Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Туганбаев, Строение дистрибутивных колец, *Матем. сб.*, 2002, том 193, номер 5, 113–128

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm654>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 17:13:52

УДК 512.55

А. А. Туганбаев

Строение дистрибутивных колец

В работе изучение строения дистрибутивных колец, у которых все делители нуля содержатся в радикале Джекобсона, сводится к исследованию дистрибутивных порядков в телах и цепных кольцах с обратимыми неделителями нуля.

Библиография: 11 названий.

Все кольца предполагаются ассоциативными и с ненулевой единицей. Модуль M называется *цепным*, если любые два его подмодуля сравнимы по включению (т.е. решетка $\text{Lat } M$ всех его подмодулей является цепью). Цепные справа кольца подробно исследуются в книгах К. Бессенродта, Х.Х. Брунгса и Г. Тёрнера (см. [1] и [2]). Модуль M называется *дистрибутивным*, если решетка $\text{Lat } M$ дистрибутивна. Кольцо A называется *дистрибутивным справа (слева)*, если оно является дистрибутивным правым (левым) A -модулем. Слова типа “дистрибутивное кольцо” означают, что соответствующие условия выполнены справа и слева. Дистрибутивные модули и кольца исследуются в книгах Е. А. Беренса, П. Кона и А. А. Туганбаева (см. [3]–[6]).

Если A – дистрибутивная справа область, то известно, что A – правый порядок в некотором теле Q [7] и для каждого максимального правого идеала M области A существует цепная справа правая локализация A_M , содержащаяся в теле Q [8]. Основными результатами настоящей работы являются теоремы 1–3. Кроме того, построен пример инвариантного дистрибутивного нелокализуемого равномерного подпрямо неразложимого кольца Безу, невлложимого в локальное кольцо (см. пример 3.3). Через $J(A)$ и $N(A)$ обозначаются радикал Джекобсона и множество всех правых или левых делителей нуля кольца A соответственно.

ТЕОРЕМА 1. *A – дистрибутивное кольцо и $N(A) \subseteq J(A)$ тогда и только тогда, когда существует такое цепное кольцо Q , что $J(Q) \subseteq A \cap N(Q)$ и факторкольцо $A/J(Q)$ является дистрибутивным порядком в теле $Q/J(Q)$.*

В этих условиях цепное кольцо Q определяется однозначно с точностью до изоморфизма и является классическим кольцом частных кольца A .

Смысл теоремы 1 состоит в сведении исследования дистрибутивных колец, у которых все делители нуля лежат в радикале Джекобсона, к исследованию цепных колец и дистрибутивных порядков в телах.

ТЕОРЕМА 2. *A – дистрибутивное первичное кольцо и $J(A)$ содержит некторый вполне первичный идеал кольца A тогда и только тогда, когда существует такое цепное первичное кольцо Q , что $J(Q) \subseteq A \cap N(Q)$ и факторкольцо $A/J(Q)$ является дистрибутивным порядком в теле $Q/J(Q)$.*

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00382).

В этих условиях цепное первичное кольцо Q определяется однозначно с точностью до изоморфизма и является классическим кольцом частных кольца A .

ТЕОРЕМА 3. Если A – дистрибутивное справа кольцо и $N(A) \subseteq J(A)$, то A – правый порядок в цепном справа кольце Q , $J(Q) \subseteq N(Q)$ и для каждого максимального правого идеала M кольца A существует такая цепная справа правая локализация A_M , что $A \subseteq A_M \subseteq Q$.

Доказательство теорем 1–3 разбито на ряд утверждений. Приведем необходимые обозначения и определения. Пусть A – кольцо. Если M – правый (соответственно левый) A -модуль, то через $N_r(M)$ (соответственно $N_\ell(M)$) обозначается множество всех элементов кольца A , аннулирующих ненулевые элементы модуля M (в частности, $N_r(A)$ и $N_\ell(A)$ – множество всех правых делителей нуля и множество всех левых делителей нуля кольца A соответственно). Кроме того, через $r_A(m)$ (соответственно $\ell_A(m)$) обозначается правый (соответственно левый) аннулятор элемента m правого (соответственно левого) A -модуля M . Ясно, что $N(A) = N_r(A) \cup N_\ell(A)$. Множество $A \setminus N(A)$ обозначается через $T(A)$, а элементы множества $T(A)$ называются *регулярными элементами* (в A). Подмножество T кольца A называется *мультипликативным*, если $1 \in T$, $0 \notin T$ и T мультипликативно замкнуто в A . Подмножество T кольца A называется *перестановочным справа*, если для любых элементов $a \in A$ и $t \in T$ существуют такие элементы $b \in A$ и $u \in T$, что $au = tb$. Подмножество T кольца A называется *реверсивным справа*, если для любых элементов $a \in A$ и $t \in T$ таких, что $ta = 0$, существует элемент $u \in T$ такой, что $au = 0$. Подмножество T кольца A называется *множеством правых знаменателей* (в A), если выполняются следующие два эквивалентных условия (см. [9; с. 51]):

(1) T – перестановочное справа реверсивное справа мультипликативное множество;

(2) существуют кольцо A_T и кольцевой гомоморфизм $f: A \rightarrow A_T$ такие, что все элементы множества $f(T)$ обратимы в A_T , $A_T = \{f(a)f(t)^{-1} : a \in A, t \in T\}$ и $\text{Ker } f = \{a \in A : T \cap r_A(a) \neq \emptyset\}$.

Если $T = A \setminus M$, где M – правый идеал кольца A , то кольцо A_T называется *правой локализацией относительно M* , и мы пишем A_M вместо A_T . Кольцо A называется *локализуемым справа*, если для любого его максимального правого идеала M правая локализация A_M существует. Подмножество T кольца A называется *правым множеством Оре*, если выполняются следующие эквивалентные условия:

(1) T – перестановочное справа мультипликативное подмножество в $T(A)$;

(2) T – множество правых знаменателей и $T \subseteq T(A)$;

(3) существует такое кольцо A_T , что A – унитарное подкольцо в A_T , все элементы множества T обратимы в A_T и $A_T = \{at^{-1} : a \in A, t \in T\}$.

В этом случае кольцо A_T называется *правым кольцом частных кольца A относительно T* . Если $T(A)$ – правое множество Оре, то кольцо $A_{T(A)}$ называется *правым классическим кольцом частных* кольца A и говорят, что A – *правый порядок* в Q .

Кольцо A называется *локальным*, если факторкольцо $A/J(A)$ является телом (это равносильно тому, что для любого необратимого элемента $a \in A$ элемент $1 - a$ обратим). Непосредственно проверяется, что все цепные справа кольца ло-

кальны. Модуль называется *равномерным*, если любые два его ненулевых подмодуля имеют ненулевое пересечение. Кольцо называется *инвариантным справа (слева)*, если все его правые (левые) идеалы являются идеалами. Модуль, у которого все конечно порожденные подмодули являются циклическими, называется *модулем Безу*. Правый модуль M над областью A называется *делимым*, если для любого элемента $t \in M$ и каждого ненулевого элемента $a \in A$ существует такой элемент $x \in M$, что $t = xa$. Правый или левый идеал B кольца A называется *вполне первичным*, если $B \neq A$ и множество $A \setminus B$ мультипликативно замкнуто. Подмодуль N модуля M называется *существенным* (в M), если $N \cap X \neq 0$ для каждого ненулевого подмодуля X модуля M ; в этом случае модуль M называется *существенным расширением* модуля N . Подмодуль N модуля M называется *замкнутым* (в M), если любой подмодуль модуля M , являющийся существенным расширением модуля N , совпадает с N .

§1. Доказательство теоремы 1

ЛЕММА 1.1. Пусть Q – локальное кольцо с радикалом Джекобсона N такое, что все элементы из N являются делителями нуля в Q ; A – унитарное подкольцо в Q , содержащее N ; $h: Q \rightarrow Q/N$ – естественный эпиморфизм. Тогда верны следующие утверждения:

- (1) $N = N(A) = N(Q)$, $N = tN \subset tA$ и $N = Nt \subset At$ для любого элемента $t \in A \setminus N$;
- (2) если $h(A)$ – левый порядок в теле $h(Q)$, то A – левый порядок в кольце Q ;
- (3) если A – левый порядок в кольце Q , то $h(A)$ – левый порядок в теле $h(Q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Так как Q – локальное кольцо с радикалом Джекобсона N и все элементы из N являются делителями нуля в Q , то $N = N(Q)$. Поскольку $N(Q) = N \subset A$, то $N(Q) = N(A)$. Пусть $t \in A \setminus N \subseteq Q \setminus N$. Так как Q – локальное кольцо, то элемент t обратим в Q . Кроме того, N – идеал кольца Q . Поэтому $N = Nt^{-1} = t^{-1}N$ и $N = Nt = tN$.

(2) Пусть $q \in Q$. Так как $h(A)$ – левый порядок в теле $h(Q)$, то существуют такие элементы $a \in A$ и $t \in A \setminus N$, что $h(q) = h(t)^{-1}h(a)$. Тогда существует такой элемент $x \in N$, что $tq = a + x$. Так как Q – локальное кольцо с радикалом Джекобсона N и $t \in Q \setminus N$, то t – обратимый элемент в Q . Поэтому $q = t^{-1}(a + x)$ и A – левый порядок в кольце Q .

(3) Пусть $q \in Q$. Так как A – левый порядок в Q , то существуют такие элементы $a, t \in A$, что элемент t обратим в Q и $q = t^{-1}a$. Поэтому $h(q) = h(t)^{-1}h(a)$ и $h(A)$ – левый порядок в теле $h(Q)$.

Следующая лемма вытекает из результатов [10]. Для удобства мы приведем краткое доказательство этой леммы.

ЛЕММА 1.2 [10]. Пусть A – кольцо и M – правый A -модуль. Тогда равносильны следующие условия:

- (1) M – дистрибутивный модуль;
- (2) для любых элементов $x, y \in M$ существует такой элемент $a \in A$, что $xa, y(1 - a) \in xA \cap yA$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) $\Rightarrow$ (2). Так как M дистрибутивен, то

$$(x + y)A = (x + y)A \cap (xA + yA) = (x + y)A \cap xA + (x + y)A \cap yA.$$

Поэтому существуют такие элементы $a, b \in A$, что $x + y = (x + y)b + (x + y)a$, $(x + y)b \in xA$ и $(x + y)a \in yA$. Тогда $yb = (x + y)b - xb \in xA \cap yA$ и $xa = (x + y)a - ya \in xA \cap yA$. Так как $(x + y)(1 - a - b) = 0$, то

$$y(1 - a) = (x + y)(1 - a - b) - x(1 - a - b) + yb = x(a + b - 1) + yb \in xA \cap yA.$$

(2) $\Rightarrow$ (1). Пусть X, Y и Z — подмодули модуля M и $z \in (X + Y) \cap Z$. Существуют такие элементы $x \in X$ и $y \in Y$, что $z = x + y$. По условию существует такой элемент $a \in A$, что $xa, y(1 - a) \in xA \cap yA$. Тогда

$$\begin{aligned} z(1 - a) &= x(1 - a) + y(1 - a) \in xA \cap zA \subseteq X \cap Z, \\ za &= xa + ya \in yA \cap zA \subseteq Y \cap Z, \\ z &= z(1 - a) + za \in X \cap Z + Y \cap Z, \\ (X + Y) \cap Z &\subseteq X \cap Z + Y \cap Z \subseteq (X + Y) \cap Z. \end{aligned}$$

ЛЕММА 1.3. Пусть Q — цепное справа кольцо, $h: Q \rightarrow Q/J(Q)$ — естественный эпиморфизм, A — такое унитарное подкольцо в Q , что $J(Q) \subseteq A \cap N(Q)$ и $h(A)$ — дистрибутивное справа кольцо, являющееся левым порядком в теле $h(Q)$. Тогда A — дистрибутивное справа кольцо, являющееся левым порядком в кольце Q .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Цепное справа кольцо Q является локальным кольцом. Так как $h(A)$ — левый порядок в теле $h(Q)$, то по лемме 1.1 (2) A — левый порядок в кольце Q . Пусть $b, c \in A$. По лемме 1.2 остается доказать существование такого элемента $a \in A$, что $ba \in cA$ и $c(1 - a) \in bA$. Так как Q — цепное справа кольцо, то можно считать, что $c = bq$ для некоторого элемента $q \in Q$. Если $q \in J(Q) \subseteq A$, то $c \in bA$ и можно положить $a \equiv 0$. Поэтому можно считать, что $q \in Q \setminus J(Q)$. Так как Q — локальное кольцо, то q — обратимый элемент. Так как A — левый порядок в Q , то для обратимого элемента q существуют такие элементы $x, y \in A \setminus J(Q)$, что $q = x^{-1}y$. Так как $h(A)$ — дистрибутивное справа кольцо, то по лемме 1.2 существует такой элемент $a \in A$, что $h(xa) \in h(yA)$ и $h(y(1 - a)) \in h(xA)$. Так как $q = x^{-1}y \in Q \setminus J(Q)$, то $x, y \in Q \setminus J(Q)$. По лемме 1.1 (1) $J(Q) \subseteq xA \cap yA$. Поэтому $xa \in yA + J(Q) = yA$ и $y(1 - a) \in xA + J(Q) = xA$. Тогда $ba = bx^{-1}xa \in bx^{-1}yA = cA$ и $c(1 - a) = bx^{-1}y(1 - a) \in bx^{-1}xA = bA$. Поэтому a — искомый элемент.

ЛЕММА 1.4. Если A — равномерное справа кольцо, то $N_\ell(A)$ — вполне первичный идеал кольца A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in N_\ell(A)$ и a — ненулевой элемент кольца A . Существует такой ненулевой элемент $x' \in A$, что $xx' = 0$. Так как $axx' = 0$, то $ax \in N_\ell(A)$. Так как a и x' — ненулевые элементы равномерного справа кольца A , то существуют такие ненулевые элементы $b, c \in A$, что $ab = x'c \neq 0$. Тогда $(xa)b = xx'c = 0$ и $xa \in N_\ell(A)$. Пусть $y \in N_\ell(A)$. Существуют такие ненулевые элементы $d, e \in A$, что $xd = ye = 0$. Так как A — равномерное справа кольцо, то существует ненулевой элемент $f \in dA \cap eA$. Так как $(x + y)f = 0$, то $x + y \in N_\ell(A)$. Поэтому $N_\ell(A)$ — идеал кольца A . Непосредственно проверяется, что $N_\ell(A)$ — вполне первичный идеал.

ЛЕММА 1.5. Пусть A – дистрибутивное справа кольцо, N – подмножество кольца A и $T \equiv A \setminus N$. Тогда верны следующие утверждения:

- (1) если N – вполне первичный левый идеал кольца A , то для любых элементов $x \in A$ и $t \in T$ существуют такие элементы $x' \in A$ и $t' \in T$, что $xt' = tx'$;
- (2) если $N \subseteq J(A)$ и N – вполне первичный правый идеал кольца A , то N – идеал кольца A , $N = yN \subset yA$ и $\ell(y) \subseteq \ell(N)$ для любого элемента $y \in T$, причем для любых элементов $x \in A$ и $t \in T$ существуют такие элементы $x' \in A$ и $t' \in T$, что $xt' = tx'$;
- (3) если N – вполне первичный левый идеал кольца A и все элементы множества T регуляры в A , то T – правое множество Оре и правое кольцо частных A_T является цепным справа кольцом;
- (4) если N – вполне первичный правый идеал кольца A , лежащий в $J(A)$, и все элементы множества T регуляры в A , то T – правое множество Оре и правое кольцо частных A_T является цепным справа кольцом;
- (5) если N – вполне первичный правый идеал кольца A , причем $N \subseteq J(A)$ и $\ell(N) = 0$, то все элементы множества T не являются правыми делителями нуля в A и $N_r(A) \subseteq N \subseteq J(A)$;
- (6) если A – первичное кольцо и N – вполне первичный идеал кольца A , причем $N \subseteq J(A)$, то все элементы множества T не являются правыми делителями нуля в A и $N_r(A) \subseteq N \subseteq J(A)$;
- (7) если N – максимальный правый идеал кольца A и все делители нуля кольца A лежат в $J(A)$, то T – правое множество Оре и правое кольцо частных A_T является цепным справа кольцом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) По лемме 1.2 существуют такие элементы a, c и d кольца A , что $xa = tc$ и $t(1 - a) = xd$. Если $a \in T$, то можно положить $t' \equiv a$ и $x' \equiv c$. Поэтому можно считать, что $a \in N$. Тогда $1 - a \in T$ и $xd = t(1 - a) \in T$. Так как N – левый идеал, то $d \in T$, поскольку в противном случае $t(1 - a) = xd \in T \cap N = \emptyset$. В этом случае можно положить $t' \equiv d$ и $x' \equiv 1 - a$.

(2) Пусть x – элемент правого идеала N и a – элемент кольца A . Элемент $1 + axa$ обратим в A , обратимый элемент $(1 + axa)^{-1}$ не содержится во вполне первичном правом идеале N и $(1 + axa)^{-1}(1 + axa)x = x \in N$. Поэтому $(1 + axa)x \in N$ и $(ax)^2 = (1 + axa)x - x \in N$. Так как $(ax)^2 \in N$ и N – вполне первичный правый идеал, то $ax \in N$ и N – идеал кольца A . В силу (1) для любых элементов $x \in A$ и $t \in T$ существуют такие элементы $x' \in A$ и $t' \in T$, что $xt' = tx'$.

Пусть $x \in N$ и $y \in T$. По лемме 1.2 существует такой элемент $a \in A$, что $xa \in yA$ и $y(1 - a) \in xA \subseteq N$. Так как N – вполне первичный правый идеал и $y \in T$, то $1 - a \in N \subseteq J(A)$. Поэтому a – обратимый элемент и $x = xaa^{-1} \in yA$. Тогда $x = yb$ для некоторого элемента $b \in A$. Так как N – вполне первичный идеал и $y \in T$, то $b \in N$. Поэтому $x = yb \in yN$ и $N \subseteq yN \subseteq N$. Так как $N \subseteq yA$, то $\ell(y) \subseteq \ell(N)$.

(3) В силу (1) T – правое множество Оре. Поэтому правое кольцо частных A_T существует. Пусть $Q \equiv A_T$. Докажем, что Q – цепное справа кольцо. Достаточно доказать, что для любых элементов q_1 и q_2 кольца Q верно, что либо $q_1 \in q_2Q$, либо $q_2 \in q_1Q$. Существуют такие элементы $x_1, x_2 \in A$ и $t \in A \setminus N$, что $q_1 = x_1t^{-1}$ и $q_2 = x_2t^{-1}$. По лемме 1.2 существует такой элемент $a \in A$, что $x_1a \in x_2A$ и $x_2(1 - a) \in x_1A$. Множество T содержит хотя бы один из элементов a и $1 - a$.

Можно считать, что $a \in T$. Тогда a – обратимый элемент кольца Q . Поэтому

$$q_1 = x_1 t^{-1} = x_1 a \cdot a^{-1} t^{-1} \in x_2 A a^{-1} t^{-1} \subseteq x_2 Q = q_2 Q.$$

(4) Утверждение следует из (2) и (3).

(5) Утверждение следует из того, что в силу (2) $\ell(t) \subseteq \ell(N) = 0$ для любого элемента $t \in T$.

(6) Так как A – первичное кольцо, то либо $\ell(N) = 0$, либо $N = 0$. Если $\ell(N) = 0$, то утверждение следует из (5). Если $N = 0$, то A – область и утверждение очевидно.

(7) Так как $J(A) \subseteq N$ и все делители нуля кольца A лежат в $J(A)$, то все элементы множества T регулярны в A . Если N – идеал, то факторкольцо A/N является телом, N – вполне первичный идеал и в силу (3) T – правое множество Оре и правое кольцо частных A_T является цепным справа кольцом. Допустим, что N не является идеалом. Тогда $at \notin N$ для некоторых элементов $a \in A$ и $t \in N$. Обозначим через X и Y правые идеалы $\{x \in A : ax \in N\}$ и $\{y \in A : (1+a)y \in N\}$ соответственно. Так как N – максимальный правый идеал, то X и Y – максимальные правые идеалы. Тогда $X \not\subseteq N$ и $Y \not\subseteq N$, поскольку $at \notin N$ и $(1+a)t = t + at \notin N$. Поэтому $A = N + X = N + Y$. Кроме того, $X \cap Y \subseteq (1+a)(X \cap Y) - a(X \cap Y) \subseteq N$. Учитывая правую дистрибутивность кольца A , получаем, что $N = N + X \cap Y = (N + X) \cap (N + Y) = A$; получено противоречие.

ЛЕММА 1.6. Пусть A – такое дистрибутивное справа кольцо, что $N(A)$ – вполне первичный левый идеал кольца A . Тогда A – правый порядок в цепном справа кольце Q и $J(Q) = N(A)Q$. Кроме того, если $N(A) \subseteq J(A)$, то $QN(A) = N(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 1.5 (3) A – правый порядок в цепном справа кольце Q . Так как A – правый порядок в локальном кольце Q , то каждый необратимый элемент кольца Q является делителем нуля. Поэтому $J(Q) = N(Q) \supset N(A)Q$. Пусть $a \in A, t \in T$ и $at^{-1} \in J(Q)$. Тогда элемент a необратим в Q . Кроме того, A – правый порядок в Q . Поэтому $a \in N(A)$, $at^{-1} \in N(A)Q$ и $J(Q) \subseteq N(A)Q \subseteq J(Q)$.

Допустим, что $N(A) \subseteq J(A)$. Докажем, что $QN(A) = N(A)$. Достаточно доказать, что $y \in xN(A)$ для любых элементов $x \in A \setminus N(A)$ и $y \in N(A)$. По лемме 1.2 существует такой элемент $a \in A$, что $xa \in yA$ и $y(1-a) \in xA$. Так как $x \notin N(A)$ и xa – элемент вполне первичного идеала $N(A)$, то $a \in N(A) \subseteq J(A)$. Поэтому $1-a$ – обратимый элемент и $y = y(1-a)(1-a)^{-1} \in xA$. Тогда $y = xb$ для некоторого элемента $b \in A$. Так как $x \notin N(A)$ и xb – элемент вполне первичного идеала $N(A)$, то $b \in N(A)$ и $y = xb \in xN(A)$.

ЛЕММА 1.7. Пусть A – дистрибутивное справа кольцо и $N_r(A) \subseteq J(A)$. Тогда верны следующие утверждения:

(1) A – равномерное справа кольцо и $N_\ell(A)$ – вполне первичный идеал кольца A ;

(2) если $N_r(A)$ – вполне первичный идеал кольца A , то $N_r(A)$ и $N_\ell(A)$ – сравнимые по включению вполне первичные идеалы кольца A , $N(A)$ – вполне первичный идеал кольца A , A – правый порядок в цепном справа кольце Q , $J(Q) = N(A)Q$ и либо $N(A) = N_r(A)$, либо $N(A) = N_\ell(A)$;

(3) если A – равномерное слева кольцо, то $N_r(A)$ и $N_\ell(A)$ – сравнимые по включению вполне первичные идеалы, $N(A)$ – вполне первичный идеал, A –

правый порядок в цепном справа кольце Q , $J(Q) = N(A)Q$ и либо $N(A) = N_r(A)$, либо $N(A) = N_\ell(A)$;

(4) если $N_r(A)$ – вполне первичный идеал кольца A и $N(A) \subseteq J(A)$, то A – правый порядок в цепном справа кольце Q , $J(Q) = N(A)Q$ и $QN(A) = N(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Пусть x – ненулевой элемент кольца A и y – такой элемент кольца A , что $xA \cap yA = 0$. По лемме 1.2 существует такой элемент $a \in A$, что $xa, y(1-a) \in xA \cap yA = 0$. Тогда $a \in N_r(A) \subseteq J(A)$. Поэтому $1-a$ – обратимый элемент, $y = y(1-a)(1-a)^{-1} = 0$ и A – равномерное справа кольцо. По лемме 1.4 $N_\ell(A)$ – вполне первичный идеал.

(2) Докажем, что вполне первичные идеалы $N_r(A)$ и $N_\ell(A)$ сравнимы по включению. Допустим противное. Тогда существуют элементы $x \in N_\ell(A) \setminus N_r(A)$ и $y \in N_r(A) \setminus N_\ell(A)$. По лемме 1.2 существует такой элемент $a \in A$, что $xa \in yA \subseteq N_r(A)$ и $y(1-a) \in xA \subseteq N_\ell(A)$. Так как xa – элемент вполне первичного идеала $N_r(A)$ и $x \notin N_r(A)$, то $a \in N_r(A) \subseteq J(A)$. Поэтому $1-a$ – обратимый элемент и $y = y(1-a)(1-a)^{-1} \in N_\ell(A)$; получено противоречие. Так как $N(A) = N_r(A) \cup N_\ell(A)$ и вполне первичные идеалы $N_r(A)$ и $N_\ell(A)$ сравнимы по включению, то $N(A)$ – вполне первичный идеал и либо $N(A) = N_r(A)$, либо $N(A) = N_\ell(A)$. По лемме 1.6 A – правый порядок в цепном справа кольце Q и $J(Q) = N(A)Q$.

(3) Так как A – равномерное слева кольцо, то по симметричной версии леммы 1.4 $N_r(A)$ – вполне первичный идеал кольца A . Оставшиеся утверждения следуют из (2).

(4) В силу (2) A – правый порядок в цепном справа кольце Q , $J(Q) = N(A)Q$ и $N(A)$ – вполне первичный идеал кольца A . По лемме 1.6 $QN(A) = N(A)$.

ЛЕММА 1.8 [9; с. 51]. Пусть A – кольцо и T – правое подмножество Оре в A . Тогда правое кольцо частных A_T является единственным с точностью до изоморфизма. Кроме того, если A обладает левым кольцом частных ${}_T A$ относительно множества T , то кольца A_T и ${}_T A$ можно естественным образом отождествить.

ЛЕММА 1.9. Пусть A – такое дистрибутивное кольцо, что $J(A)$ содержит все делители нуля кольца A . Тогда A – порядок в цепном кольце Q , $J(Q) \subseteq A \cap N(Q)$ и факторкольцо $A/J(Q)$ является дистрибутивным порядком в теле $Q/J(Q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию $N(A) \subseteq J(A)$. Из леммы 1.7 (1) и ее симметричной версии следует, что $N_\ell(A)$ и $N_r(A)$ – вполне первичные идеалы кольца A . Из леммы 1.7 (4) и ее симметричной версии следует, что существуют такие кольца Q и Q' , что Q – цепное справа кольцо, Q' – цепное слева кольцо, A – правый порядок в кольце Q , A – левый порядок в Q' , $J(Q) = N(A)Q$, $J(Q') = Q'N(A)$, $QN(A) = N(A)$ и $N(A)Q' = N(A)$. Учитывая лемму 1.8, получаем, что $A \setminus N(A)$ – правое и левое множество Оре, Q – цепное кольцо, A – порядок в Q ,

$$J(Q) = N(A)Q = QN(A) = N(A) \subseteq N(Q) \subseteq J(Q),$$

причем все элементы из $J(Q)$ являются правыми или левыми делителями нуля в Q . По лемме 1.1 (3) и ее симметричной версии $A/J(Q)$ – порядок в теле $Q/J(Q)$. Факторкольцо $A/J(Q)$ дистрибутивного кольца A является дистрибутивным кольцом.

Теорема 1 следует из лемм 1.3, 1.8 и 1.9.

§ 2. Доказательство теорем 2 и 3

Для удобства мы приведем краткое доказательство следующей известной леммы.

ЛЕММА 2.1 [7]. Пусть A – кольцо и M – дистрибутивный правый A -модуль. Тогда верны следующие утверждения:

- (1) если $x, y \in M$ и $xA \cap yA = 0$, то существует такой элемент $a \in A$, что $xa = y(1 - a) = 0$;
- (2) если X и Y – такие подмодули модуля M , что $X \cap Y = 0$, то $\text{Hom}(X, Y) = \text{Hom}(Y, X) = 0$;
- (3) для каждого равномерного правого A -модуля N и любых гомоморфизмов $f, g: M \rightarrow N$ подмодули $\text{Ker } f$ и $\text{Ker } g$ модуля M сравнимы по включению;
- (4) если A равномерно справа, то M равномерен тогда и только тогда, когда для любых элементов $x, y \in M$ правые аннуляторы $r(x)$ и $r(y)$ сравнимы по включению;
- (5) если A дистрибутивно справа, то для любых двух вполне первичных правых идеалов X и Y кольца A верно, что либо $X + Y = A$, либо правые идеалы X и Y сравнимы по включению.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Утверждение следует из леммы 1.2.

(2) Пусть $f: xA \rightarrow yA$ – гомоморфизм, $x \in X$ и $y \equiv f(x) \in Y$. В силу (1) существует такой элемент $a \in A$, что $xa = 0$ и $y(1 - a) = 0$. Тогда $y = ya + y(1 - a) = ya = f(xa) = f(0) = 0$. Поэтому $\text{Hom}(X, Y) = 0$.

(3) Допустим противное. Существуют ненулевые элементы $u \in \text{Ker } g \setminus \text{Ker } f$ и $v \in \text{Ker } f \setminus \text{Ker } g$. Ненулевые подмодули $f(uA)$ и $g(vA)$ равномерного модуля N имеют ненулевое пересечение. Поэтому существует ненулевой элемент $t \in f(uA) \cap g(vA)$. Существуют такие элементы $x \in uA \subseteq \text{Ker } g$ и $y \in vA \subseteq \text{Ker } f$, что $t = f(x) = g(y) \neq 0$. По лемме 1.2 существует такой элемент $a \in A$, что элементы xa и $y(1 - a)$ содержатся в $xA \cap yA \subseteq \text{Ker } f \cap \text{Ker } g$. Поэтому $ta = f(xa) = 0$ и $t(1 - a) = g(y(1 - a)) = 0$. Так как $0 \neq t = ta + t(1 - a) = 0$, то получаем противоречие.

(4) Допустим, что правые аннуляторы любых двух элементов из M сравнимы по включению. Пусть $x, y \in M$ и $xA \cap yA = 0$. Можно считать, что $r(x) \subseteq r(y)$. В силу (1) существует такой элемент $a \in A$, что $a \in r(x) \subseteq r(y)$ и $1 - a \in r(y)$. Тогда $1 = a + (1 - a) \in r(y)$. Поэтому $y = 0$ и M равномерен.

Допустим, что M равномерен. Существуют гомоморфизмы $f, g: A_A \rightarrow M$ такие, что $f(1) = x$ и $g(1) = y$. В силу (3) можно считать, что $\text{Ker } f \subseteq \text{Ker } g$. Так как $\text{Ker } f = r(x)$ и $\text{Ker } g = r(y)$, то $r(x) \subseteq r(y)$.

(5) Допустим, что правые идеалы X и Y несравнимы по включению. Тогда существуют элементы $x \in X \setminus Y$ и $y \in Y \setminus X$. По лемме 1.2 существует такой элемент $a \in A$, что $xa \in yA \subseteq Y$ и $y(1 - a) \in xA \subseteq X$. Так как правые идеалы X и Y вполне первичны, то $a \in Y$ и $1 - a \in X$. Поэтому

$$A = (1 - a)A + aA \subseteq X + Y \subseteq A.$$

ЛЕММА 2.2. Пусть A – кольцо, M – дистрибутивный правый A -модуль и $N_r(M)$ – множество всех элементов кольца A , являющихся правыми аннуляторами ненулевых элементов модуля M . Тогда верны следующие утверждения:

- (1) если $1 - a \notin N_r(M)$ для каждого элемента $a \in N_r(M)$, то M – равномерный модуль;
- (2) если $N_r(M)$ – подполугруппа аддитивной группы A , то M – равномерный модуль;
- (3) если $N_r(M) \subseteq J(A)$, то M – равномерный модуль;
- (4) если A – равномерное справа кольцо, то
- M – равномерный модуль $\Leftrightarrow$
 $N_r(M)$ – подполугруппа аддитивной группы $A \Leftrightarrow$
 $N_r(M)$ – вполне первичный правый идеал кольца A ;
- (5) если A – равномерное справа кольцо и $N_r(M) \subseteq J(A)$, то M – равномерный модуль и $N_r(M)$ – вполне первичный идеал кольца A ;
- (6) если X – подмодуль модуля M и $f \in \text{Hom}(X, M)$, то X – существенный подмодуль модуля $X + f(X)$ (следовательно, если X – замкнутый подмодуль модуля M , то X – вполне инвариантный подмодуль в M);
- (7) если M_1 и M_2 – такие подмодули модуля M , что $M_1 \cap M_2 = 0$, то существуют вполне инвариантные подмодули X_1 и X_2 модуля M такие, что $X_1 \cap X_2 = 0$, $M_1 \subseteq X_1$ и $M_2 \subseteq X_2$;
- (8) M – равномерный модуль тогда и только тогда, когда любые два его вполне инвариантных ненулевых подмодуля имеют ненулевое пересечение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Пусть x – ненулевой элемент модуля M и y – такой элемент модуля M , что $xA \cap yA = 0$. По лемме 2.1 (1) существует такой элемент a кольца A , что $xa = 0$ и $y(1 - a) = 0$. Тогда $a \in N_r(M)$. По условию $1 - a \notin N_r(M)$. Тогда $y = 0$, поскольку $y(1 - a) = 0$. Поэтому M – равномерный модуль.

(2) Пусть a – элемент множества $N_r(M)$. В силу (1) достаточно доказать, что $1 - a \notin N_r(M)$. Допустим противное. Так как $N_r(M)$ – подполугруппа аддитивной группы A , то $1 = a + (1 - a) \in N_r(M)$. Поэтому $t \cdot 1 = 0$ для некоторого ненулевого элемента t модуля M ; получено противоречие.

(3) Пусть a – элемент множества $N_r(M) \subseteq J(A)$. Тогда элемент $1 - a$ обратим в A . Поэтому $1 - a \notin N_r(M)$. В силу (1) M – равномерный модуль.

(4) Докажем первую эквивалентность. Импликация $\Leftarrow$ следует из (2).

$\Rightarrow$. Пусть b и c – элементы множества $N_r(M)$. Существуют такие ненулевые элементы x и y модуля M , что $b \in r(x)$ и $c \in r(y)$. По лемме 2.1 (4) правые идеалы $r(x)$ и $r(y)$ сравнимы по включению. Без ограничения общности можно считать, что $r(x) \subseteq r(y)$. Тогда $b + c \in r(x) + r(y) = r(y)$. Поэтому $b + c \in N_r(M)$.

Докажем вторую эквивалентность. Импликация $\Leftarrow$ очевидна.

$\Rightarrow$. Пусть b – элемент множества $N_r(M)$. Существует такой ненулевой элемент x модуля M , что $xb = 0$. Так как $bA \subseteq r(x)$ и $N_r(M)$ – подполугруппа аддитивной группы A , то $N_r(M)$ – правый идеал кольца A .

Допустим, что $b = cd$ для некоторых элементов c и d кольца A и $c \notin N_r(M)$. Тогда $xc \neq 0$ и $(xc)d = xb = 0$. Поэтому $d \in N_r(M)$ и $N_r(M)$ – вполне первичный правый идеал.

(5) В силу (3) M – равномерный модуль. В силу (4) $N_r(M)$ – вполне первичный правый идеал кольца A . По лемме 1.5 (2) $N_r(M)$ – идеал кольца A .

(6) Пусть Y – такой подмодуль модуля $X + f(X)$, что $X \cap Y = 0$. Тогда $Y = (X + f(X)) \cap Y = X \cap Y + f(X) \cap Y = f(X) \cap Y \subseteq f(X)$. Поэтому существует такой подмодуль X' модуля X , что $Y = f(X')$. По лемме 2.1 (2) $Y = 0$. Поэтому X – существенный подмодуль модуля $X + f(X)$.

(7) Из леммы Порна следует, что существуют такие замкнутые подмодули X_1 и X_2 модуля M , что $X_1 \cap X_2 = 0$, $M_1 \subseteq X_1$ и $M_2 \subseteq X_2$. В силу (6) X_1 и X_2 – вполне инвариантные подмодули модуля M .

(8) Утверждение следует из (7).

ЛЕММА 2.3. Пусть A – кольцо. Тогда равносильны следующие условия:

- (1) A – правый порядок в локальном кольце Q ;
- (2) $T(A)$ – правое множество Оре и $N(A)$ – подполугруппа аддитивной группы A ;
- (3) A – правый порядок в локальном кольце Q , $J(Q) = N(Q)$ и $N(A)$ – вполне первичный идеал кольца A , совпадающий с множеством $A \cap J(Q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) $\Rightarrow$ (2). Так как A имеет правое классическое кольцо частных, то $T(A)$ – правое множество Оре. Пусть a и b – нерегулярные элементы кольца A . Тогда a и b – необратимые элементы кольца Q . Так как кольцо Q локально, то элемент $a + b$ необратим в Q . Поэтому элемент $a + b$ нерегулярен в A и $N(A)$ – подполугруппа аддитивной группы A .

(2) $\Rightarrow$ (3). Так как $T(A)$ – правое множество Оре, то кольцо A имеет правое классическое кольцо частных Q . Пусть q – необратимый элемент кольца Q . Существуют такие элементы $a \in A$ и $t \in T(A)$, что $q = at^{-1}$. Так как элемент q необратим в Q , то элемент a нерегулярен в A . Так как $N(A)$ – подполугруппа аддитивной группы A и сумма нерегулярного элемента $a \in A$ и элемента $t - a$ является регулярным элементом t кольца A , то элемент $t - a$ регулярен в A . Поэтому элемент $t - a$ обратим в Q . Так как $1 - q = 1 - at^{-1} = (t - a)t^{-1}$, то элемент $1 - q$ обратим в Q . Поэтому кольцо Q локально.

Так как Q – локальное кольцо и все регулярные элементы кольца Q обратимы в Q , то $J(Q) = N(Q)$. Так как $J(Q)$ – вполне первичный идеал кольца Q , то $A \cap J(Q)$ – вполне первичный идеал кольца A . Так как $N(A) \subseteq A \cap N(Q) = A \cap J(Q)$, то остается доказать, что $A \cap J(Q) \subseteq N(A)$. Пусть a – элемент идеала $A \cap J(Q)$. Элемент a необратим в Q . Поэтому элемент a нерегулярен в A и $a \in N(A)$.

Импликация (3) $\Rightarrow$ (1) очевидна.

ЛЕММА 2.4. Пусть A – такое дистрибутивное справа кольцо, что множество $N(A)$ является левым идеалом кольца A . Тогда A – правый порядок в цепном справа кольце.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение следует из леммы 1.5 (3) и того, что произведение любых двух регулярных элементов является регулярным элементом.

ЛЕММА 2.5. Пусть A – дистрибутивное справа кольцо. Тогда равносильны следующие условия:

- (1) любые два ненулевых идеала кольца A имеют ненулевое пересечение;
- (2) A – равномерное справа кольцо;
- (3) $N_r(A)$ – подполугруппа аддитивной группы A ;
- (4) $N_r(A)$ – вполне первичный правый идеал кольца A , $N_\ell(A)$ – вполне первичный идеал кольца A и либо $N_r(A) + N_\ell(A) = A$, либо правый идеал $N_r(A)$ и идеал $N_\ell(A)$ сравнимы по включению.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эквивалентность условий (1) и (2) следует из леммы 2.2 (8).

(2) $\Rightarrow$ (4). По лемме 2.2 (4) $N_r(A)$ – вполне первичный правый идеал. По лемме 1.4 $N_\ell(A)$ – идеал кольца A . Непосредственно проверяется, что $N_\ell(A)$ – вполне

первичный идеал. По лемме 2.1 (5) либо $N_r(A) + N_\ell(A) = A$, либо правый идеал $N_r(A)$ и идеал $N_\ell(A)$ сравнимы по включению.

Импликация (4) $\Rightarrow$ (3) очевидна.

Импликация (3) $\Rightarrow$ (2) следует из леммы 2.2 (2).

ЛЕММА 2.6. Пусть A – дистрибутивное справа кольцо такое, что для каждого его правого делителя нуля a элемент $1 - a$ регулярен в A . Тогда верны следующие утверждения:

- (1) A – равномерное справа кольцо и $N_r(A) + N_\ell(A) \neq A$;
- (2) $N_r(A)$ и $N(A)$ – вполне первичные правые идеалы кольца A , $N_\ell(A)$ – вполне первичный идеал кольца A , правый идеал $N_r(A)$ и идеал $N_\ell(A)$ сравнимы по включению и либо $N(A) = N_r(A) \supseteq N_\ell(A)$, либо $N(A)$ – идеал кольца A и $N(A) = N_\ell(A) \supseteq N_r(A)$;
- (3) если $ax \in N(A)$ для каждого $x \in N_r(A)$, то A – правый порядок в цепном справа кольце;
- (4) если $N_r(A) \subseteq N_\ell(A)$, то A – правый порядок в цепном справа кольце.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Если $a \in N_r(A)$, то $1 - a \notin N_\ell(A)$ по условию. Поэтому $N_r(A) + N_\ell(A) \neq A$.

Пусть x – ненулевой элемент кольца A и y – такой элемент кольца A , что $xA \cap yA = 0$. По лемме 2.1 (1) существует такой элемент a кольца A , что $xa = 0$ и $y(1 - a) = 0$. Тогда $a \in N_r(A)$ и по условию $1 - a$ – регулярный элемент кольца A . Так как $y(1 - a) = 0$, то $y = 0$. Поэтому A – равномерное справа кольцо.

(2) Утверждение следует из (1) и леммы 2.5.

(3) Так как $AN_r(A) \subseteq N(A)$, то из (2) следует, что $N(A)$ – вполне первичный идеал. По лемме 2.4 A – правый порядок в цепном справа кольце.

(4) Если $x \in N_\ell(A)$, то $Ax \subseteq N_\ell(A)$. Кроме того, $N_r(A) \subseteq N_\ell(A)$ по условию. Поэтому $ax \in N(A)$ для каждого $x \in N_r(A)$. В силу (3) A – правый порядок в цепном справа кольце.

ЛЕММА 2.7. Пусть A – дистрибутивное справа кольцо. Тогда равносильны следующие условия:

- (1) A – правый порядок в цепном справа кольце Q ;
- (2) множество $N(A)$ является левым идеалом кольца A ;
- (3) $N(A)$ и $N_\ell(A)$ – вполне первичные идеалы кольца A , $N_r(A)$ – вполне первичный правый идеал кольца A , правый идеал $N_r(A)$ и идеал $N_\ell(A)$ сравнимы по включению и либо $N(A) = N_r(A) \supseteq N_\ell(A)$, либо $N(A) = N_\ell(A) \supseteq N_r(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) $\Rightarrow$ (2). Так как Q – локальное кольцо, являющееся правым классическим кольцом частных кольца A , то $J(Q)$ является множеством всех необратимых элементов кольца Q и $J(Q)$ совпадает с множеством $N(Q)$ всех нерегулярных элементов кольца Q . Пусть x и y – нерегулярные элементы кольца A и a – элемент кольца A . Тогда $x, y \in N(A) \subseteq N(Q) = J(Q)$. Поэтому $x + y$ и ax содержатся в $J(Q)$. Тогда элементы $x + y$ и ax необратимы в Q . Поэтому элементы $x + y$ и ax нерегулярны в A .

(2) $\Rightarrow$ (3). Так как сумма любых двух нерегулярных элементов кольца A является нерегулярным элементом, то для каждого правого делителя нуля a кольца A элемент $1 - a$ регулярен в A . Поэтому утверждение следует из леммы 2.6 (2).

Импликация (3) $\Rightarrow$ (1) следует из леммы 2.6 (3).

ЛЕММА 2.8. Пусть A – такое дистрибутивное справа кольцо, что $N_r(A) \subseteq J(A)$. Тогда A – правый порядок в цепном справа кольце Q , все множества $N(A)$, $N_r(A)$ и $N_\ell(A)$ являются вполне первичными идеалами кольца A , $N_r(A) = yN_r(A) \subset yA$ для каждого элемента $y \in A \setminus N_r(A)$, идеалы $N_r(A)$ и $N_\ell(A)$ сравнимы по включению и либо $N(A) = N_r(A) \supseteq N_\ell(A)$, либо $N(A) = N_\ell(A) \supseteq N_r(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 2.6 (2) $N_r(A)$ – вполне первичный правый идеал кольца A . Кроме того, $N_r(A) \subseteq J(A)$ по условию. По лемме 1.5 (2) $N_r(A)$ – идеал кольца A и $X = yX \subset yA$ для каждого элемента $y \in A \setminus X$. По лемме 2.6 (3) A – правый порядок в цепном справа кольце Q . Оставшиеся утверждения следуют из леммы 2.7.

ЛЕММА 2.9. Пусть A – дистрибутивное справа кольцо и $N_\ell(A) \subseteq J(A)$. Тогда верны следующие утверждения:

- (1) если $N_\ell(A)$ – вполне первичный идеал кольца A и $\ell(N) = 0$, то A – правый порядок в цепном справа кольце Q , $N_r(A) \subseteq N_\ell(A) = N(A) \subseteq J(A)$, $QN(A) = N(A)$ и $J(Q) = N(A)Q$;
- (2) если A – первичное кольцо, то A – правый порядок в цепном справа кольце Q , $N(A)$ – вполне первичный идеал кольца A , лежащий в $J(A)$, $N_r(A) \subseteq N_\ell(A) = N(A) \subseteq J(A)$, $QN(A) = N(A)$ и $J(Q) = N(A)Q$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) По лемме 1.5 (5) $N_r(A) \subseteq N_\ell(A) \subseteq J(A)$. Тогда $N(A) = N_\ell(A) \subseteq J(A)$ и $N(A)$ – вполне первичный идеал. По лемме 1.6 A – правый порядок в цепном справа кольце Q , $QN(A) = N(A)$ и $J(Q) = N(A)Q$.

(2) Любые два ненулевых идеала первичного кольца A имеют ненулевое пересечение. По лемме 2.5 $N_\ell(A)$ – вполне первичный идеал кольца A . Так как A – первичное кольцо, то либо $\ell(N) = 0$, либо A – область. Если $\ell(N) = 0$, то утверждение следует из (1). Если A – область, то утверждение следует из леммы 1.6.

ЛЕММА 2.10. Пусть A – дистрибутивное кольцо. Тогда верны следующие утверждения:

- (1) если существует вполне первичный идеал N кольца A такой, что $N \subseteq J(A)$ и $\ell(N) = r(N) = 0$, то $N(A) \subseteq N \subseteq J(A)$;
- (2) если A – первичное кольцо, то $N(A) \subseteq J(A)$ тогда и только тогда, когда $J(A)$ содержит некоторый вполне первичный идеал кольца A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Утверждение следует из леммы 1.5 (5) и ее симметричной версии.

(2) Утверждение следует из (1) и леммы 2.9 (2).

Теорема 2 следует из теоремы 1, леммы 2.10 (2) и того, что классическое кольцо частных первичного кольца является первичным кольцом.

Теорема 3 следует из лемм 2.8 и 1.5 (7).

§ 3. Результаты, примыкающие к теоремам 1, 2 и 3

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть A – кольцо. Тогда равносильны следующие условия:

- (1) A – правый порядок в цепном справа кольце Q ;
- (2) $N(A)$ – левый идеал мультипликативной полугруппы A и для любых элементов $a_1, a_2 \in A$ либо существуют такие элементы $b_1 \in A$ и $t_1 \in T(A)$,

что $a_1b_1 = a_2t_1$, либо существуют такие элементы $b_2 \in A$ и $t_2 \in T(A)$, что $a_2b_2 = a_1t_2$;

(3) A – равномерное справа кольцо, являющееся правым порядком в цепном справа кольце Q , $J(Q) = N(Q)$, $N(A)$ – вполне первичный идеал кольца A , совпадающий с множеством $A \cap J(Q)$, $N_\ell(A)$ – вполне первичный идеал кольца A , $N_r(Q)$ и $N_\ell(Q)$ – вполне первичные идеалы кольца Q и $N_\ell(Q) = N_\ell(A)Q$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) $\Rightarrow$ (2). По лемме 2.3 $N(A)$ – идеал кольца A . Пусть $a_1, a_2 \in A$. Так как A – правый порядок в цепном справа кольце Q , то либо существуют такие элементы $b_1 \in A$ и $t_1 \in T(A)$, что $a_1b_1t_1^{-1} = a_2$, либо существуют такие элементы $b_2 \in A$ и $t_2 \in T(A)$, что $a_2b_2t_2^{-1} = a_1$. Поэтому выполняется условие (2).

(2) $\Rightarrow$ (3). Докажем, что A имеет правое классическое кольцо частных Q . Достаточно доказать, что $aT(A) \cap tA \neq \emptyset$ для любого элемента $a \in A$ и каждого элемента $t \in T(A)$. По условию либо существуют такие элементы $b_1 \in A$ и $t_1 \in T(A)$, что $tb_1 = at_1$, либо существуют такие элементы $b_2 \in A$ и $t_2 \in T(A)$, что $ab_2 = tt_2$. В первом случае $tb_1 = at_1 \in aT(A) \cap tA \neq \emptyset$. Допустим, что $ab_2 = tt_2 \in T(A)$. Если $b_2 \in T(A)$, то $ab_2 \in aT(A) \cap tA \neq \emptyset$. Допустим, что $b_2 \in A \setminus T(A) = N(A)$. Так как $N(A)$ – левый идеал мультипликативной полугруппы A , то $ab_2 = tt_2 \in N(A) \cap T(A) = \emptyset$; получено противоречие. Поэтому A имеет правое классическое кольцо частных Q .

Пусть q_1 и q_2 – элементы кольца Q . Существуют такие элементы $a_1, a_2 \in A$ и $t \in T(A)$, что $q_1 = a_1t^{-1}$ и $q_2 = a_2t^{-1}$. По условию либо существуют такие элементы $b_1 \in A$ и $t_1 \in T(A)$, что $a_1b_1 = a_2t_1$, либо существуют такие элементы $b_2 \in A$ и $t_2 \in T(A)$, что $a_2b_2 = a_1t_2$. В первом случае

$$q_2 = a_2t_1t_1^{-1}t^{-1} \in a_1b_1Q \subseteq q_1Q.$$

Аналогично $q_1 \in q_2Q$ во втором случае. Поэтому Q – цепное справа кольцо. В частности, кольцо Q локально. По лемме 2.3 $J(Q) = N(Q)$ и $N(A)$ – вполне первичный идеал кольца A , совпадающий с множеством $A \cap J(Q)$. Так как A – правый порядок в цепном справа кольце Q , то непосредственно проверяется, что A – равномерное справа кольцо.

Так как A и Q – равномерные справа кольца, то из леммы 1.4 следует, что $N_\ell(A)$ – вполне первичный идеал кольца A и $N_\ell(Q)$ – вполне первичный идеал кольца Q . Поэтому $N_\ell(A)Q \subseteq N_\ell(Q)$. Пусть $s_1 \in N_\ell(Q)$. Тогда $s_1s_2 = 0$ для некоторого ненулевого элемента $s_2 \in Q$. Существуют такие элементы $c_1, c_2 \in A$ и $u_1, u_2 \in T(A)$, что $s_1 = c_1u_1^{-1}$ и $s_2 = c_2u_2^{-1} \neq 0$. Существуют такие элементы $d \in A$ и $v \in T(A)$, что $u_1^{-1}c_2u_2^{-1} = dv^{-1}$. Так как $s_2 \neq 0$, то $d \neq 0$. Тогда $c_1d = c_1dv^{-1}v = s_1s_2v = 0$ и $c_1 \in N_\ell(A)$. Поэтому $N_\ell(Q) \subseteq N_\ell(A)Q \subseteq N_\ell(Q)$. По лемме 2.2 (5) $N_r(Q)$ – вполне первичный идеал кольца Q .

Импликация (3) $\Rightarrow$ (1) очевидна.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. (1) Пусть A – дистрибутивное справа равномерное справа кольцо. Если $N_r(A) = N_\ell(A)$ (это так, например, если множества $N_r(A)$ и $N_\ell(A)$ лежат в центре кольца A), то A – правый порядок в цепном справа кольце.

(2) Каждое коммутативное дистрибутивное равномерное кольцо является порядком в цепном кольце. Следовательно, каждое коммутативное

дистрибутивное подпрямо неразложимое кольцо является порядком в цепном кольце.

(3) *Каждое коммутативное дистрибутивное кольцо является подпрямым произведением коммутативных дистрибутивных порядков в цепных кольцах.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Так как $N_r(A) = N_\ell(A) = N(A)$, то по лемме 2.5 $N(A)$ – вполне первичный идеал кольца A . По лемме 1.6 A – правый порядок в цепном справа кольце.

(2) Утверждение следует из (1).

(3) Так как каждое кольцо является подпрямым произведением подпрямо неразложимых колец и все факторкольца дистрибутивных колец дистрибутивны, то (3) следует из (2).

Оставшаяся часть параграфа посвящена построению следующего примера.

ПРИМЕР 3.3. Существует инвариантное дистрибутивное равномерное подпрямо неразложимое кольцо Безу A , обладающее следующими свойствами:

(1) $N_\ell(A)$ и $N_r(A)$ – несовпадающие максимальные правые (левые) идеалы кольца A , которое не имеет других максимальных правых (левых) идеалов, $A = N_\ell(A) + N_r(A)$, факторкольца $A/N_\ell(A)$ и $A/N_r(A)$ являются полями, $A/J(A) \cong A/N_\ell(A) \times A/N_r(A)$, множество $N_\ell(A) \cap N_r(A)$ всех двусторонних делителей нуля кольца A совпадает с $J(A)$, $N_r(A)$ – единственный собственный идеал кольца A с нулевым правым аннулятором и $N_\ell(A)$ – единственный собственный идеал кольца A с нулевым левым аннулятором;

(2) A содержит такой идеал M , что $M^2 = 0$, A/M – коммутативная область главных идеалов, имеющая ровно два максимальных идеала, M – цепной артинов делимый A -модуль, $M = aM = Ma \subset aA = Aa$ для каждого элемента $a \in A \setminus M$ и M – единственный правый или левый идеал кольца A , не являющийся главным;

(3) A неизоморфно подкольцу локального кольца (в частности, A не является порядком в цепном кольце);

(4) A не является локализуемым справа или слева кольцом и существует такой левый делитель нуля x в A , что $1-x$ – правый делитель нуля в A и $J(A)$ не содержит ни x , ни $1-x$.

Пример 3.3 показывает, что теорема 3 неверна для произвольных дистрибутивных равномерных колец. Кроме того, этот пример дает отрицательный ответ на следующий вопрос, поставленный автором в книге [5; с. 132]: верно ли, что каждое дистрибутивное кольцо является локализуемым справа или слева? Заметим, что первый пример дистрибутивного кольца, которое не является локализуемым справа или слева, был недавно построен Г. Е. Пунинским [11].

Пусть $\mathbb{Z}$ – кольцо целых чисел, $\mathbb{Q}$ – поле рациональных чисел, $\mathbb{Q}[i]$ – поле частных кольца целых гауссовых чисел $\mathbb{Z}[i]$ ($i^2 = -1$). Обозначим через φ автоморфизм $q_1 + q_2i \rightarrow q_1 - q_2i$ поля $\mathbb{Q}[i]$. Пусть R_1 и R_2 – локализации коммутативной области главных идеалов $\mathbb{Z}[i]$ по простым идеалам, порожденным простыми элементами $2+i$ и $2-i$ соответственно. Тогда R_1 и R_2 – коммутативные цепные области главных идеалов. Положим $R \equiv R_1 \cap R_2$. Пусть X и Y – идеалы кольца R , порожденные элементами $2+i$ и $2-i$ соответственно.

Коммутативная область главных идеалов R имеет ровно два максимальных идеала X и Y , $R_X = R_1$, $R_Y = R_2$, $\varphi(R_X) = R_Y$, $X + Y = R$, $J(R) = X \cap Y =$

$(2+i)(2-i)R = 5R$ и факторкольцо $R/J(R)$ изоморфно прямому произведению полей A/X и A/Y . Кольцо R совпадает с множеством всех несократимых рациональных гауссовых дробей, знаменатели которых не делятся ни на $2+i$, ни на $2-i$.

Обозначим через M правый R -модуль $\mathbb{Q}[i]/R_X$. Тогда все собственные подмодули модуля M_R являются циклическими и образуют бесконечную счетную строго возрастающую цепь $0 = s_0R \subset s_1R \subset s_2R \subset \dots$, где простой модуль s_1R изоморфен модулю $R/Y = R/(2-i)R$ и $r_R(s_n) = (2-i)^n R$ для всех натуральных чисел n . Мы также превратим M в левый R -модуль по правилу $rm = m\varphi(r)$ для всех элементов $r \in R$ и $m \in M$. Непосредственно проверяется, что M является (R, R) -бимодулем, который является цепным артиновым делимым правым (левым) R -модулем.

Обозначим через A тривиальное расширение (R, R) -бимодуля M с помощью кольца R . Напомним, что A – внешняя прямая сумма абелевых групп R и M с умножением

$$(r_1, m_1)(r_2, m_2) = (r_1r_2, r_1m_2 + m_1r_2) = (r_1r_2, m_2\varphi(r_1) + m_1r_2)$$

для всех элементов $r_1, r_2 \in R$ и $m_1, m_2 \in M$. Пара $(1, 0)$ является единицей кольца A . Мы будем отождествлять M , X и Y с идеалами $(0, M)$, $(X, 0)$ и $(Y, 0)$ кольца A соответственно. Кольцо R отождествляется с подкольцом $(R, 0)$ в A .

Правые (левые) идеалы кольца A , лежащие в M , совпадают с R -подмодулями в M . Заметим, что $tA = At$ для любого элемента $t \in M$, факторкольцо $A/J(A)$ изоморфно прямому произведению полей A/X и A/Y , $M^2 = 0$, факторкольцо A/M изоморфно коммутативной области главных идеалов R , M – цепной артинов делимый правый (левый) A -модуль Безу, простой правый (левый) A -модуль $s_1A = As_1$ является наименьшим ненулевым правым (левым) идеалом кольца A , $r_A(s_1) = Y$ и $\ell_A(s_1) = X$.

ЛЕММА 3.4. *Справедливы следующие утверждения:*

- (1) $X = (2+i)A = \ell_A(s_1) = N_\ell(A)$ и $Y = (2-i)A = r_A(s_1) = N_r(A)$;
- (2) элемент $(2+i) + (2-i) = 4 = 5 - 1$ обратим в A , так как $5 \in J(A)$;
- (3) если обозначить через x элемент $(2+i)/4 \in X$, то $1-x = (2-i)/4 \in Y$, $(2+i)s_1 = s_1\varphi(2+i) = s_1(2-i) = 0$, $xs_1 = s_1(1-x) = 0$;
- (4) $x \in X \setminus J(A) = X \setminus Y \subseteq N_\ell(A)$ и $1-x \in Y \setminus X = Y \setminus J(A) \subseteq N_r(A)$.

Лемма 3.4 проверяется непосредственно.

ЛЕММА 3.5. (1) Идеал M кольца A сравним по включению с любым правым или левым идеалом кольца A .

- (2) A – инвариантное подпрямое неразложимое кольцо Безу.
- (3) A – дистрибутивное кольцо.
- (4) $J(A)$ содержит не все правые (левые) делители нуля кольца A .
- (5) A неизоморфно подкольцу локального кольца.
- (6) Множество $A \setminus X$ не является реверсивным слева, а множество $A \setminus Y$ не является реверсивным справа.
- (7) A не является локализуемым справа или слева кольцом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Утверждение вытекает из того, что M – делимый R -модуль.

(2) Утверждение вытекает из (1) и следующих фактов:

- (i) A/M – коммутативное кольцо Безу;

- (ii) M — A -модуль Безу;
- (iii) $tA = At$ для каждого элемента $t \in M$;
- (iv) s_1A — наименьший ненулевой правый (левый) идеал кольца A .

(3) Утверждение вытекает из (2) и следующего известного факта (см., например, [5; теорема 3.26]): каждый правый модуль Безу над инвариантным справа кольцом является дистрибутивным модулем.

(4) Утверждение вытекает из леммы 3.4 (4).

(5) Допустим, что существует такое локальное кольцо H , что A — подкольцо в H . По лемме 3.4 (4) элементы x и $1 - x$ не являются регулярными. Поэтому элементы x и $1 - x$ необратимы в локальном кольце H ; получено противоречие.

(6) По лемме 3.4 (4) $x \in A \setminus Y$. По лемме 3.4 (3) $xs_1 = 0$. Так как $r(s_1) \cap (A \setminus Y) = Y \cap (A \setminus Y) = \emptyset$, то множество $A \setminus Y$ не является реверсивным справа. Аналогично, множество $A \setminus X$ не является реверсивным слева.

(7) Утверждение следует из (6) и того, что каждое множество правых (левых) знаменателей является реверсивным справа (слева) множеством.

Из приведенных выше рассуждений, леммы 3.4 и леммы 3.5 вытекает, что A — искомое кольцо.

Список литературы

1. Bessenrodt K., Brungs H. H., Törner G. Right chain rings. I. Schriftenreihe des Fachbereich Mathematik. Duisburg: Universität Duisburg, 1990.
2. Bessenrodt K., Brungs H. H., Törner G. Right chain rings. IIa, IIb. Schriftenreihe des Fachbereich Mathematik. Duisburg: Universität Duisburg, 1992.
3. Behrens E. A. Ring theory. New York: Academic Press, 1972.
4. Кон П. Свободные кольца и их связи. М.: Мир, 1975.
5. Tuganbaev A. A. Semidistributive modules and rings. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1998.
6. Tuganbaev A. A. Distributive modules and related topics. Amsterdam: Gordon and Breach, 1999.
7. Stephenson W. Modules whose lattice of submodules is distributive // Proc. London Math. Soc. (3). 1974. V. 28. № 2. P. 291–310.
8. Brungs H. H. Rings with distributive lattice of right ideals // J. Algebra. 1976. V. 40. № 2. P. 392–400.
9. Stenström B. Rings of quotients: an introduction to methods of ring theory. Berlin: Springer-Verlag, 1975.
10. Menzel W. Über den Untergruppenverband einer Abelschen Operatorgruppe. II. Distributive und M-Verbande von Untergruppen einer Abelschen Operatorgruppe // Math. Z. 1960. V. 74. № 1. P. 52–65.
11. Пунинский Г. Е. Пример дистрибутивного нелокализуемого кольца // Фундаментальная и прикладная математика (в печати).

Московский энергетический институт
(технический университет)
E-mail: askar@tuganbaev.mccme.ru

Поступила в редакцию
06.08.2001