оптимальная функция имеет счетное число переключений с участков максимального возрастания скорости на участки ее максимального убывания. Переключения накапливаются к правой границе носителя. Дано приложение полученных результатов к проблеме нахождения точных констант в неравенствах типа Колмогорова для дробных производных.

Библиография: 11 названий.

Класс гёльдеровых функций $\Sigma_{[a,b]}(L; \alpha)$ на интервале $[a, b]$ с показателем $\alpha < 1$ и константой Гёльдера L определяется следующим образом:

$$\Sigma_{[a,b]}(L; \alpha) = \{f : |f(t_1) - f(t_2)| \leq L|t_1 - t_2|^\alpha, t_1, t_2 \in [a, b]\}.$$

Рассмотрим семейство задач, зависящих от параметра α ($0 < \alpha < 1$):

ЗАДАЧА 1. Минимизировать функционал

$$I = \int_0^\infty x^2(t) dt \quad (1)$$

при условиях

$$\dot{x} = y, \quad y \in \Sigma_{[0,\infty]}(1; \alpha), \quad x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0. \quad (2)$$

Задача 1 естественно возникает в ряде вопросов непараметрической статистики, например в проблеме наилучшего оценивания функции f по дискретной серии наблюдений

$$y_{in} = f\left(\frac{i}{n}\right) + \xi_{in}, \quad (3)$$

подверженных воздействию случайных помех ξ_{in} (см. [1]).

Перечислим еще ряд задач непараметрической статистики, сводящихся к решению задачи 1.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 01-01-22004 и 01-01-00429).

1) Оценка (с минимаксным риском) плотности вероятности $f(t)$, $t \in [0, 1]$, по случайным наблюдениям $X_1, X_2, \dots, X_n$:

$$R_n(\Sigma) = \inf_{f_n} \sup_{f \in \Sigma} \mathbb{E}_f^{(n)} w \left(\frac{\|f_n - f\|_\infty}{\psi_n} \right),$$

здесь

$$\psi_n = \left(\frac{\log n}{n} \right)^{(1+\alpha)/(2\alpha+3)}, \quad \|f\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|,$$

$w(x)$ – неотрицательная неубывающая функция потерь, имеющая не более чем степенной рост при $x \rightarrow \infty$, $\mathbb{E}_f^{(n)}$ – математическое ожидание по отношению к истинной регрессии f , f_n – произвольная оценка, полученная по наблюдениям (3) (см. [2] и [3]).

2) Адаптивное оценивание в модели “белого шума”:

$$dX(t) = f(t) dt + \varepsilon dW(t), \quad t \in [0, 1],$$

где $W(t)$ – стандартный винеровский процесс, $f \in \Sigma_{[0,1]}(L; \alpha)$ с неизвестными α и L (см. [4], где приводится оценка в фиксированной точке).

3) Оценка регрессионной функции в фиксированной точке по наблюдениям (3) с минимальным риском Бахадура:

$$r_n(c) = \inf_{f_n} \sup_{f \in \Sigma} \frac{1}{n} \log P_f^{(n)}(|f_n - f(0)| \geq c), \quad c > 0$$

(см. [5]–[7]).

Тем самым, решение задачи 1 имеет первостепенное значение в ряде вопросов непараметрической статистики. Не менее существенной является ее роль в теории аппроксимации, в частности в проблеме отыскания точных констант в неравенствах типа Колмогорова для дробных производных в силу тесной связи гёльдеровых классов функций с теорией дробного дифференцирования (см. [8]–[10]).

Важность задачи 1 для теории оптимального управления обусловлена тем, что ее нельзя отнести к категории гладких задач. Негладким задачам уделяется серьезное внимание в современной теории оптимального управления, но при этом всегда предполагается выполнение условия Лишшица. Задача 1 не удовлетворяет и этому условию; она гёльдерова, а для гёльдеровых задач теория оптимального управления в настоящее время совершенно не разработана. Отсутствуют даже какие бы то ни было общие необходимые условия оптимальности. Поэтому решение задачи 1 насущно необходимо как контрольный пример для будущей теории. Помимо этого в настоящей работе показано, что задача 1 тесно связана с теорией четтеринг-режимов (или режимов накопления переключений), когда оптимальные траектории имеют на конечном отрезке времени бесконечное число переключений (см. [11]).

В интересной и важной работе С. Л. Леонова [1; с. 486] приведена теорема о том, что носителем решения задачи 1 является ограниченный отрезок $[0, T^*]$, иными

словами, решение $x^*(t)$ тождественно обращается в нуль при $t \geq T^*$. Доказательство этой теоремы, приведенное в [1], содержит дефект. В доказательстве существенную роль играет функция $\omega(x, y)$ – оптимальное значение функционала (1) в классе траекторий, начинающихся с промежуточной точки $x = x(t)$, $y = y(t)$ некоторой допустимой траектории. Однако оптимальное значение функционала зависит не только от самой точки (x, y) , но и от предыстории процесса $x = x(t)$, $y = y(t)$. Дело в том, что гёльдеровы классы функций $\Sigma_{[a, b]}(L; \alpha)$ в отличие от липшицевых классов (для которых $\alpha = 1$) не аддитивны по отрезкам $[a, b]$, т.е. если на каждом из смежных отрезков $[a, b]$ и $[b, c]$ функция $y(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера с константой L и показателем α , то она не обязана удовлетворять этому условию на их объединении $[a, c]$. Поэтому, несмотря на кажущуюся автономность задачи 1, для нее несправедлив принцип Беллмана, утверждающий, что ограничение оптимальной траектории $x^*(t)$, $y^*(t)$, $t \in [0, T]$, на отрезок $[t_1, T]$, $t_1 > 0$, оптимально для новых начальных значений $x^*(t_1)$, $y^*(t_1)$. Нарушение принципа Беллмана в задаче 1 происходит потому, что для новых начальных значений запас допустимых управлений расширяется.

Тем не менее, теорема об ограниченности носителя решения задачи 1 справедлива, и здесь будет приведено ее доказательство, свободное от вышеупомянутого дефекта. Кроме того, будет доказано, что оптимальная траектория содержит бесконечно много “переключений”, накапливающихся к моменту окончания процесса. Дано приложение полученных результатов к вопросу о неравенствах для производных.

Прежде чем формулировать основные результаты, приведем несколько простых утверждений, касающихся решения задачи 1.

Траекторию

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 - t^\alpha, \\ x(t) &= x_0 + y_0 t - \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha + 1} \end{aligned} \quad (4)$$

назовем *максимально убывающей гёльдеровой траекторией*, отвечающей начальному значению x_0 , y_0 , или *режимом максимального убывания координаты y* . Траекторию

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 + t^\alpha, \\ x(t) &= x_0 + y_0 t + \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha + 1} \end{aligned} \quad (5)$$

назовем *максимально возрастающей гёльдеровой траекторией*, отвечающей начальному значению x_0 , y_0 , или *режимом максимального возрастания координаты y* .

Ниже будет показано, что решение задачи 1 является сплайн-функцией, чередующей режим максимального возрастания координаты y и режим ее максимального убывания. Переход с одного режима на другой мы будем называть *переключением*. Следует помнить, что траектория с переключением в некоторой промежуточной точке $x(t_1)$, $y(t_1)$ с режима максимального возрастания (убывания), отвечающего начальному значению $x(t_0)$, $y(t_0)$, вновь на режим максимального возрастания (убывания), отвечающего новому начальному значению $x(t_1)$, $y(t_1)$, не является

допустимой траекторией, в то время как чередование режимов максимального возрастания и максимального убывания допустимо.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Решение задачи 1 существует и единственно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение следует из полунепрерывности снизу и строгой выпуклости функционала (1) и из $*$ -слабой компактности множества гёльдеровых функций $\Sigma_{[0, \infty]}(1; \alpha)$.

На множестве (2) допустимых траекторий задачи 1 действует однопараметрическая масштабная группа преобразований $g_\lambda: (t, x, y) \mapsto (\lambda t, \lambda^{\alpha+1}x, \lambda^\alpha y)$, значения $\lambda > 0$ параметризуют данную группу.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Группа g_λ переводит допустимые траектории $(x(t), y(t))$ в допустимые траектории $(\lambda^{\alpha+1}x(t/\lambda), \lambda^\alpha y(t/\lambda))$ с соответственно измененными начальными значениями. Функционал на образе получается из функционала на прообразе умножением на $\lambda^{2\alpha+3}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение проверяется очевидным прямым подсчетом.

Пусть на плоскости (x, y) заданы две точки: $M = (a, b)$ и $N = (c, d)$, где $c > a$, $b > 0$, $d > 0$; и две допустимые траектории

$$\gamma_1 = (x_1(t), y_1(t)), \quad \gamma_2 = (x_2(t), y_2(t)),$$

проходящие через эти точки. Пусть точке M соответствует один и тот же момент t_0 на обеих траекториях γ_i , а точке N – момент t_1 на траектории γ_1 и момент t_2 на траектории γ_2 . Участки на траекториях γ_i , соединяющие точки M и N , обозначим через Γ_i . Пусть проекции участков Γ_i на плоскость (x, y) лежат в верхней полуплоскости. Тогда их можно задать функциями $y_1(x)$ и $y_2(x)$, поскольку функции $x_i(t)$ на обоих участках монотонно возрастают. Пусть на Γ_i имеют место неравенства:

$$y_1(x) \geq y_2(x) > 0, \tag{6}$$

а вне этих участков проекции γ_1 и γ_2 на плоскость (x, y) совпадают.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *В вышеописанной ситуации имеет место неравенство*

$$I(\gamma_1) \leq I(\gamma_2).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выделим в интегралах $I(\gamma_1)$ и $I(\gamma_2)$ слагаемые, соответствующие участкам Γ_i :

$$\begin{aligned} I(\gamma_1) &= \int_{\gamma_1} x^2 dt = \int_0^{t_0} x_1^2 dt + \int_{t_0}^{t_1} x_1^2 dt + \int_{t_1}^{\infty} x_1^2 dt, \\ I(\gamma_2) &= \int_{\gamma_2} x^2 dt = \int_0^{t_0} x_2^2 dt + \int_{t_0}^{t_2} x_2^2 dt + \int_{t_2}^{\infty} x_2^2 dt. \end{aligned}$$

По условию функции $x_i(t)$ на интервале $[0, t_0]$ совпадают, а на интервалах $[t_i, \infty)$ получаются друг из друга сдвигом по t . Следовательно, интегралы по невыделенным участкам на обеих кривых совпадают. А в интегралах по выделенным участкам Γ_i функции $x_i(t)$ на обеих кривых монотонны. Поэтому за независимую переменную в интегралах, соответствующих выделенным участкам, можно принять x . При этом $dt = \frac{dx}{y}$,

$$\int_a^c \frac{x^2 dx}{y_1(x)} \leq \int_a^c \frac{x^2 dx}{y_2(x)}$$

и, следовательно, $I(\gamma_1) \leq I(\gamma_2)$.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Участок оптимальной траектории на плоскости (x, y) , который лежит в верхней полуплоскости ($y > 0$), проходит выше любых от него допустимых кривых, соединяющих две его произвольные точки. Участок, лежащий в нижней полуплоскости, проходит ниже таких кривых.*

В силу следствия 1 оптимальная траектория представляет собой сплайн-функцию, которая состоит из участков максимально возрастающих и максимально убывающих гёльдеровых функций.

СЛЕДСТВИЕ 2. *На той части оптимальной траектории, которая лежит в верхней (нижней) полуплоскости, имеется лишь одно переключение.*

ТЕОРЕМА 1. *Для любой начальной точки (x_0, y_0) существует $T^* > 0$ такое, что оптимальная траектория $(x^*(\cdot), y^*(\cdot))$, начинающаяся в точке (x_0, y_0) , попадает в начало координат в момент T^* и $x^*(t) \equiv y^*(t) \equiv 0$ при $t \geq T^*$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Принимая в расчет действие масштабной группы g_λ , рассмотрим множество прямоугольников Π_r :

$$\Pi_r = \{(x, y) : |x| \leq r^{\alpha+1}, |y| \leq r^\alpha\}.$$

В множестве $\mathbb{R}^2 \setminus \Pi_r$ выделим две области: $\Omega_1 = \{(x, y) : |x| > r^{\alpha+1}\}$ и $\Omega_2 = \{(x, y) : |x| < r^{\alpha+1}, |y| > r^\alpha\}$.

Доказательство теоремы разбивается на серию лемм.

Пусть оптимальная траектория $\gamma = (x^*(\cdot), y^*(\cdot))$ в момент времени t_0 принадлежит Π_{2r} и лежит вне Π_r на отрезке времени $[t_0, t_0 + h]$. Оценим значение функционала (1) на этой траектории. Обозначим через τ_i ($i = 1, 2$) время однократного пребывания траектории γ в области Ω_i , т.е. длину любого интервала времени между моментом входа в эту область траектории γ и ближайшим моментом выхода из нее; через T_i обозначим полное время пребывания траектории γ в области Ω_i за время $[t_0, t_0 + h]$.

ЛЕММА 1 (оценка снизу).

$$\int_{t_0}^{\infty} (x^*(t))^2 dt \geq r^{2\alpha+2} (h(1 - 2^{1-1/\alpha}) - 2r).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. В области Ω_2 выполнено неравенство $|\dot{x}| = |y| > r^\alpha$, а расстояние по координате x , которое надо пройти, чтобы пересечь Ω_2 , равно $2r^{\alpha+1}$. Поэтому

$$\tau_2 \leq 2r. \quad (7)$$

2. Расстояние по координате y , которое необходимо преодолеть, чтобы пересечь область Ω_1 , больше или равно $2r^\alpha$. Функция $y^*(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера, и ее приращение за время τ_1 не превосходит τ_1^α . Поэтому

$$\tau_1 \geq 2^{1/\alpha}r. \quad (8)$$

3. Обозначим через n число входов траектории γ в область Ω_2 . Тогда γ должна $n - 1$ раз полностью пересечь область Ω_1 . При этом в силу (8) имеем $h \geq T_1 \geq 2^{1/\alpha}r(n - 1)$. Следовательно,

$$n \leq 1 + \frac{h}{r}2^{-1/\alpha}. \quad (9)$$

4. Из (9) и (7) следует, что $T_2 \leq 2rn \leq 2r \left(1 + \frac{h}{r}2^{-1/\alpha}\right) = 2r + h2^{1-1/\alpha}$. Отсюда следует, что

$$T_1 = h - T_2 \geq h(1 - 2^{1-1/\alpha}) - 2r. \quad (10)$$

Поскольку $|x| \geq r^{\alpha+1}$ в области Ω_1 , получаем окончательную оценку

$$\int_{t_0}^{\infty} (x^*(t))^2 dt \geq r^{2\alpha+2} (h(1 - 2^{1-1/\alpha}) - 2r).$$

Обозначим через β кривую $\beta = \{\beta(x, y) = 0\}$, где

$$\beta(x, y) = \frac{\alpha}{\alpha + 1} |y|^{(\alpha+1)/\alpha} \text{Sign } y + x.$$

ЛЕММА 2. Пусть начальные значения (x_0, y_0) лежат на кривой β . Тогда при $y_0 > 0$ траектория максимального убывания координаты y попадает без переключения в начало координат за время $y_0^{1/\alpha}$; при $y_0 < 0$ траектория максимального возрастания координаты y попадает без переключения в начало координат за время $(-y_0)^{1/\alpha}$. Никакие другие траектории максимального убывания или возрастания координаты y не приходят в начало координат без переключения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы проверяется подстановкой соответствующего значения t в уравнения (4), (5).

ЛЕММА 3. Пусть некоторая оптимальная траектория $\gamma = (x^*(\cdot), y^*(\cdot))$ проходит через точку $(x_1, y_1) \in \Pi_r$. Тогда существуют не зависящие от r константы $C > 0$, $K > 0$ и такое допустимое продолжение траектории γ за точку (x_1, y_1) , которое попадает в начало координат за время T ($T \leq Cr$), не выходя при этом за пределы прямоугольника Π_{Kr} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Точку (x_1, y_1) можно представить следующим образом: $x_1 = ar^{\alpha+1}$, $y_1 = br^\alpha$, где $|a| < 1$, $|b| < 1$. Для того чтобы построить допустимое продолжение траектории γ , необходимо знать ее поведение до момента попадания в точку (x_1, y_1) . Примем за $t = 0$ момент переключения на γ , непосредственно предшествующий ее попаданию в точку (x_1, y_1) . Обозначим координаты точки переключения при $t = 0$ через $(A, -B)$, $B > 0$. В силу центральной симметрии задачи можно без ограничения общности считать, что в момент $t = 0$ мы находились в нижней полуплоскости и ниже кривой β , т.е. $\beta(A, -B) < 0$. Момент прихода γ в точку (x_1, y_1) обозначим через t_0 . Тогда траектория γ на участке $[0, t_0]$ задается формулами

$$\begin{aligned} y^* &= t^\alpha - B, \\ x^* &= \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} - Bt + A. \end{aligned} \quad (11)$$

При отрицательных значениях t , т.е. до прихода в точку $(A, -B)$, координата y на γ убывала начиная с некоторого момента $t = -s < 0$. Следовательно, уравнения γ на участке $[-s, 0]$ имеют вид

$$\begin{aligned} y^* &= -(t+s)^\alpha + s^\alpha - B, \\ x^* &= -\frac{(t+s)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + (s^\alpha - B)t + \frac{s^{\alpha+1}}{\alpha+1} + A. \end{aligned} \quad (12)$$

В силу следствия 2 фазовая точка на траектории γ в момент $t = -s$ лежит в верхней полуплоскости. Подставляя $t = -s$ в первое уравнение системы (12), получаем

$$s > B^{1/\alpha}. \quad (13)$$

Большая часть последующего доказательства будет посвящена тому, чтобы оценить значение B через r . Идея заключается в том, чтобы показать, что если B существенно превосходит r^α , то траектория γ не оптимальна.

Сначала выпишем выражение для A , исходя из того, что γ в момент t_0 проходит через точку $x_1 = ar^{\alpha+1}$, $y_1 = br^\alpha$. Из уравнений (11) получаем

$$t_0 = (B + br^\alpha)^{1/\alpha}, \quad x^*(t_0) = \frac{1}{\alpha+1}(B + br^\alpha)^{1+1/\alpha} - B(B + br^\alpha)^{1/\alpha} + A = ar^{\alpha+1}.$$

Обозначая $\rho = r^\alpha/B$, получаем:

$$A/B^{1+1/\alpha} = a\rho^{1+1/\alpha} + (1 + b\rho)^{1/\alpha} \left(\frac{\alpha}{\alpha+1} - \frac{b\rho}{\alpha+1} \right). \quad (14)$$

В момент $t_1 = B^{1/\alpha}$ траектория γ пересекается с осью абсцисс.

Проварьируем траекторию γ . Пусть $\tau > 0$ – малый параметр, параметризующий вариацию. Проварьированная траектория, которая будет обозначаться через $\gamma_\tau = (x_\tau(\cdot), y_\tau(\cdot))$, строится следующим образом. Участок (12) траектории γ продолжается за точку $(A, -B)$ на время τ . Точка, в которую приходит траектория γ_τ в момент τ , имеет координаты

$$\begin{aligned} y_\tau(\tau) &= -B - \alpha s^{\alpha-1}\tau + o(\tau), \\ x_\tau(\tau) &= A - B\tau + o(\tau). \end{aligned} \quad (15)$$

Далее используем режим максимального убывания y вплоть до попадания на ось абсцисс в некоторый момент t_2 . На этом участке траектория γ_τ имеет вид

$$\begin{aligned} y_\tau(t) &= (t - \tau)^\alpha - B - \alpha s^{\alpha-1} \tau + o(\tau), \\ x_\tau(t) &= \frac{(t - \tau)^{\alpha+1}}{\alpha + 1} - (B + \alpha s^{\alpha-1} \tau)(t - \tau) + A - B\tau + o(\tau), \end{aligned} \quad (16)$$

а момент t_2 определяется соотношением $(t_2 - \tau)^\alpha = B + \alpha s^{\alpha-1} \tau + o(\tau)$:

$$t_2 = B^{1/\alpha} + O(\tau). \quad (17)$$

Траектория γ_τ пересекается с осью Ox в точке $E_\tau = A - \frac{\alpha}{\alpha + 1} B^{(\alpha+1)/\alpha} + O(\tau)$, которая отличается от точки пересечения E траектории γ с этой осью на величину порядка τ . Пусть, попав в верхнюю полуплоскость, траектория γ_τ продолжает подниматься такое бесконечно малое время $\theta - t_2$, чтобы, переключившись на режим максимального убывания, вернуться точно в точку E траектории γ .

Вычислим приращение функционала на проварьированной траектории:

$$I(\gamma_\tau) - I(\gamma) = \int_0^\tau [(x_\tau)^2 - (x^*)^2] dt + \int_\tau^{t_1} [(x_\tau)^2 - (x^*)^2] dt + \int_{t_1}^\theta [(x_\tau)^2 - (x^*)^2] dt. \quad (18)$$

Основной вклад в приращение функционала (18) вносит второй из интегралов, стоящих в правой части, поскольку он берется по отрезку конечной (по отношению к τ) длины. Первый и третий интегралы – величины порядка $o(\tau)$. Действительно, заметим, что имеет место тейлоровское разложение

$$\frac{(t - \tau)^{\alpha+1}}{\alpha + 1} - \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha + 1} = -t^\alpha \tau + \varphi(t, \tau) \tau^2, \quad (19)$$

где функция $\varphi(t, \tau)$ ограничена по t на любом фиксированном отрезке $t \in [\tau, t_1]$. Используя монотонность функции $x(\cdot)$ в верхней (и нижней) полуплоскости, нетрудно проверить, что разность функций, стоящих под знаком каждого из этих интегралов, есть величина порядка τ , а отрезок, по которому происходит интегрирование, бесконечно мал. В силу (17) пределы интегрирования t_1 в (18) можно заменить на $B^{1/\alpha}$. Оценим второй интеграл правой части (18). Пренебрегая величинами порядка $o(\tau)$ и используя (19), получим

$$\begin{aligned} \Delta I &= \int_\tau^{B^{1/\alpha}} \left(\frac{(t - \tau)^{\alpha+1}}{\alpha + 1} - (B + \alpha s^{\alpha-1} \tau)(t - \tau) + A - B\tau \right)^2 dt \\ &\quad - \int_\tau^{B^{1/\alpha}} \left(\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha + 1} - Bt + A \right)^2 dt \\ &= \int_\tau^{B^{1/\alpha}} \left\{ \left[\left(\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha + 1} - Bt + A \right) - \alpha s^{\alpha-1} \tau t - t^\alpha \tau \right]^2 - \left(\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha + 1} - Bt + A \right)^2 \right\} dt \\ &= -2\tau \int_\tau^{B^{1/\alpha}} \left[\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha + 1} - Bt + A \right] (t^\alpha + \alpha s^{\alpha-1} t) dt. \end{aligned} \quad (20)$$

Подстановка нижнего предела в проинтегрированное выражение дает $o(\tau)$. После интегрирования получаем в качестве главного члена следующий коэффициент при (-2τ) :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{B^{1+2/\alpha}}{2(\alpha+1)^2} - \frac{B^{1+2/\alpha}}{\alpha+2} + \frac{B^{1+2/\alpha}}{\alpha+1} \frac{A}{B^{1+1/\alpha}} \right) \\ & + \alpha s^{\alpha-1} \left(\frac{B^{1+3/\alpha}}{(1+\alpha)(3+\alpha)} - \frac{B^{1+3/\alpha}}{3} + \frac{\alpha B^{1+3/\alpha}}{2} \frac{A}{B^{1+1/\alpha}} \right). \end{aligned} \quad (21)$$

Введем обозначения

$$\rho = \frac{r^\alpha}{B}, \quad \xi = \frac{s^{\alpha-1}}{B^{(\alpha-1)/\alpha}}.$$

Из (13) следует, что $0 < \xi < 1$. В этих обозначениях с учетом (14) формула (20) приобретает вид

$$\begin{aligned} \Delta I = & -2\tau B^{(2+2\alpha)/\alpha} \left(\frac{1}{2(\alpha+1)^2} - \frac{1}{\alpha+2} \right. \\ & + \frac{1}{\alpha+1} \left[a\rho^{(1+\alpha)/\alpha} + (1+b\rho)^{1/\alpha} \left(\frac{\alpha}{\alpha+1} - \frac{b\rho}{\alpha+1} \right) \right] \\ & + \alpha\xi \left(\frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+3)} - \frac{1}{3} \right. \\ & \left. \left. + \frac{\alpha}{2} \left[a\rho^{(1+\alpha)/\alpha} + (1+b\rho)^{1/\alpha} \left(\frac{\alpha}{\alpha+1} - \frac{b\rho}{\alpha+1} \right) \right] \right) \right). \end{aligned}$$

Рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} f(\rho, \xi) = & -\frac{1}{2(\alpha+1)^2} + \frac{1}{\alpha+2} \\ & - \frac{1}{\alpha+1} \left[a\rho^{(1+\alpha)/\alpha} + (1+b\rho)^{1/\alpha} \left(\frac{\alpha}{\alpha+1} - \frac{b\rho}{\alpha+1} \right) \right] \\ & - \alpha\xi \left(\frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+3)} - \frac{1}{3} \right. \\ & \left. + \frac{\alpha}{2} \left[a\rho^{(1+\alpha)/\alpha} + (1+b\rho)^{1/\alpha} \left(\frac{\alpha}{\alpha+1} - \frac{b\rho}{\alpha+1} \right) \right] \right). \end{aligned} \quad (22)$$

При $\rho = 0$ функция (22) принимает значение

$$f(0, \xi) = -\frac{\alpha}{2(\alpha+1)^2(\alpha+2)} - \frac{\alpha^3\xi}{6(\alpha+3)}.$$

Отсюда следует, что функция $f(\rho, \xi)$ остается отрицательной при всех $0 < \xi < 1$ и всех достаточно малых ρ , что противоречит оптимальности траектории γ . Следовательно, для оптимальности необходимо, чтобы существовала константа $C_1 > 0$ такая, что $\rho = \frac{r^\alpha}{B} > C_1$. Таким образом, время попадания оптимальной траектории γ в точку E на оси абсцисс оценивается следующим образом:

$$t_1 = B^{1/\alpha} \leq C_2 r. \quad (23)$$

Получив оценку (23), мы завершаем доказательство леммы 3 следующим образом. Продолжим траекторию γ до пересечения с кривой β из леммы 2 и далее по лемме 2 в режиме максимального убывания y приводим фазовую точку без переключения в начало координат. Для оценки времени пересечения с кривой β подставим в уравнение β соотношения (11) при $t = B^{1/\alpha}$:

$$\beta(x^*, y^*) = \frac{B^{(\alpha+1)/\alpha}}{\alpha+1} - B^{(\alpha+1)/\alpha} + A < 0.$$

Следовательно, $A > -\frac{\alpha}{\alpha+1} B^{(\alpha+1)/\alpha}$. При $t = kB^{1/\alpha}$ получаем оценку

$$\beta(x^*, y^*) \geq B^{(\alpha+1)/\alpha} \left(\frac{k^{\alpha+1}}{\alpha+1} - k - \frac{\alpha}{\alpha+1} + \frac{\alpha}{\alpha+1} (k-1)^{(\alpha+1)/\alpha} \right). \quad (24)$$

Очевидно, что существует такое не зависящее от r значение $k = K_1$, при котором правая часть неравенства (24) положительна. Это означает, что траектория γ пересекает кривую β в некоторый момент $t_3 \leq K_2 r$. Из уравнений (11) следует, что $y^*(t_3) \leq C_4 r^\alpha$ и время прихода продолжения траектории γ в начало координат оценивается величиной Cr . Из уравнений (11) следует также, что полученная траектория не покидает прямоугольника Π_{Kr} при некотором не зависящем от r значении K .

ЛЕММА 4 (оценка сверху).

$$\int_{t_0}^{\infty} (x^*(t))^2 dt \leq Qr^{2\alpha+3}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 3 существует допустимая траектория, попадающая в начало координат за время Cr , на которой подынтегральная функция не превосходит $(Kr)^{2\alpha+2}$. Следовательно, значение функционала на оптимальной траектории оценивается выражением $Qr^{2\alpha+3}$.

Вернемся к доказательству теоремы 1. Пусть, как в начале доказательства теоремы 1, оптимальная траектория $\gamma = (x^*(\cdot), y^*(\cdot))$ в момент времени t_0 принадлежит Π_{2r} и лежит вне Π_r на отрезке времени $[t_0, t_0 + h]$. Объединяя результаты леммы 1 и леммы 4, получаем неравенство

$$Qr^{2\alpha+3} \geq \int_{t_0}^{\infty} (x^*(t))^2 dt \geq r^{2\alpha+2} (h(1 - 2^{1-1/\alpha}) - 2r).$$

Из этого неравенства следует, что $h \leq Pr$, где P — константа, не зависящая от r .

Итак, оптимальная траектория, начинающаяся в прямоугольнике Π_{2r} , через время Pr попадает в прямоугольник Π_r , далее через время $Pr/2$ она попадает в прямоугольник $\Pi_{r/2}$ и т. д. Следовательно, оптимальная траектория приходит в начало координат в некий момент времени T^* , который не превосходит $Pr + Pr/2 + Pr/4 + \dots = 2Pr$. Очевидно, что после этого $x^*(t) \equiv y^*(t) \equiv 0$ при $t \geq T^*$.

ТЕОРЕМА 2. *Любая ненулевая оптимальная траектория $x^*(\cdot), y^*(\cdot)$ задачи 1 содержит бесконечно много точек переключения, которые накапливаются к моменту T^* попадания этой траектории в начало координат.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что если траектория $x^*(\cdot), y^*(\cdot)$, попадающая в начало координат, имеет конечное число переключений, то на некоторой допустимой ее вариации функционал принимает меньшее значение, чем на $x^*(\cdot), y^*(\cdot)$. Если траектория $x^*(\cdot), y^*(\cdot)$ попадает в начало координат с конечным числом переключений, то ее последний участок, свободный от точек переключения, имеет вид, описанный в лемме 2. Поскольку кривая

$$\beta = \left\{ \beta(x_0, y_0) = \frac{\alpha}{\alpha + 1} |y_0|^{(\alpha+1)/\alpha} \text{Sign } y_0 + x_0 = 0 \right\}$$

является орбитой масштабной группы g_λ , можно без ограничения общности считать, что $y_0 = 1, x_0 = -\frac{\alpha}{\alpha + 1}$. Варьируемая траектория имеет вид

$$y^*(t) = 1 - t^\alpha, \quad x^*(t) = -\frac{\alpha}{\alpha + 1} + t - \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha + 1}. \quad (25)$$

Нам снова придется рассматривать вариации, которые зависят от предыдущего поведения траектории (25). Пусть время попадания в точку (x_0, y_0) , отсчитываемое от предыдущей точки переключения $(\tilde{x}, \tilde{y})$, равно σ . На этом предыдущем участке времени траектория имеет вид:

$$y(t) = \tilde{y} + t^\alpha, \quad x(t) = \tilde{x} + t\tilde{y} + \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha + 1}, \quad (26)$$

и из того, что в момент σ она проходит через точку $y(\sigma) = 1, x(\sigma) = -\frac{\alpha}{\alpha + 1}$, получаем

$$\tilde{y} = 1 - \sigma^\alpha, \quad \tilde{x} = -\frac{\alpha}{\alpha + 1} - \sigma + \frac{\alpha\sigma^{\alpha+1}}{\alpha + 1}.$$

Формулы (26) принимают вид:

$$\begin{aligned} y(t) &= 1 - \sigma^\alpha + t^\alpha, \\ x(t) &= -\frac{\alpha}{\alpha + 1} - \sigma + \frac{\alpha\sigma^{\alpha+1}}{\alpha + 1} + (1 - \sigma^\alpha)t + \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha + 1}. \end{aligned} \quad (27)$$

Проварьируем траекторию (25), продолжив траекторию (27) за точку (x_0, y_0) на время τ (параметр τ будет впоследствии стремиться к нулю). В момент $\sigma + \tau$ мы попадаем в точку

$$\begin{aligned} y(\tau) &= 1 - \sigma^\alpha + (\sigma + \tau)^\alpha, \\ x(\tau) &= -\frac{\alpha}{\alpha + 1} - \sigma + \frac{\alpha\sigma^{\alpha+1}}{\alpha + 1} + (1 - \sigma^\alpha)(\sigma + \tau) + \frac{(\sigma + \tau)^{\alpha+1}}{\alpha + 1}. \end{aligned} \quad (28)$$

В этой точке мы переключаемся на режим максимального убывания y и движемся по траектории

$$\begin{aligned} y_\tau(t) &= 1 - \sigma^\alpha + (\sigma + \tau)^\alpha - (t - \tau)^\alpha, \\ x_\tau(t) &= -\frac{\alpha}{\alpha + 1} - \sigma + \frac{\alpha\sigma^{\alpha+1}}{\alpha + 1} + (1 - \sigma^\alpha)(\sigma + \tau) + \frac{(\sigma + \tau)^{\alpha+1}}{\alpha + 1} \\ &\quad + (1 - \sigma^\alpha + (\sigma + \tau)^\alpha)(t - \tau) - \frac{(t - \tau)^{\alpha+1}}{\alpha + 1} \quad (\tau \leq t \leq \theta) \end{aligned} \quad (29)$$

до момента времени θ пересечения с кривой β . Тем самым, момент θ определяется из уравнения

$$\begin{aligned} &-\frac{\alpha}{\alpha + 1} - \sigma + \frac{\alpha\sigma^{\alpha+1}}{\alpha + 1} + (1 - \sigma^\alpha)(\sigma + \tau) + \frac{(\sigma + \tau)^{\alpha+1}}{\alpha + 1} \\ &\quad + (1 - \sigma^\alpha + (\sigma + \tau)^\alpha)(\theta - \tau) - \frac{(\theta - \tau)^{\alpha+1}}{\alpha + 1} \\ &= \frac{\alpha}{\alpha + 1} [(\theta - \tau)^\alpha - 1 + \sigma^\alpha - (\sigma + \tau)^\alpha]^{(\alpha+1)/\alpha}. \end{aligned} \quad (30)$$

Упростим уравнение (30), введя вместо θ новую переменную $z = \theta - \tau$:

$$\begin{aligned} &-\frac{\alpha}{\alpha + 1} - \frac{\sigma^{\alpha+1}}{\alpha + 1} + (1 - \sigma^\alpha)\tau + \frac{(\sigma + \tau)^{\alpha+1}}{\alpha + 1} \\ &\quad + (1 - \sigma^\alpha + (\sigma + \tau)^\alpha)z - \frac{z^{\alpha+1}}{\alpha + 1} \\ &\quad - \frac{\alpha}{\alpha + 1} [z^\alpha - 1 + \sigma^\alpha - (\sigma + \tau)^\alpha]^{(\alpha+1)/\alpha} = 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Найдем асимптотическое разложение функции $z(\tau)$ при малых τ . Левая часть уравнения (31) при $\tau = 0$ имеет корень $z = 1$. Этот корень двукратный, так как производная левой части уравнения (31) при $\tau = 0$, $z = 1$ также обращается в нуль, а вторая производная нулю не равна. Поэтому разложение следует искать в виде ряда Пуанкаре по степеням $\sqrt{\tau}$, т.е. $z = 1 + A\sqrt{\tau} + B\tau + o(\tau)$. Подстановка в уравнение (31) и приравнивание коэффициентов при старших степенях дает

$$A = -\sqrt{\frac{2}{\alpha} + 2\sigma^{\alpha-1}}, \quad B = \sigma^{\alpha-1}. \quad (32)$$

Поскольку $(x_\tau(\theta), y_\tau(\theta)) \in \beta$, режим максимального возрастания с началом в этой точке приводит в начало координат в некоторый момент T . Мы построили вариацию исходной траектории. Оценим соответствующее приращение функционала:

$$\begin{aligned} \Delta I &= I(x_\tau, y_\tau) - I(x^*, y^*) = \int_0^\tau ((x_\tau(t))^2 - (x^*(t))^2) dt \\ &\quad + \int_\tau^1 ((x_\tau(t))^2 - (x^*(t))^2) dt + \int_1^\theta (x_\tau(t))^2 dt + \int_\theta^T (x_\tau(t))^2 dt. \end{aligned} \quad (33)$$

Разложим каждый из четырех интегралов с точностью до $o(\tau)$. Имеем

$$\int_0^\tau ((x_\tau(t))^2 - (x^*(t))^2) dt = o(\tau),$$

так как подынтегральное выражение есть бесконечно малая величина, а длина интервала, по которому происходит интегрирование, равна τ . Для оценки третьего и четвертого интегралов найдем точку пересечения траектории (29) с осью абсцисс. Соответствующий момент времени обозначим через s :

$$\begin{aligned} s - \tau &= [(1 - \sigma^\alpha) + (\sigma + \tau)^\alpha]^{1/\alpha} = 1 + \sigma^{\alpha-1}\tau + o(\tau), \\ x_\tau(s) &= -\frac{\alpha}{\alpha+1} - \sigma + \frac{\alpha}{\alpha+1}\sigma^{\alpha+1} + (1 - \sigma^\alpha)(\sigma + \tau) + \frac{1}{\alpha+1}(\sigma + \tau)^{\alpha+1} \\ &\quad + (1 - \sigma^\alpha + (\sigma + \tau)^\alpha)(1 + \sigma^{\alpha-1}\tau + o(\tau)) - \frac{1}{\alpha+1}(1 + \sigma^{\alpha-1}\tau)^{\alpha+1} + o(\tau) \\ &= (1 + \alpha\sigma^{\alpha-1})\tau + o(\tau). \end{aligned} \quad (34)$$

Функция $x_\tau(t)$ монотонно убывает к нулю на интервале (s, T) , поэтому на всем этом интервале она имеет порядок $K\tau$, причем константа K не зависит от t . Далее,

$$y_\tau(\theta) = [1 + \sigma^\alpha(-1 + (1 + \tau/\sigma)^\alpha)] - [1 + A\sqrt{\tau} + \sigma^{\alpha-1}\tau]^\alpha = -\alpha A\sqrt{\tau},$$

следовательно, $T - \theta = |y|^{1/\alpha} = o(1)$. Следовательно, третий и четвертый интегралы будут величинами порядка $o(\tau)$. Остается оценить второй интеграл в формуле (33). Пренебрегая в процессе вычислений величинами $o(\tau)$, получаем

$$\begin{aligned} \Delta I &= \int_\tau^1 \left\{ -\frac{\alpha}{\alpha+1} + \tau + [1 + \alpha\sigma^{\alpha-1}\tau](t - \tau) - \frac{(t - \tau)^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right\}^2 dt \\ &\quad - \int_\tau^1 \left\{ -\frac{\alpha}{\alpha+1} + t - \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right\}^2 dt \\ &= -\frac{\alpha^2 + 2\alpha}{(\alpha+1)^2}\tau + o(\tau) < 0. \end{aligned}$$

Главная часть приращения оказалась отрицательной при любом значении параметра σ . Следовательно, траектория с конечным числом переключений неоптимальна, какова бы ни была ее предыстория.

Неравенства типа Колмогорова для дробных производных. Пусть I — полуось $[0, \infty)$. Обозначим через L_p пространство функций, суммируемых на I со степенью p , с нормой $\|x\|_p = \left(\int_I |x(t)|^p dt \right)^{1/p}$, через L_∞ — пространство существенно ограниченных на I функций с нормой $\|x\|_\infty$, равной существенному максимуму по множеству I .

ТЕОРЕМА 3. Пусть $x(\cdot)$ – функция, дифференцируемая на полуоси $[0, \infty)$, с гёльдеровой производной:

$$\dot{x} \in \Sigma_{[0, \infty)}(L; \alpha).$$

Тогда имеют место следующие неравенства

$$\|x\|_\infty \leq K_\alpha \|x\|_2^\mu L^\nu, \quad (35)$$

причем $K_\alpha = (S_\alpha)^{-(\alpha+1)/(2\alpha+3)}$, $\mu = \frac{2\alpha+2}{2\alpha+3}$, $\nu = \frac{1}{2\alpha+3}$, где S_α – значение функционала

$$S_\alpha = \inf_I \int_I x^2(t) dt \quad (36)$$

при условиях $x(0) = 1$, $\dot{x}(\cdot) \in \Sigma_{[0, \infty)}(1; \alpha)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Константы μ , ν находятся стандартным образом с помощью масштабных преобразований по осям x и t .

Очевидно, что точная константа в неравенстве (35) определяется решением задачи

$$\begin{aligned} \|x\|_\infty &\rightarrow \sup \\ \text{при условиях } \|x\|_2 &\leq a, \quad \dot{x}(\cdot) \in \Sigma_{[0, \infty)}(L; \alpha). \end{aligned} \quad (37)$$

Проведем рассуждения, которые сводят решение задачи (37) к более простому виду.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Пусть S_α – минимальное значение функционала

$$\int_0^\infty x^2 dt \quad \text{при ограничениях } x(0) = 1, \quad \dot{x}(\cdot) \in \Sigma_{[0, \infty)}(1; \alpha).$$

Тогда $K_\alpha = (S_\alpha)^{-(\alpha+1)/(2\alpha+3)}$.

Докажем сначала следующую лемму.

ЛЕММА 5. Пусть $x^*(\cdot)$ – решение задачи (37). Максимум функции $x^*(t)$ достигается при $t = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу утверждения 2 применение преобразования g_λ при $\lambda > 1$ оставляет $x^*(\cdot)$ в классе гёльдеровых функций с той же константой, увеличивает $\|x^*\|_\infty$ в $\lambda^{\alpha+1}$ раз и увеличивает $\|x^*\|_2$ в $\lambda^{2\alpha+3}$ раза. Поэтому решение задачи (37) не может достигаться на функции, для которой $\|x^*\|_2 < a$, так как в противном случае значение функционала можно было бы увеличить.

Предположим теперь, что максимум функции $x^*(t)$ не достигается при $t = 0$:

$$x^*(0) < \sup_{t \geq 0} |x^*(t)|.$$

Тогда существует такое $t_0 > 0$, что

$$\sup_{t \geq t_0} |x^*(t)| = \sup_{t \geq 0} |x^*(t)|.$$

Сужение области определения функции $x^*(\cdot)$ до $[t_0, \infty)$ с последующим переносом начала координат в точку t_0 не выводит из класса допустимых функций и, не меняя $\|x^*\|_\infty$, уменьшает $\|x^*\|_2$. Следовательно, решение задачи (37) достигается при $\|x^*\|_2 < a$, что, как было показано, невозможно.

В силу леммы 5 задача (37) эквивалентна задаче

$$\begin{aligned} x(0) &\rightarrow \sup \\ \text{при условиях } \|x\|_2 &\leq a, \quad \dot{x}(\cdot) \in \Sigma_{[0, \infty)}(L; \alpha). \end{aligned} \quad (38)$$

Рассмотрим двойственную задачу

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^2 dt &\rightarrow \inf \\ \text{при условиях } x(0) &= c, \quad \dot{x}(\cdot) \in \Sigma_{[0, \infty)}(L; \alpha). \end{aligned} \quad (39)$$

Если функция x^* дает решение задачи (39) и значение функционала при этом равно A , то та же функция x^* дает решение задачи (38), отвечающей значению $a = \sqrt{A}$, и при этом функционал принимает значение $x(0) = c$. Очевидно, что справедливо и обратное.

Пусть функция $w(t)$ допустима в задаче (39), т.е.

$$w(0) = c, \quad \dot{w}(\cdot) \in \Sigma_{[0, \infty)}(L; \alpha).$$

Рассмотрим функцию $x(t) = \frac{1}{c}w(c^{1/(\alpha+1)}L^{-1/(\alpha+1)}t)$. Легко проверить, что $x(0) = 1, \dot{x}(\cdot) \in \Sigma_{[0, \infty)}(1; \alpha)$, т.е. $x(\cdot)$ допустима в задаче

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^2 dt &\rightarrow \inf \\ \text{при условиях } x(0) &= 1, \quad \dot{x}(\cdot) \in \Sigma_{[0, \infty)}(1; \alpha). \end{aligned} \quad (40)$$

Если S_α – оптимальное значение функционала (40), которое достигается на функции x^* , то $w(\tau) = cx^*(c^{-1/(\alpha+1)}L^{1/(\alpha+1)}\tau)$ – решение задачи (39). При этом оптимальное значение функционала (39) равно

$$\int_0^\infty w^2 d\tau = c^2 \int_0^\infty x^2(c^{-1/(\alpha+1)}L^{1/(\alpha+1)}\tau) d\tau = c^{2+1/(\alpha+1)}L^{-1/(\alpha+1)}S_{\alpha+1}.$$

Следовательно, в силу двойственности $w(t)$ есть решение задачи (38) с условиями

$$\dot{w}(\cdot) \in \Sigma_{[0, \infty)}(L; \alpha), \quad \|w\|_2^2 \leq c^{2+1/(\alpha+1)}L^{-1/(\alpha+1)}S_\alpha.$$

Оптимальное значение функционала в задаче (37) равно c . При этих значениях неравенство (35) превращается в равенство

$$c = K_\alpha \left(\sqrt{c^{\frac{2\alpha+3}{\alpha+1}} L^{-\frac{1}{\alpha+1}} S_\alpha} \right)^{\frac{2\alpha+2}{2\alpha+3}} L^{\frac{1}{2\alpha+3}},$$

из которого следует

$$K_\alpha = (S_\alpha)^{-\frac{\alpha+1}{2\alpha+3}}. \quad (41)$$

Точное значение констант K_α в неравенствах (35) можно найти с любой степенью точности с помощью алгоритма выбора конечной последовательности переключений, предложенного в работе Зеликина и Зеликиной [10].

Список литературы

1. *Leonov S. L.* On the solution of an optimal recovery problem and its applications in nonparametric regression // Math. Methods Statist. 1997. V. 6. № 4. P. 476–490.
2. *Korostelev A. P.* Exact asymptotically minimax estimator for nonparametric regression in the uniform norm // Theory Probab. Appl. 1993. V. 38. P. 875–882.
3. *Korostelev A. P., Nessbaum M.* Density estimation in the uniform norm and white noise approximation // Preprint 153. Berlin: Weierstrass-Institute Angew. Anal. Stoch., 1995.
4. *Lepski O. V., Spokoiny V. G.* Optimal pointwise adaptive methods in nonparametric estimation // Disk. Paper 22, SFB 373. Berlin: Humboldt University, 1995. P. 229–252.
5. *Bahadur R. R.* On the asymptotic efficiency of tests and estimators // Sankhyā. 1960. V. 22. P. 229–252.
6. *Ibragimov I. A., Khasminskii R. Z.* Statistical estimation: asymptotic theory. New York: Springer-Verlag, 1981.
7. *Korostelev A. P., Leonov S. L.* Minimax Bahadur efficiency for small confidence levels // Probl. Inf. Transm. 1996. V. 32. P. 3–15.
8. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. М.: Мир, 1965.
9. *Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М.* О неравенстве Колмогорова для дробных производных на полупрямой // Anal. Math. 1981. V. 7. № 1. P. 37–47.
10. *Зеликин М. И., Зеликина Л. Ф.* Точные константы в неравенствах типа Колмогорова // Труды МИАН. 1999. Т. 227. С. 137–145.
11. *Zelikin M., Borisov V.* Theory of chattering control with applications to cosmonautics, robotics, economics, and engineering. Boston: Birkhäuser, 1994.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
19.06.2001