Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Б. Клейнер, Поливекторы ранга 2 над полями и коммутативными кольцами,
Матем. сб., 2002, том 193, номер 5, 77–94

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm652>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 07:28:40

УДК 512.552

Г. Б. Клейнер

Поливекторы ранга 2 над полями и коммутативными кольцами

В работе изучается следующий вопрос: когда однородный элемент грассмановой алгебры представим в виде суммы двух разложимых элементов? Для внешней алгебры *над полем* получены необходимые и достаточные условия такого представления, *над произвольным целостным кольцом* – ряд необходимых условий, а *над кольцами Крулля* – также и ряд достаточных условий. В частности, установлено, что единственными кольцами, над которыми проверка 2-разложимости проводится так же, как над полями, являются поля, т.е. “2-плюккерových” колец не существует.

Библиография: 11 названий.

§ 1. Введение

Пусть A – коммутативное кольцо с единицей, A^n – свободный A -модуль ранга n с базисом $e_1, \dots, e_n$ и $\Lambda^m(A^n)$ – его внешняя степень. Совокупность внешних произведений $\{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_m}\}$, $1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n$, базисных элементов модуля A^n образует базис свободного A -модуля $\Lambda^m(A^n)$, поэтому всякий m -вектор $\omega \in \Lambda^m(A^n)$ однозначно представим в виде

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n} a_{i_1 \dots i_m} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_m}, \quad (1)$$

где $a_{i_1 \dots i_m} \in A$.

Во многих случаях, однако, удобнее записывать ω не в виде линейной комбинации элементов индуцированного базиса $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_m}$ (такое представление, конечно, зависит от выбора базиса $e_1, \dots, e_n$ в A^n), а в виде суммы наименьшего числа произвольных разложимых m -векторов

$$\omega = x_1^1 \wedge \dots \wedge x_m^1 + \dots + x_1^k \wedge \dots \wedge x_m^k. \quad (2)$$

Это представление (оно называется *минимальным разложением поливектора*, а число слагаемых k – его *рангом*) позволяет вычислить ряд важных инвариантов m -вектора, в частности найти размерность наименьшего подпространства (в случае, когда A – поле), m -я степень которого содержит данный поливектор.

Настоящая работа посвящена вопросам вычисления ранга и минимального разложения поливекторов, в основном над полями и кольцами Крулля.

Первые результаты, касающиеся определения ранга m -векторов, принадлежат Плюккеру [1] и Сегре [2]. Они доказали, что в случае поля необходимым и достаточным условием разложимости m -вектора $\omega \in \Lambda^m(A^n)$ является выполнение так называемых соотношений Плюккера

$$\sum_{s=0}^m (-1)^s a_{i_1 \dots i_{m-1} j_s} a_{j_0 \dots j_{s-1} j_{s+1} \dots j_m} = 0, \quad 1 \leq i_1, \dots, i_{m-1}, j_0, \dots, j_m \leq n, \quad (3)$$

между его координатами. Найти аналогичные соотношения, выделяющие класс m -векторов ранга не больше k при $k > 1$, удавалось лишь для $m = 2$ [3]. В 1973 г. Буземан и Глазго доказали [4], что если $A = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, то множество m -векторов ранга $\leq k$ при $k > 1$, $m > 2$ не является ни алгебраическим, ни даже замкнутым множеством, следовательно, аналога соотношений Плюккера в этом случае нет. Известно, однако, что соотношения (3) эквивалентны условию (см. [5])

$$\text{rank } B_0(\omega) = m, \quad (4)$$

где $B_0(\omega) = \{x \in A^n : x \wedge \omega = 0\}$.

Поэтому естественно пытаться охарактеризовать класс k -разложимых m -векторов при $k > 1$ с помощью аналогичных (4) условий на некоторые связанные с m -вектором и в принципе вычислимые модули.

Для $k = 2$ и произвольного m соответствующий результат анонсирован автором [6]. Именно пусть $E_1(\omega)$ — подпространство, порожденное теми $x \in A^n$, для которых $\text{rank}(x \wedge \omega) \leq 1$. Тогда для 2-разложимости ω необходимо и достаточно, чтобы

$$\dim B_0(\omega) + \dim E_1(\omega) = 2m. \quad (5)$$

При $k > 2$, $m > 2$ вопрос об условиях, необходимых и достаточных для k -разложимости m -вектора, остается открытым даже в случае полей.

Пусть теперь A — целостное коммутативное кольцо. Естественное вложение $A \subset \text{Fr}(A)$ кольца A в его поле частных позволяет рассматривать всякий m -вектор $\omega \in \Lambda^m(A^n)$ как элемент $\Lambda^m(\text{Fr}(A)^n)$; при этом, очевидно, разложимый над A m -вектор разложим и над $\text{Fr}(A)$. Следовательно, соотношения Плюккера (и эквивалентное им условие (4)), а также равенство (5) являются необходимыми условиями соответственно для 1- и 2-разложимости.

Таубер [7] рассматривал кольца, в которых соотношения Плюккера являются также и достаточными для разложимости (эти кольца получили название плюккерových). Было доказано, что такими являются одно- и двумерные локальные кольца, дедекиндовы кольца и кольцо многочленов от одной переменной над дедекиндовым кольцом. Среди ненётеровых плюккерových колец можно назвать кольца Безу.

Таким образом, существует широкий класс колец, для которых проверка 1-разложимости поливектора проводится так же, как и в полях (например, с помощью соотношений (3) или (4)). В настоящей работе доказывается теорема 4.1, согласно

которой эта ситуация не продолжается на случай 2-разложимости: единственными кольцами, в которых множество 2-разложимых m -векторов над кольцом совпадает с множеством 2-разложимых m -векторов над полем частных (“2-плюккеровы кольца”), являются поля. Поэтому при $k = 2$ особый интерес представляют условия “индивидуальной” k -разложимости m -векторов над кольцом, специфические для данного класса колец и дополняющие необходимые условия 2-разложимости (5).

Для $k = 1$ в этом направлении известны следующие результаты.

ТЕОРЕМА 1.1 [8]. Пусть A – коммутативное кольцо, $\omega \in \Lambda^m(A^n)$ – m -вектор. Если $B_0(\omega)$ – свободный модуль ранга m , то $\text{rank } \omega = 1$.

Поливектор ω называется *примитивным*, если дивизор идеала, порожденный его координатами, равен 1.

ТЕОРЕМА 1.2 [9]. Пусть A – кольцо Крулля, ω – примитивный m -вектор. Для того чтобы $\text{rank } \omega = 1$, необходимо и достаточно, чтобы $B_0(\omega)$ был свободным A -модулем ранга m .

В настоящей работе получены аналогичные результаты (теоремы 5.1 и 5.2) для $k = 2$.

Работа состоит из пяти параграфов.

В §2 исследуется множество $B_1(\omega) = \{x \in A^n : \text{rank}(x \wedge \omega) \leq 1\}$ для m -векторов ранга 2 и устанавливается его связь с подпространствами, порожденными векторами минимального разложения ω . Этот результат используется в §3 для вывода теоремы единственности минимального разложения m -векторов ранга 2. Параграф 4 содержит полное доказательство необходимого и достаточного условия (5) 2-разложимости поливекторов вида $\omega = x_1 \wedge \dots \wedge x_{m-2} \wedge \omega'$, где $x_i \in A$, $\omega' \in \Lambda^2(A^n)$, над плюккеровыми кольцами. Здесь же доказывается теорема несуществования 2-плюккеровых колец. Параграф 5 посвящен доказательству условий 2-разложимости m -векторов, не представимых в виде $\omega = x_1 \wedge \dots \wedge x_{m-2} \wedge \omega'$, где ω' – 2-вектор, над кольцами Крулля.

Фиксируем следующие обозначения: A – целостное коммутативное кольцо; $\text{Fr}(A)$ – его поле частных; A^n – свободный A -модуль ранга n с образующими $e_1, \dots, e_n$; M – подмодуль в A^n ; $\Lambda^m(M)$ – образ в $\Lambda^m(A^n)$ m -й внешней степени модуля M при отображении $\Lambda^m \varepsilon$, где ε – вложение M в A^n ; ω – m -вектор из $\Lambda^m(A^n)$; $\hat{x}$ – внешнее произведение элементов $x_1, \dots, x_n \in A^n$; X – порожденный ими подмодуль; $\{a_1, \dots, a_n\}$ – множество, состоящее из элементов $a_1, \dots, a_n$; $B_0(\omega) = \{x \in A^n : x \wedge \omega = 0\}$; $b_0(\omega) = \text{rank } B_0(\omega)$; $B_1(\omega) = \{x \in A^n : x \wedge \omega \text{ – плюккеров } (m+1)\text{-вектор}\}$; $b_1(\omega) = \text{rank } B_1(\omega)$; $E_0(\omega) = B_0(\omega)$; $E_1(\omega)$ – подмодуль в A^n , порожденный множеством $B_1(\omega)$; $\omega_1 \parallel \omega_2$ – существует ненулевой элемент $\alpha \in \text{Fr}(A)$, для которого $\alpha \omega_1 = \omega_2$ ($\omega_1, \omega_2 \in \Lambda^m(A^n)$); $\text{Supp } \omega = \inf\{M \text{ – подмодуль в } A^n : \omega \in \Lambda^m(M)\}$; $\widetilde{M} = \inf\{M' \text{ – подмодуль в } A^n : M \subset M', A^n/M' \text{ не имеет кручения}\}$; $\text{div } \omega$ – дивизор идеала, порожденного координатами ω .

§ 2. Строеение множества $B_1(\omega)$

ЛЕММА 2.1 [10; теорема 4]. Пусть A – поле, $\omega \in \Lambda^m(A^n)$ – m -вектор ранга k , $\omega = \hat{x}_1 + \dots + \hat{x}_k$. Тогда $B_0(\omega) = X_1 \cap \dots \cap X_k$.

Другими словами, всякий m -вектор ω с $b_0(\omega) \neq 0$ представим в виде $\omega = b \wedge \omega'$, где b – произведение всех векторов какого-то базиса пространства $B_0(\omega)$, а $\omega' = (m - b_0(\omega))$ -вектор того же ранга, что и ω , причем $b_0(\omega') = 0$.

Если A – поле, $\omega \in \Lambda^m(A^n)$, то носитель m -вектора ω ($\text{Supp } \omega$), очевидно, существует и единственен.

ЛЕММА 2.2 [6; лемма 1]. Пусть A – поле, $\omega \in \Lambda^m(A^n)$ – m -вектор ранга k , $\omega = \hat{x}_1 + \dots + \hat{x}_k$. Тогда $\text{Supp } \omega = X_1 + \dots + X_k = E_{k-1}(\omega)$.

Отсюда следует

ЛЕММА 2.3. Пусть A – поле, $\omega \in \Lambda^m(A^n)$, $y_1, \dots, y_s$ – линейно независимые векторы из A^n , причем порожденное ими подпространство Y имеет нулевое пересечение с $\text{Supp } \omega$. Тогда $\text{rank}(y_1 \wedge \dots \wedge y_s \wedge \omega) = \text{rank } \omega$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть A – поле, $\omega \in \Lambda^m(A^n)$ – m -вектор ранга 2, $\omega = \hat{x}_1 + \hat{x}_2$. Тогда если $b_0(\omega) = m - 2$, то $B_1(\omega) = X_1 + X_2$, в противном случае $B_1(\omega) = X_1 \cup X_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\text{rank } \omega = 2$. По лемме 1.1 можно считать

$$\omega = w_1 \wedge \dots \wedge w_{b_0} \wedge (v_1^1 \wedge \dots \wedge v_{m-b_0}^1 + v_1^2 \wedge \dots \wedge v_{m-b_0}^2),$$

где векторы w_i, v_j^1, v_k^2 линейно независимы в совокупности.

Пусть $z \in B_1(\omega)$. Так как $B_1(\omega) \subset \text{Supp } \omega = X_1 + X_2$, то $z = z_\omega + z_1 + z_2$, где z_ω лежит в линейном пространстве $B_0(\omega)$ с базисом $\{w_i\}$, а $z_j, j = 1, 2$, лежит в линейном пространстве, порожденном $\{v_k^j\}$. Имеем:

$$z_\omega = \pm \hat{w} \wedge (z_1 \wedge \hat{v}^1 + z_2 \wedge \hat{v}^2).$$

Поскольку этот поливектор должен иметь единичный ранг, то единичный ранг должен иметь и вектор $z_1 \wedge \hat{v}^1 + z_2 \wedge \hat{v}^2$, откуда получаем равенство

$$B_1(\omega) = Aw \oplus B_1(\hat{v}^1 + \hat{v}^2).$$

Теперь вопрос сводится к изучению векторов ω вида $\omega = \hat{v}^1 + \hat{v}^2$, т.е. к случаю $b_0 = 0$. Достаточно доказать, что для такого ω

$$B_1(\omega) = \begin{cases} Av^1 + Av^2, & m = 2, \\ Av^1 \cup Av^2, & m \neq 2. \end{cases}$$

При $m = 0, 1$ поливектор ω нулевой или плюккеров, и утверждение очевидно.

Пусть $m \geq 2$. Легко проверить непосредственно, что $X_1 \cup X_2 \subset B_0(\omega)$. Предположим, что z — произвольный вектор из $X_1 + X_2$, не лежащий в $X_1 \cup X_2$. С точностью до замены базиса в пространствах X_1 и X_2 можно считать $z_1 = v_1^1$ и $z_2 = v_1^2$. Тогда при $m = 2$ получаем:

$$z \wedge \omega = z_1 \wedge \hat{v}^1 + z_2 \wedge \hat{v}^2 = v_1^1 \wedge v_1^2 \wedge v_2^2 - v_1^1 \wedge v_1^2 \wedge v_2^1 = v_1^1 \wedge v_1^2 \wedge (v_2^2 - v_2^1),$$

т.е. $X_1 + X_2 \subset B_0(\omega)$. Если же $m > 2$, то

$$z \wedge \omega = v_1^1 \wedge v_1^2 \wedge (v_2^2 \wedge \cdots \wedge v_m^2 - v_2^1 \wedge \cdots \wedge v_m^1),$$

т.е. $z \wedge \omega$ — не плюккеров вектор.

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим один из пунктов доказательства: если $\text{rank } \omega = 2$, то $b_0(\omega) \leq m - 2$.

Пусть теперь A — произвольное коммутативное кольцо, $\omega \in \Lambda^m(A^n)$. В этом случае множество $c_1(\omega) = \{x \in A^n : x \wedge \omega \text{ — разложимый } (m+1)\text{-вектор}\}$ не совпадает, вообще говоря, с множеством $B_1(\omega) = \{x \in A^n : x \wedge \omega \text{ — плюккеров } (m+1)\text{-вектор}\}$. Однако если $b_0(\omega) < m - 2$, то эти множества одинаковы.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Пусть A — коммутативное кольцо, $\omega \in \Lambda^m(A^n)$ — m -вектор ранга 2, причем $b_0(\omega) < m - 2$. Тогда $B_1(\omega) = c_1(\omega) = \tilde{X}_1 \cap \tilde{X}_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим ω как вектор над $\text{Fr}(A)$ и обозначим через $\text{rank}_{\text{Fr}} \omega$ его ранг как элемента $\Lambda^m(\text{Fr}(A)^n)$. Пусть $B_1^{\text{Fr}}(\omega) = \{x \in A^n : x \wedge \omega \text{ — плюккеров } (m+1)\text{-вектор в } \Lambda^{m+1}(\text{Fr}(A)^n)\}$. Тогда $B_1(\omega) = B_1^{\text{Fr}}(\omega) \cap A^n$. Если $\text{rank}_{\text{Fr}} \omega = 1$, то $b_0(\omega) = m$, что противоречит условию. Следовательно, $\text{rank}_{\text{Fr}} \omega = 2$. В силу предложения 2.1 $B_1^{\text{Fr}}(\omega) = \text{Fr } X_1 \cup \text{Fr } X_2$, где $\text{Fr } X_i$ — подпространство, порожденное в $\text{Fr}(A)^n$ векторами разложения $\hat{x}_i$, $i = 1, 2$. Значит, $B_1(\omega) = B_1^{\text{Fr}}(\omega) \cap A^n = (\text{Fr } X_1 \cap A^n) \cup (\text{Fr } X_2 \cap A^n) = \tilde{X}_1 \cup \tilde{X}_2$.

Далее, $c_1(\omega)$ всегда лежит в $B_1(\omega)$. Пусть $x \in B_1(\omega)$. Тогда $x \in \tilde{X}_1 \cup \tilde{X}_2$; предположим, что $x \in \tilde{X}_1$. Тогда $x = y/a$, где $y \in X_1$, $a \in A$, $a \neq 0$. Теперь $x \wedge \omega = x \wedge \hat{x}_2$ — разложимый $(m+1)$ -вектор. Таким образом, $B_1(\omega) \subset c_1(\omega)$ и, следовательно, $B_1(\omega) = c_1(\omega) = \tilde{X}_1 \cup \tilde{X}_2$.

§ 3. Единственность минимального разложения m -векторов ранга 2

Пусть ω — m -вектор ранга k над коммутативным кольцом. Скажем, что минимальное разложение ω единственно, если из равенств

$$\omega = \hat{x}_1 + \cdots + \hat{x}_k = \hat{y}_1 + \cdots + \hat{y}_k,$$

где $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_k, \hat{y}_1, \dots, \hat{y}_k$ — разложимые m -векторы, вытекает, что $\hat{y}_{\pi(i)} = \hat{x}_i$, $i = 1, \dots, k$, для некоторой перестановки π на множестве $\{1, 2, \dots, k\}$.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть A — поле, $\omega \in \Lambda^m(A^n)$ — m -вектор ранга 2. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (а) $b_0(\omega) \neq m - 2$;
- (б) минимальное разложение поливектора ω единственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как следует из леммы 2.1, всякое минимальное разложение имеет вид $\omega = \hat{w}_0 \wedge (\hat{w}_1 + \hat{w}_2)$, где $\hat{w}_0$ — произведение каких-то базисных векторов пространства $B_0(\omega)$, а все компоненты поливекторов $\hat{w}_1, \hat{w}_2$ линейно независимы и не лежат в $B_0(\omega)$. Поскольку $\hat{w}_0$ определяется однозначно с точностью до скалярного множителя, достаточно доказывать единственность (или не единственность) второго сомножителя, т.е. рассматривать случай вектора ω , для которого $b_0(\omega) = 0$.

Пусть $m = 2$. Тогда $\omega = w_1^1 \wedge w_2^1 + w_1^2 \wedge w_2^2 = w_1^1 \wedge (w_2^1 + w_2^2) + (w_1^2 - w_1^1) \wedge w_2^2$. Из линейной независимости компонент поливекторов $\hat{w}_1, \hat{w}_2$ получаем, что разложение неединственно.

Пусть теперь $m > 2$. Предположим, что $\omega = \hat{w}_1 + \hat{w}_2 = \hat{v}_1 + \hat{v}_2$. Имеем:

$$0 = B_0(\omega) = \text{Supp } \hat{w}_1 \cap \text{Supp } \hat{w}_2 = \text{Supp } \hat{v}_1 \cap \text{Supp } \hat{v}_2,$$

но по предложению 1.1

$$B_1(\omega) = \text{Supp } \hat{w}_1 \cup \text{Supp } \hat{w}_2 = \text{Supp } \hat{v}_1 \cup \text{Supp } \hat{v}_2,$$

откуда с точностью до перестановки слагаемых получаем, что $\hat{v}_1 = \alpha \hat{w}_1, \hat{v}_2 = \beta \hat{w}_2$, где $\alpha, \beta \in A$. Из линейной независимости поливекторов $\hat{w}_1, \hat{w}_2$ получаем, что $\alpha = \beta = 1$.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Пусть A — произвольное коммутативное целостное кольцо, $\omega \in \Lambda^m(A^n)$ — m -вектор ранга 2. Если $b_0(\omega) \neq m - 2$, то минимальное разложение ω единственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\omega = \hat{x}_1 + \hat{x}_2 = \hat{y}_1 + \hat{y}_2$, где $\hat{x}_i, \hat{y}_i$ — разложимые m -векторы, $i = 1, 2$. Вложив $\Lambda^m(A^n)$ в $\Lambda^m(\text{Gr}^n)$, получим два разложения m -вектора над полем $\text{Gr}(A)$. Применяя теорему 3.1 и учитывая, что ранг $B_0(\omega)$ равен размерности пространства $\{x \in \text{Gr}^n : x \wedge \omega = 0\}$, заключаем, что эти разложения совпадают в $\Lambda^m(\text{Gr}^n)$, а следовательно, и в $\Lambda^m(A^n)$.

ЛЕММА 3.1. Пусть P_1, P_2, Q_1, Q_2 — группы, причем ни одно из множеств P_1, P_2 и Q_1, Q_2 не лежит в другом. Если $P_1 \cup P_2 = Q_1 \cup Q_2$, то $P_i = Q_{\pi(i)}$ для некоторой перестановки π на множестве $\{1, 2\}$.

Из предложения 2.1 и теоремы 3.1 видно, что множества $B_0(\omega)$ и $B_1(\omega)$ несут довольно полную информацию о минимальном разложении m -вектора ω ранга 2. Точная формулировка соответствующего результата такова.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть A — коммутативное кольцо, $\omega = \hat{x}_1 + \hat{x}_2, \omega' = \hat{x}'_1 + \hat{x}'_2$ — m -векторы ранга 2, причем $\text{rank } B_0(\omega) < m - 2$. Следующие условия эквивалентны:

- (а) $\hat{x}_i \parallel \hat{x}'_{\pi(i)}$, где π — некоторая перестановка на множестве $\{1, 2\}$;
- (б) $B_1(\omega) = B_1(\omega')$;
- (в) $B_0(\omega) = B_0(\omega'), B_1(\omega) = B_1(\omega')$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) $\Rightarrow$ (б). Если $\hat{x}_i \parallel \hat{x}'_{\pi(i)}$, то $\tilde{X}_i = \tilde{X}'_{\pi(i)}$, $i = 1, 2$. Поэтому $B_0(\omega) = \tilde{X}_1 \cap \tilde{X}_2 = \tilde{X}'_1 \cap \tilde{X}'_2 = B_0(\omega')$ (лемма 2.1), $B_1(\omega) = \tilde{X}_1 \cup \tilde{X}_2 = \tilde{X}'_1 \cup \tilde{X}'_2 = B_1(\omega')$ (следствие 2.1).

(б) $\Rightarrow$ (а). $B_1(\omega) = \tilde{X}_1 \cup \tilde{X}_2 = B_1(\omega') = \tilde{X}'_1 \cup \tilde{X}'_2$. Так как $\text{rank } \tilde{X}_i = \text{rank } \tilde{X}'_i = m$, $i = 1, 2$, то из включения $\tilde{X}_1 \subset \tilde{X}_2$ (или из включения $\tilde{X}'_1 \subset \tilde{X}'_2$) следовало бы, что $\tilde{X}_1 = \tilde{X}_2$ (соответственно $\tilde{X}'_1 = \tilde{X}'_2$). В свою очередь, это означает, что $\hat{x}_1 \parallel \hat{x}_2$ (или $\hat{x}'_1 \parallel \hat{x}'_2$). Но тогда $\text{rank } B_0(\omega) = \text{rank } B_0(\omega') = m$, что противоречит условию. Следовательно, к модулям $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \tilde{X}'_1, \tilde{X}'_2$ применима лемма 3.1, в силу которой $\tilde{X}_i = \tilde{X}'_{\pi(i)}$ для некоторой перестановки π на множестве $\{1, 2\}$. Отсюда $\hat{x}_i \parallel \hat{x}'_{\pi(i)}$ для $i = \{1, 2\}$.

(в) $\Rightarrow$ (б). Очевидно.

(а) $\Rightarrow$ (в). Если $\hat{x}_i \parallel \hat{x}'_{\pi(i)}$ для некоторой перестановки π , то $\tilde{X}_i = \tilde{X}'_{\pi(i)}$, $i = \{1, 2\}$. Поэтому $B_0(\omega) = \tilde{X}_1 \cap \tilde{X}_2 = \tilde{X}'_1 \cap \tilde{X}'_2 = B_0(\omega')$, $B_1(\omega) = \tilde{X}_1 \cup \tilde{X}_2 = \tilde{X}'_1 \cup \tilde{X}'_2 = B_1(\omega')$.

§ 4. Поливекторы ранга 2 над полем.

“2-плюккерových” колец не существует

В этом параграфе полностью решается вопрос о необходимых и достаточных условиях 2-разложимости произвольного m -вектора $\omega \in \Lambda^m(A^n)$, где A – поле, и доказывается, что единственными кольцами, в которых $\text{rank}_{\text{Fr}} \omega = \text{rank } \omega$, являются поля.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть A – коммутативное кольцо. Следующие условия эквивалентны:

- (а) кольцо A является полем;
- (б) необходимым и достаточным условием 2-разложимости произвольного m -вектора $\omega \in \Lambda^m(A^n)$ является равенство $b_0(\omega) + b_1(\omega) = 2m$;
- (в) $\text{rank } \omega = \text{rank}_{\text{Fr}} \omega$ для любого m -вектора $\omega \in \Lambda^m(A^n)$, у которого $\text{rank}_{\text{Fr}} \omega = 2$;
- (г) $\text{rank } \omega = \text{rank}_{\text{Fr}} \omega$ для любого m -вектора $\omega \in \Lambda^m(A^n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) $\Rightarrow$ (б). Ввиду леммы 2.1 2-разложимость поливектора ω равносильна 2-разложимости фигурирующего в этой лемме поливектора ω' , а равенство $b_0(\omega) + b_1(\omega) = 2m$ равносильно равенству $b_1(\omega') = 2(m - b_0(\omega))$. Таким образом, достаточно доказать утверждение для поливектора ω' , т.е. ограничиться рассмотрением таких векторов ω , что $b_0(\omega) = 0$.

Если такой поливектор 2-разложим, то он представим в виде $\omega = \hat{x} + \hat{y}$, где $\text{Supp } \hat{x} \cap \text{Supp } \hat{y} = \emptyset$. Значит, $b_1(\omega) = \dim \text{Supp } \omega = 2m$.

Докажем обратное утверждение. Более того, мы докажем, что если $b_1(\omega) \geq 2m$, то $\text{rank } \omega \leq 2$.

По условию в пространстве $B_1(\omega)$ есть $2m$ линейно независимых векторов $e_1, \dots, e_{2m}$. Дополним эту систему до базиса $e_1, \dots, e_n$ пространства A^n и разложим ω по этому базису. Пусть $\omega = e_1 \wedge u + v$, где в разложении поливекторов u, v нет e_1 . Так как поливектор $\omega \wedge e_1 = v \wedge e_1$ разложим, то и v разложим, т.е. $v = \hat{y}$.

По крайней мере $m - 1$ векторов из $e_2, \dots, e_{2m}$ линейно независимы по модулю $\{e_1, y_1, \dots, y_m\}$. Пусть таковы $e_2, \dots, e_m$. Заменим базис пространства A^n , оставив неизменными первые m базисных векторов $e_1, \dots, e_m$, положив $e_{m+1} = y_1, \dots, e_{2m} = y_m$ и выбрав остальные базисные векторы произвольным образом. Пусть в новом базисе $u = e_j \wedge u' + u''$, где $2 \leq j \leq m$, и в разложение поливекторов u', u'' не входит e_j .

Так как поливектор $\omega \wedge e_j = e_1 \wedge u'' \wedge e_j + \hat{y} \wedge e_j$ разложим, то и поливектор $q = e_1 \wedge u'' + \hat{y}$ разложим, т.е. для его координат выполняются соотношения Плюккера вида (3), в том числе для всякого $2 \leq k \leq m$ выполняются все соотношения

$$a_{i_1, \dots, i_{m-1}, k} \cdot a_{m+1, \dots, 2m} + \sum_{s=1}^m a_{i_1, \dots, i_{m-1}, m+s} \cdot a_{k, m+1, \dots, \widehat{m+s}, \dots, 2m} = 0,$$

где $a_{i_1, \dots, i_m}$ — коэффициент в разложении q при $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_m}$, $i_1 < \dots < i_m$. Здесь во втором слагаемом все вторые сомножители нулевые (так как это коэффициенты при мономах, не зависящих от e_1 и не пропорциональных $\hat{y}$). Кроме того, коэффициент при мономе $\hat{y}$ единичен, $a_{m+1, \dots, 2m} = 1$. Следовательно, соотношение вырождается в равенство

$$a_{i_1, \dots, i_{m-1}, k} = 0$$

для любого набора $i_1, \dots, i_{m-1}$.

Таким образом, для всякого $2 \leq j \leq m$ мы получаем $u'' = 0$, т.е. $(m-1)$ -вектор u делится на каждый из $m-1$ векторов $e_2, \dots, e_m$. Значит, $e_1 \wedge u = \alpha e_1 \wedge \dots \wedge e_m$, $\alpha \in A$, и поливектор $\omega = e_1 \wedge u + \hat{y}$ 2-разложим.

(б) $\Rightarrow$ (в). Пусть ω — m -вектор и $\text{rank}_{\text{Fr}} \omega = 2$. Тогда из (б) следует, что $\dim B_0^{\text{Fr}}(\omega) + \dim B_1^{\text{Fr}}(\omega) = 2m$. Но $B_i(\omega) = B_i^{\text{Fr}}(\omega) \cap A^n$, поэтому $b_i(\omega) = \text{rank } B_i(\omega) = \dim B_i^{\text{Fr}}(\omega)$, $i = 1, 2$, так что $b_1(\omega) + b_0(\omega) = 2m$. По условию (б) этого достаточно для 2-разложимости ω . Следовательно, $\text{rank } \omega = \text{rank}_{\text{Fr}} \omega = 2$.

(в) $\Rightarrow$ (а). Предположим, что в A существует ненулевой необратимый элемент a . Рассмотрим следующий 3-вектор $\omega \in \Lambda^3(A^6)$:

$$\begin{aligned} \omega = & e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 + e_1 \wedge e_2 \wedge e_6 + ae_1 \wedge e_5 \wedge e_6 - e_1 \wedge e_3 \wedge e_5 \\ & + e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 - ae_2 \wedge e_4 \wedge e_6 + ae_3 \wedge e_4 \wedge e_5 + a^2 e_4 \wedge e_5 \wedge e_6. \end{aligned}$$

Покажем, что $\text{rank}_{\text{Fr}} \omega = 2$. Пусть $x_1 = a^{-1}e_1 + e_4$, $x_2 = e_2 + ae_5$, $x_3 = e_3 + ae_6$, $x_4 = (1 - a^{-1})e_1$, $x_5 = e_2$, $x_6 = e_3$. Тогда $x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 + x_4 \wedge x_5 \wedge x_6 = \omega$, где $x_i \in \text{Fr}^6$, значит, $\text{rank}_{\text{Fr}} \omega \leq 2$. Так как

$$x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge x_4 \wedge x_5 \wedge x_6 = -a^2(1 - a^{-1})e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \wedge e_5 \wedge e_6 \neq 0,$$

то $B_0(\omega) = 0$. Следовательно, $\text{rank}_{\text{Fr}} \omega = 2$. Отсюда по условию $\text{rank } \omega = 2$, т.е. $\omega = y_1 \wedge y_2 \wedge y_3 + y_4 \wedge y_5 \wedge y_6$, где $y_i \in A^6$. Поскольку ω не является произведением 2-вектора на разложимый поливектор, можно воспользоваться теоремой единственности 3.1, согласно которой $x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 = y_1 \wedge y_2 \wedge y_3$ (может быть, после перенумеровки $y_1, \dots, y_6$). Отсюда следует, что $a^{-1}e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \in \Lambda^3(A^6)$, что означает обратимость элемента $a \in A$.

(г) $\Rightarrow$ (в). Очевидно.

(а) $\Rightarrow$ (г). Очевидно, так как если A — поле, то $A = \text{Fr}(A)$.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Пусть A – поле, $\omega \in \Lambda^m(A^n)$ – ненулевой m -вектор, причем $b_0(\omega) < m - 2$. Для того чтобы $\text{rank} \omega$ был равен 2, необходимо и достаточно, чтобы $B_1(\omega) = M_1 \cup M_2, B_0(\omega) = M_1 \cap M_2$, где M_1, M_2 – m -мерные подпространства в A^n . Если эти условия выполнены, то $\omega = \hat{x}_1 + \hat{x}_2$, где $\hat{x}_i \in \Lambda^m(M_i), i = 1, 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\omega = \hat{x}_1 + \hat{x}_2$, где $\hat{x}_1, \hat{x}_2$ – разложимые m -векторы, то ввиду предложения 2.1 $B_1(\omega) = X_1 \cup X_2$, а в силу леммы 2.1 $B_0(\omega) = X_1 \cap X_2$. Обратно, если $B_1(\omega) = M_1 \cup M_2, B_0(\omega) = M_1 \cap M_2$, где M_1, M_2 – m -мерные подпространства в A^n , то

$$\dim E_1(\omega) = \dim(M_1 + M_2) = 2m - \dim(M_1 \cap M_2) = 2m - \dim B_0(\omega).$$

Достаточность теперь вытекает из теоремы 4.1.

Пусть $\omega = \hat{x}_1 + \hat{x}_2$. Рассмотрим m -вектор $\omega' = \hat{x}'_1 + \hat{x}'_2$, где $\hat{x}_i \in \Lambda^m(M_i)$. Так как $B_1(\omega') = X'_1 \cup X'_2$ (предложение 2.1), $B_0(\omega') = X'_1 \cap X'_2$ (лемма 2.1), где $X'_i = B_0(\hat{x}'_i) = M_i, i = 1, 2$, то $B_0(\omega') = B_0(\omega), B_1(\omega') = B_1(\omega)$, откуда в силу предложения 3.1 $\hat{x}_i \parallel \hat{x}'_i$. Таким образом, $\hat{x}'_i \in \Lambda^m(M_i), i = 1, 2$.

Как видно из доказанной теоремы, если $A \neq \text{Fr}(A)$, то необходимое условие $\text{rank}_{\text{Fr}} \omega = 2$ не является, вообще говоря, достаточным для 2-разложимости ω . Однако для 2-векторов над нётеровыми плюккеровыми кольцами это так [10]. Аналогичный результат имеет место и для m -векторов, являющихся произведением 2-вектора на разложимый.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Пусть A – кольцо главных идеалов, ω – m -вектор, для которого $b_0(\omega) = m - 2$. Тогда $\text{rank} \omega = 2$ в том и только том случае, когда $\text{rank}_{\text{Fr}} \omega = 2$.

ЛЕММА 4.1. Пусть A – плюккерово кольцо, $\omega \in \Lambda^m(A^n), x \in A^{n+p}, p > 0, x \notin A^n$. Тогда $\text{rank}(\omega \wedge x) = \text{rank} \omega$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, $\text{rank}(\omega \wedge x) \leq \text{rank} \omega$. Пусть

$$\omega \wedge x = x_1^1 \wedge \cdots \wedge x_k^1 + \cdots + x_1^l \wedge \cdots \wedge x_k^l$$

– минимальное разложение $(m+1)$ -вектора $\omega \wedge x \in \Lambda^m(A^n \oplus Ax)$. Пусть $x_j^i = y_j^i + a_j^i x$, где $y_j^i \in A^n, a_j^i \in A, i = 1, \dots, l, j = 1, \dots, m+1$. Тогда

$$\hat{x}_i = x_1^i \wedge \cdots \wedge x_{m+1}^i = y_1^i \wedge \cdots \wedge y_{m+1}^i + x \wedge \mu_i,$$

где μ_i – m -вектор из $\Lambda^m(Ay_1^i \oplus \cdots \oplus Ay_{m+1}^i), i = 1, \dots, l$. Все m -векторы над свободным модулем ранга $(m+1)$ в ОР-кольце разложимы [8], поэтому $\mu_i = \hat{\mu}_i, i = 1, \dots, l$. Теперь $\omega \wedge x = y_1^1 \wedge \cdots \wedge y_{m+1}^1 + \cdots + y_1^l \wedge \cdots \wedge y_{m+1}^l + x \wedge \sum_{i=1}^l \hat{\mu}_i$. Отсюда $(\omega \pm \sum_{i=1}^l \hat{\mu}_i) \wedge x = \hat{y}_1 + \cdots + \hat{y}_l \in \Lambda^m(A^n)$, что возможно лишь в случае $\omega = \pm \sum_{i=1}^l \hat{\mu}_i$. Значит, $\text{rank}(\omega \wedge x) \geq \text{rank} \omega$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 4.1. Так как $B_0(\omega)$ – замкнутый подмодуль в A^n , то существует базис $e_1, \dots, e_n$ модуля A^n , первые $m - 2$ вектора которого являются базисом для $B_0(\omega)$. Пусть

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_m}$$

и

$$\omega' = \sum_{m-1 \leq i_1 < i_2 \leq n} a_{1, \dots, m-2, i_1, i_2} e_{i_1} \wedge e_{i_2}.$$

Нетрудно проверить, что

$$\omega = e_1 \wedge \dots \wedge e_{m-2} \wedge \omega'.$$

Так как $\omega' \in \Lambda^m(Ae_{m-1} \oplus \dots \oplus Ae_n)$, то ввиду леммы 4.1

$$\text{rank } \omega = \text{rank}(e_1 \wedge \dots \wedge e_{m-2} \wedge \omega') = \text{rank } \omega'.$$

Воспользовавшись теоремой 2 из [10] о ранге 2-векторов над нётеровым плюккеровым кольцом, получаем требуемый результат.

Множество всех поливекторов над данным кольцом можно разбить на следующие четыре класса:

- 1) 2-векторы;
- 2) m -векторы с $m > 2$ и $b_0 = m - 2$;
- 3) m -векторы с $m > 2$ и $b_0 > m - 2$;
- 4) m -векторы с $m > 2$ и $b_0 < m - 2$.

Как видно из теоремы 2 из [10] и предложения 4.1, в случае плюккеровых колец вопрос о 2-разложимости поливекторов первых трех классов сводится в принципе к вопросу об их 2-разложимости над полем частных. Иначе обстоит дело с m -векторами ($m > 2$), у которых $b_0 < m - 2$. Исследованию условий 2-разложимости таких m -векторов посвящен § 5.

§ 5. Поливекторы ранга 2 над кольцом Крулля. Общий случай

Основными результатами этого параграфа являются предложение 5.1, содержащее достаточные условия 2-разложимости m -вектора ω с $b_0 < m - 2$, и теорема 5.2, в которой установлены необходимые и достаточные условия 2-разложимости для так называемых 2-примитивных m -векторов.

ЛЕММА 5.1. Пусть A – кольцо Крулля, M_1, M_2 – замкнутые подмодули свободного модуля A^n ранга m , причем ни один из них не лежит в другом. Если $M_1 + M_2$ замкнут в A^n , то $\widetilde{\Lambda^m(M_1) + \Lambda^m(M_2)} = \widetilde{\Lambda^m(M_1)} + \widetilde{\Lambda^m(M_2)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, $\widetilde{\Lambda^m(M_i)} \subset \widetilde{\Lambda^m(M_1) + \Lambda^m(M_2)}$. Покажем, что $\widetilde{\Lambda^m(M_1) + \Lambda^m(M_2)} \subset \widetilde{\Lambda^m(M_1)} + \widetilde{\Lambda^m(M_2)}$. Пусть $\omega \in \widetilde{\Lambda^m(M_1) + \Lambda^m(M_2)}$, т.е. $a\omega = \hat{x}_1 + \hat{x}_2$, где $\hat{x}_i \in \Lambda^m(M_i)$, $i = 1, 2$. Покажем, что $\hat{x}_i/a \in \Lambda^m(A^n)$. Для этого достаточно доказать, что $\operatorname{div} \hat{x}_i$ делится на a , причем можно ограничиться доказательством в локализации по простому идеалу p высоты 1. Будем считать, что вместо A рассматривается A_p и все модули локализованы по p . Так как M_1 и M_2 замкнуты, $M_1 \cap M_2$ тоже замкнут [8] и, следовательно, выделяется в M_2 прямым слагаемым. Пусть $M_2 = N \oplus (M_1 \cap M_2)$. Тогда $M_1 + M_2 = M_1 \oplus N$. Пусть $e_1, \dots, e_m$ – базис в M_1 и $f_1, \dots, f_t$ – базис в N . Тогда $\operatorname{div}(e_1 \wedge \dots \wedge e_m \wedge f_1 \wedge \dots \wedge f_t) = 1$. Очевидно, $\hat{x}_1 = a_1 \hat{e}$ ($a_1 \in A$), а $f_1 \wedge \dots \wedge f_t \wedge \hat{x}_2 = 0$, так как $f_i \in N \subset M_2$ и $f_1 \wedge \dots \wedge f_t \wedge \hat{x}_2 \in \Lambda^{m+t}(M_2) = 0$. Следовательно, $a\omega \wedge \hat{f} = \hat{x}_1 \wedge \hat{f} = a_1 \hat{e} \wedge \hat{f}$. Переходя к дивизорам, получаем, что $a \operatorname{div}(\omega \wedge \hat{f}) = a_1 \operatorname{div}(\hat{e} \wedge \hat{f}) = 1$. Следовательно, локально $\operatorname{div} \hat{x}_1 = a_1$ делится на a . Лемма доказана.

Пусть M – замкнутый подмодуль ранга m в свободном модуле A^n . Назовем модуль M *плюккеровым*, если всякий m -вектор ω , для которого $B_0(\omega) = M$, разложим. Кольцо A тогда и только тогда плюккерово, когда все замкнутые модули над ним плюккеровы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. Пусть A – кольцо Крулля, $\omega \in \Lambda^m(A^n)$, причем $b_0 \neq m - 2$. Предположим, что выполнены условия:

- (а) $B_1(\omega) = M_1 \cup M_2$, $B_0(\omega) = M_1 \cap M_2$, где $M_1 \neq M_2$ – плюккеровы модули ранга m ;
- (б) $E_1(\omega)$ – замкнутый модуль.

Тогда $\operatorname{rank} \omega = 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим ω как элемент $\Lambda^m(\operatorname{Gr}^n)$. Как уже отмечалось, $b_1(\omega) = \dim B_1^{\operatorname{Gr}}(\omega)$. Если $b_0(\omega) = m$, то $B_0(\omega) \subset M_1$ – замкнутые модули ранга m , поэтому $B_0(\omega) = M_1 \cap M_2 = M_1 = M_2$, что противоречит условию. Следовательно, $b_0(\omega) < m - 2$. Ввиду следствия 4.1 $\omega = \hat{x}_1 + \hat{x}_2$, где $\hat{x}_i \in \Lambda^m(\operatorname{Gr} M_i)$. Отсюда $\omega \in \widetilde{\Lambda^m(M_1) + \Lambda^m(M_2)}$. Так как ранги замкнутых модулей M_1 и M_2 равны, то ни один из них не лежит в другом. Кроме того, очевидно, $\widetilde{E_1(\omega)} = \widetilde{M_1 + M_2}$, значит, можно применить лемму 5.1. Таким образом, $\omega \in \widetilde{\Lambda^m(M_1) + \Lambda^m(M_2)}$, т.е. $\omega = \hat{y}_1/a + \hat{y}_2/a$, где $\hat{y}_i \in \Lambda^m(M_i)$, $\hat{y}_i/a \in \Lambda^m(A^n)$, $i = 1, 2$. Так как M_i – плюккеровы A -модули, то $\hat{y}_i/a = \hat{z}_i \in \Lambda^m(M_i)$, $i = 1, 2$. Следовательно, $\operatorname{rank} \omega = 2$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Условие (а) является также и необходимым (см. следствие 4.1). Условие (б) в общем случае необходимо тогда и только тогда, когда A – поле.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть A – кольцо Крулля, $\omega \in \Lambda^m(A^n)$, причем $b_0 \neq m - 2$. Если $B_1(\omega) = F_1 \cup F_2$, $B_0(\omega) = F_1 \cap F_2$, где $F_1 \neq F_2$ – свободные модули ранга m , а $E_1(\omega)$ – замкнутый модуль, то $\operatorname{rank} \omega = 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для того чтобы применить предложение 5.1, достаточно доказать, что модули F_1, F_2 плюккеровы. Очевидно, $B_1(\omega)$ – замкнутое подмножество в A^n , так как если $x \wedge \omega$ – плюккеров m -вектор и $x = ay$, где $y \in A^n$, то плюккеровым будет и $(m + 1)$ -вектор $y \wedge \omega \in \Lambda^{m+1}(A^n)$. Согласно [8; следствие

из предложения 1.1] наибольший общий дивизор всех элементов $\Lambda^m(F_i)$ равен 1. Так как $\Lambda^m(F_i) = Af_1^i \wedge \cdots \wedge f_m^i$, где $f_1^i, \dots, f_m^i$ — образующие модуля F_i , то $\operatorname{div}(f_1^i \wedge \cdots \wedge f_m^i) = 1, i = 1, 2$. Отсюда можно вывести, что $\Lambda^m(F_i)$ — замкнутый модуль. Следовательно, $\widetilde{\Lambda^m(F_i)} = \Lambda^m(F_i)$. Таким образом, F_1, F_2 — плюккеровы модули. Теперь утверждение теоремы вытекает из предложения 5.1.

СЛЕДСТВИЕ 5.1. Пусть A — плюккерово кольцо Крулля, $\omega \in \Lambda^m(A^n)$, причем $b_0(\omega) < m - 2$ и $\operatorname{rank}_{\text{Fr}} \omega = 2$. Если модуль $E_1(\omega)$ замкнут, то $\operatorname{rank} \omega = 2$.

Перейдем теперь к формулировке и доказательству критерия 2-разложимости для примитивных m -векторов над кольцом Крулля. Соответствующая теорема для 1-разложимых m -векторов доказана в [9].

Обращение к классу примитивных поливекторов при исследовании вопросов разложимости объясняется следующими причинами. Как известно, если A — поле, то условия разложимости $\omega \in \Lambda^m(A^n)$ выражаются в виде ограничений на размерность пространства $B_0(\omega)$. В случае произвольного коммутативного кольца условие разложимости m -вектора ω , сформулированные в терминах свойств замкнутого модуля $B_0(\omega)$, обеспечивают разложимость всех m -векторов $\omega' \in \Lambda^m(A^n)$, параллельных m -вектору ω . Если модуль $B_0(\omega)$ свободен или кольцо A факториально, то множество таких ω' имеет вид $A\omega_0$, где ω_0 — поливектор с единичным дивизором, у которого $B_0(\omega_0) = B_0(\omega)$. Так как из разложимости ω_0 следует разложимость всех $\omega \in \Lambda^m(A^n)$, для которых $B_0(\omega) = B_0(\omega_0)$, то вопрос о разложении ω сводится, таким образом, к вопросу о разложимости примитивного поливектора ω_0 .

В случае 2-разложимости можно ввести понятие примитивности таким образом, чтобы описанная ситуация в основном сохранилась. Условие примитивности (или, как мы будем в дальнейшем его называть, 1-примитивности) эквивалентно в кольце Крулля тому, что для любого простого дивизора p $\overline{\omega} \neq 0$ (через $\overline{\omega}$ обозначен образ ω в факторкольце A/p). Иными словами, ω 1-примитивен тогда и только тогда, когда не существует такого простого дивизора p , что $\operatorname{rank}_{\text{Fr}} \overline{\omega} = \operatorname{rank} \overline{\omega} = 0$.

Так как $\operatorname{rank} \omega = 1$ в том и только том случае, когда для координат ω выполнены соотношения Плюккера (3) $\Pi_\omega(i_1, \dots, i_{m-1} \mid j_0, \dots, j_m) = 0$, то для 2-примитивности ω необходимо и достаточно, чтобы дивизор идеала, порожденного левыми частями соотношений Плюккера, был равен 1. Это дает основание обозначить $\operatorname{div}_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_{m-1} \leq j_0 \leq \dots \leq j_m \leq n} \{\Pi_\omega(i_1, \dots, i_{m-1} \mid j_0, \dots, j_m)\}$ через $\operatorname{div}_2 \omega$; m -вектор ω 2-примитивен тогда и только тогда, когда $\operatorname{div}_2 \omega = 1$. Очевидно, $\operatorname{div} \omega = \operatorname{div}_1 \omega$ делит $\operatorname{div}_2 \omega$, поэтому 2-примитивный m -вектор является 1-примитивным.

Пусть, далее, p — некоторый простой дивизор. Рассмотрим факторкольцо $\overline{A} = A/p$, отображения $\varphi_p: A \rightarrow \overline{A}$ и $\varphi_p^n: A^n \rightarrow \overline{A}^n$. Пусть M — подмножество в A^n , $\overline{M}$ — его образ при отображении φ_p^n и $r(\overline{M})$ — ранг множества $\overline{M}$ относительно кольца $\overline{A}$, т.е. наибольшее число линейно независимых над $\overline{A}$ векторов из $\overline{M}$. Обозначим через $r_0(M)$ наименьшее из чисел $r(\varphi_p^n M)$ для различных простых дивизоров p .

В [8] были введены инварианты $d_i(M)$ подмодуля M свободного модуля — аналог элементарных делителей. По определению $d_i(M) = \operatorname{div} \Lambda^i(M)$, $i = 1, \dots, m =$

$\text{rank } M$. Покажем, что $r_0(M) = \max\{s \in \mathbb{Z} : d_s(M) = 1\}$. В самом деле, если $d_s(M) = 1$, то каков бы ни был простой дивизор p , существует разложимый элемент $x_1 \wedge \cdots \wedge x_s \in \Lambda^s(M)$, координаты которого не все кратны p . Следовательно, для любого дивизора p существуют линейно независимые элементы $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_s \in \bar{M}$. Отсюда $r(\bar{M}) \geq s$ и $r_0(M) \geq \max\{s \in \mathbb{Z} : d_s(M) = 1\}$. Если $d_s(M) \neq 1$, то существует простой дивизор p , делящий все элементы $\Lambda^s(M)$. Следовательно, $r_0(M) = \max\{s \in \mathbb{Z} : d_s(M) = 1\}$.

Заметим, что если M – замкнутый модуль, то $d_m(M) = 1$, так что $r_0(M) = \text{rank } M$. В случае, когда M рефлексивен, согласно [8; следствие 1] верно и обратное: если $r_0(M) = \text{rank } M$, то M – замкнутый модуль. Таким образом, разность $\text{rank } M - r_0(M)$ определяет меру замкнутости модуля M .

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть A – кольцо Крулля, ω – 2-примитивный m -вектор над A^n с $b_0(\omega) < m - 2$. Следующие условия эквивалентны:

- (а) $\text{rank } \omega = 2$;
- (б) ранг любого m -вектора $\omega' \in \Lambda^m(A^n)$ с $B_i(\omega') = B_i(\omega)$, $i = 1, 2$, равен 2;
- (в) $B_1(\omega) = F_1 \cup F_2$, $B_0(\omega) = F_1 \cap F_2$, где $F_1 \neq F_2$ – свободные подмодули ранга m в A^n , для которых $\Lambda^m(F_1) + \Lambda^m(F_2)$ – замкнутый подмодуль $\Lambda^m(A^n)$;
- (г) $B_1(\omega) = F_1 \cup F_2$, $B_0(\omega) = F_1 \cap F_2$, где $F_1 \neq F_2$ – свободные подмодули ранга m в A^n , и $r_0(E_1(\omega)) \neq m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) $\Rightarrow$ (в). Пусть $\omega = \hat{x}_1 + \hat{x}_2$, где $\hat{x}_i$ – разложимые m -векторы из $\Lambda^m(A^n)$, $i = 1, 2$. Покажем, что $\text{div } \hat{x}_i = 1$, $i = 1, 2$. В самом деле, предположим, что некоторый простой дивизор p делит $\text{div } \hat{x}_1$. Тогда $\omega \equiv \hat{x}_2$ по модулю p , т.е. $\bar{\omega}$ – плюккеров m -вектор над $\bar{A}^n$. Следовательно, его координаты удовлетворяют соотношениям Плюккера по модулю p , а дивизор идеала, порожденного левыми частями соотношений Плюккера, $\text{div } \Pi_\omega = \text{div}_2 \omega$ кратен p . Это, однако, противоречит 2-примитивности ω , так что $\text{div } \hat{x}_2 = 1$. Таким образом, 2-примитивный m -вектор ранга 2 является суммой двух 1-примитивных m -векторов $\hat{x}_1, \hat{x}_2$. В силу [9; теорема 1] отсюда следует, что $\tilde{X}_i = X_i$, $i = 1, 2$. Ввиду следствия 2.1 и леммы 2.1 $B_1(\omega) = X_1 \cup X_2$, $B_0(\omega) = X_1 \cap X_2$, где $X_1 \neq X_2$ – свободные модули ранга m .

Докажем, далее, что $\Lambda^m(X_1) + \Lambda^m(X_2)$ – замкнутый модуль. Пусть $a\mu = a_1\hat{x}_1 + a_2\hat{x}_2$, где $\mu \in \Lambda^m(A^n)$, $a, a_1, a_2 \in A$. Если a_2 не делится на a , то, умножив a, a_1, a_2 на некоторый элемент поля частных, можно считать, что существует простой дивизор p , делящий a и не делящий a_2 . По модулю этого дивизора $a_1\hat{x}_1 \equiv -a_2\hat{x}_2$. Отсюда $a_2\omega \equiv (1 - a_1)\hat{x}_1$, причем $a_2 \not\equiv 0$, что означает плюккерность m -вектора $\bar{\omega} \in \Lambda^m(\bar{A}^n)$. Следовательно, координаты $\bar{\omega}$ удовлетворяют соотношениям Плюккера, так что $\text{div } \Pi(\omega)$ кратен p . Это, однако, противоречит 2-примитивности ω , поэтому a_2 делится на a . По тем же причинам a_1 делится на a , значит, $\mu \in \Lambda^m(X_1) + \Lambda^m(X_2)$.

(в) $\Rightarrow$ (б). Пусть $\omega' \in \Lambda^m(A^n)$ и $B_1(\omega') = F_1 \cup F_2$, $B_0(\omega') = F_1 \cap F_2$, где F_1, F_2 – свободные модули ранга m . Поскольку $B_1(\omega')$ – замкнутое множество, F_1 и F_2 замкнуты. Так как $\dim B_i^{\text{Fr}}(\omega') = \text{rank } B_i(\omega')$, то по следствию 4.1 $\omega' = \hat{y}_1 + \hat{y}_2$,

где $\widehat{y}_i \in \Lambda^m(\text{Fr } F_i)$, $i = 1, 2$. Это означает, что $\omega' \in \Lambda^m(F_1) + \Lambda^m(F_2)$. Поскольку $\Lambda^m(F_1) + \Lambda^m(F_2)$ замкнут, $\omega' \in \Lambda^m(F_1) + \Lambda^m(F_2)$ и, следовательно, имеет ранг 2.

(б) $\Rightarrow$ (а). Очевидно.

(в) $\Leftrightarrow$ (г). Так как $E_1(\omega) = F_1 + F_2$, то для доказательства эквивалентности утверждений (в) и (г) достаточно проверить справедливость следующей леммы.

ЛЕММА 5.2. Пусть A – кольцо Крулля, F_1, F_2 – свободные замкнутые подмодули ранга m в A^n . Подмодуль $\Lambda^m(F_1) + \Lambda^m(F_2)$ тогда и только тогда замкнут в A^n , когда $r_0(F_1 + F_2) \neq m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Lambda^m(F_1) + \Lambda^m(F_2)$ замкнут. Если $r_0(F_1 + F_2) = m$, то для некоторого простого дивизора p $\text{rank } \varphi_p^n(F_1 + F_2) = \text{rank } \overline{(F_1 + F_2)} = m$. Пусть $x_1^i, \dots, x_m^i$ – образующие модуля F_i , $i = 1, 2$, $\widehat{x}_i = x_1^i \wedge \dots \wedge x_m^i$. Очевидно, $\widehat{x}_i = \overline{x}_1^i \wedge \dots \wedge \overline{x}_m^i \in \Lambda^m(\overline{F_i}) \subset \Lambda^m(\overline{F_1 + F_2})$, $\widehat{x}_i \neq 0$, так как ввиду замкнутости модуля F_i $\text{div } \widehat{x}_i = 1$. Так как $\text{rank } \Lambda^m(\overline{F_1 + F_2})$ равен 1, то $\overline{a}_1 \widehat{x}_1 = \overline{a}_2 \widehat{x}_2$ для некоторых ненулевых $\overline{a}_1, \overline{a}_2 \in \overline{A} = A/p$. Возвращаясь в основное кольцо, получаем, что $a_1 \widehat{x}_1 = a_2 \widehat{x}_2 + \mu$, где μ – m -вектор, все координаты которого делятся на p . В локализации по любому простому идеалу дивизор p является главным, следовательно (поскольку $\Lambda^m(F_1) + \Lambda^m(F_2)$ замкнут также и локально), a_1, a_2 делятся на p . Делимость же, очевидно, сохраняется и в основном кольце, что противоречит требованию $\overline{a}_1, \overline{a}_2$.

Обратно, пусть $r_0(F_1 + F_2) \neq m$. Предположим, что $\Lambda^m(F_1) + \Lambda^m(F_2)$ не замкнут. Тогда $a\mu = a_1 \widehat{x}_1 + a_2 \widehat{x}_2$ для некоторого m -вектора μ и элементов $a, a_1, a_2 \in A$ таких, что некоторый простой дивизор p , делящий a , не делит a_1 и a_2 . Так как $\widehat{x}_i \neq 0$, ранг $\overline{(F_1 + F_2)}$ не может быть меньше m . Умножив равенство $a\mu = a_1 \widehat{x}_1 + a_2 \widehat{x}_2$ на x_j^2 , получим, что $a_1 \widehat{x}_1 \wedge x_j^2 \equiv 0 \pmod{p}$, $j = 1, \dots, m$, поэтому ранг модуля $\overline{(F_1 + F_2)}$, порожденного векторами $\overline{x}_1^1, \dots, \overline{x}_m^1, \overline{x}_1^2, \dots, \overline{x}_m^2$, из которых лишь m линейно независимы, равен m . Это противоречит предположению и доказывает замкнутость $\Lambda^m(F_1) + \Lambda^m(F_2)$. Доказательство теоремы закончено.

Теорема 5.1 дает легко проверяемые достаточные условия 2-разложимости поливекторов над кольцом Крулля. Последняя часть параграфа посвящена выделению класса поливекторов ранга 2, для которых эти условия необходимы.

Пусть A – произвольное коммутативное кольцо. С каждым ненулевым m -вектором $\omega \in \Lambda^m(A^n)$ можно связать точную последовательность

$$0 \longrightarrow B_0(\omega) \longrightarrow A^n \xrightarrow{\psi_\omega} A^n \wedge \omega \longrightarrow 0,$$

где $\psi_\omega(x) = x \wedge \omega$ для любого элемента $x \in A^n$. Очевидно, ψ_ω – линейное отображение, так что последовательность является точной последовательностью A -модулей и A -гомоморфизмов.

Фиксируем базис $e_1, \dots, e_n$ модуля A^n . Пусть

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n} a_{i_1 \dots i_m} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_m},$$

где $a_{i_1 \dots i_m} \in A$. Так как $\psi_\omega: A^n \longrightarrow A^n \wedge \omega$ — линейное отображение, ему однозначно соответствует $(n \times C_n^{m+1})$ -матрица Q_ω . Именно, поскольку $(m+1)$ -векторы вида $e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_{m+1}}$ ($1 \leq j_1 < \dots < j_{m+1} \leq n$) образуют базис в пространстве $\Lambda^{m+1}(A^n) \supset A^n \wedge \omega$, то $\psi_\omega(e_i)$ однозначно записывается в виде

$$\psi_\omega(e_i) = \sum a_{ij_1 \dots j_{m+1}} e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_{m+1}},$$

где $a_{ij_1 \dots j_{m+1}}$ — элементы кольца A . Таким образом, $Q_\omega = (a_{ij_1 \dots j_{m+1}})$. Элементы $a_{ij_1 \dots j_{m+1}}$ матрицы Q_ω следующим образом выражаются через координаты $a_{i_1 \dots i_m}$ m -вектора ω :

$$a_{ij_1 \dots j_{m+1}} = \begin{cases} (-1)^\nu a_{j_1 \dots \widehat{i} \dots j_{m+1}}, & \text{если } i \in \{j_1, \dots, j_{m+1}\}, \\ 0, & \text{если } i \notin \{j_1, \dots, j_{m+1}\}, \end{cases}$$

где ν — четность перестановки $ij_1 \dots \widehat{i} \dots j_{m+1}$.

Обозначим i -ю строку матрицы Q_ω через Q_ω^i . Так как

$$\psi_\omega(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_{m+1} \leq n} a_{ij_1 \dots j_{m+1}} e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_{m+1}},$$

$A^n \wedge \omega$ изоморфен A -модулю, порожденному строками матрицы Q_ω , а $B_0(\omega)$ изоморфен модулю, состоящему из таких векторов $x \in A^n$, что $xQ_\omega = x_1 Q_\omega^1 + \dots + x_n Q_\omega^n = 0$. Так как $B_0(\omega) = \ker Q_\omega$, то, очевидно, $\text{rank } B_0(\omega) + \text{rank } Q_\omega = n$.

Назовем m -вектор $\omega \in \Lambda^m(A^n)$ ∞ -примитивным, если для любого элемента $a \in A$ $\varphi_a^n(B_0(\omega)) = B_0(\Lambda^m \varphi_a^n(\omega))$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. Пусть A — кольцо Крулля, $\omega \in \Lambda^m(A^n)$ — m -вектор. Следующие условия эквивалентны:

- (а) ω — ∞ -примитивный m -вектор;
- (б) $A^n \wedge \omega$ — замкнутый подмодуль в $\Lambda^{m+1}(A^n)$;
- (в) модуль $A^n \wedge \omega$ рефлексивен и $d_r(Q_\omega) = 1$, где $r = \text{rank } Q_\omega$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) $\Rightarrow$ (б). Пусть $\mu \in \widetilde{A^n \wedge \omega}$, т.е. μ — $(m+1)$ -вектор, для которого существуют такие элементы $a_0, \dots, a_n \in A$, что $a_0 \mu = a_1 Q_\omega^1 + \dots + a_n Q_\omega^n$.

Заметим, что $Q_{\Lambda^m \varphi_{a_0}^n(\omega)} = (\varphi_{a_0}^n(a_{ij_1 \dots j_{m+1}}))$, поэтому в факторкольце по модулю a_0 $\overline{a_1 Q_\omega^1} + \dots + \overline{a_n Q_\omega^n} = \overline{a_1 Q_\omega^1} + \dots + \overline{a_n Q_\omega^n}$. Следовательно, если через a обозначить вектор $a = (a_1, \dots, a_n)$, то $\overline{a Q_\omega} = \overline{a} Q_\omega = \overline{0}$, откуда $\overline{a} \in B_0(\overline{\omega})$. По условию $B_0(\overline{\omega}) = \overline{B_0(\omega)}$, значит, $\overline{a} = \overline{x}$, где $x \in B_0(\omega)$. Таким образом, $a = x + a_0 b$, где $b \in A^n$. Теперь $a_0 b_1 Q_\omega^1 + \dots + a_0 b_n Q_\omega^n = (a_1 - x_1) Q_\omega^1 + \dots + (a_n - x_n) Q_\omega^n = a_1 Q_\omega^1 + \dots + a_n Q_\omega^n = a_0 \mu$, откуда $\mu = b Q_\omega \in A^n \wedge \omega$.

(б) $\Rightarrow$ (а). Предположим, что $A^n \wedge \omega$ замкнут. Так как всегда $\overline{B_0(\omega)} \subset B_0(\overline{\omega})$, то достаточно доказать обратное включение. Пусть $x \in A^n$, $\overline{x} \in B_0(\overline{\omega})$, т.е. $\overline{x} \wedge \overline{\omega} = 0$. Тогда $x \in \ker \psi_\omega = \ker \overline{\psi}_\omega$, откуда $\overline{x} Q_\omega = 0$. Следовательно, $x Q_\omega = a_0 y$, где $y \in \Lambda^{m+1}(A^n)$, $a \in A$. Таким образом, $y \in \widetilde{A^n \wedge \omega} = A^n \wedge \omega$. Это означает,

что $y = \psi_\omega(x')$ для некоторого элемента $x' \in A^n$. Отсюда $(a_0x' - x)Q_\omega = 0$, т.е. $a_0x' - x \in B_0(\omega)$. Переходя к факторкольцу по модулю a , получаем, что $\bar{x} \in \overline{B_0(\omega)}$.

(б) $\Leftrightarrow$ (в). Всякий замкнутый модуль M ранга r над кольцом Крулля рефлексивен и $d_r(M) = 1$ [8]. Обратно, если M рефлексивен и $d_r(M) = 1$, то он замкнут в силу [8; следствие предложения 1.1].

СЛЕДСТВИЕ 5.2. Пусть A – кольцо Крулля, $\omega \in \Lambda^m(A^n)$, $B_0(\omega) = 0$. Тогда для ∞ -примитивности ω необходимо и достаточно, чтобы $d_r(M) = 1$.

Заметим, что условие 1-примитивности m -вектора ω выражается в терминах матрицы Q_ω в виде $d_1(M) = 1$. 2-примитивность означает, что для любого элемента $a \in A$ $\overline{\omega}$ не является плюккеровым, т.е. $\text{rank } B_0(\overline{\omega}) < m$. Но $B_0(\overline{\omega}) = \ker \overline{Q}_\omega$, поэтому $\text{rank } B_0(\overline{\omega}) < m$ тогда и только тогда, когда $\text{rank } \overline{Q}_\omega > n - m$. В свою очередь, это эквивалентно условию $d_{n-m+1}(Q_\omega) = 1$. Следовательно, ω 2-примитивен тогда и только тогда, когда $d_{n-m+1}(Q_\omega) = 1$. Теперь видно, что требование ∞ -примитивности является самым сильным из всех перечисленных условий примитивности.

ТЕОРЕМА 5.3. Пусть A – кольцо Крулля, $\omega \in \Lambda^m(A^n)$ – ∞ -примитивный m -вектор, $b_0(\omega) < m - 2$. Для того чтобы $\text{rank } \omega = 2$, необходимо и достаточно, чтобы $E_1(\omega)$ был замкнут в A^n , а $B_0(\omega)$ и $B_1(\omega)$ представлялись в виде $B_1(\omega) = F_1 \cup F_2$, $B_0(\omega) = F_1 \cap F_2$, где F_1, F_2 – свободные подмодули ранга m в A^n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность вытекает из теоремы 5.1. Докажем необходимость. Так как ∞ -примитивный m -вектор является 2-примитивным, то в силу теоремы 5.2 для ∞ -примитивного m -вектора ω ранга 2 существуют такие свободные подмодули $F_1, F_2 \subset A^n$, что $B_1(\omega) = F_1 \cup F_2$, $B_0(\omega) = F_1 \cap F_2$. Докажем, что $E_1(\omega) = F_1 + F_2$ замкнут. Так как $B_1(\omega)$ замкнут, то F_1, F_2 – замкнутые подмодули.

ЛЕММА 5.3. Пусть M_1 и M_2 – замкнутые подмодули в A^n . Следующие условия эквивалентны:

- (а) $M_1 + M_2$ замкнут;
- (б) для любого $a \in A$ $\varphi_a^n(M_1 \cap M_2) = \varphi_a^n(M_1) \cap \varphi_a^n(M_2)$;

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) $\Rightarrow$ (б). Очевидно, $\varphi_a^n(M_1 \cap M_2) \subset \varphi_a^n(M_1) \cap \varphi_a^n(M_2)$. Покажем, что $\varphi_a^n(M_1) \cap \varphi_a^n(M_2) \subset \varphi_a^n(M_1 \cap M_2)$. Пусть $\xi = \varphi_a^n(x_1) = \varphi_a^n(x_2) \in \varphi_a^n(M_1) \cap \varphi_a^n(M_2)$, где $x_i \in M_i$, $i = 1, 2$. Тогда $x_1 - x_2 = ay$, где $y \in A^n$. Так как $y \in M_1 + M_2$, то ввиду замкнутости $M_1 + M_2$ имеем $y \in M_1 + M_2$. Пусть $y = y_1 + y_2$, где $y_i \in M_i$, $i = 1, 2$. Тогда $x_1 - ay_1 = x_2 + ay_2 \in M_1 \cap M_2$, $\varphi_a^n(x_1 - ay_1) = \varphi_a^n(x_1) = \xi$. Таким образом, $\xi \in \varphi_a^n(M_1 \cap M_2)$.

(б) $\Rightarrow$ (а). Пусть $x \in M_1 + M_2$. Тогда $ax = x_1 + x_2$, где $a \in A$, $x_i \in M_i$, $i = 1, 2$. Следовательно, $\varphi_a^n(x_1) = -\varphi_a^n(x_2)$, откуда $\varphi_a^n(x_i) \in \varphi_a^n(M_1) \cap \varphi_a^n(M_2) = \varphi_a^n(M_1 \cap M_2)$. Пусть $\varphi_a^n(x_i) = \varphi_a^n(y_i)$, где $y_i \in M_1 \cap M_2$, $i = 1, 2$, тогда $x_i = y_i + az_i$, где $z_i \in A^n$, $i = 1, 2$. Отсюда вытекает, что $z_i \in M_i$, $i = 1, 2$. Следовательно, $ax = y_1 + y_2 + az_1 + az_2$, откуда $a(x - z_1 - z_2) \in M_1 \cap M_2$. Так

как $M_1 \cap M_2$ замкнут, то $x - z_1 - z_2 \in M_1 \cap M_2$. Значит, $x \in M_1 + M_2$. Лемма доказана.

Завершим доказательство теоремы 5.3. Ввиду только что доказанной леммы для замкнутости $E_1(\omega) = F_1 + F_2$ достаточно проверить, что $\varphi_a^n(F_1 \cap F_2) = \varphi_a^n(F_1) \cap \varphi_a^n(F_2)$. Но $F_1 \cap F_2 = B_0(\omega)$, поэтому в силу ∞ -примитивности ω

$$\varphi_a^n(F_1 \cap F_2) = \overline{B_0(\omega)} = B_0(\overline{\omega}) = \varphi_a^n(F_1) \cap \varphi_a^n(F_2).$$

Теорема доказана.

Следующее предложение дает простой способ проверки ∞ -примитивности m -вектора с четным m .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.3. Пусть $m \neq 2$ – четное число, ω – m -вектор ранга 2 над кольцом Крулля A , причем $B_0(\omega) = 0$. Тогда ω ∞ -примитивен в том и только том случае, когда $\operatorname{div}(\frac{1}{2}\omega \wedge \omega) = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ω ∞ -примитивен. Так как $\operatorname{rank} \omega = 2$, то $\omega = \hat{x}_1 + \hat{x}_2$, где $\hat{x}_i \in \Lambda^m(A^n)$, $i = 1, 2$. В силу теоремы 5.3 $E_1(\omega) = X_1 \oplus X_2$ – замкнутый модуль. Согласно [8; следствие 1] $d_{2m}(E_1(\omega)) = 1$. Но $\omega \wedge \omega = 2\hat{x}_1 \wedge \hat{x}_2$, поэтому $\operatorname{div}(\frac{1}{2}\omega \wedge \omega) = d_{2m}(E_1(\omega)) = 1$.

Обратно, если $\operatorname{div}(\frac{1}{2}\omega \wedge \omega) = 1$, то в силу [8; следствие предложения 1.1] свободный модуль $E_1(\omega) = X_1 \oplus X_2$ замкнут. Ввиду леммы 5.3 это означает, что $\varphi_a^n(X_1) \cap \varphi_a^n(X_2) = 0$ для любого $a \in A$. Следовательно, $\varphi_a^n(B_0(\omega)) = 0$. Для m -векторов с $b_0(\omega) = 0$ это означает ∞ -примитивность.

СЛЕДСТВИЕ 5.3. Пусть A – кольцо Крулля, $m \neq 2$ – четное число, $\omega \in \Lambda^m(A^n)$ – m -вектор с $\operatorname{div}(\frac{1}{2}\omega \wedge \omega) = 1$. Для того чтобы $\operatorname{rank} \omega = 2$, необходимо и достаточно, чтобы $B_1(\omega) = F_1 \cup F_2$, где F_1, F_2 – свободные подмодули в A^n ранга m , а $E_1(\omega)$ был замкнут.

Список литературы

1. Plucker J. Neu Geometrie des Raumes gegründet auf die gerade Linie als Raumelement. Leipzig, 1868–1869.
2. Segre S. Mehrdimensionale Raume. Encyklopadie der Mathematischen Wissenschaften. III. C7, 1915.
3. Martinet J. Sur les singularités des formes differentielles // Ann. Inst. Fourier. 1970. V. 20. №1. P. 95–178.
4. Busemann H., Glassco D. E. Irreducible sums of simple multivectors // Pacific J. Math. 1973. V. 49. №4. P. 13–32.
5. Бурбаки Н. Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра. М.: Физматгиз, 1962.
6. Клейнер Г. Б. Поливекторы ранга 2 // УМН. 1974. Т. 29. №3. С. 204–208.
7. Towber J. Complete reducibility in exterior algebra over free modules // J. Algebra. 1968. V. 10. №3. P. 299–309.
8. Клейнер Г. Б. О плюккерových свойствах колец // Матем. сб. 1971. Т. 84. №4. С. 526–536.
9. Клейнер Г. Б. Замечание о детерминантных последовательностях // Труды объединения математических кафедр педагогических институтов центральной зоны РСФСР. Т. 1. №1–2, 1972. С. 109–114.

10. *Lim M. J. S.* Rank k Grassman products // Pacific J. Math. 1969, V. 29, № 2. P. 367–374.
11. *Котлярский М. А.* Два замечания о плюккерových кольцах // УМН. 1975. Т. 30. № 2. С. 213.

Центральный экономико-математический институт РАН,
г. Москва
E-mail: `kleiner@cemi.rssi.ru`

Поступила в редакцию
08.11.2000