Общероссийский математический портал

Е. Ю. Панов, О наибольших и наименьших обобщенных энтропийных решениях задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка, *Матем. сб.*, 2002, том 193, номер 5, 95–112

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm653>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 14:46:25

УДК 517.95

Е. Ю. Панов

**О наибольших и наименьших обобщенных
энтропийных решениях задачи Коши
для квазилинейного уравнения первого порядка**

Доказано существование наибольшего и наименьшего обобщенных энтропийных решений (о.э.р.) задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка в общем случае, когда вектор потока лишь непрерывен и свойство единственности о.э.р. может нарушаться. Даны некоторые полезные приложения. В частности, установлена единственность о.э.р. в случае периодических по $n - 1$ пространственному вектору входных данных (n – число пространственных переменных).

Библиография: 18 названий.

§ 1. Введение

Рассмотрим задачу Коши для квазилинейного уравнения первого порядка

$$u_t + \operatorname{div}_x \varphi(u) = g(t, x), \quad (1)$$

$\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, $u = u(t, x)$, $(t, x) \in \Pi_T = (0, T) \times \mathbb{R}^n$, $T > 0$, с начальным условием

$$u(0, x) = u_0(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n). \quad (2)$$

Предполагается, что функция источника $g = g(t, x) \in L^1_{\text{loc}}(\Pi_T)$ в (1) удовлетворяет условию:

$$g(t, \cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ для п.в. } t \in (0, T) \text{ и } \int_0^T \|g(t, \cdot)\|_\infty dt < \infty. \quad (3)$$

Функции потока $\varphi_i(u)$ предполагаются лишь непрерывными:

$$\varphi_i(u) \in C(\mathbb{R}), \quad i = 1, \dots, n.$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № № 00-01-00921 и 02-01-00483) и гранта Президента РФ (№ 00-15-99254).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 (С.Н. Кружков, [1], [2]). Ограниченная измеримая функция $u = u(t, x)$ называется *обобщенным энтропийным решением* (коротко — о.э.р.) задачи Коши (1), (2), если:

а) $\forall k \in \mathbb{R}$

$$|u - k|_t + \operatorname{div}_x [\operatorname{sign}(u - k)(\varphi(u) - \varphi(k))] \leq \operatorname{sign}(u - k)g \quad (4)$$

в смысле распределений на Π_T (в $\mathcal{D}'(\Pi_T)$);

б) $\operatorname{ess\,lim}_{t \rightarrow 0+} u(t, \cdot) = u_0$ в $L^1_{\operatorname{loc}}(\mathbb{R}^n)$, т.е. существует множество $\mathcal{E} \subset (0, T)$ полной меры Лебега такое, что $u(t, \cdot) \in L^1_{\operatorname{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $t \in \mathcal{E}$, и $u(t, \cdot) \rightarrow u_0$ в $L^1_{\operatorname{loc}}(\mathbb{R}^n)$ при $t \rightarrow 0+$, $t \in \mathcal{E}$.

Условие (4) означает, что для любой пробной функции $f = f(t, x) \in C_0^\infty(\Pi_T)$, $f \geq 0$,

$$\int_{\Pi} \{ |u - k| f_t + \operatorname{sign}(u - k)[(\varphi(u) - \varphi(k), \nabla_x f) + g f] \} dt dx \geq 0,$$

здесь и ниже $(\cdot, \cdot)$ означает скалярное умножение на $\mathbb{R}^n$.

Хорошо известно (см., например, [2], [3]), что условие (4) можно записать в эквивалентной форме: для любой выпуклой функции $\eta(u) \in C^1(\mathbb{R})$ (энтропии)

$$\eta(u)_t + \operatorname{div}_x \psi(u) \leq \eta'(u)g \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi_T), \quad (5)$$

где $\psi(u) = (\psi_1(u), \dots, \psi_n(u))$ — соответствующий вектор потока энтропии, определяемый равенством

$$\psi(u) = \eta'(u)\varphi(u) - \int_0^u \varphi(\sigma) d\eta'(\sigma) \quad (6)$$

(так что в случае гладкого потока $\varphi(u) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ вектор $\psi(u)$ определен, с точностью до аддитивной константы, равенством $\psi'(u) = \eta'(u)\varphi'(u)$).

Положив в (4) $k = \pm \|u\|_\infty$, легко вывести, что $u_t + \operatorname{div}_x \varphi(u) = g$ в $\mathcal{D}'(\Pi_T)$ и $u(t, x)$ удовлетворяет уравнению (1) в смысле распределений (т.е. действительно является обобщенным решением).

Исследование задачи (1), (2) в случае лишь непрерывного потока $\varphi(u)$ было начато в работах [3]–[5]. С тех пор теория задачи (1), (2) значительно продвинута.

Напомним понятия и результаты, которые будут использоваться ниже. Хорошо известно, что о.э.р. задачи (1), (2) всегда существует (доказательство содержится, например, в [6]–[8]).

В рассматриваемом случае, когда вектор потока предполагается лишь непрерывным, появляется эффект бесконечной скорости распространения начального возмущения, который может приводить к неединственности о.э.р. задачи (1), (2), если число пространственных переменных $n > 1$. Соответствующие примеры были впервые построены в [7], [9], [10] для случая $n = 2$, $g \equiv 0$. Заметим, что для непрерывного по Липшицу потока единственность о.э.р. хорошо известна (см. [1], [2]).

Некоторые достаточные условия единственности найдены в [7], [9], [10]. Более того, при этих достаточных условиях в [10] (см. также [11], [12]) доказан *принцип сравнения* для обобщенных энтропийных суб- и супер-решений.

Напомним определение обобщенных энтропийных суб- и супер-решений (см. [3], [9], [11]–[15]). Пусть $f^+ = \max(f, 0)$, $f^- = \max(-f, 0)$. Введем обозначение $\chi_{u>v}$ для характеристической функции множества независимых переменных, на котором выполнено сравнение $u > v$ для двух данных функций u и v . Аналогично определяются функции $\chi_{u<v}$, $\chi_{u=v}$ и т. д. Пусть $\text{sign}^+(r) = \chi_{r>0}$ – функция Хевисайда, $\text{sign}^-(r) = -\text{sign}^+(-r)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Ограниченная измеримая функция $u(t, x)$ на Π_T называется *обобщенным энтропийным суб-решением* (коротко – о.э.суб-р.) задачи Коши (1), (2), если

$$1) \forall k \in \mathbb{R}$$

$$((u - k)^+)_t + \text{div}_x [\text{sign}^+(u - k)(\varphi(u) - \varphi(k))] \leq \text{sign}^+(u - k)g \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi_T), \quad (7)$$

$$2) \text{ess} \lim_{t \rightarrow 0+} (u(t, x) - u_0(x))^+ = 0 \text{ в } L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Ограниченная измеримая функция $u(t, x)$ на Π_T называется *обобщенным энтропийным супер-решением* (коротко – о.э.супер-р.) задачи Коши (1), (2), если

$$1) \forall k \in \mathbb{R}$$

$$((u - k)^-)_t + \text{div}_x [\text{sign}^-(u - k)(\varphi(u) - \varphi(k))] \leq \text{sign}^-(u - k)g \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi_T), \quad (8)$$

$$2) \text{ess} \lim_{t \rightarrow 0+} (u(t, x) - u_0(x))^- = 0 \text{ в } L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1 (см. [6], [10], [11], [16]). а) Условия (7) и (8) эквивалентны требованию, что (5) выполнено для всех неубывающих (соответственно невозрастающих) выпуклых функций $\eta(u) \in C^1(\mathbb{R})$.

б) Функция $u = u(t, x) \in L^\infty(\Pi)$ является о.э.супер-р. задачи (1), (2) тогда и только тогда, когда функция $-u$ является о.э.суб-р. задачи Коши для уравнения $u_t - \text{div}_x \varphi(-u) = -g$ с начальными данными $-u_0(x)$.

в) Функция $u(t, x) \in L^\infty(\Pi)$ – о.э.р. задачи (1), (2) тогда и только тогда, когда она является о.э.суб-р. и о.э.супер-р. этой задачи одновременно.

г) Пусть $y = Ax$ – невырожденное линейное преобразование на $\mathbb{R}^n$. Тогда $u(t, x)$ – о.э.суб-р. (о.э.супер-р., о.э.р.) задачи (1), (2) тогда и только тогда, когда функция $\bar{u}(t, y) = u(t, A^{-1}y)$ является о.э.суб-р. (соответственно о.э.супер-р., о.э.р.) задачи

$$u_t + \text{div}_y \bar{\varphi}(u) = \bar{g}, \quad u(0, y) = u_0(A^{-1}y),$$

где $\bar{g}(t, y) = g(t, A^{-1}y)$ и вектор потока $\bar{\varphi}(u) = A^* \varphi(u)$, $A^*: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – сопряженное преобразование.

Нам понадобится также следующий результат, содержащийся в [6], [12].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $u(t, x)$ и $\tilde{u}(t, x)$ – о.э.суб-р. и о.э.супер-р. задачи (1), (2) с начальными функциями $u_0(x)$ и $\tilde{u}_0(x)$ и функциями источника $g(t, x)$ и $\tilde{g}(t, x)$ соответственно.

Предположим также, что выполнено одно из следующих условий:

- А) одна из функций u или $\tilde{u}$ не зависит от x , т.е. $u \equiv u(t)$ или $\tilde{u} \equiv \tilde{u}(t)$ н.в. на Π_T ;
- В) $\mu_{n+1}\{(t, x) \in \Pi_T : u(t, x) > \tilde{u}(t, x)\} < \infty$, где μ_r , $r \in \mathbb{N}$, обозначает r -мерную меру Лебега.

Тогда для н.в. $t \in (0, T)$

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} (u(t, x) - \tilde{u}(t, x))^+ dx \\ & \leq \int_{\mathbb{R}^n} (u_0(x) - \tilde{u}_0(x))^+ dx + \int_{\Pi_t} (g(\tau, x) - \tilde{g}(\tau, x))^+ \chi_{u \geq \tilde{u}} d\tau dx. \end{aligned} \quad (9)$$

В частности, если $u_0 \leq \tilde{u}_0$ н.в. на $\mathbb{R}^n$, $g \leq \tilde{g}$ н.в. на Π_T , то $u \leq \tilde{u}$ н.в. на Π_T (принцип сравнения).

Применяя принцип сравнения к о.э.р. и задачи (1), (2), о.э.суб-р.

$$u_-(t) = \operatorname{ess\,inf}_{x \in \mathbb{R}^n} u_0(x) + \int_0^t \operatorname{ess\,inf}_{x \in \mathbb{R}^n} g(\tau, x) d\tau$$

и о.э.супер-р.

$$u_+(t) = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^n} u_0(x) + \int_0^t \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^n} g(\tau, x) d\tau$$

этой же задачи (заметим, что ввиду (3) функции $u_-(t)$ и $u_+(t)$ ограничены), легко вывести принцип максимума (см. [11], [12]):

СЛЕДСТВИЕ 1. Если $u = u(t, x)$ – о.э.р. задачи (1), (2), то для н.в. $(t, x) \in \Pi_T$

$$\operatorname{ess\,inf}_{x \in \mathbb{R}^n} u_0(x) + \int_0^t \operatorname{ess\,inf}_{x \in \mathbb{R}^n} g(\tau, x) d\tau \leq u(t, x) \leq \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^n} u_0(x) + \int_0^t \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^n} g(\tau, x) d\tau.$$

Для двух о.э.р. u и $\tilde{u}$ задачи (1), (2), удовлетворяющих требованию А) предложения 1, можно поменять местами эти функции в неравенстве (9) и получить

СЛЕДСТВИЕ 2 (см. [11], [12]). Пусть $u = u(t, x)$, $\tilde{u} = \tilde{u}(t)$ – о.э.р. задачи (1), (2) с начальными данными $u_0(x)$ и $\tilde{u}_0(x) \equiv \tilde{u}(0)$ и функциями источника $g(t, x)$ и $\tilde{g}(t, x) \equiv \tilde{g}(t)$ соответственно. Тогда для н.в. $t \in (0, T)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(t, x) - \tilde{u}(t)| dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |u_0(x) - \tilde{u}(0)| dx + \int_{\Pi_t} |g(\tau, x) - \tilde{g}(\tau)| d\tau dx.$$

В [6], [11], [12] были исследованы некоторые специальные случаи единственности в классе суммируемых по пространственным переменным решений. Установленное в этих работах существование наибольшего и наименьшего о.э.р. играет важную роль для изучения проблемы. Существование наибольшего и наименьшего

о.э.р. было доказано в предположении, что начальные данные и функция источника в определенном смысле “исчезают” при $x \rightarrow \infty$.

В §2 мы докажем существование наибольшего и наименьшего решений в общем случае и дадим некоторые полезные приложения. В частности, мы покажем, что наибольшее (наименьшее) о.э.р. совпадает с наибольшим о.э.суб-р. (соответственно с наименьшим о.э.супер-р.), существование которых установлено в [16]. В §3 доказывается единственность о.э.р. задачи (1), (2) в случае, когда входные данные задачи являются периодическими по $n - 1$ пространственным переменным функциями. Таким образом, дается обобщение соответствующего результата из [16].

Следует отметить, что результаты, аналогичные изложенным выше, верны и для стационарной задачи

$$u + \operatorname{div}_x \varphi(u) = g(x), \quad u = u(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

изучение которой проводилось в статьях [6], [11], [12] параллельно с исследованием задачи Коши.

В настоящей работе мы ограничимся лишь случаем задачи Коши (1), (2), подчеркнув, что доказательства основных результатов сохраняются (с естественными изменениями) и для соответствующей стационарной задачи.

§2. Основные теоремы

Дадим следующую полезную переформулировку определения 1.

Пусть $\overline{\Pi}_T = [0, T) \times \mathbb{R}^n$, $C_0^\infty(\overline{\Pi}_T)$ – подпространство функций из $C^\infty(\overline{\Pi}_T)$ с компактным носителем (который может иметь непустое пересечение с начальной гиперплоскостью $\{t = 0\}$).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Функция $u = u(t, x) \in L^\infty(\Pi_T)$ является о.э.р. задачи (1), (2) тогда и только тогда, когда для любого $k \in \mathbb{R}$ и любой пробной функции $f = f(t, x) \in C_0^\infty(\overline{\Pi}_T)$, $f \geq 0$,*

$$\begin{aligned} & \int_{\Pi_T} \{ |u - k| f_t + \operatorname{sign}(u - k) [(\varphi(u) - \varphi(k), \nabla_x f) + g f] \} dt dx \\ & + \int_{\mathbb{R}^n} |u_0(x) - k| f(0, x) dx \geq 0. \end{aligned} \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u = u(t, x)$ – о.э.р. задачи (1), (2); $k \in \mathbb{R}$, $f = f(t, x) \in C_0^\infty(\overline{\Pi}_T)$, $f \geq 0$. Выберем функцию $\beta(s) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp} \beta(s) \subset [0, 1]$, $\beta(s) \geq 0$, $\int \beta(s) ds = 1$, и положим при $\nu \in \mathbb{N}$ $\delta_\nu(s) = \nu \beta(\nu s)$, $\theta_\nu(t) = \int_{-\infty}^t \delta_\nu(s) ds$. Понятно, что последовательность $\delta_\nu(s)$ сходится к δ -мере Дирака в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ при $\nu \rightarrow \infty$; $0 \leq \theta_\nu(t) \leq 1$, $\theta_\nu(t) = 0$ при $t \leq 0$, $\theta_\nu(t) = 1$ при $t \geq 1/\nu$ и, следовательно, последовательность $\theta_\nu(t)$ сходится поточечно при $\nu \rightarrow \infty$ к функции Хевисайда $\operatorname{sign}^+(t)$.

Применяя энтропийное неравенство (4) к пробной функции

$$f_\nu = f_\nu(t, x) = f(t, x)\theta_\nu(t - t_0) \in C_0^\infty(\Pi_T), \quad t_0 \in (0, T),$$

мы получаем, что

$$\begin{aligned} & \int_0^T \delta_\nu(t - t_0) \int_{\mathbb{R}^n} |u(t, x) - k| f(t, x) dx dt \\ & + \int_{\Pi_T} \{ |u - k| f_t + \text{sign}(u - k) [(\varphi(u) - \varphi(k), \nabla_x f) + g f] \} \theta_\nu(t - t_0) dt dx \geq 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Пусть $\mathcal{E}_1$ — множество общих точек Лебега для функций

$$t \mapsto F(k, t) = \int_{\mathbb{R}^n} |u(t, x) - k| f(t, x) dx,$$

где $k \in \mathbb{Q}$. Ввиду счетности $\mathbb{Q}$ множество $\mathcal{E}_1$ имеет полную меру Лебега на $(0, T)$. Очевидно, отображение $k \mapsto F(k, t) \in L^\infty([0, T])$ непрерывно, равномерно по $t \in [0, T]$, и так как $\mathbb{Q}$ всюду плотно, мы заключаем, что точки $t \in \mathcal{E}_1$ — точки Лебега функций $F(k, t)$ для всех $k \in \mathbb{R}$. Пусть $\mathcal{E}_2 \subset (0, T)$ — множество полной меры из определения 1 такое, что $u(t, \cdot) \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$, $t \in \mathcal{E}_2$, и $u(t, \cdot) \rightarrow u_0$ в $L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$ при $t \rightarrow 0+$, $t \in \mathcal{E}_2$. Положим $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$. Ясно, что $\mathcal{E}$ является множеством полной меры на $(0, T)$, и если $t_0 \in \mathcal{E}$, то в пределе при $\nu \rightarrow \infty$ соотношение (11) преобразуется к неравенству

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} |u(t_0, x) - k| f(t_0, x) dx dt \\ & + \int_{\Pi_T} \{ |u - k| f_t + \text{sign}(u - k) [(\varphi(u) - \varphi(k), \nabla_x f) + g f] \} \text{sign}^+(t - t_0) dt dx \geq 0, \end{aligned}$$

откуда после перехода к пределу при $t_0 \rightarrow 0$, $t_0 \in \mathcal{E}$ (с учетом требования б) определения 1), вытекает (10).

Для доказательства обратной импликации предположим, что функция $u = u(t, x) \in L^\infty(\Pi_T)$ удовлетворяет условию (10). Взяв в этом условии пробные функции из $C_0^\infty(\Pi_T)$, мы немедленно получим, что

$$|u - k|_t + \text{div}_x [\text{sign}(u - k)(\varphi(u) - \varphi(k))] \leq \text{sign}(u - k)g \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi_T)$$

и u удовлетворяет требованию (4). Остается проверить лишь выполнение начального условия. Выберем функцию $\rho(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\rho(x) \geq 0$, и положим в (10) $f = f_\nu(t, x) = \rho(x)(1 - \theta_\nu(t - t_0))$, где $\nu \in \mathbb{N}$, $t_0 \in (0, T)$, $1/\nu < T - t_0$. Мы получим, что для всех $k \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} |u_0(x) - k| \rho(x) dx - \int_0^T \delta_\nu(t - t_0) \int_{\mathbb{R}^n} |u(t, x) - k| \rho(x) dx dt \\ & + \int_{\Pi_T} \text{sign}(u - k) [(\varphi(u) - \varphi(k), \nabla_x \rho) + g \rho] (1 - \theta_\nu(t - t_0)) dt dx \geq 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Пусть $\mathcal{E}$ – множество общих точек Лебега для функций

$$t \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} |u(t, x) - k| \rho(x) dx, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Так же как и для множества $\mathcal{E}_1$, легко доказать, что $\mathcal{E}$ имеет полную меру Лебега на $(0, T)$, и если $t_0 \in \mathcal{E}$, то в пределе при $\nu \rightarrow \infty$ из (12) следует соотношение

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} |u_0(x) - k| \rho(x) dx - \int_{\mathbb{R}^n} |u(t_0, x) - k| \rho(x) dx \\ & + \int_{\Pi_{t_0}} \text{sign}(u - k) [(\varphi(u) - \varphi(k), \nabla_x \rho) + g\rho] dt dx \geq 0, \end{aligned}$$

которое дает оценку

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(t_0, x) - k| \rho(x) dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |u_0(x) - k| \rho(x) dx + C(t_0),$$

где с учетом условия (3)

$$C(t_0) = \int_{\Pi_{t_0}} [|\varphi(u) - \varphi(k)| \cdot |\nabla_x \rho| + \|g(t, \cdot)\|_\infty |\rho|] dt dx \xrightarrow{t_0 \in \mathcal{E}, t_0 \rightarrow 0+} 0$$

(мы используем обозначение $|v|$ для евклидовой нормы вектора v). Поэтому $\forall k \in \mathbb{R}$ и $\forall \rho(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\rho(x) \geq 0$,

$$\limsup_{t_0 \in \mathcal{E}, t_0 \rightarrow 0+} \int_{\mathbb{R}^n} |u(t_0, x) - k| \rho(x) dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |u_0(x) - k| \rho(x) dx. \quad (13)$$

Ввиду непрерывной зависимости интегралов $\int_{\mathbb{R}^n} |u(t_0, x) - k| \rho(x) dx$ от функции $\rho(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ и плотности $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ в $L^1(\mathbb{R}^n)$ предельное соотношение (13) выполнено для всех неотрицательных функций $\rho(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Выберем при положительном ε ступенчатую функцию $u_\varepsilon = \sum_{r=1}^N \alpha_r \chi_{A_r}(x)$ такую, что $\|u_0 - u_\varepsilon\|_\infty < \varepsilon$. Здесь $\chi_{A_r}(x)$ – характеристические функции измеримых множеств $A_r \subset \mathbb{R}^n$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |u(t_0, x) - u_0(x)| \rho(x) dx & \leq \varepsilon \|\rho\|_1 + \int_{\mathbb{R}^n} |u(t_0, x) - u_\varepsilon(x)| \rho(x) dx \\ & = \varepsilon \|\rho\|_1 + \sum_{r=1}^N \int_{\mathbb{R}^n} |u(t_0, x) - \alpha_r| \rho \chi_{A_r}(x) dx \end{aligned}$$

и по предельному соотношению (13)

$$\begin{aligned} & \limsup_{t_0 \in \mathcal{E}, t_0 \rightarrow 0+} \int_{\mathbb{R}^n} |u(t_0, x) - u_0(x)| \rho(x) dx \\ & \leq \varepsilon \|\rho\|_1 + \sum_{r=1}^N \int_{\mathbb{R}^n} |u_0(x) - \alpha_r| \rho \chi_{A_r}(x) dx \\ & = \varepsilon \|\rho\|_1 + \int_{\mathbb{R}^n} |u_0(x) - u_\varepsilon(x)| \rho(x) dx \leq 2\varepsilon \|\rho\|_1 \end{aligned}$$

для любого $\varepsilon > 0$. Поэтому $\forall \rho(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\rho(x) \geq 0$,

$$\limsup_{t_0 \in \mathcal{E}, t_0 \rightarrow 0+} \int_{\mathbb{R}^n} |u(t_0, x) - u_0(x)| \rho(x) dx = 0$$

и $\text{ess} \lim_{t \rightarrow 0+} u(t, \cdot) = u_0$ в $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Итак, u является о.э.р. задачи (1), (2), что и требовалось доказать.

СЛЕДСТВИЕ 3. Если функция $u = u(t, x) \in L^\infty(\Pi_T)$ является о.э.р. задачи (1), (2), то для любой пробной функции $f = f(t, x) \in C_0^\infty(\overline{\Pi}_T)$

$$\int_{\Pi_T} [uf_t + (\varphi(u), \nabla_x f) + gf] dt dx + \int_{\mathbb{R}^n} u_0(x) f(0, x) dx = 0. \quad (14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим соотношение (10) с $k = \pm M$, $M \geq \|u\|_\infty$. Учитывая, что, очевидно,

$$\int_{\Pi_T} [kf_t + (\varphi(k), \nabla_x f)] dt dx + \int_{\mathbb{R}^n} kf(0, x) dx = 0,$$

мы получаем соотношение: для всех $f = f(t, x) \in C_0^\infty(\overline{\Pi}_T)$, $f \geq 0$,

$$\pm \left(\int_{\Pi_T} [uf_t + (\varphi(u), \nabla_x f) + gf] dt dx + \int_{\mathbb{R}^n} u_0(x) f(0, x) dx \right) \geq 0,$$

т.е.

$$\int_{\Pi_T} [uf_t + (\varphi(u), \nabla_x f) + gf] dt dx + \int_{\mathbb{R}^n} u_0(x) f(0, x) dx = 0$$

для любой неотрицательной пробной функции f . Для завершения доказательства остается только заметить, что произвольная пробная функция $f \in C_0^\infty(\overline{\Pi}_T)$ является разностью двух неотрицательных функций из $C_0^\infty(\overline{\Pi}_T)$. Действительно, $f = (f + C)\theta - C\theta$, где константа $C > \|f\|_\infty$ и неотрицательная функция $\theta \in C_0^\infty(\overline{\Pi}_T)$ равна единице на носителе функции f .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Так же как в предложении 2, можно доказать следующие утверждения:

1) функция $u = u(t, x) \in L^\infty(\Pi_T)$ является о.э.суб-р. задачи (1), (2) тогда и только тогда, когда для любого $k \in \mathbb{R}$ и любой пробной функции $f = f(t, x) \in C_0^\infty(\overline{\Pi}_T)$, $f \geq 0$,

$$\begin{aligned} & \int_{\Pi_T} \{ (u - k)^+ f_t + \text{sign}^+(u - k) [(\varphi(u) - \varphi(k), \nabla_x f) + gf] \} dt dx \\ & + \int_{\mathbb{R}^n} (u_0(x) - k)^+ f(0, x) dx \geq 0; \end{aligned}$$

2) функция $u = u(t, x) \in L^\infty(\Pi_T)$ является о.э.супер-р. задачи (1), (2) тогда и только тогда, когда для любого $k \in \mathbb{R}$ и любой пробной функции $f = f(t, x) \in C_0^\infty(\overline{\Pi}_T)$, $f \geq 0$,

$$\begin{aligned} & \int_{\Pi_T} \{ (u - k)^- f_t + \text{sign}^-(u - k) [(\varphi(u) - \varphi(k), \nabla_x f) + gf] \} dt dx \\ & + \int_{\mathbb{R}^n} (u_0(x) - k)^- f(0, x) dx \geq 0. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 1. *Существует наибольшее о.э.р. $u = u(t, x) = J^+(u_0, g)$ задачи (1), (2). Кроме того,*

- 1) $u(t, x) \geq v(t, x)$ п.в. на Π_T для любого о.э.суб-р. $v(t, x)$ задачи (1), (2);
- 2) если $u = J^+(u_0, g)$, $v = J^+(v_0, h)$, то для п.в. $t \in (0, T)$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (u(t, x) - v(t, x))^+ dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n} (u_0(x) - v_0(x))^+ dx \\ &+ \int_{\Pi_t} (g(\tau, x) - h(\tau, x))^+ d\tau dx. \end{aligned} \quad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $M = \|u_0\|_\infty$, $M_1(t) = \|g(t, \cdot)\|_\infty$. Выберем последовательность констант d_ν , $\nu \in \mathbb{N}$, такую, что $M < d_{\nu+1} < d_\nu \forall \nu \in \mathbb{N}$; положим для $\nu \in \mathbb{N}$

$$u_{0,\nu}(x) = \begin{cases} u_0(x), & |x| \leq \nu, \\ d_\nu, & |x| > \nu, \end{cases} \quad g_\nu(t, x) = \begin{cases} g(t, x), & |x| \leq \nu, \\ M_1(t), & |x| > \nu, \end{cases}$$

и пусть $u_\nu = u_\nu(t, x)$ — о.э.р. задачи (1), (2) с начальными данными $u_{0,\nu}(x)$ и функцией источника $g_\nu(t, x)$ (по теореме существования такое о.э.р. действительно найдется). Очевидно, функция $\tilde{u}_\nu(t) = d_\nu + \int_0^t M_1(s) ds$ является о.э.р. задачи (1), (2) с постоянной начальной функцией $u_0 \equiv d_\nu$ и функцией источника $g \equiv M_1(t)$; кроме того, это о.э.р. не зависит от x . По следствию 2 для п.в. $t \in (0, T)$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |u_\nu(t, x) - \tilde{u}_\nu(t)| dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |u_{0,\nu}(x) - d_\nu| dx + \int_{\Pi_T} |g_\nu(t, x) - M_1(t)| dt dx \\ &\leq C_\nu = \left[(M + d_\nu) + 2 \int_0^T M_1(t) dt \right] \mu_n(B_\nu) < +\infty, \end{aligned} \quad (16)$$

здесь B_ν — шар радиуса ν в $\mathbb{R}^n$. Заметим, что $\tilde{u}_{\nu+1}(t) - \tilde{u}_\nu(t) \equiv d_{\nu+1} - d_\nu$. Используя (16), мы выводим тогда, что для любого положительного $h < d_\nu - d_{\nu+1}$ для п.в. $t \in (0, T)$

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^n} (u_{\nu+1}(t, x) - u_\nu(t, x) + h)^+ dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (u_{\nu+1}(t, x) - \tilde{u}_{\nu+1}(t) + \tilde{u}_\nu(t) - u_\nu(t, x) + h + d_{\nu+1} - d_\nu)^+ dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} (u_{\nu+1}(t, x) - \tilde{u}_{\nu+1}(t) + \tilde{u}_\nu(t) - u_\nu(t, x))^+ dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |u_{\nu+1}(t, x) - \tilde{u}_{\nu+1}(t)| dx + \int_{\mathbb{R}^n} |u_\nu(t, x) - \tilde{u}_\nu(t)| dx \\ &\leq C_\nu + C_{\nu+1} < +\infty. \end{aligned} \quad (17)$$

По этой оценке

$$\begin{aligned} & \mu_{n+1} \{ (t, x) \in \Pi_T : u_{\nu+1}(t, x) > u_\nu(t, x) \} \\ &= \mu_{n+1} \{ (t, x) \in \Pi_T : (u_{\nu+1}(t, x) - u_\nu(t, x) + h)^+ > h \} \\ &\leq \frac{1}{h} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} (u_{\nu+1}(t, x) - u_\nu(t, x) + h)^+ dx dt \leq (C_\nu + C_{\nu+1}) \frac{T}{h} < \infty \quad (18) \end{aligned}$$

и из предложения 1 В) и того факта, что $u_{0,\nu+1}(x) \leq u_{0,\nu}(x)$ п.в. на $\mathbb{R}^n$, $g_{\nu+1}(t, x) \leq g_\nu(t, x)$ п.в. на Π_T , следует оценка: для п.в. $t \in (0, T)$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (u_{\nu+1}(t, x) - u_\nu(t, x))^+ dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n} (u_{0,\nu+1}(x) - u_{0,\nu}(x))^+ dx \\ &+ \int_{\Pi_T} (g_{\nu+1}(t, x) - g_\nu(t, x))^+ dt dx = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, $u_{\nu+1}(t, x) \leq u_\nu(t, x)$ п.в. на Π_T для всех $\nu \in \mathbb{N}$. По следствию 1 последовательность $u_\nu(t, x)$ также существенно ограничена снизу:

$$u_\nu(t, x) \geq -M - \int_0^T M_1(t) dt \quad \text{п.в. на } \Pi_T.$$

Поэтому для п.в. $(t, x) \in \Pi_T$ определена предельная функция $\lim_{\nu \rightarrow \infty} u_\nu(t, x) = u(t, x) \in L^\infty(\Pi_T)$. Ясно, что $u_\nu(t, x) \rightarrow u(t, x)$ в $L^1_{\text{loc}}(\Pi_T)$ при $\nu \rightarrow \infty$. По определению последовательности $u_{0,\nu}$ и g_ν сходятся поточечно при $\nu \rightarrow \infty$ к функциям u_0 и g и в пространствах $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ и $L^1_{\text{loc}}(\Pi_T)$ соответственно.

Так как $u_\nu(t, x)$ является о.э.р. задачи (1), (2) с $u_0 = u_{0,\nu}$, $g = g_\nu$, то выполнено условие (10): для всех $k \in \mathbb{R}$ и всех пробных функций $f = f(t, x) \in C_0^\infty(\overline{\Pi_T})$, $f \geq 0$,

$$\begin{aligned} & \int_{\Pi_T} \{ |u_\nu - k| f_t + \text{sign}(u_\nu - k) [(\varphi(u_\nu) - \varphi(k), \nabla_x f) + g_\nu f] \} dt dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^n} |u_{0,\nu}(x) - k| f(0, x) dx \geq 0. \end{aligned}$$

Переходя к пределу при $\nu \rightarrow \infty$, с учетом полученных выше предельных соотношений мы получаем, что для всех $k \in \mathbb{R}$ и всех $f = f(t, x) \in C_0^\infty(\overline{\Pi_T})$, $f \geq 0$,

$$\begin{aligned} & \int_{\Pi_T} \{ |u - k| f_t + \text{sign}(u - k) [(\varphi(u) - \varphi(k), \nabla_x f) + g f] \} dt dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^n} |u_0(x) - k| f(0, x) dx \geq 0, \end{aligned}$$

и по предложению 2 $u = u(t, x)$ — о.э.р. исходной задачи (1), (2).

Покажем, что $u(t, x)$ удовлетворяет требованию 1) теоремы. Пусть $v = v(t, x)$ — о.э.суб-р. задачи (1), (2). Так как функция $\tilde{v} = \tilde{v}(t) = M + \int_0^t M_1(s) ds$ является

о.э.р. (и поэтому о.э.супер-р.) этой задачи с данными $u_0 \equiv M$, $g \equiv M_1(t)$, то по предложению 1 А) для п.в. $t \in (0, T)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} (v(t, x) - \tilde{v}(t))^+ dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} (u_0(x) - M)^+ dx + \int_{\Pi_T} (g(t, x) - M_1(t))^+ dt dx = 0$$

и $v(t, x) \leq \tilde{v}(t)$ п.в. на Π_T . Используя это неравенство, очевидное тождество $\tilde{v}(t) - \tilde{u}_\nu(t) = M - d_\nu$ и оценку (16), мы устанавливаем, что для любых $\nu \in \mathbb{N}$, $h \in \mathbb{R}$, $0 < h < d_\nu - M$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (v(t, x) - u_\nu(t, x) + h)^+ dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n} (\tilde{v}(t) - u_\nu(t, x) + h)^+ dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} (\tilde{u}_\nu(t) - u_\nu(t, x) + h + M - d_\nu)^+ dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} (\tilde{u}_\nu(t) - u_\nu(t, x))^+ dx \leq C_\nu. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \mu_{n+1} \{ (t, x) \in \Pi_T : v(t, x) > u_\nu(t, x) \} \\ = \mu_{n+1} \{ (t, x) \in \Pi_T : (v(t, x) - u_\nu(t, x) + h)^+ > h \} \\ \leq \frac{1}{h} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} (v(t, x) - u_\nu(t, x) + h)^+ dx dt \leq C_\nu \frac{T}{h} < \infty. \end{aligned}$$

Снова применяя предложение 1 В), мы выводим, что для п.в. $t \in (0, T)$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (v(t, x) - u_\nu(t, x))^+ dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n} (u_0(x) - u_{0,\nu}(x))^+ dx \\ &+ \int_{\Pi_T} (g(t, x) - g_\nu(t, x))^+ dt dx = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $v(t, x) \leq u_\nu(t, x)$ п.в. на Π_T для всех $\nu \in \mathbb{N}$ и, переходя к пределу при $\nu \rightarrow \infty$, получаем, что $v(t, x) \leq u(t, x)$ п.в. на Π_T . Итак, условие 1) теоремы выполнено и, в частности, $u(t, x) = J^+(u_0, g)$ является наибольшим о.э.р. нашей задачи. Осталось доказать свойство 2).

Пусть $M = \max(\|u_0\|_\infty, \|v_0\|_\infty)$, $M_1(t) = \max(\|g(t, \cdot)\|_\infty, \|h(t, \cdot)\|_\infty)$. Выберем последовательность d_ν , $\nu \in \mathbb{N}$, так, что $M < d_{\nu+1} < d_\nu \forall \nu \in \mathbb{N}$, и положим при $\nu \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} u_{0,\nu}(x) &= \begin{cases} u_0(x), & |x| \leq \nu, \\ d_\nu, & |x| > \nu, \end{cases} & g_\nu(t, x) &= \begin{cases} g(t, x), & |x| \leq \nu, \\ M_1(t), & |x| > \nu, \end{cases} \\ v_{0,\nu}(x) &= \begin{cases} v_0(x), & |x| \leq \nu, \\ d_\nu, & |x| > \nu, \end{cases} & h_\nu(t, x) &= \begin{cases} h(t, x), & |x| \leq \nu, \\ M_1(t), & |x| > \nu. \end{cases} \end{aligned}$$

Пусть $u_\nu = u_\nu(t, x)$, $v_\nu = v_\nu(t, x)$ — о.э.р. задачи (1), (2) с данными $u_{0,\nu}$, g_ν и $v_{0,\nu}$, h_ν соответственно, а функции $\tilde{u}_\nu(t)$ определены выше. Тогда для любого положительного $h < d_\nu - d_{\nu+1}$ для п.в. $t \in (0, T)$

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} (u_{\nu+1}(t, x) - v_\nu(t, x) + h)^+ dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (u_{\nu+1}(t, x) - \tilde{u}_{\nu+1}(t) + \tilde{u}_\nu(t) - v_\nu(t, x) + h + d_{\nu+1} - d_\nu)^+ dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |u_{\nu+1}(t, x) - \tilde{u}_{\nu+1}(t)| dx + \int_{\mathbb{R}^n} |v_\nu(t, x) - \tilde{u}_\nu(t)| dx \leq C_\nu + C_{\nu+1} < +\infty \end{aligned}$$

с константами C_ν , определенными в (16). Как показано выше, из этого неравенства следует (ср. с (18)), что

$$\mu_{n+1} \{ (t, x) \in \Pi_T : u_{\nu+1}(t, x) > v_\nu(t, x) \} < \infty,$$

и по предложению 1 В)

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} (u_{\nu+1}(t, x) - v_\nu(t, x))^+ dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} (u_{0,\nu+1}(x) - v_{0,\nu}(x))^+ dx + \int_{\Pi_t} (g_{\nu+1}(\tau, x) - h_\nu(\tau, x))^+ d\tau dx \\ &= \int_{|x| \leq \nu} (u_0(x) - v_0(x))^+ dx + \int_0^t \int_{|x| \leq \nu} (g(\tau, x) - h(\tau, x))^+ d\tau dx. \quad (19) \end{aligned}$$

При $\nu \rightarrow \infty$ последовательность $u_{\nu+1}(t, x) - v_\nu(t, x)$ сходится к $u(t, x) - v(t, x)$, и, переходя к пределу в (19) с использованием леммы Фату, мы получаем оценку (15). Теорема доказана.

Предположим, что функция $u(t, x) \in L^\infty(\Pi_T)$ является наибольшим о.э.р. задачи Коши

$$u_t - \operatorname{div}_x \varphi(-u) = -g, \quad u(0, x) = -u_0(x).$$

Тогда по замечанию 1 б) функция $-u(t, x)$ — наименьшее о.э.р. исходной задачи, и это о.э.р. удовлетворяет свойствам, аналогичным указанным в теореме 1. Точнее, справедлива следующая

ТЕОРЕМА 1'. *Существует наименьшее о.э.р. $u = u(t, x) = J^-(u_0, g)$ задачи (1), (2). Кроме того,*

- 1) $u(t, x) \leq v(t, x)$ п.в. на Π_T для любого о.э.супер-р. $v(t, x)$ задачи (1), (2);
- 2) если $u = J^-(u_0, g)$, $v = J^-(v_0, h)$, то для п.в. $t \in (0, T)$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (u(t, x) - v(t, x))^+ dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n} (u_0(x) - v_0(x))^+ dx \\ &+ \int_{\Pi_t} (g(\tau, x) - h(\tau, x))^+ d\tau dx. \quad (20) \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 4. *Предположим, что $u^\pm = J^\pm(u_0, g)$, $v^\pm = J^\pm(v_0, h)$. Тогда*

1) *для п.в. $t \in (0, T)$*

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |u^\pm(t, x) - v^\pm(t, x)| dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |u_0(x) - v_0(x)| dx \\ &+ \int_{\Pi_t} |g(\tau, x) - h(\tau, x)| d\tau dx \end{aligned} \quad (21)$$

(невозрастание расстояния в L^1);

2) *если $u_0(x) \leq v_0(x)$ п.в. на $\mathbb{R}^n$, $g(t, x) \leq h(t, x)$ п.в. на Π_T , то $u^\pm(t, x) \leq v^\pm(t, x)$ п.в. на Π_T (монотонность).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства 1) нужно лишь поменять местами решения u и v в соотношении (15) (и соответственно в (20)) и сложить полученные неравенства. Утверждение 2) непосредственно следует из (15), (20).

Обозначим через D множество пар (u_0, g) , где $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^1_{\text{loc}}(\Pi_T)$ и удовлетворяет условию (3). Пусть $\alpha > 0$. Рассмотрим следующий функционал на D :

$$I_\alpha(u_0, g) = \text{ess sup}_{t \in (0, T)} \int_{\mathbb{R}^n} (u^+(t, x) - u^-(t, x)) e^{-\alpha|x|} dx, \quad u^\pm = J^\pm(u_0, g).$$

Если $u_0 - v_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $g - h \in L^1(\Pi_T)$, то, как это следует из (21), $\forall \alpha > 0$

$$|I_\alpha(u_0, g) - I_\alpha(v_0, h)| \leq 2(\|u_0 - v_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} + \|g - h\|_{L^1(\Pi_T)}), \quad (22)$$

т.е. этот функционал непрерывен по Липшицу на D относительно L^1 -метрики. Отсюда легко выводится следующий результат.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть D_u — подмножество D , состоящее из пар (u_0, g) , для которых задача (1), (2) однозначно разрешима. Тогда множество D_u замкнуто относительно L^1 -метрики. Другими словами, если последовательность $(u_k, g_k) \in D_u$, $k \in \mathbb{N}$, и пара $(u_0, g) \in D$ таковы, что $u_k - u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $g_k - g \in L^1(\Pi_T)$ и $u_k - u_0 \rightarrow 0$ в $L^1(\mathbb{R}^n)$, $g_k - g \rightarrow 0$ в $L^1(\Pi_T)$, то $(u_0, g) \in D_u$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\alpha > 0$. Очевидно, $(u_0, g) \in D_u$ тогда и только тогда, когда $I_\alpha(u_0, g) = 0$. Итак, $I_\alpha(u_k, g_k) = 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Так как $u_k - u_0 \rightarrow 0$ в $L^1(\mathbb{R}^n)$, $g_k - g \rightarrow 0$ в $L^1(\Pi_T)$, из оценки (22) следует, что $I_\alpha(u_0, g) = 0$.

Как следует из теоремы 2, неединственность о.э.р. задачи (1), (2) сохраняется после достаточно малого возмущения входных данных. Точнее, верно следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $(u_0, g) \in D \setminus D_u$, $u^\pm = J^\pm(u_0, g)$,*

$$C = \text{ess sup}_{t \in (0, T)} \int_{\mathbb{R}^n} (u^+(t, x) - u^-(t, x)) dx < +\infty.$$

Если $(v_0, h) \in D$, $u_0 - v_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $g - h \in L^1(\Pi_T)$ и $2(\|u_0 - v_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} + \|g - h\|_{L^1(\Pi_T)}) < C$, то $(v_0, h) \notin D_u$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме Леви $C_\alpha = I_\alpha(u_0, g) \rightarrow C$ при $\alpha \rightarrow 0+$. Поэтому найдется $\alpha > 0$ такое, что

$$2(\|u_0 - v_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} + \|g - h\|_{L^1(\Pi_T)}) < C_\alpha$$

и по оценке (22) $I_\alpha(v_0, h) > 0$, т.е. $(v_0, h) \notin D_u$.

Заметим, что в примерах неединственности из [7], [9], [10] константа $C = +\infty$. Таким образом, в этих примерах единственность нарушается при любом L^1 -возмущении входных данных.

§ 3. Единственность о.э.р. в случае периодических входных данных

Пусть $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_{n-1}\}$ – система линейно независимых векторов в $\mathbb{R}^n$. Функции $u(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $g(t, x) \in L^\infty(\Pi_T)$ будем называть ξ -периодическими, если $u(x + \xi_i) = u(x)$ п.в. на $\mathbb{R}^n$ и соответственно $g(t, x + \xi_i) = g(t, x)$ п.в. на Π_T для всех $i = 1, \dots, n-1$.

Верна следующая

ЛЕММА 1. Пусть входные данные $u_0(x)$, $g(t, x)$ – ξ -периодические функции. Тогда наибольшее и наименьшее о.э.р. задачи (1), (2) также являются ξ -периодическими функциями.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u^+(t, x)$ – наибольшее о.э.р. задачи (1), (2). Тогда функции $u^+(t, x \pm \xi_i)$, $1 \leq i \leq n-1$, – о.э.р. этой же задачи ввиду ξ -периодичности входных функций $u_0(x)$, $g(t, x)$. Так как $u^+(t, x)$ – наибольшее о.э.р., верны неравенства $u^+(t, x + \xi_i) \leq u^+(t, x)$, $u^+(t, x - \xi_i) \leq u^+(t, x)$ п.в. на Π_T . Применяя преобразование сдвига к последнему неравенству, запишем его в виде $u^+(t, x) \leq u^+(t, x + \xi_i)$ п.в. на Π_T . Отсюда и из первого неравенства следует, что $u^+(t, x + \xi_i) = u^+(t, x)$ п.в. на Π_T , $i = 1, \dots, n-1$. Итак, $u^+(t, x)$ – ξ -периодическая функция. Аналогично доказывается ξ -периодичность наименьшего о.э.р. $u^-(t, x)$.

ТЕОРЕМА 4. О.э.р. задачи (1), (2) с ξ -периодическими входными данными $u_0(x)$, $g(t, x)$ единственна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя невырожденное линейное преобразование пространственных переменных (см. замечание 1 d)), сведем задачу к случаю, когда $\xi_i = e_{i+1}$, $i = 1, \dots, n-1$, – последние $n-1$ канонических базисных векторов пространства $\mathbb{R}^n$. Пусть $u^+(t, x)$ и $u^-(t, x)$ – наибольшее и наименьшее о.э.р. задачи (1), (2). Нужно лишь установить, что эти о.э.р. равны п.в. на Π_T .

Выберем функции $p(y) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$, $q(t, s) \in C_0^\infty(\overline{Q}_T)$, $\overline{Q}_T = [0, T) \times \mathbb{R}$, $p, q \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}^{n-1}} p(y) dy = 1$, и положим $p_\nu(y) = \nu^{1-n} p(y/\nu)$, $\nu \in \mathbb{N}$. Так как функции u^+ , u^- – о.э.р. задачи (1), (2), они удовлетворяют тождеству (14) из следствия 3. Применяя разность соответствующих тождеств к пробной функции $h(t, x) = p_\nu(x')q(t, x_1)$, $x' = (x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$, получаем следующее

равенство:

$$\begin{aligned} & \int_{\Pi_T} [(u^+ - u^-)p_\nu(x')q_t(t, x_1) + (\varphi_1(u^+) - \varphi_1(u^-))p_\nu(x')q_{x_1}(t, x_1)] dt dx \\ & + \int_{\Pi_T} \sum_{i=2}^n (\varphi_i(u^+) - \varphi_i(u^-))\nu^{-n}p_{y_i}\left(\frac{x'}{\nu}\right)q(t, x_1) dt dx = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Запишем (23) в форме

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} J_1(x')p_\nu(x') dx' + \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \sum_{i=2}^n J_i(x')\nu^{-n}p_{y_i}\left(\frac{x'}{\nu}\right) dx' = 0,$$

где

$$\begin{aligned} J_1(x') &= \int_{\overline{Q}_T} [(u^+ - u^-)q_t(t, x_1) + (\varphi_1(u^+) - \varphi_1(u^-))q_{x_1}(t, x_1)] dt dx_1, \\ J_i(x') &= \int_{\overline{Q}_T} (\varphi_i(u^+) - \varphi_i(u^-))q(t, x_1) dt dx_1, \quad i = 2, \dots, n, \end{aligned}$$

и сделаем замену переменных, положив $y = x'/\nu$. Получим соотношение

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} J_1(\nu y)p(y) dy + \frac{1}{\nu} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \sum_{i=2}^n J_i(\nu y)p_{y_i}(y) dy = 0. \quad (24)$$

По лемме 1 u^+ и u^- являются ξ -периодическими функциями, откуда следует периодичность функции J_1 . Ясно также, что $J_i \in L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$, $i = 1, \dots, n$. Тогда, как это хорошо известно, последовательность $J_1(\nu y)$ сходится *-слабо в $L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ к постоянной $C = \int_P J_1(y) dy$, где $P = [0, 1]^{n-1}$, и в пределе при $\nu \rightarrow \infty$ из соотношения (24) следует, что $C = 0$, т.е.

$$\int_{\overline{Q}_T \times P} [(u^+ - u^-)q_t(t, x_1) + (\varphi_1(u^+) - \varphi_1(u^-))q_{x_1}(t, x_1)] dt dx = 0. \quad (25)$$

Выберем константу $M \geq \max(\|u^+\|_\infty, \|u^-\|_\infty)$, и пусть

$$\omega(r) = \max\{|\varphi_1(u) - \varphi_1(v)| : u, v \in [-M, M], |u - v| \leq r\}$$

— модуль непрерывности функции $\varphi_1(u)$ на $[-M, M]$. Функция $\omega(r)$ не убывает, субаддитивна на $[0, +\infty)$ и $\lim_{r \rightarrow 0+} \omega(r) = \omega(0) = 0$. Пусть $\varepsilon > 0$. Представим произвольное $r \geq 0$ в виде $r = k\varepsilon + s$, где $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $0 \leq s < \varepsilon$. Так как $\omega(r)$ не убывает и субаддитивна, то

$$\omega(r) \leq \omega((k+1)\varepsilon) \leq (k+1)\omega(\varepsilon) \leq (r+\varepsilon)\frac{\omega(\varepsilon)}{\varepsilon} = C_\varepsilon(r+\varepsilon) \quad (26)$$

при $C_\varepsilon = \omega(\varepsilon)/\varepsilon$. Пусть $\chi(s) \in C^\infty(\mathbb{R})$ — невозрастающая функция такая, что $\chi(s) = 1$ при $s \leq R$ и $\chi(s) = 0$ при $s \geq R + 1$ для некоторой положительной константы R , а функция $\theta(t) \in C_0^\infty([0, T])$ такова, что $\theta(t) \geq 0$, $\theta'(t) \leq 0$. Определим пробную функцию $q(t, x_1) = \chi(s)\theta(t)$, $s = |x_1| - C_\varepsilon(T - t)$. Подставив эту пробную функцию в (25), получим соотношение

$$\begin{aligned} & \int_{\overline{Q}_T \times P} (u^+ - u^-) \chi(s) \theta'(t) dt dx \\ & + \int_{\overline{Q}_T \times P} [C_\varepsilon(u^+ - u^-) + (\varphi_1(u^+) - \varphi_1(u^-)) \operatorname{sign}(x_1)] \chi'(s) \theta(t) dt dx = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Значения $u^+(t, x)$, $u^-(t, x)$ лежат в $[-M, M]$ для п.в. $(t, x) \in \Pi_T$ и по определению $\omega(r)$ и соотношению (26)

$$|\varphi_1(u^+) - \varphi_1(u^-)| \leq \omega(u^+ - u^-) \leq C_\varepsilon(u^+ - u^- + \varepsilon) \quad \text{п.в. на } \Pi_T.$$

Поэтому из (27) следует оценка (напомним также, что $\chi'(s) \leq 0$, $\theta(t) \geq 0$, $\theta'(t) \leq 0$)

$$\begin{aligned} & \int_{[0, T] \times [-R, R] \times P} (u^+ - u^-) |\theta'(t)| dt dx \\ & \leq \int_{\overline{Q}_T \times P} (u^+ - u^-) \chi(s) |\theta'(t)| dt dx \\ & \leq \int_{\overline{Q}_T \times P} [C_\varepsilon(u^+ - u^-) - C_\varepsilon(u^+ - u^- + \varepsilon)] \chi'(s) \theta(t) dt dx \\ & \leq \varepsilon C_\varepsilon \|\theta(t)\|_\infty \int_{\overline{Q}_T} |\chi'(s)| dt dx_1 = 2T\varepsilon C_\varepsilon \|\theta(t)\|_\infty, \end{aligned} \quad (28)$$

поскольку

$$\begin{aligned} \int_{\overline{Q}_T} |\chi'(s)| dt dx_1 &= 2 \int_0^T \int_0^{+\infty} [-\chi'(x_1 - C_\varepsilon(T - t))] dx_1 dt \\ &= 2 \int_0^T dt = 2T. \end{aligned}$$

Так как $\varepsilon C_\varepsilon = \omega(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0+} 0$, то в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0+$ из (28) следует, что

$$\int_{[0, T] \times [-R, R] \times P} (u^+ - u^-) |\theta'(t)| dt dx = 0$$

для всех $R > 0$ и при любом выборе θ . Отсюда, очевидно, следует требуемое равенство $u^+ = u^-$ п.в. на Π_T . Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 5 (принцип сравнения). Пусть $v(t, x)$ — о.э.суб-р., а $w(t, x)$ — о.э.супер-р. задачи (1), (2) с входными данными $(v_0(x), g(t, x))$ и $(w_0(x), h(t, x))$ соответственно, и предположим, что $v_0(x) \leq w_0(x)$ п.в. на $\mathbb{R}^n$, $g(t, x) \leq h(t, x)$ п.в. на Π_T . Если по крайней мере одни из данных $(v_0(x), g(t, x))$ или $(w_0(x), h(t, x))$ являются ξ -периодическими функциями, то $v(t, x) \leq w(t, x)$ п.в. на Π_T .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $v^\pm(t, x) = J^\pm(v_0, g)$, $w^\pm(t, x) = J^\pm(w_0, h)$. Предположим, что функции $w_0(x), h(t, x)$ — ξ -периодические. Тогда по следствию 4 и теореме 4

$$v(t, x) \leq v^+(t, x) \leq w^+(t, x) = w^-(t, x) \leq w(t, x) \quad \text{п.в. на } \Pi_T.$$

Случай ξ -периодических функций $v_0(x), g(t, x)$ разбирается аналогично:

$$v(t, x) \leq v^+(t, x) = v^-(t, x) \leq w^-(t, x) \leq w(t, x) \quad \text{п.в. на } \Pi_T.$$

В дополнение к теореме 4 заметим, что в случае ξ -периодических данных задачу (1), (2) можно рассматривать как задачу Коши с пространственными переменными на многообразии $T^{n-1} \times \mathbb{R}$, где T^{n-1} — $(n-1)$ -мерный тор. Одним из следствий теоремы 4 является существование и единственность о.э.р. этой задачи, понимаемого в смысле [17] (где исследован общий случай произвольного многообразия).

В заключение автор выражает благодарность профессору Филиппу Бенилану за гостеприимство и полезные обсуждения результатов работы во время визита автора в Университет г. Безансон (Франция).

Результаты настоящей статьи предварительно опубликованы в [18].

Список литературы

1. Кружков С. Н. Обобщенные решения задачи Коши в целом для нелинейных уравнений первого порядка // Докл. АН СССР. 1969. Т. 187. № 1. С. 29–32.
2. Кружков С. Н. Квазилинейные уравнения первого порядка со многими независимыми переменными // Матем. сб. 1970. Т. 81. № 2. С. 228–255.
3. Bénilan Ph. Équation d'évolution dans un espace de Banach quelconque et applications // Thèse de Doctorat d'Etat. Centre d'Orsey. Université de Paris-Sud, 1972.
4. Кружков С. Н., Хильдебранд Ф. Задача Коши для квазилинейных уравнений первого порядка в случае, когда область зависимости от начальных данных бесконечна // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1974. № 1. С. 93–100.
5. Кружков С. Н., Андреев П. А. К нелокальной теории задачи Коши для квазилинейных уравнений первого порядка в классе локально-суммируемых функций // Докл. АН СССР. 1975. Т. 220. № 1. С. 23–26.
6. Andreianov B. P., Bénilan Ph., Kruzhkov S. N. L^1 -theory of scalar conservation law with continuous flux function // J. Funct. Anal. 2000. V. 171. № 1. P. 15–33.
7. Панов Е. Ю. Обобщенные решения задачи Коши для квазилинейных законов сохранения // Дисс. . . . канд. физ.-матем. наук. М.: МГУ, 1991.
8. Панов Е. Ю. О мерозначных решениях задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка // Изв. РАН. Сер. матем. 1996. Т. 60. № 2. С. 107–148.
9. Кружков С. Н., Панов Е. Ю. Консервативные квазилинейные законы первого порядка с бесконечной областью зависимости от начальных данных // Докл. АН СССР. 1990. Т. 314. № 1. С. 79–84.
10. Kruzhkov S. N., Panov E. Yu. Osgood's type conditions for uniqueness of entropy solutions to Cauchy problem for quasilinear conservation laws of the first order // Ann. Univ. Ferrara Sez. VII (N.S.). 1996. V. 40 (1994). P. 31–54.
11. Бенилан Ф., Кружков С. Н. Квазилинейные уравнения первого порядка с непрерывными нелинейностями // Докл. РАН. 1994. Т. 339. № 2. С. 151–154.
12. Bénilan Ph., Kruzhkov S. N. Conservation laws with continuous flux functions // Non-linear Differential Equations Appl. 1996. V. 3. P. 395–419.

13. *Barthélemy L.* Problème d'obstacle pour une équation quasilinear du premier ordre // Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (5). 1988. V. 9. №2. P. 137–159.
14. *Barthélemy L., Bénélan Ph.* Subsolutions for abstract evolution equations // Potential Anal. 1992. V. 1. P. 93–113.
15. *Crandall M. G.* The semigroup approach to first order quasilinear equations in several space variables // Israel J. Math. 1972. V. 12. P. 108–122.
16. *Панов Е. Ю.* К теории обобщенных энтропийных суб- и супер-решений задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37. №2. С. 249–257.
17. *Панов Е. Ю.* О задаче Коши для квазилинейного уравнения первого порядка на многообразии // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. №2. С. 257–266.
18. *Panov E. Yu.* On maximal and minimal generalized entropy solutions to Cauchy problem for a first-order quasilinear equation // Preprint №2000/26. Laboratoire de mathématiques de Besançon, 2000.

Новгородский государственный университет
E-mail: pey@novsu.ac.ru

Поступила в редакцию
05.02.2001