Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Устинов, Решение задачи Арнольда о слабой асимптотике для чисел Фробениуса с тремя аргументами, *Матем. сб.*, 2009, том 200, номер 4, 131–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm6547>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 10:44:56

УДК 511.336+511.218+511.335

А. В. Устинов

Решение задачи Арнольда о слабой асимптотике для чисел Фробениуса с тремя аргументами

Доказано, что числа Фробениуса $f(a, b, c)$ в среднем ведут себя как $\frac{8}{\pi} \sqrt{abc}$.

Библиография: 28 названий.

Ключевые слова: числа Фробениуса, цепные дроби, суммы Клостермана.

§ 1. Введение

Пусть $a_1, \dots, a_n$ – натуральные числа, взаимно простые в совокупности, т.е. их наибольший общий делитель $(a_1, \dots, a_n)$ равен единице. Числом Фробениуса $g(a_1, \dots, a_n)$ чисел $a_1, \dots, a_n$ называется наибольшее целое m , не представимое в виде

$$x_1 a_1 + \dots + x_n a_n = m, \quad (1)$$

где $x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$ – целые числа. Часто удобнее рассматривать функцию

$$f(a_1, \dots, a_n) = g(a_1, \dots, a_n) + a_1 + \dots + a_n,$$

которая равна наибольшему целому m , не представимому в виде (1) с натуральными коэффициентами $x_1, \dots, x_n$ (см., например, тождество Джонсона в доказательстве леммы 3). Задача о нахождении $g(a_1, \dots, a_n)$ называется *проблемой Фробениуса*. Наиболее полный обзор задач и результатов в этой области дан в книге [1].

При $n = 2$ известна формула Сильвестра (см. [2]): $f(a, b) = ab$. Если $n = 3$, то задача о нахождении $f(a, b, c)$ сводится к случаю, когда аргументы попарно взаимно просты, и при $b \equiv lc \pmod{a}$, $1 \leq l \leq a$, значение $f(a, b, c)$ выражается через элементы цепной дроби для числа l/a (см. результаты Сельмера, Бейера и Рёдсета [3]–[4]; о других формулах для подсчета $f(a, b, c)$ см. [1; гл. 2] и [5], [6]). При $n \geq 4$ формулы для нахождения $f(a_1, \dots, a_n)$ не известны. Доказано, что для фиксированного n число Фробениуса можно вычислить за полиномиальное время (см. [7]), а при произвольном n нахождение $f(a_1, \dots, a_n)$ становится NP -полной задачей (см. [8]).

В работе Дэйвисона [9] для случая $(a, b, c) = 1$ доказана оценка $f(a, b, c) \geq \sqrt{3abc}$, в которой константа $\sqrt{3}$ точна. Там же высказано предположение о том, что для “случайного” набора (a, b, c) функция $f(a, b, c)$ имеет порядок $\sqrt{abc}$. Это утверждение сформулировано в виде двух гипотез. Рассмотрим множество $X_N = \{(a, b, c) : 1 \leq a, b, c \leq N, (a, b, c) = 1\}$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 07-01-00306), проекта ДВО РАН (№ 06-III-A-01-017), Фонда содействия отечественной науке и фонда “Династия”.

ГИПОТЕЗА 1. Выполняется следующее неравенство:

$$\sup_N \frac{1}{|X_N|} \sum_{(a,b,c) \in X_N} \frac{f(a,b,c)}{\sqrt{abc}} < \infty.$$

ГИПОТЕЗА 2. Существует конечный предел

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{|X_N|} \sum_{(a,b,c) \in X_N} \frac{f(a,b,c)}{\sqrt{abc}}.$$

В. И. Арнольд сформулировал более сильное предположение (см. [10; задачи 1999-8, 2003-5], а также [11]).

ГИПОТЕЗА 3. При всех $n \geq 2$ распределение значений функции $f(a_1, \dots, a_n)$ определяется плотностью, пропорциональной $n^{-1} \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$. Другими словами, если

$$\begin{aligned} Q_{N,r} &= Q_{N,r}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \\ &= \left\{ (a_1, \dots, a_n) : \left| \frac{a_j}{N} - \alpha_j \right| < r, j = 1, \dots, n, (a_1, \dots, a_n) = 1 \right\}, \end{aligned}$$

то для некоторой константы c_n нормированная сумма

$$\frac{1}{|Q_{N,r}|} \sum_{(a_1, \dots, a_n) \in Q_{N,r}} f(a_1, \dots, a_n)$$

при $N \rightarrow \infty$ и $r = r(N) \rightarrow 0$ асимптотически ведет себя как

$$c_n N^{1-1/n} n^{-1} \sqrt[n]{\alpha_1 \cdots \alpha_n}.$$

Результаты соответствующих численных экспериментов даны в [11]–[13].

Бургейном и Синаем в работе [14] изучалось предельное поведение чисел $f(a, b, c)N^{-3/2}$ при $1 \leq a, b, c \leq N$. На основе одного естественного предположения, подтвержденного позднее в [15], вероятностными методами было доказано существование предельного распределения для величины $f(a, b, c)N^{-3/2}$.

Оказывается, что при $n = 3$ искомая плотность может быть получена при усреднении по двум параметрам из трех и при этом найдена явно. Важную роль в этих исследованиях играет константа $c_3 = 8/\pi = 2.546 \dots$.

Определим множество

$$M_a(x_1, x_2) = \{(b, c) : 1 \leq b \leq x_1 a, 1 \leq c \leq x_2 a, (a, b, c) = 1\}.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть a – натуральное число, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $\varepsilon > 0$ – действительные числа. Тогда

$$\frac{1}{a^{3/2} |M_a(x_1, x_2)|} \sum_{(b,c) \in M_a(x_1, x_2)} \left(f(a, b, c) - \frac{8}{\pi} \sqrt{abc} \right) = O_\varepsilon(R_\varepsilon(a; x_1, x_2)),$$

где

$$\begin{aligned} R_\varepsilon(a; x_1, x_2) &= (a^{-1/6}(x_1 + x_2) + a^{-1/4}(x_1^{3/2} + x_2^{3/2}))(x_1 x_2)^{-1/4} + a^{-1/2} a^\varepsilon \\ &\ll_{x_1, x_2} a^{-1/6+\varepsilon}. \end{aligned}$$

Доказательство этой теоремы основано на формуле Рёдсета для чисел Фробениуса из работы [3], теории цепных дробей и оценках сумм Клостермана. Оно также использует идеи, применявшиеся ранее автором при исследовании статистических свойств цепных дробей (см. [16]–[18]).

Квадрат на плоскости переменных b и c

$$\left| \frac{b}{a} - \beta \right| < r, \quad \left| \frac{c}{a} - \gamma \right| < r$$

можно представить в виде комбинации прямоугольников вида $[0, x_1 a] \times [0, x_2 a]$, где $x_1 = \beta \pm r$, $x_2 = \gamma \pm r$. Поэтому из теоремы 1 следует утверждение Арнольда для $n = 3$ с константой $c_3 = 8/\pi$ в более сильной форме: если

$$Q'_{N,r} = Q'_{N,r}(\alpha, \beta, \gamma) = \left\{ (a, b, c) : a = \alpha N, \left| \frac{b}{N} - \beta \right| < r, \left| \frac{c}{N} - \gamma \right| < r, (a, b, c) = 1 \right\},$$

то

$$\frac{1}{|Q'_{N,r}|} \sum_{(a,b,c) \in Q'_{N,r}} f(a, b, c) = \frac{8}{\pi} \sqrt{\alpha\beta\gamma} N^{3/2} (1 + O_{\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon}(r^{-2} N^{-1/6+\varepsilon} + r)).$$

Результат нетривиален при $N^{-1/12+\varepsilon} \ll r \ll N^{-\varepsilon}$.

Из теоремы 1 следует справедливость гипотезы 2 также в более сильной форме.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $Y_N = \{(a, b, c) : a = N, 1 \leq b, c \leq N, (a, b, c) = 1\}$. Тогда при любом $\varepsilon > 0$ верна оценка

$$\frac{1}{|Y_N|} \sum_{(a,b,c) \in Y_N} \frac{f(a, b, c)}{\sqrt{abc}} = \frac{8}{\pi} + O_\varepsilon(N^{-1/12+\varepsilon}).$$

Автор благодарит рецензента за ценные замечания по первоначальной версии статьи.

§ 2. Континуанты

Пусть a, b, c – натуральные числа, $(a, b) = (a, c) = (b, c) = 1$ и l – такое число, что $bl \equiv c \pmod{a}$, $1 \leq l \leq a$. Формула Рёдсета для $f(a, b, c)$ основана на разложении числа a/l в приведенную регулярную цепную дробь (см. [19; §§ 42, 43]:

$$\frac{a}{l} = \langle b_0; b_1, \dots, b_m \rangle = b_0 - \frac{1}{b_1 - \frac{1}{\ddots - \frac{1}{b_m}}}, \quad (2)$$

в которой $b_0 = \lceil a/l \rceil = -\lfloor -a/l \rfloor$ (ближайшее сверху целое число) и $b_1, \dots, b_m \geq 2$. Через $m = m(a/l)$ обозначим длину дроби (2). Для работы с такими дробями удобно модифицировать стандартное определение континуантов (см. [20; раздел 6.7]) следующим образом:

$$K_0() = 1, \quad K_1(x_1) = x_1, \\ K_n(x_1, \dots, x_n) = x_n K_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) - K_{n-2}(x_1, \dots, x_{n-2}), \quad n \geq 2.$$

Естественно также положить $K_{-1} = 0$. В силу рекуррентных соотношений для числителей и знаменателей цепных дробей при $m \geq 0$ будет выполняться равенство

$$\langle x_0; x_1, \dots, x_m \rangle = \frac{K_{m+1}(x_0, x_1, \dots, x_m)}{K_m(x_1, \dots, x_m)}.$$

Переформулируется правило Эйлера (см. [20]): многочлен $K_n(x_1, \dots, x_n)$ можно получить, если, начав с произведения $x_1 \cdots x_n$, вычеркнуть из него пары $x_k x_{k+1}$ всеми возможными способами и сложить получившиеся слагаемые с коэффициентом $(-1)^j$, где j – число вычеркнутых пар. Например,

$$\begin{aligned} K_4(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_1 x_2 x_3 x_4 - \cancel{x_1 x_2} x_3 x_4 - x_1 \cancel{x_2 x_3} x_4 - x_1 x_2 \cancel{x_3 x_4} + \cancel{x_1 x_2} \cancel{x_3 x_4} \\ &= x_1 x_2 x_3 x_4 - x_3 x_4 - x_1 x_4 - x_1 x_2 + 1. \end{aligned}$$

Из правила Эйлера следует свойство симметричности

$$K_n(x_1, \dots, x_n) = K_n(x_n, \dots, x_1),$$

левостороннее рекуррентное соотношение

$$K_n(x_1, \dots, x_n) = x_1 K_{n-1}(x_2, \dots, x_n) - K_{n-2}(x_3, \dots, x_n), \quad n \geq 2,$$

и более общая формула (соответствующая равенству (6.133) из [20])

$$\begin{aligned} K_{m+n}(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+n}) &= K_m(x_1, \dots, x_m) K_n(x_{m+1}, \dots, x_{m+n}) \\ &\quad - K_{m-1}(x_1, \dots, x_{m-1}) K_{n-1}(x_{m+2}, \dots, x_{m+n}). \end{aligned}$$

Выписанные соотношения являются частными случаями тождества Эйлера ($m \geq 1, l \geq 0, n \geq l+1$):

$$\begin{aligned} &K_{m+n}(x_1, \dots, x_{m+n}) K_l(x_{m+1}, \dots, x_{m+l}) \\ &\quad - K_{m+l}(x_1, \dots, x_{m+l}) K_n(x_{m+1}, \dots, x_{m+n}) \\ &\quad + K_{m-1}(x_1, \dots, x_{m-1}) K_{n-l-1}(x_{m+l+2}, \dots, x_{m+n}) = 0, \end{aligned}$$

которое можно интерпретировать как равенство нулю пфаффиана вырожденной матрицы размера 4×4 (см. [21]).

Далее будем использовать более простое обозначение $K(x_1, \dots, x_n)$, опуская нижний индекс, поскольку число аргументов континуанта всегда понятно из контекста.

§ 3. Функция Рёдсета

Пусть l – фиксированное целое число, $1 \leq l \leq a$, $(l, a) = 1$, и $\bar{l}$ – решение сравнения $\bar{l} \cdot l \equiv 1 \pmod{a}$, $1 \leq \bar{l} \leq a$. В соответствии с работой [3] рассмотрим разложение a/l в цепную дробь с минусами

$$\frac{a}{l} = \langle a_1; \dots, a_m \rangle$$

и определим последовательности $\{s_j\}$, $\{q_j\}$, $-1 \leq j \leq m$, равенствами

$$s_j = K(a_{j+2}, \dots, a_m), \quad q_j = K(a_1, \dots, a_j).$$

Легко доказать следующие свойства чисел $\{s_j\}, \{q_j\}$.

1°. Последовательности $\{s_j\}, \{q_j\}$ однозначно задаются начальными условиями

$$s_m = 0, \quad s_{m-1} = 1, \quad q_{-1} = 0, \quad q_0 = 1$$

и рекуррентными соотношениями

$$s_{j-1} = a_{j+1}s_j - s_{j+1}, \quad q_{j+1} = a_{j+1}q_j - q_{j-1}, \quad 0 \leq j \leq m-1.$$

При этом

$$\begin{aligned} s_{-1} = q_m = K(a_1, \dots, a_m) = a, \quad s_0 = K(a_2, \dots, a_m) = l, \\ q_{m-1} = K(a_1, \dots, a_{m-1}) = \bar{l}. \end{aligned}$$

2°. Последовательность $\{s_j\}$ монотонно убывает, а $\{q_j\}$ – монотонно возрастает и

$$0 = \frac{s_m}{q_m} < \frac{s_{m-1}}{q_{m-1}} < \dots < \frac{s_0}{q_0} < \frac{s_{-1}}{q_{-1}} = \infty.$$

3°. При любом n , $0 \leq n \leq m$, векторы $e_n = (q_n, s_n)$ и $e_{n-1} = (q_{n-1}, s_{n-1})$ образуют базис решетки

$$\Lambda_l = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : xl \equiv y \pmod{a}\}.$$

При этом

$$\begin{vmatrix} q_n & s_n \\ q_{n-1} & s_{n-1} \end{vmatrix} = \det \Lambda_l = a.$$

4°. Точки (q_n, s_n) , $-1 \leq n \leq m$, являются вершинами выпуклой оболочки ненулевых точек решетки Λ_l , лежащих в первой координатной четверти.

5°. Четверки $(q_n, s_{n-1}, q_{n-1}, s_n)$ при $1 \leq l < a$, $(l, a) = 1$, $0 \leq n \leq m(l/a)$ находятся во взаимно однозначном соответствии с решениями (u_1, u_2, v_1, v_2) уравнения

$$u_1 u_2 - v_1 v_2 = a,$$

для которых

$$0 \leq v_1 < u_1 \leq a, \quad (u_1, v_1) = 1, \quad 0 \leq v_2 < u_2 \leq a, \quad (u_2, v_2) = 1.$$

6°. При $0 \leq n \leq m$ выполняются неравенства

$$s_{n-1} - s_n \leq \frac{a}{q_n}, \quad q_n - q_{n-1} \leq \frac{q}{s_{n-1}}.$$

Свойства 1°–2° непосредственно вытекают из определений.

Для доказательства свойства 3° заметим, что пары векторов (e_{n-1}, e_n) и (e_n, e_{n+1}) связаны унимодулярным преобразованием

$$\begin{pmatrix} e_n \\ e_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & a_{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{n+1} \\ e_n \end{pmatrix}, \quad 1 \leq n < m.$$

При этом $e_{-1} = (0, a)$ и $e_0 = (1, l)$ образуют базис решетки Λ_l и

$$\begin{vmatrix} q_0 & s_0 \\ q_{-1} & s_{-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & l \\ 0 & a \end{vmatrix} = a.$$

Свойство 4° следует из монотонности последовательностей $\{s_j\}$, $\{q_j\}$ и свойства 3°.

Докажем свойство 5°. В силу свойства 3° всякая четверка $(q_n, s_{n-1}, q_{n-1}, s_n)$ удовлетворяет уравнению $u_1 u_2 - v_1 v_2 = a$. Для построения обратного отображения достаточно рассмотреть разложения

$$\frac{u_1}{v_1} = \langle a_n; \dots, a_1 \rangle, \quad \frac{u_2}{v_2} = \langle a_{n+1}; \dots, a_m \rangle$$

и выбрать $l = K(a_2, \dots, a_m)$.

Свойство 6° следует из того, что равенство $q_r s_{r-1} - q_{r-1} s_r = a$ (см. свойство 3°) можно переписать в виде

$$q_n(s_{n-1} - s_n) + s_n(q_n - q_{n-1}) = a \quad \text{или} \quad (q_n - q_{n-1})s_{n-1} + q_{n-1}(s_{n-1} - s_n) = a.$$

Отсюда $s_{n-1} - s_n \leq a/q_n$ и $q_n - q_{n-1} \leq a/s_{n-1}$.

Введем функцию Рёдсета $\rho_{l,a}(t_1, t_2)$, которая для $t_1 \geq 0$, $t_2 \geq 0$ таких, что

$$\frac{s_n}{q_n} \leq \frac{t_2}{t_1} < \frac{s_{n-1}}{q_{n-1}}$$

определяется равенством

$$\rho_{l,a}(t_1, t_2) = t_1 s_{n-1} + t_2 q_n - \min\{t_1 s_n, t_2 q_{n-1}\} \quad (3)$$

(в силу свойства 2° эти условия задают значения $\rho_{l,a}(t_1, t_2)$ для всех $t_1 \geq 0$, $t_2 \geq 0$). Тогда, как показано в [3], при $(b, a) = 1$ и $c \equiv bl \pmod{a}$ число Фробениуса можно найти по формуле

$$f(a, b, c) = \rho_{l,a}(b, c). \quad (4)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Функция $\rho_{l,a}(t_1, t_2)$ непрерывна и равенство (3) выполняется при

$$\frac{s_n}{q_n} \leq \frac{t_2}{t_1} \leq \frac{s_{n-1}}{q_{n-1}}.$$

§ 4. О целых точках в областях

Пусть Ω – плоская односвязная область со спрямляемой границей. Пусть V – площадь Ω , P – ее периметр, N – число точек решетки $\mathbb{Z}^2$, лежащих внутри Ω . Для выпуклой области известно неравенство Ярника (см. [22])

$$|V - N| < P + 1.$$

Однако оценку

$$V - N = O(P + 1)$$

приходится применять и в более общих ситуациях (см. [23]).

ЛЕММА 1. Для произвольной плоской односвязной области со спрямляемой границей справедливо неравенство

$$|V - N| < 4(P + 1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть N_1 – число квадратов вида $[a, a+1) \times [b, b+1)$, $a, b \in \mathbb{Z}$, лежащих внутри Ω , N_2 – число квадратов, имеющих с Ω хотя бы одну общую точку. Тогда

$$N_1 \leq V, N \leq N_2,$$

и, следовательно, $|V - N| \leq M = N_2 - N_1$, где M – число квадратов, через которые проходит граница Ω . В каждом из таких квадратов выберем точку A_k , $0 \leq k < M$, на границе Ω (нумерация точек проводится в порядке их следования по границе). Среди любых пяти квадратов, через которые проходит граница Ω , всегда можно выбрать два, замыкания которых не имеют общих точек. Поэтому при любом k длина отрезка границы между точками A_k и A_{k+4} удовлетворяет неравенству $l(A_k, A_{k+4}) > 1$. Отсюда получаем, что

$$P \geq l(A_0, A_4) + l(A_4, A_8) + \dots + l(A_{4\lfloor M/4 \rfloor - 4}, A_{4\lfloor M/4 \rfloor}) > \left\lfloor \frac{M}{4} \right\rfloor > \frac{M}{4} - 1.$$

Следовательно, $M < 4(P+1)$ и $|V - N| < 4(P+1)$.

Введем следующее обозначение (см. [20]): если A – некоторое утверждение, то $[A] = 1$, если A истинно, и $[A] = 0$ в противном случае.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $G(x, y)$ – непрерывная действительнoзначная функция, определенная внутри односвязной области Ω с периметром $P \geq 1$, удовлетворяющая неравенствам $0 \leq G(x, y) \leq B$, $(x, y) \in \Omega$. Предположим также, что функция $G(x, y)$ монотонна по каждой переменной и для всех $z \in [0, B]$ неравенство $G(x, y) \leq z$ задает в Ω односвязную область, периметр которой есть $O(P)$. Тогда

$$\sum_{(x,y) \in \Omega \cap \mathbb{Z}^2} G(x, y) = \iint_{\Omega} G(x, y) dx dy + O(BP).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно аппроксимировать $G(x, y)$ линейной комбинацией функций

$$G_k(x, y) = \left[G(x, y) \leq \frac{k}{n} B \right], \quad 0 \leq k \leq n,$$

к каждой из них применить лемму 1 и перейти к пределу при $n \rightarrow \infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть Λ – подрешетка $\mathbb{Z}^2$ индекса d . Пусть $N(\Lambda)$ – число точек Λ , содержащихся в области Ω . Тогда выполняется неравенство

$$|V - dN(\Lambda)| \leq 4d(P+1).$$

Для его проверки достаточно повторить рассуждения из доказательства леммы 1, заменив единичные квадраты фундаментальными параллелограммами Λ , натянутыми на приведенный базис.

В качестве следствия из этого неравенства (при тех же ограничениях, что и в следствии 1) аналогичным образом может быть получена формула

$$\sum_{(x,y) \in \Omega \cap \Lambda} G(x, y) = \frac{1}{d} \iint_{\Omega} G(x, y) dx dy + O(BP). \quad (5)$$

§ 5. Выделение плотности

Для рационального r обозначим квадратными скобками каноническое разложение r в цепную дробь

$$r = [a_0; a_1, \dots, a_s] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_s}}}$$

длины $s = s(r)$, где $a_0 = [r]$ (целая часть r), $a_1, \dots, a_s$ – неполные частные (натуральные числа), $a_s \geq 2$, $s \geq 1$. Через $s_1(r)$ обозначим сумму неполных частных числа r : $s_1(r) = t_0 + t_1 + \dots + t_s$. Для натурального q обозначим через $\delta_q(a)$ характеристическую функцию делимости на q :

$$\delta_q(a) = [a \equiv 0 \pmod{q}] = \begin{cases} 1, & \text{если } a \equiv 0 \pmod{q}, \\ 0, & \text{если } a \not\equiv 0 \pmod{q}. \end{cases}$$

ЛЕММА 2. Пусть $1 \leq l < a$, $(l, a) = 1$, δ_1, δ_2 – натуральные числа и $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ – действительные числа. Тогда для суммы

$$S_{l,a}(\delta_1, \delta_2; x_1, x_2) = \sum_{\substack{b \leq x_1 a \\ \delta_1 | b}} \sum_{\substack{c \leq x_2 a \\ \delta_2 | c}} \delta_a(bl - c) \rho_{l,a}(b, c)$$

справедлива асимптотическая формула

$$S_{l,a}(\delta_1, \delta_2; x_1, x_2) = a^2 \frac{(a, \delta_1, \delta_2)}{\delta_1 \delta_2} \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \rho_{l,a}(t_1, t_2) dt_1 dt_2 + O\left(x_1 x_2 a^2 s_1\left(\frac{l}{a}\right)\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим решетку

$$\Lambda_l(\delta_1, \delta_2) = \{(x, y) \in \Lambda_l : \delta_1 | x, \delta_2 | y\}.$$

Произвольная точка (x, y) решетки Λ_l имеет вид $(x, y) = ue_{-1} + ve_0$, где u, v – целые, $e_{-1} = (0, a)$, $e_0 = (1, l)$ (см. свойство 3°). Такая точка будет принадлежать подрешетке $\Lambda_l(\delta_1, \delta_2)$ только в том случае, когда выполняются сравнения

$$v \equiv 0 \pmod{\delta_1}, \quad au + lv \equiv 0 \pmod{\delta_2}.$$

Следовательно, $\Lambda_l(\delta_1, \delta_2)$ – подрешетка индекса $\delta_1 \delta_2 / (a, \delta_1, \delta_2)$ в решетке Λ_l .

Рассмотрим сумму

$$\begin{aligned} S_n &= S_{l,a,n}(\delta_1, \delta_2; x_1, x_2) \\ &= \sum_{\substack{b \leq x_1 a \\ \delta_1 | b}} \sum_{\substack{c \leq x_2 a \\ \delta_2 | c}} \left[(b, c) \in \Lambda_l(\delta_1, \delta_2), \frac{s_n}{q_n} \leq \frac{c}{b} < \frac{s_{n-1}}{q_{n-1}} \right] \rho_{l,a}(b, c). \end{aligned}$$

Согласно свойству 3° последовательностей $\{s_j\}$, $\{q_j\}$, все решения сравнения $bl \equiv c \pmod{a}$, для которых $s_n/q_n \leq c/b < s_{n-1}/q_{n-1}$, имеют вид

$$b(u, v) = uq_n + vq_{n-1}, \quad c(u, v) = us_n + vs_{n-1}$$

с целыми $u > 0$, $v \geq 0$. Поэтому

$$S_n = \sum_{u > 0} \sum_{v \geq 0} [b(u, v) \leq x_1 a, \delta_1 | b(u, v), c(u, v) \leq x_2 a, \delta_2 | c(u, v)] h_{l,a}(u, v),$$

где $h_{l,a}(u, v) = \rho_{l,a}(uq_n + vq_{n-1}, us_n + vs_{n-1})$.

Определим $r = r(l, a)$ с помощью неравенств

$$\frac{s_r}{q_r} \leq \frac{x_2}{x_1} < \frac{s_{r-1}}{q_{r-1}}.$$

При $n > r$ из двух ограничений $b \leq x_1 a$, $c \leq x_2 a$ существенным является лишь первое. Поэтому

$$S_n = \sum_{u>0} \sum_{v \geq 0} [uq_n + vq_{n-1} \leq x_1 a, \delta_1 | uq_n + vq_{n-1}, \delta_2 | us_n + vs_{n-1}] h_{l,a}(u, v).$$

Переменные u и v меняются внутри области, периметр которой $-O(x_1 a/q_{n-1})$. Из оценки

$$\rho_{l,a}(t_1, t_2) \leq t_1 s_{n-1} + t_2 q_n \quad (6)$$

следует, что наибольшее значение функции $h_l(u, v)$ в указанной области не превосходит $2x_1 a s_{n-1} q_n / q_{n-1}$. Кроме того, как отмечалось выше, $\Lambda_l(\delta_1, \delta_2)$ – это подрешетка индекса $\delta_1 \delta_2 / (a, \delta_1, \delta_2)$ в Λ_l . Поэтому, используя равенство (5), находим

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{(a, \delta_1, \delta_2)}{\delta_1 \delta_2} \int_0^a \int_0^a [uq_n + vq_{n-1} \leq x_1 a] h_{l,a}(u, v) du dv + O\left(\frac{x_1^2 a^2}{q_{n-1}^2} s_{n-1} q_n\right) \\ &= \frac{(a, \delta_1, \delta_2)}{a \delta_1 \delta_2} \int_0^{x_1 a} \int_0^{x_2 a} \left[\frac{s_n}{q_n} \leq \frac{c}{b} < \frac{s_{n-1}}{q_{n-1}}\right] \rho_{l,a}(b, c) db dc + O\left(x_1 x_2 \frac{a^2 q_n}{q_{n-1}}\right). \end{aligned}$$

Далее, замечая, что

$$\frac{q_n}{q_{n-1}} = \frac{K(a_1, \dots, a_n)}{K(a_1, \dots, a_{n-1})} = \langle a_n; a_{n-1}, \dots, a_1 \rangle \leq a_n,$$

находим

$$S_n = a^2 \frac{(a, \delta_1, \delta_2)}{\delta_1 \delta_2} \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \left[\frac{s_n}{q_n} \leq \frac{t_2}{t_1} < \frac{s_{n-1}}{q_{n-1}}\right] \rho_{l,a}(t_1, t_2) dt_1 dt_2 + O(x_1 x_2 a^2 a_n). \quad (7)$$

Аналогично при $n < r$ из двух ограничений $b \leq x_1 a$, $c \leq x_2 a$ остается лишь второе. Учитывая соотношения

$$\frac{s_{n-1}}{s_n} = \frac{K(a_{n+1}, \dots, a_m)}{K(a_{n+2}, \dots, a_m)} = \langle a_{n+1}; \dots, a_m \rangle \leq a_{n+1},$$

приходим к равенству

$$S_n = a^2 \frac{(a, \delta_1, \delta_2)}{\delta_1 \delta_2} \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \left[\frac{s_n}{q_n} \leq \frac{t_2}{t_1} < \frac{s_{n-1}}{q_{n-1}}\right] \rho_{l,a}(t_1, t_2) dt_1 dt_2 + O(x_1 x_2 a^2 a_{n+1}). \quad (8)$$

Если же $n = r$, то прямая $c/b = x_2/x_1$ на плоскости Obc делит угол $s_n/q_n \leq c/b < s_{n-1}/q_{n-1}$ на две части, в первой из которых (т.е. где $s_n/q_n \leq c/b < x_2/x_1$) нужно учитывать ограничение $b \leq x_1 a$, а во второй (т.е. где $x_2/x_1 \leq c/b < s_{n-1}/q_{n-1}$) – ограничение $c \leq x_2 a$. Поэтому

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{u>0} \sum_{v \geq 0} [b(u, v) \leq x_1 a, x_2 b(u, v) > x_1 c(u, v), \delta_1 | b(u, v), \delta_2 | c(u, v)] h_{l,a}(u, v) \\ &+ \sum_{u>0} \sum_{v \geq 0} [c(u, v) \leq x_2 a, x_2 b(u, v) \leq x_1 c(u, v), \delta_1 | b(u, v), \delta_2 | c(u, v)] h_{l,a}(u, v). \end{aligned}$$

Переменные u, v меняются в области, периметр которой оценивается как

$$O\left(\frac{x_1 a}{q_r} + \frac{x_2 a}{s_{r-1}} + x_1(s_{r-1} - s_r) + x_2(q_r - q_{r-1})\right) = O\left(\frac{x_1 a}{q_r} + \frac{x_2 a}{s_{r-1}}\right)$$

(см. свойство 6°). Наибольшее значение $h_{l,a}(u, v)$, согласно неравенству (6), есть $O(ax_1 s_{r-1} + ax_2 q_r)$. При этом

$$\left(\frac{x_1 a}{q_r} + \frac{x_2 a}{s_{r-1}}\right)(ax_1 s_{r-1} + ax_2 q_r) \ll x_1 x_2 a^2 (a_r + a_{r+1}).$$

Отсюда, используя замечание 2, получаем

$$S_r = a^2 \frac{(a, \delta_1, \delta_2)}{\delta_1 \delta_2} \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \left[\frac{s_r}{q_r} \leq \frac{t_2}{t_1} < \frac{s_{r-1}}{q_{r-1}} \right] \rho_{l,a}(t_1, t_2) dt_1 dt_2 + O(x_1 x_2 a^2 (a_r + a_{r+1})). \quad (9)$$

Таким образом, для суммы

$$S_{l,a}(\delta_1, \delta_2; x_1, x_2) = \sum_{n=0}^m S_n$$

с учетом равенств (7)–(9) выводим асимптотическую формулу

$$S_{l,a}(\delta_1, \delta_2; x_1, x_2) = a^2 \frac{(a, \delta_1, \delta_2)}{\delta_1 \delta_2} \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \rho_{l,a}(t_1, t_2) dt_1 dt_2 + O(x_1 x_2 a^2 (a_1 + \dots + a_m)).$$

Цепная дробь с минусами $a/l = \langle a_1; a_2, \dots, a_m \rangle$ получается из обычной цепной дроби $a/l = [b_1; b_2, \dots, b_s]$ путем последовательного применения к неполным частным с четными номерами следующего преобразования

$$[t_{2j-1}; t_{2j}, t_{2j+1} + \alpha] = \langle t_{2j-1} + 1; \underbrace{2, \dots, 2}_{t_{2j}-1}, t_{2j+1} + 1 + \alpha \rangle.$$

При этом последнее неполное частное (если оно имеет четный номер) заменяется по формуле

$$[t_{2j-1}; t_{2j}] = \langle t_{2j-1} + 1; \underbrace{2, \dots, 2}_{t_{2j}-1} \rangle.$$

Таким образом,

$$a_1 + \dots + a_m \leq 2(b_1 + \dots + b_s) = 2s_1 \left(\frac{l}{a} \right),$$

что и дает нужную асимптотическую формулу.

Далее знак звездочки в суммах вида

$$\sum_{x=1}^a, \quad \sum_{x=0}^{a-1}$$

означает, что переменная суммирования x связана с числом a условием взаимной простоты, т.е. $(a, x) = 1$.

СЛЕДСТВИЕ 2. В условиях леммы 2 для суммы

$$S_a(\delta_1, \delta_2; x_1, x_2) = \sum_{l=1}^a {}^* S_{l,a}(\delta_1, \delta_2; x_1, x_2)$$

справедлива асимптотическая формула

$$S_a(\delta_1, \delta_2; x_1, x_2) = a^2 \frac{(a, \delta_1, \delta_2)}{\delta_1 \delta_2} \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \rho_a(t_1, t_2) dt_1 dt_2 + O(x_1 x_2 a^3 \log^2 a),$$

где

$$\rho_a(t_1, t_2) = \sum_{l=1}^a {}^* \rho_{l,a}(t_1, t_2).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно просуммировать равенства из леммы 2 и воспользоваться оценкой (см. [24])

$$\sum_{p=1}^q s_1\left(\frac{p}{q}\right) \ll q \log^2(q+1).$$

ЛЕММА 3. Пусть $x_1 > 0, x_2 > 0$ – действительные числа. Тогда для суммы

$$F_a(x_1, x_2) = \sum_{(b,c) \in M_a(x_1, x_2)} f(a, b, c)$$

справедлива асимптотическая формула

$$\begin{aligned} F_a(x_1, x_2) &= a^2 \sum_{\substack{d_1 d_2 | a \\ (d_1, d_2) = 1}} \frac{1}{d_1 d_2} \sum_{\delta_1 | d_2 a_1} \frac{\mu(\delta_1)}{\delta_1} \sum_{\delta_2 | d_1 a_1} \frac{\mu(\delta_2)}{\delta_2} (a, \delta_1, \delta_2) \\ &\quad \times \int_0^{x_1 d_2} \int_0^{x_2 d_1} \rho_{a_1}(t_1, t_2) dt_1 dt_2 + O(x_1 x_2 a^{3+\varepsilon}), \end{aligned}$$

где $a_1 = a/(d_1 d_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для нахождения суммы $F_a(x_1, x_2)$ введем параметры $d_1 = (a, b)$, $d_2 = (a, c)$ и положим $b_1 = b/d_1$, $c_1 = c/d_2$, $a_1 = a/(d_1 d_2)$. Для всех ненулевых слагаемых $(d_1, d_2) = 1$. Поэтому

$$\begin{aligned} F_a(x_1, x_2) &= \sum_{\substack{d_1 d_2 | a \\ (d_1, d_2) = 1}} \sum_{\substack{b \leq x_1 a \\ (b, a) = d_1}} \sum_{\substack{c \leq x_2 a \\ (c, a) = d_2}} f(a, b, c) \\ &= \sum_{\substack{d_1 d_2 | a \\ (d_1, d_2) = 1}} \sum_{\substack{b_1 \leq x_1 d_2 a_1 \\ (b_1, d_2 a_1) = 1}} \sum_{\substack{c_1 \leq x_2 d_1 a_1 \\ (c_1, d_1 a_1) = 1}} f(d_1 d_2 a_1, d_1 b_1, d_2 c_1). \end{aligned}$$

Применяя тождество Джонсона (см. [25])

$$f(a, b, c) = df\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}, c\right),$$

находим

$$F_a(x_1, x_2) = \sum_{\substack{d_1 d_2 | a \\ (d_1, d_2) = 1}} d_1 d_2 \sum_{\substack{b_1 \leq x_1 d_2 a_1 \\ (b_1, d_2 a_1) = 1}} \sum_{\substack{c_1 \leq x_2 d_1 a_1 \\ (c_1, d_1 a_1) = 1}} f(a_1, b_1, c_1).$$

Теперь число Фробениуса можно выразить через функцию Рёдсета по формуле (4). Следовательно,

$$\begin{aligned} F_a(x_1, x_2) &= \sum_{\substack{d_1 d_2 | a \\ (d_1, d_2)=1}} d_1 d_2 \sum_{l=1}^{a_1} \sum_{\substack{b_1 \leq x_1 d_2 a_1 \\ (b_1, d_2 a_1)=1}} \sum_{\substack{c_1 \leq x_2 d_1 a_1 \\ (c_1, d_1 a_1)=1}} \delta_{a_1}(b_1 l - c_1) \rho_{l, a_1}(b_1, c_1) \\ &= \sum_{\substack{d_1 d_2 | a \\ (d_1, d_2)=1}} d_1 d_2 \sum_{\delta_1 | d_2 a_1} \mu(\delta_1) \sum_{\delta_2 | d_1 a_1} \mu(\delta_2) \sum_{l=1}^{a_1} \sum_{\substack{b_1 \leq x_1 d_2 a_1 \\ \delta_1 | b_1}} \sum_{\substack{c_1 \leq x_2 d_1 a_1 \\ \delta_2 | c_1}} \delta_{a_1}(b_1 l - c_1) \rho_{l, a_1}(b_1, c_1). \end{aligned}$$

Далее, согласно следствию 2

$$\begin{aligned} F_a(x_1, x_2) &= a^2 \sum_{\substack{d_1 d_2 | a \\ (d_1, d_2)=1}} \frac{1}{d_1 d_2} \sum_{\delta_1 | d_2 a_1} \frac{\mu(\delta_1)}{\delta_1} \sum_{\delta_2 | d_1 a_1} \frac{\mu(\delta_2)}{\delta_2} (a, \delta_1, \delta_2) \\ &\quad \times \int_0^{x_1 d_2} \int_0^{x_2 d_1} \rho_{a_1}(t_1, t_2) dt_1 dt_2 + O(x_1 x_2 a^{3+\varepsilon}). \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Те же самые рассуждения относительно суммы

$$G_a(x_1, x_2) = \sum_{(b, c) \in M_a(x_1, x_2)} \sqrt{abc}$$

приводят к формуле

$$\begin{aligned} G_a(x_1, x_2) &= a^2 \sum_{\substack{d_1 d_2 | a \\ (d_1, d_2)=1}} \frac{1}{d_1 d_2} \sum_{\delta_1 | d_2 a_1} \frac{\mu(\delta_1)}{\delta_1} \sum_{\delta_2 | d_1 a_1} \frac{\mu(\delta_2)}{\delta_2} (a, \delta_1, \delta_2) \varphi(a_1) a_1^{1/2} \\ &\quad \times \int_0^{x_1 d_2} \int_0^{x_2 d_1} \sqrt{t_1 t_2} dt_1 dt_2 + O(x_1 x_2 a^{3+\varepsilon}). \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В силу однородности

$$\rho_{l, a}(t_1, t_2) = t_1 \rho_{l, a}\left(\frac{t_2}{t_1}\right),$$

где

$$\rho_{l, a}(\xi) = s_{n-1} + \xi q_n - \min\{s_n, \xi q_{n-1}\}$$

при $s_n/q_n \leq \xi < s_{n-1}/q_{n-1}$. Поэтому, зная функцию

$$\rho_a(\xi) = \sum_{l=1}^a \rho_{l, a}(\xi),$$

легко найти нужную плотность

$$\rho_a(t_1, t_2) = t_1 \rho_a\left(\frac{t_2}{t_1}\right). \quad (10)$$

§ 6. Преобразование плотности

В соответствии со свойством 5° последовательностей $\{s_j\}$, $\{q_j\}$ имеем

$$\rho_a^*(\xi) = \sum_{u_1=1}^a \sum_{v_1=0}^{u_1-1} \sum_{u_2=1}^a \sum_{v_2=0}^{u_2-1} \left[u_1 u_2 - v_1 v_2 = a, \frac{v_2}{u_1} \leq \xi < \frac{u_2}{v_1} \right] h(u_1, u_2, v_1, v_2; \xi),$$

где

$$h(u_1, u_2, v_1, v_2; \xi) = u_2 + \xi u_1 - \min\{v_2, \xi v_1\}.$$

Рассматривая отдельно случаи $v_2 > \xi v_1$ и $v_2 \leq \xi v_1$, запишем искомую плотность в виде

$$\rho_a^*(\xi) = \lambda^*(a; \xi) + \eta^*(a; \xi),$$

где

$$\lambda^*(a; \xi) = \sum_{u_1=1}^a \sum_{v_1=0}^{u_1-1} \sum_{u_2=1}^a \sum_{v_2=0}^{u_2-1} \left[u_1 u_2 - v_1 v_2 = a, \frac{v_2}{u_1} \leq \xi < \frac{v_2}{v_1} \right] h_1(u_1, u_2, v_1, v_2; \xi),$$

$$\eta^*(a; \xi) = \sum_{u_1=1}^a \sum_{v_1=0}^{u_1-1} \sum_{u_2=1}^a \sum_{v_2=0}^{u_2-1} \left[u_1 u_2 - v_1 v_2 = a, \frac{v_2}{u_1} \leq \xi < \frac{u_2}{v_1} \right] h_2(u_1, u_2, v_1, v_2; \xi),$$

$$h_1(u_1, u_2, v_1, v_2; \xi) = u_2 + \xi(u_1 - v_1), \quad h_2(u_1, u_2, v_1, v_2; \xi) = u_2 - v_2 + \xi u_1.$$

Замена переменных $u_1 \leftrightarrow u_2$, $v_1 \leftrightarrow v_2$ с учетом замечания 1 приводит к равенству $\eta^*(a; \xi) = \xi \lambda^*(a; 1/\xi)$. Поэтому

$$\rho_a^*(\xi) = \lambda^*(a; \xi) + \xi \lambda^*\left(a; \frac{1}{\xi}\right). \quad (11)$$

Для вычисления функции $\lambda^*(a; \xi)$ перепишем уравнение $u_1 u_2 - v_1 v_2 = a$ в виде

$$u_1(u_2 - v_2) + v_2(u_1 - v_1) = a$$

и введем переменные $x = u_1$, $y = u_2 - v_2$, $z = u_1 - v_1$, $w = v_2$. Тогда сумма $\lambda^*(a; \xi)$ перепишется так:

$$\lambda^*(a; \xi) = \sum_{x=1}^a \sum_{z=1}^x \sum_{y=1}^a \sum_{w=0}^{a-1} \left[xy + wz = a, \frac{w}{x} \leq \xi < \frac{w}{x-z} \right] (y + w + \xi z).$$

Освобождаясь от условий взаимной простоты, получаем, что

$$\lambda^*(a; \xi) = \sum_{d_1 d_2 | a} \mu(d_1) \mu(d_2) d_2 \lambda\left(\frac{a}{d_1 d_2}, \frac{d_1 \xi}{d_2}\right), \quad (12)$$

где

$$\lambda(a; \xi) = \sum_{x \geq 1} \sum_{z=1}^x \sum_{y \geq 1} \sum_{w \geq 0} \left[xy + wz = a, \frac{w}{x} \leq \xi < \frac{w}{x-z} \right] (y + w + \xi z).$$

В соответствии со слагаемыми в последней скобке запишем функцию $\lambda(a; \xi)$ в виде

$$\lambda(a; \xi) = Y(a; \xi) + W(a; \xi) + \xi Z(a; \xi) \quad (13)$$

и найдем каждую сумму отдельно.

§ 7. Применение оценок сумм Клостермана

Пусть q – натуральное число, a – целое и f – неотрицательная функция. Обозначим через $T[f]$ число решений сравнения $xy \equiv a \pmod{q}$, лежащих в области $P_1 < x \leq P_2$, $0 < y \leq f(x)$:

$$T[f] = \sum_{P_1 < x \leq P_2} \sum_{0 < y \leq f(x)} \delta_q(xy - a).$$

Как показано в работе Быковского [26], вычисление $T[f]$ сводится к нахождению суммы

$$S[f] = \frac{1}{q} \sum_{P_1 < x \leq P_2} \mu_{q,a}(x) f(x),$$

где $\mu_{q,a}(x)$ – число решений сравнения $xy \equiv a \pmod{q}$ относительно переменной y , лежащей в пределах $1 \leq y \leq q$.

Приведем упрощенный результат работы [18], уточняющий соответствующую теорему из [26]. Он основан на оценках сумм Клостермана

$$K_q(l, m, n) = \sum_{x, y=1}^q \delta_q(xy - l) \exp\left(2\pi i \frac{mx + ny}{q}\right) \quad (14)$$

и методе ван дер Корпута оценки тригонометрических сумм. В доказательстве используется неравенство

$$|K_q(l, m, n)| \leq \sigma_0(q) \sigma_0((l, m, n, q)) (lm, ln, mn, q)^{1/2} q^{1/2},$$

обобщающее следующий результат Эстермана [27]:

$$|K_q(\pm 1, m, n)| \leq \sigma_0(q) (m, n, q)^{1/2} q^{1/2}.$$

Здесь и далее

$$\sigma_\alpha(q) = \sum_{d|q} d^\alpha$$

– сумма степеней делителей натурального q . Везде ниже $\varepsilon > 0$ – сколь угодно малое число. В показателях степеней 2ε будем заменять на ε .

ЛЕММА 4. Пусть P_1, P_2 – действительные числа, $P = P_2 - P_1 \geq 2$, на отрезке $[P_1, P_2]$ вещественная функция $f(x) \geq 0$ дважды непрерывно дифференцируема и для некоторых $A > 0$, $w \geq 1$ выполнены неравенства

$$\frac{1}{A} \leq |f''(x)| \leq \frac{w}{A}.$$

Тогда справедлива асимптотическая формула

$$T[f] = S[f] - \frac{P\delta_q(a)}{2} + R[f],$$

где

$$R[f] \ll_{w, \varepsilon} (PA^{-1/3} + A^{1/2}D + q^{1/2})P^\varepsilon, \quad D = (a, q).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Из леммы 4 следует, что асимптотическая формула для $T[f]$ не изменится, если в определении $T[f]$ нестрогое неравенство $y \leq f(x)$ заменить строгим $y < f(x)$.

ЛЕММА 5. Пусть P_1, P_2 – действительные числа, $P = P_2 - P_1 > 0$, и вещественная функция $f(x) \geq 0$ на отрезке $[P_1, P_2]$ постоянна. Тогда

$$T[f] = S[f] + O\left(\left(q^{1/2} + \left(\frac{P}{q} + 1\right)D\right)q^\varepsilon\right),$$

где $D = (a, q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению $\mu_{k,a}(x)$ при любом Y имеем

$$\sum_{P_1 < x \leq P_2} \sum_{Y < y \leq Y+q} \delta_q(xy - a) = \sum_{P_1 < x \leq P_2} \mu_{k,a}(x). \quad (15)$$

Далее (см. [18; замечание 2]), при любом X и $0 < Y \leq q$ верна оценка

$$\sum_{X < x \leq X+q} \sum_{0 < y \leq Y} \delta_q(xy - a) = \frac{Y}{q} K_q(a, 0, 0) + O(Dq^\varepsilon), \quad (16)$$

где $K_q(l, m, n)$ определено равенством (14). Кроме того, при $X_2 - X_1 = X \leq q$, $Y_2 - Y_1 = Y \leq q$ справедлива формула

$$\sum_{X_1 < x \leq X_2} \sum_{Y_1 < y \leq Y_2} \delta_q(xy - a) = \frac{XY}{q^2} K_q(a, 0, 0) + O((q^{1/2} + D)q^\varepsilon) \quad (17)$$

(см. [18; лемма 3]). Учитывая соотношения

$$\begin{aligned} \sum_{X_1 < x \leq X_2} \mu_{k,a}(x) &= \sum_{k|(a,q)} k \sum_{\substack{X_1 < x \leq X_2 \\ (x,q)=k}} 1 = \sum_{k|(a,q)} k \left(\frac{\varphi(q/k)}{q/k} \frac{X}{k} + O\left(\sigma_0\left(\frac{q}{k}\right)\right) \right) \\ &= \frac{X}{q} \sum_{k|(a,q)} k \varphi\left(\frac{q}{k}\right) + O(Dq^\varepsilon) = \frac{X}{q} K_q(a, 0, 0) + O(Dq^\varepsilon) \end{aligned}$$

и асимптотические формулы (15)–(17), получаем утверждение леммы.

ЛЕММА 6. Пусть f – убывающая на отрезке $[P_1, P_2]$ функция и $f(P_1) - f(P_2) = Q$. Тогда

$$S[f] = \psi(a, q) \int_{P_1}^{P_2} f(x) dx + O(DQq^{-1+\varepsilon}),$$

где

$$\psi(a, q) = \frac{1}{q} \sum_{k|(a,q)} \sum_{\delta|q/k} \frac{\mu(\delta)}{\delta} = \frac{K_q(a, 0, 0)}{q^2}. \quad (18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, $\mu_{q,a}(x) = k\delta_k(a)$, где $k = (q, x)$. Поэтому

$$\begin{aligned} S[f] &= \frac{1}{q} \sum_{P_1 < x \leq P_2} k\delta_k(a)f(x) = \frac{1}{q} \sum_{k|(a,q)} k \sum_{\substack{P_1/k < x \leq P_2/k \\ (x,q/k)=1}} f(kx) \\ &= \frac{1}{q} \sum_{k|(a,q)} k \sum_{\delta|q/k} \mu(\delta) \sum_{P_1/(k\delta) < x \leq P_2/(k\delta)} f(k\delta x). \end{aligned}$$

Заменяя внутреннюю сумму интегралом, приходим к нужной асимптотической формуле:

$$\begin{aligned} S[f] &= \frac{1}{q} \sum_{k|(a,q)} k \sum_{\delta|q/k} \mu(\delta) \left(\frac{1}{k\delta} \int_{P_1}^{P_2} f(x) dx + O(Q) \right) \\ &= \frac{1}{q} \sum_{k|(a,q)} \sum_{\delta|q/k} \frac{\mu(\delta)}{\delta} \int_{P_1}^{P_2} f(x) dx + O(DQq^{-1+\varepsilon}). \end{aligned}$$

ЛЕММА 7. Пусть функция $I(r)/r \in C[0, 1]$ имеет конечное число участков монотонности, $|I(r)/r| \leq B$ для всех $r \in [0, 1]$, $\psi(a, q)$ определено равенством (18), $1 \leq U \leq a$, $0 \leq \theta \leq 1$. Тогда

$$\sum_{q \leq \theta U} \psi(a, q) I\left(\frac{q}{U}\right) = \frac{\sigma_{-1}(a)}{\zeta(2)} \int_0^\theta \frac{I(r)}{r} dr + O(BU^{-1}a^\varepsilon).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению функции $\psi(a, q)$ имеем

$$\sum_{q \leq \theta U} \psi(a, q) \left(\frac{q}{U}\right) = \sum_{k|a} \sum_{\delta < U/k} \frac{\mu(\delta)}{\delta} \sum_{\substack{q < \theta U \\ \delta k|q}} \frac{I(q/U)}{q}.$$

Заменяя внутреннюю сумму интегралом, приходим к нужной формуле, т.е.

$$\begin{aligned} \sum_{q \leq \theta U} \psi(a, q) \left(\frac{q}{U}\right) &= \sum_{k|a} \sum_{\delta < U/k} \frac{\mu(\delta)}{\delta} \left(\frac{1}{\delta k} \int_0^\theta \frac{I(r)}{r} dr + O(BU^{-1}) \right) \\ &= \sum_{k|a} \frac{1}{k} \left(\frac{1}{\zeta(2)} + O\left(\frac{k}{U}\right) \right) \int_0^\theta \frac{I(r)}{r} dr + O(BU^{-1}a^\varepsilon) \\ &= \frac{\sigma_{-1}(a)}{\zeta(2)} \int_0^\theta \frac{I(r)}{r} dr + O(BU^{-1}a^\varepsilon). \end{aligned}$$

§ 8. Вычисление трех вспомогательных сумм

Для вычисления сумм $Y(a; \xi)$, $W(a; \xi)$ и $Z(a; \xi)$ введем параметры $U_1 \asymp \sqrt{a\xi}$, $U_2 = aU_1^{-1} \asymp \sqrt{a/\xi}$. Будем считать, что $a \geq 9$ и $9/a \leq \xi \leq a/9$, так как в противном случае дальнейшие утверждения тривиальны. При $\xi \geq 1$ положим $n = \lfloor \sqrt{a\xi} \rfloor - 2 \geq 1$. Тогда для $U_1 \in [n + 1/4, n + 3/4]$ параметр $U_2 = a/U_1$ меняется внутри отрезка $[\frac{a}{n+3/4}, \frac{a}{n+1/4}]$, длина которого больше $1/2$. Поэтому можно выбрать $U_1, U_2 \geq 1$ так, чтобы выполнялись условия

$$U_1 U_2 = a, \quad \|U_1\|, \|U_2\| \geq \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{12} \sqrt{a\xi} \leq U_1 \leq \sqrt{a\xi}, \quad \sqrt{\frac{a}{\xi}} \leq U_2 \leq 12 \sqrt{\frac{a}{\xi}}$$

($\|x\|$ – расстояние от вещественного числа x до ближайшего целого числа). При $\xi > 1$ положим $n = \lfloor \sqrt{a/\xi} \rfloor - 2 \geq 1$. Меняя U_2 внутри отрезка $[n + 1/4, n + 3/4]$, аналогичным образом получаем, что можно выбрать $U_1, U_2 \geq 1$ так, что

$$U_1 U_2 = a, \quad \|U_1\|, \|U_2\| \geq \frac{1}{4}, \quad \sqrt{a\xi} \leq U_1 \leq 12 \sqrt{a\xi}, \quad \frac{1}{12} \sqrt{\frac{a}{\xi}} \leq U_2 \leq \sqrt{\frac{a}{\xi}}.$$

ЛЕММА 8. Для суммы

$$Y(a; \xi) = \sum_{x \geq 1} \sum_{z=1}^x \sum_{y \geq 1} \sum_{w \geq 1} \left[xy + wz = a, \frac{w}{x} \leq \xi < \frac{w}{x-z} \right] y$$

справедлива асимптотическая формула

$$Y(a; \xi) = \frac{2(4-\pi)}{3\zeta(2)} \sigma_{-1}(a) a^{3/2} \xi^{1/2} + O(R(a, \xi)),$$

где

$$R(a, \xi) = (a^{4/3}(1+\xi) + a^{5/4}(\xi^{5/4} + \xi^{-1/4}))a^\varepsilon. \quad (19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перепишем сумму $Y(a; \xi)$ в виде

$$Y(a; \xi) = \sum_{t=1}^a Y(a, t; \xi),$$

где

$$Y(a, t; \xi) = \sum_{x \geq 1} \sum_{z=1}^x \sum_{y \geq t} \sum_{w \geq 1} \left[xy + wz = a, \frac{w}{x} \leq \xi < \frac{w}{x-z} \right].$$

Разобьем $Y(a, t; \xi)$ на две суммы:

$$Y(a, t; \xi) = Y_1(a, t; \xi) + Y_2(a, t; \xi).$$

В первую отнесем те слагаемые, для которых $w \leq U_1$, а во вторую – все остальные. При таком разбиении во второй сумме всегда будет выполняться условие $z \leq U_2$.

В сумме

$$Y_1(a, t; \xi) = \sum_{w \leq U_1} \sum_{x \geq 1} \sum_{y \geq t} \sum_{z=1}^x \left[xy + wz = a, \frac{w}{x} \leq \xi < \frac{w}{x-z} \right]$$

при фиксированном значении $w \geq 1$ переменные x и y связаны так: $xy \equiv a \pmod{w}$. Для известных w , x и y значение z уже находим однозначно, а именно,

$$z = \frac{a - xy}{w}.$$

Поэтому, учитывая ограничение $z \leq x$, сумму $Y_1(a, t; \xi)$ можно переписать в виде

$$\begin{aligned} Y_1(a, t; \xi) &= \sum_{w \leq U_1} \sum_{w/\xi \leq x \leq a} \sum_{y \geq t} \delta_w(xy - a) [y_1(x) \leq y < y_2(x)] \\ &= \sum_{w \leq U_1} \sum_{y \geq t} \sum_{x \geq 1} \delta_w(xy - a) [x_1(y) \leq x < x_2(y)] \\ &= \sum_{w \leq U_1} \sum_{(x, y) \in \Omega} [y \geq t] \delta_w(xy - a), \end{aligned}$$

где

$$y_1(x) = \frac{a}{x} - w, \quad y_2(x) = \frac{a}{x} - w + \frac{w^2}{\xi x}, \quad (20)$$

$$x_1(y) = \frac{a}{w + y}, \quad x_2(y) = \frac{1}{w + y} \left(a + \frac{w^2}{\xi} \right), \quad (21)$$

а область Ω задается условиями

$$x \geq \frac{w}{\xi}, \quad y > 0, \quad y_1(x) \leq y < y_2(x)$$

или эквивалентными условиями

$$x \geq \frac{w}{\xi}, \quad y > 0, \quad x_1(y) \leq x < x_2(y).$$

Выберем параметр $U = \sqrt{a + w^2/\xi}$ и представим Ω в виде

$$\Omega = (\Omega_1 \setminus \Omega_2) \cup (\Omega_3 \setminus (\Omega_4 \cup \Omega_5)),$$

где

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \left\{ (x, y) : t \leq y \leq U - w, \frac{w}{\xi} < x < x_2(y) \right\}, \\ \Omega_2 &= \left\{ (x, y) : t \leq y \leq U - w, \frac{w}{\xi} < x < x_1(y) \right\}, \\ \Omega_3 &= \left\{ (x, y) : \frac{w}{\xi} < x \leq U, t \leq y < y_2(x) \right\}, \\ \Omega_4 &= \left\{ (x, y) : \frac{w}{\xi} < x \leq \frac{a}{U}, t \leq y < y_1(x) \right\}, \\ \Omega_5 &= \left\{ (x, y) : \max \left\{ \frac{w}{\xi}, \frac{a}{U} \right\} < x \leq U, t \leq U - w \right\}. \end{aligned}$$

Таким образом, прямая $y = U - w$ разбивает Ω на части $\Omega_1 \setminus \Omega_2$ и $\Omega_3 \setminus (\Omega_4 \cup \Omega_5)$, где $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$ – криволинейные трапеции, а Ω_5 – прямоугольник.

В областях Ω_1 и Ω_2 применим леммы 4 и 6 к функциям $x_1(y)$ и $x_2(y)$. Для этого разобьем интервал изменения переменной y на промежутки вида $(Y, 2Y] = (P_1, P_2]$, где $Y = (U - w)/2, (U - w)/4, (U - w)/8, \dots$, на каждом из которых

$$x_1''(y) \asymp x_2''(y) \asymp \frac{a}{(w + Y)^3}, \quad A \asymp \frac{(w + Y)^3}{a}.$$

Учитывая, что

$$S[x_2] - S[x_1] = S[x_2 - x_1], \quad x_2(y) - x_1(y) \leq \frac{w^2}{(w + t)\xi} = Q,$$

при суммировании по таким промежуткам, получаем главный член

$$\psi(a, w) \iint_{\Omega_1 \setminus \Omega_2} [y \geq t] dx dy + O(\delta_w(a)U[t \leq U]) + O\left(\frac{D_w w a^\varepsilon}{\xi(w + t)}\right),$$

где $D_w = (a, w)$, и остаток

$$O((a^{1/3} + a^{1/4}D_w + w^{1/2})a^\varepsilon). \quad (22)$$

При этом добавлено условие $t \leq U$, связанное с тем, что при $t > U$ область $\Omega_1 \setminus \Omega_2$ пуста.

Аналогично, в областях Ω_3 и Ω_4 применим леммы 4 и 6 к функциям $y_1(x)$ и $y_2(x)$. Тогда для $x \in (X, 2X]$ имеем

$$y_1''(x) \asymp y_2''(x) \asymp \frac{a}{X^3}, \quad y_2(x) - y_1(x) \leq \frac{w^2}{\xi x} \leq w.$$

Поэтому при суммировании по промежуткам вида $(X, 2X]$, где $X = U/2, U/4, U/8, \dots$, получим главный член

$$\psi(a, w) \iint_{\Omega_3 \setminus \Omega_4} [y \geq t] dx dy + O\left(\delta_w(a) \min\left\{U, \frac{a}{w+t}\right\}\right) + O(D_w a^\varepsilon)$$

и остаток (22).

Применяя леммы 5 и 6 в области Ω_5 , получим

$$\psi(a, w) \iint_{\Omega_5} [y \geq t] dx dy + O\left(\frac{D_w}{w} \min\left\{U, \frac{a}{w+t}\right\}\right) + O((w^{1/2} + D_w)a^\varepsilon).$$

Объединяя вышесказанное, для суммы $Y_1(a, t; \xi)$ выводим оценку

$$Y_1(a, t; \xi) = \sum_{w \leq U_1} \left(\psi(a, w) \int_{w/\xi}^a dx \int_t^a [y_1(x) \leq y < y_2(x)] dy + O(R_1(a, t, w; \xi)) \right),$$

где

$$R_1(a, t, w; \xi) = \left(a^{1/3} + a^{1/4}D_w + w^{1/2} + \frac{D_w w a^\varepsilon}{\xi(w+t)} \right) a^\varepsilon + \delta_w(a) U [t \leq U] + \delta_w(a) \min\left\{U, \frac{a}{w+t}\right\}.$$

Слагаемые в сумме $Y_1(a, t; \xi)$ являются ненулевыми только при $tw \leq a\xi$. Поэтому из неравенств

$$\sum_{w \leq N} D_w \leq \sum_{D|a} \sum_{\substack{w \leq N \\ D|w}} 1 \leq N \sigma_0(a)$$

для остаточного члена получаем оценку

$$\sum_{\substack{tw \leq a\xi \\ w \leq U_1}} R_1(a, t, w; \xi) \ll R_1(a, \xi),$$

где

$$R_1(a, \xi) = (a^{4/3}\xi + a^{5/4}(\xi^{5/4} + \xi) + a)a^\varepsilon.$$

Таким образом, для суммы

$$Y_1(a; \xi) = \sum_{t=1}^a Y_1(a, t; \xi)$$

получаем формулу

$$\begin{aligned}
 Y_1(a; \xi) &= \sum_{t=1}^a \sum_{w \leq U_1} \psi(a, w) \int_{w/\xi}^a dx \int_t^a [y_1(x) \leq y < y_2(x)] dy + O(R_1(a; \xi)) = \\
 &= \sum_{w \leq U_1} \psi(a, w) \int_{w/\xi}^a dx \int_t^a [y_1(x) \leq y < y_2(x)] y dy + O(R_1(a; \xi)) = \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{w \leq U_1} \psi(a, w) \left(\int_{w/\xi}^{a/w+w/\xi} y_2^2(x) dx - \int_{w/\xi}^{a/w} y_1^2(x) dx \right) + O(R_1(a; \xi)).
 \end{aligned}$$

Интегралы в этой формуле вычисляются непосредственно, и мы получаем равенство

$$Y_1(a; \xi) = \frac{a^{3/2} \xi^{1/2}}{2} \sum_{1 \leq w \leq U_1} \psi(a, w) I_1\left(\frac{w}{U_1}\right) + O(R_1(a; \xi)),$$

где

$$I_1(r) = r^3 - 2r^3 \log\left(1 + \frac{1}{r^2}\right) + 2r - 2r \log(1 + r^2).$$

По лемме 7 имеем

$$\begin{aligned}
 Y_1(a; \xi) &= \frac{a^{3/2} \xi^{1/2} \sigma_{-1}(a)}{2\zeta(2)} \int_0^1 \frac{I_1(r)}{r} dr + O(R_1(a; \xi)) \\
 &= \frac{a^{3/2} \xi^{1/2} \sigma_{-1}(a)}{\zeta(2)} \left(\frac{5}{2} - \frac{\pi}{3} - \frac{4}{3} \log 2 \right) + O(R_1(a; \xi)). \quad (23)
 \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь сумму

$$Y_2(a, t; \xi) = \sum_{z \geq 1} \sum_{x \geq z} \sum_{y \geq t} \sum_{w > U_1} \left[xy + wz = a, \frac{w}{x} \leq \xi < \frac{w}{x-z} \right].$$

При фиксированном $z \geq 1$ переменные x и y удовлетворяют соотношению $xy \equiv a \pmod{z}$, а для известных z , x и y значение w уже находится однозначно, а именно,

$$w = \frac{a - xy}{z}.$$

Ограничение $w > U_1$ приводит к тому, что $z < a/U_1 = U_2$. Поэтому сумму $Y_2(a, t; \xi)$ можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
 Y_2(a, t; \xi) &= \sum_{z \leq U_2} \sum_{x \geq U_2} \sum_{y \geq t} \delta_z(xy - a) [y_3(x) \leq y < y_4(x)] \\
 &= \sum_{z \leq U_2} \sum_{y \geq t} \sum_{x \geq U_2} \delta_z(xy - a) [x_3(y) \leq x < x_4(y)],
 \end{aligned}$$

где

$$y_3(x) = \frac{a}{x} - \xi z, \quad y_4(x) = \min \left\{ \frac{a - U_1 z}{x}, \frac{a}{x} - \xi z + \frac{\xi z^2}{x} \right\}, \quad (24)$$

$$x_3(y) = \frac{a}{\xi z + y}, \quad x_4(y) = \min \left\{ \frac{a - U_1 z}{y}, \frac{a + \xi z^2}{\xi z + y} \right\}. \quad (25)$$

Выберем теперь $U = \sqrt{a + \xi z^2}$. Как и в случае суммы $Y_1(a, t; \xi)$, при $y \leq U$ леммы 4 и 6 будут применяться к функциям $x_3(y)$ и $x_4(y)$, а при $y > U$ – к функциям $y_3(x)$ и $y_4(x)$. Так же разбивая интервалы изменения переменных x и y на промежутки вида $(X, 2X]$ и $(Y, 2Y]$, находим

$$Y_2(a, t; \xi) = \sum_{z \leq U_2} \left(\psi(a, z) \int_z^a dx \int_t^a [y_3(x) \leq y < y_4(x)] dy + O(R_2(a, t, z; \xi)) \right),$$

где

$$\begin{aligned} R_2(a, t, z; \xi) &= (a^{1/3} + a^{1/4} D_z + z^{1/2}) a^\varepsilon + \delta_z(a) \left(U[t \leq U] + \frac{a}{t} \right) \\ &\quad + D_z(\xi + 1) + D_z \frac{a^{3/4}}{(a - U_1 z)^{1/2}}. \end{aligned}$$

Слагаемые в сумме $Y_2(a, t; \xi)$ будут ненулевыми только при $t \leq U_1$. Поэтому, учитывая оценку

$$\sum_{\substack{tz \leq a \\ z \leq U_2}} \frac{a^{3/4}}{(a - U_1 z)^{1/2}} \ll \frac{a^{7/4}}{U_1^{1/2}} \sum_{z \leq U_2} \frac{1}{z(U_2 - z)^{1/2}} \ll a^{5/4+\varepsilon},$$

для остаточного члена

$$R_2(a, \xi) = \sum_{\substack{tz \leq a \\ z \leq U_2}} R_2(a, t, z; \xi)$$

получаем

$$R_2(a, \xi) \ll (a^{4/3} + a^{5/4} \xi^{-1/4} + a\xi) a^\varepsilon.$$

Следовательно, для суммы

$$Y_2(a; \xi) = \sum_{t=1}^a Y_2(a, t; \xi)$$

справедливы соотношения

$$\begin{aligned} Y_2(a; \xi) &= \sum_{t=1}^a \sum_{z \leq U_2} \psi(a, z) \int_0^a dx \int_t^a [y_3(x) \leq y < y_4(x)] dy + O(R_2(a; \xi)) \\ &= \sum_{z \leq U_2} \psi(a, z) \int_0^a dx \int_t^a [y_3(x) \leq y < y_4(x)] y dy + O(R_2(a; \xi)) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{z \leq U_2} \psi(a, z) \left(\int_{U_2}^{a/(\xi z) + z} y_4^2(x) dx - \int_{U_2}^{a/(\xi z)} y_3^2(x) dx \right) + O(R_2(a; \xi)). \end{aligned}$$

После вычисления интегралов приходим к равенству

$$Y_2(a; \xi) = \frac{a^{3/2} \xi^{1/2}}{2} \sum_{1 \leq z \leq U_2} \psi(a, z) I_2 \left(\frac{z}{U_2} \right) + O(R_2(a; \xi)),$$

где

$$I_2(r) = 2r \left(r^2 \log r - (1 + r^2) \log \frac{1 + r^2}{1 + r} \right).$$

По лемме 7

$$\sum_{z \leq U_2} \psi(a, z) I_2\left(\frac{z}{U_2}\right) = \frac{\sigma_{-1}(a)}{\zeta(2)} \int_0^1 \frac{I_2(r)}{r} dr + O(a^{1+\varepsilon} \xi).$$

Отсюда

$$Y_2(a; \xi) = \frac{a^{3/2} \xi^{1/2} \sigma_{-1}(a)}{\zeta(2)} \left(\frac{1}{6} - \frac{\pi}{3} + \frac{4}{3} \log 2 \right) + O(R_2(a; \xi)). \quad (26)$$

Подставляя равенства (23) и (26) в формулу

$$Y(a; \xi) = Y_1(a; \xi) + Y_2(a; \xi)$$

приходим к утверждению леммы.

ЛЕММА 9. Для суммы

$$W(a; \xi) = \sum_{x \geq 1} \sum_{z=1}^x \sum_{y \geq 1} \sum_{w \geq 0} \left[xy + wz = a, \frac{w}{x} \leq \xi < \frac{w}{x-z} \right] w$$

справедлива асимптотическая формула

$$W(a; \xi) = \frac{2(\pi-2)}{3\zeta(2)} \sigma_{-1}(a) a^{3/2} \xi^{1/2} + O(R(a, \xi)),$$

где остаток $R(a, \xi)$ определен равенством (19).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем рассматриваемую сумму в виде

$$W(a; \xi) = \sum_{t=1}^a W(a, t; \xi),$$

где

$$\begin{aligned} W(a, t; \xi) &= W_1(a, t; \xi) + W_2(a, t; \xi), \\ W_1(a, t; \xi) &= \sum_{t \leq w < U_1} \sum_{x, y \geq 1} \sum_{z=1}^x \left[xy + wz = a, \frac{w}{x} \leq \xi < \frac{w}{x-z} \right], \\ W_2(a, t; \xi) &= \sum_{z \leq U_2} \sum_{x, y \geq 1} \sum_{w \geq \max\{t, U_1\}} \left[xy + wz = a, \frac{w}{x} \leq \xi < \frac{w}{x-z} \right]. \end{aligned}$$

В сумме $W_1(a, t; \xi)$ от уравнения $xy + wz = a$ перейдем к сравнению $xy \equiv a \pmod{w}$. Ограничения на переменные $z \leq x$, $w \leq \xi x$, $\xi(x-z) < w$ – те же, что и в сумме $Y_1(a, t; \xi)$. Поэтому

$$\begin{aligned} W_1(a, t; \xi) &= \sum_{t \leq w \leq U_1} \sum_{x \geq w/\xi} \sum_{y \geq 1} \delta_w(xy - a) [x_1(y) \leq x < x_2(y)] \\ &= \sum_{t \leq w < U_1} \sum_{y \geq 1} \sum_{x \geq w/\xi} \delta_w(xy - a) [y_1(x) \leq y < y_2(x)], \end{aligned}$$

где функции $x_1(y)$, $x_2(y)$, $y_1(x)$ и $y_2(x)$ определены равенствами (20), (21). Применение лемм 4 и 6 приводит к асимптотической формуле

$$W_1(a, t; \xi) = \sum_{w \leq U_1} \left(\psi(a, w) \int_{w/\xi}^a dx \int_0^a [y_1(x) \leq y < y_2(x)] dy + O(R_3(a, t, w; \xi)) \right),$$

где

$$R_3(a, t, w; \xi) = (a^{1/3} + a^{1/4}D_w + w^{1/2})a^\varepsilon + \delta_w(a)U + D_w\xi^{-1}.$$

При этом, как и для суммы $Y_1(a; \xi)$ имеем

$$\sum_{t \leq a} \sum_{t \leq w < U_1} R_3(a, t, w; \xi) \ll R_1(a; \xi).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} W_1(a; \xi) &= \sum_{w \leq U_1} w\psi(a, w) \int_{w/\xi}^a dx \int_0^a [y_1(x) \leq y < y_2(x)] dy + O(R_1(a; \xi)) \\ &= a \sum_{w \leq U_1} w\psi(a, w) I_3\left(\frac{w}{U_1}\right) + O(R_1(a; \xi)), \end{aligned}$$

где

$$I_3(r) = (1 + r^2) \log(1 + r^2) - r^2 \log r - r^2. \quad (27)$$

По лемме 7 получаем

$$\begin{aligned} W_1(a; \xi) &= \frac{a^{3/2}\xi^{1/2}\sigma_{-1}(a)}{\zeta(2)} \int_0^1 I_3(r) dr + O(R_1(a; \xi)) \\ &= \frac{a^{3/2}\xi^{1/2}\sigma_{-1}(a)}{\zeta(2)} \left(-\frac{5}{3} + \frac{\pi}{3} + \frac{4}{3} \log 2 \right) + O(R_1(a; \xi)). \end{aligned} \quad (28)$$

В сумме $W_2(a, t; \xi)$ от уравнения $xy + wz = a$ перейдем к сравнению $xy \equiv a \pmod{z}$. Тогда

$$\begin{aligned} W_2(a, t; \xi) &= \sum_{z \leq U_2} \sum_{x \geq U_2} \sum_{y > 0} \delta_z(xy - a) [y_3(x) \leq y < y_4(x, t)] \\ &= \sum_{z \leq U_2} \sum_{x \geq U_2} \sum_{y > 0} \delta_z(xy - a) [x_3(y) \leq x < x_4(y, t)], \end{aligned}$$

где функции $x_3(y)$ и $y_3(x)$ определены в (24) и (25),

$$\begin{aligned} y_4(x, t) &= \min \left\{ \frac{a - \max\{U_1, t\}z}{x}, \frac{a}{x} - \xi z + \frac{\xi z^2}{x} \right\}, \\ x_4(y, t) &= \min \left\{ \frac{a - \max\{U_1, t\}z}{y}, \frac{a + \xi z^2}{\xi z + y} \right\}. \end{aligned}$$

Применяя леммы 4 и 6 к функциям $x_3(y)$, $x_4(y, t)$, $y_3(x)$ и $y_4(x, t)$, приходим к равенству

$$W_2(a, t; \xi) = \sum_{z \leq U_2} \left(\psi(a, z) \int_{U_2}^a dx \int_0^a [y_3(x) \leq y < y_4(x, t)] dy + O(R_4(a, t, z; \xi)) \right),$$

где

$$\begin{aligned} R_3(a, t, z; \xi) &= (a^{1/3} + a^{1/4}D_z + z^{1/2})a^\varepsilon + \delta_z(a) \min \left\{ U_1, \frac{a\xi}{t} \right\} \\ &\quad + D_z(1 + \xi) + D_z \frac{a^{3/4}}{(a - zU_1)^{1/2}}. \end{aligned}$$

При этом слагаемые будут ненулевыми только при $tz \leq a$ и

$$\sum_{t=1}^a \sum_{z \leq \min\{U_2, a/t\}} R_4(a, t, z; \xi) \ll R_2(a, \xi).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} W_2(a; \xi) &= \sum_{t \leq U_1} \sum_{z \leq U_2} \psi(a, z) \int_{U_2}^a dx \int_0^a [y_3(x) \leq y < y_4(x)] dy \\ &+ \sum_{U_1 < t \leq a} \sum_{z \leq a/t} \psi(a, z) \int_{U_2}^a dx \int_0^a [y_3(x) \leq y < y_4(x, t)] dy + O(R_2(a; \xi)). \end{aligned}$$

Двойные интегралы вычисляются непосредственно, а именно,

$$\begin{aligned} \int_{U_2}^a dx \int_0^a [y_3(x) \leq y < y_4(x)] dy &= aI_4\left(\frac{z}{U_2}\right), \\ \int_{U_2}^a dx \int_0^a [y_3(x) \leq y < y_4(x, t)] dy &= aI_4\left(\frac{z}{U_2}, \frac{U_1}{t}\right), \end{aligned}$$

где $I_4(r) = I_4(r, 1)$ и

$$I_4(r, \tau) = (1 + r^2) \log(1 + r^2) - r^2 \log r + r\tau \log \tau - r(r + \tau) \log(r + \tau). \quad (29)$$

Следовательно, по лемме 7 имеем

$$\begin{aligned} W_2(a; \xi) &= \frac{a^{3/2} \xi^{1/2} \sigma_{-1}(a)}{\zeta(2)} \left(\int_0^1 \frac{I_4(r)}{r} dr + \int_1^\infty d\tau \int_0^{1/\tau} \frac{I_4(r, \tau)}{r} dr \right) + O(R_2(a; \xi)) \\ &= \frac{a^{3/2} \xi^{1/2} \sigma_{-1}(a)}{\zeta(2)} \left(\frac{1}{3} + \frac{\pi}{3} - \frac{4}{3} \log 2 \right) + O(R_2(a; \xi)). \end{aligned} \quad (30)$$

Сложив равенства (28) и (30), получаем утверждение леммы.

ЛЕММА 10. *Для суммы*

$$Z(a; \xi) = \sum_{x \geq 1} \sum_{z=1}^x \sum_{y \geq 1} \sum_{w \geq 0} \left[xy + wz = a, \frac{w}{x} \leq \xi < \frac{w}{x-z} \right] z$$

справедлива асимптотическая формула

$$Z(a; \xi) = \frac{2(\pi - 2)}{3\zeta(2)} \sigma_{-1}(a) a^{3/2} \xi^{-1/2} + O(\xi^{-1} R(a, \xi)),$$

где остаток $R(a, \xi)$ определен в (19).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разобьем $Z(a; \xi)$ на четыре суммы, т.е.

$$Z(a; \xi) = Z_1(a; \xi) + Z_2(a; \xi) + Z_3(a; \xi) + Z_4(a; \xi), \quad (31)$$

где

$$\begin{aligned} Z_1(a; \xi) &= \sum_{t \leq U_2} \sum_{w \leq \xi t} \sum_{x, y \geq 1} \sum_{t \leq z \leq x} \left[xy + wz = a, \frac{w}{x} \leq \xi < \frac{w}{x-z} \right], \\ Z_2(a; \xi) &= \sum_{t \leq U_2} \sum_{\xi t < w \leq U_1} \sum_{x, y \geq 1} \sum_{t \leq z \leq x} \left[xy + wz = a, \frac{w}{x} \leq \xi < \frac{w}{x-z} \right], \\ Z_3(a; \xi) &= \sum_{t > U_2} \sum_{w \leq a/t} \sum_{x, y \geq 1} \sum_{t \leq z \leq x} \left[xy + wz = a, \frac{w}{x} \leq \xi < \frac{w}{x-z} \right], \\ Z_4(a; \xi) &= \sum_{t \leq U_2} \sum_{t < z < U_2} \sum_{x \geq z} \sum_{y \geq 1} \sum_{w > U_1} \left[xy + wz = a, \frac{w}{x} \leq \xi < \frac{w}{x-z} \right], \end{aligned}$$

В сумме $Z_1(a; \xi)$ для ненулевых слагаемых условие $z \geq t$ выполняется автоматически. Поэтому

$$Z_1(a; \xi) = \sum_{t \leq U_2} \sum_{w \leq \xi t} \sum_{x, y \geq 1} \delta_w(xy - a) [y_1(x) \leq y < y_2(x)].$$

Главный член здесь выделяется, как и в сумме $Y_1(a; \xi)$, т.е.

$$\begin{aligned} Z_1(a; \xi) &= \sum_{t \leq U_2} \sum_{w \leq \xi t} \psi(a, w) \left(\int_t^a dx \int_0^a [y_1(x) \leq y < y_2(x)] dy + O(R_5(a, t, w; \xi)) \right) \\ &= a \sum_{t \leq U_2} \sum_{w \leq \xi t} \psi(a, w) \left(I_4\left(\frac{w}{U_1}, \frac{t}{U_2}\right) + O(R_5(a, t, w; \xi)) \right), \end{aligned}$$

где $I_4(r, \tau)$ определено равенством (29) и

$$\begin{aligned} R_5(a, t, w; \xi) &= \left(a^{1/3} + a^{1/4} D_w + w^{1/2} + \frac{D_w a^{3/4}}{(a - wt)^{1/2}} \right) a^\varepsilon \\ &\quad + \delta_w(a) \min\left\{ U, \frac{a}{t} \right\} + D_w(1 + \xi^{-1}). \end{aligned}$$

Для оценки остатка заметим, что

$$\sum_{wt < a} \frac{a^{3/4}}{(a - wt)^{1/2}} \ll a^{3/4+\varepsilon} \sum_{n=1}^a \frac{1}{\sqrt{n}} \ll a^{5/4+\varepsilon}.$$

Остальные слагаемые, входящие в $R_5(a, t, w; \xi)$, оцениваются как и в лемме 8. Поэтому

$$\sum_{t \leq U_2} \sum_{w \leq \xi t} R_5(a, t, w; \xi) \ll (a^{4/3} + a^{5/4}(\xi^{1/4} + a\xi^{-1}))a^\varepsilon \ll R_1(a; \xi)\xi^{-1}.$$

По лемме 7 имеем

$$\begin{aligned} Z_1(a; \xi) &= \frac{a^{3/2}\xi^{-1/2}\sigma_{-1}(a)}{\zeta(2)} \int_0^1 d\tau \int_0^\tau \frac{I_4(r, \tau)}{r} dr + O(R_1(a; \xi)\xi^{-1}) \\ &= \frac{a^{3/2}\xi^{-1/2}\sigma_{-1}(a)}{\zeta(2)} \left(\frac{3}{2} - \frac{\pi}{3} + \frac{\zeta(2)}{4} - \log 2 \right) + O(R_1(a; \xi)\xi^{-1}). \end{aligned}$$

Сумма $Z_3(a; \xi)$ вычисляется аналогично, т.е.

$$\begin{aligned} Z_3(a; \xi) &= \sum_{t > U_2} \sum_{w \leq a/t} \psi(a, w) \left(\int_t^a dx \int_0^a [y_1(x) \leq y < y_2(x)] dy + O(R_5(a, t, w; \xi)) \right) \\ &= a \sum_{t > U_2} \sum_{w \leq a/t} \psi(a, w) I_4\left(\frac{w}{U_1}, \frac{t}{U_2}\right) + O(R_1(a; \xi) \xi^{-1}) \\ &= \frac{a^{3/2} \xi^{-1/2} \sigma_{-1}(a)}{\zeta(2)} \int_1^\infty d\tau \int_0^{1/\tau} \frac{I_4(r, \tau)}{r} dr + O(R_1(a; \xi) \xi^{-1}) \\ &= \frac{a^{3/2} \xi^{-1/2} \sigma_{-1}(a)}{\zeta(2)} \left(-\frac{1}{6} + \frac{\pi}{3} - \frac{\zeta(2)}{4} - \frac{1}{3} \log 2 \right) + O(R_1(a; \xi) \xi^{-1}). \end{aligned}$$

Такие же преобразования приводят к следующему представлению суммы $Z_2(a; \xi)$:

$$\begin{aligned} Z_2(a; \xi) &= \sum_{t \leq U_2} \sum_{\xi t < w \leq U_1} \psi(a, w) \left(\int_{w/\xi}^a dx \int_0^a [y_1(x) \leq y < y_2(x)] dy + O(R_5(a, t, w; \xi)) \right) \\ &= a \sum_{t \leq U_2} \sum_{\xi t < w \leq U_1} \psi(a, w) I_5\left(\frac{w}{U_1}, \frac{t}{U_2}\right) + O(R_1(a; \xi) \xi^{-1}), \end{aligned}$$

где

$$I_5(r, \tau) = (1 + r^2) \log(1 + r^2) - r(r + \tau) \log(r + \tau) - r(\tau - r) \log r + r(\tau - r).$$

По лемме 7

$$\begin{aligned} Z_2(a; \xi) &= \frac{a^{3/2} \xi^{-1/2} \sigma_{-1}(a)}{\zeta(2)} \int_0^1 d\tau \int_\tau^1 \frac{I_5(r, \tau)}{r} dr + O(R_1(a; \xi) \xi^{-1}) \\ &= \frac{a^{3/2} \xi^{-1/2} \sigma_{-1}(a)}{\zeta(2)} \left(-\frac{5}{4} + \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3} \log 2 \right) + O(R_1(a; \xi) \xi^{-1}). \end{aligned}$$

Сумма $Z_4(a; \xi)$ вычисляется как и сумма $W_2(a; \xi)$ (при этом используются леммы 4 и 6):

$$\begin{aligned} Z_4(a; \xi) &= \sum_{t \leq U_2} \sum_{t < z < U_2} \left(\psi(a, z) \int_{U_2}^a dx \int_0^a [y_3(x) \leq y < y_4(x, t)] dy \right. \\ &\quad \left. + O(R_4(a, t, z; \xi)) \right). \end{aligned}$$

При этом

$$\sum_{t \leq U_2} \sum_{z < U_2} R_4(a, t, z; \xi) \ll R(a; \xi) \xi^{-1}.$$

Нахождение главного члена сводится к интегралу от функции $I_3(r)$, определенной равенством (27):

$$\begin{aligned} Z_4(a; \xi) &= \frac{a^{3/2} \xi^{-1/2} \sigma_{-1}(a)}{\zeta(2)} \int_0^1 d\tau \int_\tau^1 \frac{I_4(r, \tau)}{r} dr + O(R(a; \xi) \xi^{-1}) \\ &= \frac{a^{3/2} \xi^{-1/2} \sigma_{-1}(a)}{\zeta(2)} \left(-\frac{17}{12} + \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3} \log 2 \right) + O(R(a; \xi) \xi^{-1}). \end{aligned}$$

Подставляя найденные значения сумм $Z_1(a; \xi)$, $Z_2(a; \xi)$, $Z_3(a; \xi)$, $Z_4(a; \xi)$ в (31), приходим к утверждению леммы.

§ 9. Доказательство основного результата

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $x_1, x_2 \in [0, 1]$. Тогда для плотности $\rho_a(\xi)$ справедлива асимптотическая формула

$$\rho_a(\xi) = \frac{8}{\pi} \varphi(a) a^{1/2} \xi^{1/2} + O((a^{4/3}(1 + \xi) + a^{5/4}(\xi^{5/4} + \xi^{-1/4}))a^\varepsilon).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставляя выражения, полученные в леммах 8–10, в равенство (13), имеем

$$\lambda(a; \xi) = \frac{4}{\pi} \sigma_{-1}(a) a^{3/2} \xi^{1/2} + O((a^{4/3}(1 + \xi) + a^{5/4}(\xi^{5/4} + \xi^{-1/4}))a^\varepsilon).$$

Отсюда по формуле (12) находим

$$\lambda^*(a; \xi) = \frac{4}{\pi} \varphi(a) a^{1/2} \xi^{1/2} + O((a^{4/3}(1 + \xi) + a^{5/4}(\xi^{5/4} + \xi^{-1/4}))a^\varepsilon).$$

Подставляя полученное выражение в (11), приходим к утверждению следствия.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. По формуле (10) на основе следствия 3 получаем равенство

$$\rho_a(t_1, t_2) = \frac{8}{\pi} \varphi(a) \sqrt{t_1 t_2 a} + O((a^{4/3}(t_1 + t_2) + a^{5/4}(t_1^{5/4} t_2^{-1/4} + t_1^{-1/4} t_2^{5/4}))a^\varepsilon).$$

Подставляя его в асимптотическую формулу из леммы 3 и учитывая замечание 3, приходим к утверждению теоремы с нужным остаточным членом.

Для доказательства теоремы 2 достаточно разбить квадрат $[1, N]^2$, внутри которого лежат пары (b, c) , на меньшие квадраты со стороной $N^{11/12}$ и в каждом из них применить теорему 1.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Подход, использованный в доказательстве теоремы 1, идейно близок к подходу Портера из статьи [28] (см. также [18]), в которой получена следующая асимптотическая формула для среднего значения длин цепных дробей рациональных чисел с равными знаменателями:

$$\frac{1}{\varphi(d)} \sum_{\substack{1 \leq c \leq d \\ (c, d) = 1}} s\left(\frac{c}{d}\right) = \frac{2 \log 2}{\zeta(2)} \log d + C_P - 1 + O_\varepsilon(d^{-1/6+\varepsilon}),$$

где

$$C_P = \frac{2 \log 2}{\zeta(2)} \left(\frac{3 \log 2}{2} + 2\gamma - 2 \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} - 1 \right) - \frac{1}{2}$$

– константа, получившая название *константы Портера*. В обоих случаях ключевую роль играют корневые оценки сумм Клостермана и метод ван дер Корпута, чем и объясняется одинаковое понижение в остаточных членах. В работе [17] при усреднении по числителям и знаменателям получен более точный результат, а именно,

$$E(R) = \frac{2}{R(R+1)} \sum_{d \leq R} \sum_{c \leq d} s\left(\frac{c}{d}\right) = \frac{2 \log 2}{\zeta(2)} \log R + C'_P + O(R^{-1} \log^4 R)$$

с абсолютной константой C'_P . Поэтому можно предположить, что при усреднении $f(a, b, c)$ по всем трем аргументам верно следующее утверждение.

ГИПОТЕЗА 4. Справедлива оценка

$$\frac{1}{x_1 x_2 x_3 N^{9/2}} \sum_{a \leq x_1 N} \sum_{b \leq x_2 N} \sum_{\substack{c \leq x_3 N \\ (a, b, c) = 1}} \left(f(a, b, c) - \frac{8}{\pi} \sqrt{abc} \right) = O_{\varepsilon, x_1, x_2, x_3}(N^{-1/2+\varepsilon}).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Метод, примененный при доказательстве теоремы 1, позволяет также описать плотность распределения величины $f(a, b, c)/\sqrt{abc}$. Оказывается, что

$$\frac{1}{|M_a(x_1, x_2)|} \sum_{(a, b, c) \in M_a(x_1, x_2)} [f(a, b, c) \leq \tau \sqrt{abc}] = \int_0^\tau p(t) dt + O_\varepsilon(R(a; x_1, x_2; \tau) a^\varepsilon),$$

где

$$R(a, x_1, x_2, \tau) \ll_{x_1, x_2, \tau} a^{-1/6}$$

и плотность $p(t)$ задается равенствами

$$p(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \in [0, \sqrt{3}); \\ \frac{12}{\pi} \left(\frac{t}{\sqrt{3}} - \sqrt{4-t^2} \right), & \text{если } t \in [\sqrt{3}, 2]; \\ \frac{12}{\pi^2} \left(t\sqrt{3} \arccos \frac{t+3\sqrt{t^2-4}}{4\sqrt{t^2-3}} + \frac{3}{2} \sqrt{t^2-4} \log \frac{t^2-4}{t^2-3} \right), & \text{если } t \in [2, +\infty). \end{cases}$$

Рис. 1. График плотности $p(t)$

Указанная плотность обладает следующими свойствами:

- 1) функция $p(t)$ возрастает на отрезке $[\sqrt{3}, 2]$ и убывает на полуинтервале $[2, +\infty)$, $\lim_{t \rightarrow 2-0} p'(t) = +\infty$, $\lim_{t \rightarrow 2+0} p'(t) = -\infty$;
- 2) $p(t) = \frac{3}{2t^3} + O\left(\frac{1}{t^5}\right)$, $t \rightarrow \infty$;
- 3) $\int_0^\infty p(t) dt = 1$;
- 4) $\int_0^\infty tp(t) dt = \frac{8}{\pi}$.

Доказательство этого результата автор планирует опубликовать в следующей статье.

Список литературы

- [1] J. L. Ramírez Alfonsín, *The Diophantine Frobenius problem*, Oxford Lecture Ser. Math. Appl., **30**, Oxford Univ. Press, Oxford, 2005.
- [2] J. J. Sylvester, “Problem 7382”, *Educational Times*, **37**, 1884, 26; reprinted in “Mathematical questions with their solution”, with additional papers and solutions, *Educational Times*, **41**, 1884, 21.
- [3] Ö. J. Rödseth, “On a linear Diophantine problem of Frobenius”, *J. Reine Angew. Math.*, **301** (1978), 171–178.
- [4] E. S. Selmer, Ö. Beyer, “On the linear Diophantine problem of Frobenius in three variables”, *J. Reine Angew. Math.*, **301** (1978), 161–170.
- [5] L. G. Fel, “Frobenius problem for semigroups $S(d_1, d_2, d_3)$ ”, *Funct. Anal. Other Math.*, **1:2** (2006), 119–157.
- [6] L. G. Fel, “Analytic representations in the three-dimensional Frobenius problem”, *Funct. Anal. Other Math.*, **2:1** (2008), 27–44.
- [7] R. Kannan, “Lattice translates of a polytope and the Frobenius problem”, *Combinatorica*, **12:2** (1992), 161–177.
- [8] R. M. Karp, “Reducibility among combinatorial problems”, *Complexity of computer computations* (Proc. Sympos. IBM Thomas J. Watson Res. Center, Yorktown Heights, NY, 1972), Plenum, New York, 1972, 85–103.
- [9] J. L. Davison, “On the linear diophantine problem of Frobenius”, *J. Number Theory*, **48:3** (1994), 353–363.
- [10] В. И. Арнольд, *Задачи Арнольда*, Фазис, М., 2000; англ. пер.: V. I. Arnold, *Arnold’s problems*, Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [11] В. И. Арнольд, *Экспериментальное наблюдение математических фактов*, МЦНМО, М., 2006.
- [12] M. Beck, D. Einstein, Sh. Zacks, “Some experimental results on the Frobenius problem”, *Experiment. Math.*, **12:3** (2003), 263–269.
- [13] D. Beihoffer, J. Hendry, A. Nijenhuis, S. Wagon, “Faster algorithms for Frobenius numbers”, *Electron. J. Combin.*, **12:1** (2005), research paper 27.
- [14] Ж. Бургейн, Я. Г. Синай, “Предельное поведение больших чисел Фробениуса”, *УМН*, **62:4** (2007), 77–90; англ. пер.: J. Bourgain, Ya. G. Sinai, “Limit behaviour of large Frobenius numbers”, *Russian Math. Surveys*, **62:4** (2007), 713–725.
- [15] А. В. Устинов, “О статистических свойствах элементов цепных дробей”, *Докл. РАН*, **424:4** (2009), 459–461; англ. пер.: A. V. Ustinov, “On the statistical properties of elements of continued fractions”, *Dokl. Math.*, **79:1** (2009), 87–89.
- [16] А. В. Устинов, “Вычисление дисперсии в одной задаче из теории цепных дробей”, *Матем. сб.*, **198:6** (2007), 139–158; англ. пер.: A. V. Ustinov, “Calculation of the variance in a problem in the theory of continued fractions”, *Sb. Math.*, **198:6** (2007), 887–907.
- [17] А. В. Устинов, “Асимптотическое поведение первого и второго моментов для числа шагов в алгоритме Евклида”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **72:5** (2008), 189–224; англ. пер.: A. V. Ustinov, “Asymptotic behaviour of the first and second moments for the number of steps in the Euclidean algorithm”, *Izv. Math.*, **72:5** (2008), 1023–1059.
- [18] А. В. Устинов, “О числе решений сравнения $xy \equiv l \pmod{q}$ под графиком дважды непрерывно дифференцируемой функции”, *Алгебра и анализ*, **20:5** (2008), 186–216.
- [19] O. Perron, *Die Lehre von den Kettenbrüchen*. Bd I. *Elementare Kettenbrüche*, Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1954.
- [20] Р. Л. Грэхем, Д. Э. Кнут, О. Паташник, *Конкретная математика. Основание информатики*, Мир, М., 1998; пер. с англ.: R. L. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik,

- Concrete mathematics. A foundation for computer science*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1989.
- [21] А. В. Устинов, “Короткое доказательство тождества Эйлера для континуантов”, *Матем. заметки*, **79**:1 (2006), 155–156; англ. пер.: A. V. Ustinov, “A short proof of Euler’s identity for continuants”, *Math. Notes*, **79**:1–2 (2006), 146–147.
- [22] E. W. Weisstein, *CRC concise encyclopedia of mathematics*, Chapman & Hall, Boca Raton, FL, 2003.
- [23] А. В. Устинов, “О статистических свойствах конечных цепных дробей”, *Труды по теории чисел*, Зап. научн. сем. ПОМИ, **322**, ПОМИ, СПб., 2005, 186–211; англ. пер.: A. V. Ustinov, “On statistical properties of finite continued fractions”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **137**:2 (2006), 4722–4738.
- [24] A. C. Yao, D. E. Knuth, “Analysis of the subtractive algorithm for greatest common divisors”, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **72**:12 (1975), 4720–4722.
- [25] S. M. Johnson, “A linear diophantine problem”, *Canad. J. Math.*, **12** (1960), 390–398.
- [26] В. А. Быковский, “Асимптотические свойства целых точек (a_1, a_2) , удовлетворяющих сравнению $a_1 a_2 \equiv l \pmod{q}$ ”, *Аналитическая теория чисел и теория функций* – 4, Записки науч. сем. ЛОМИ, **112**, Наука, Л., 1981, 5–25.
- [27] T. Estermann, “On Kloosterman’s sum”, *Mathematika*, **8** (1961), 83–86.
- [28] J. W. Porter, “On a theorem of Heilbronn”, *Mathematika*, **22**:1 (1975), 20–28.

А. В. Устинов (A. V. Ustinov)

Хабаровское отделение

Института прикладной математики ДВО РАН

E-mail: ustinov@iam.khv.ru

Поступила в редакцию

05.08.2008 и 05.01.2009