Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Тушев, Минимально бесконечные модули над метабелевыми группами конечного ранга, *Матем. сб.*, 2002, том 193, номер 5, 129–148

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm655>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 14:58:21

УДК 512.544

А. В. Тушев

Минимально бесконечные модули над метабелевыми группами конечного ранга

В работе, в частности, показано, что если G – метабелева группа конечного ранга и M – точный минимально бесконечный $\mathbb{Z}G$ -модуль, то группа G конечно порождена. При этом изучаются свойства индуцированных модулей над групповой алгеброй kG метабелевой группы G конечного ранга над полем k произвольной характеристики.

Библиография: 27 названий.

§ 1. Введение

Пусть R – кольцо, бесконечный R -модуль M называется *минимально бесконечным*, если всякий его ненулевой подмодуль определяет конечный фактормодуль. Очевидно, всякий бесконечный модуль либо финитно аппроксимируемый, либо содержит простой подмодуль конечного индекса. В дальнейшем будем предполагать, что минимально бесконечный модуль M является финитно аппроксимируемым. Нетрудно показать, что аддитивная группа минимально бесконечного модуля M либо является элементарной абелевой p -группой, либо без кручения. В первом случае будем говорить, что модуль M имеет характеристику p , а во втором случае – модуль M имеет характеристику 0.

Элементы группы G , имеющие конечные классы сопряженных элементов, образуют характеристическую подгруппу $\Delta(G)$ группы G , которую называют ее *FC-центром*. Если D – нормальная подгруппа группы G , то положим $\Delta_G(D) = \Delta(G) \cap D$.

Пусть R – кольцо, G – группа; RG -модуль M будем называть *точным*, если $C_G(M) = 1$. В дальнейшем будем предполагать, что рассматриваемые модули являются точными. В [1] Гроувз рассмотрел минимально бесконечные $\mathbb{Z}G$ -модули в случае конечно порожденной абелевой группы G . В [2] Робинсон и Вилсон описали минимально бесконечные $\mathbb{Z}G$ -модули над целочисленными групповыми кольцами почти полициклических групп. Минимально бесконечные $\mathbb{Z}G$ -модули в случае нильпотентной группы G конечного свободного ранга изучались в работе [3]. Согласно [3; теорема 4.1] в этом случае группа G конечно порождена и почти абелева. В [4], [5] показано, что если G – разрешимая группа конечного свободного ранга и M – минимально бесконечный $\mathbb{Z}G$ -модуль нулевой характеристики, то группа G конечно порождена и почти абелева. В работе [6] этот результат обобщен на случай локально разрешимой группы G . В [7; теорема 1] показано, что если M – точный минимально бесконечный $\mathbb{Z}G$ -модуль, где G – разрешимая группа конечного ранга, то группа G почти без кручения. Кроме того, группа G является конечно

порожденной и почти абелевой тогда и только тогда, когда $|\Delta(G)| = \infty$ (см. [7; теорема 2]).

В работе [8] получено описание минимально бесконечных $\mathbb{Z}G$ -модулей над конечно порожденными метабелевыми группами конечного ранга, которое оказалось близким к описанию, полученному в [2].

Основной результат настоящей работы (теорема 7.6) показывает, что если M – точный минимально бесконечный $\mathbb{Z}G$ -модуль над метабелевой группой G конечного ранга, то группа G конечно порождена. Отсюда следует справедливость предположения 8.1 из [9] в случае, когда группа G метабелева и имеет конечный ранг (см. следствие 7.7).

Ключевую роль в доказательстве теоремы 7.6 играет теорема 6.1 об индуцированных модулях над групповой алгеброй kG метабелевой группы G конечного ранга, доказательство которой основано на дальнейшем развитии (см. §§ 3–5) методов и идей работ [10]–[13]. Однако в отличие от основных результатов перечисленных выше работ теорема 6.1 верна для поля k произвольной, а не только нулевой характеристики.

§2. Вспомогательные леммы

Пусть A – абелева группа без кручения и G – ее группа операторов. Группа G действует на A рационально неприводимо, если для любой нетривиальной G -инвариантной подгруппы $B \leq A$ факторгруппа A/B периодическая. Группа A называется G -плитусом, если любая подгруппа конечного индекса из G действует на A рационально неприводимо. G -плитус A называется *нётеровым*, если A – нётеров $\mathbb{Z}G$ -модуль.

Подгруппа B группы A называется *плотной*, если для любого элемента $g \in A$ найдется натуральное число n такое, что $g^n \in B$. Если B – подгруппа локально нильпотентной группы A , то изолятор $\text{is}_A(B) = \{x \in A : x^n \in B \text{ для некоторого } n \geq 1\}$ – подгруппа в A . Подгруппа $B \leq A$ называется *изолированной* в A , если $\text{is}_A(B) = B$.

ЛЕММА 2.1. Пусть G – метабелева группа конечного свободного ранга. Тогда:

- (i) если группа G почти без кручения, то она содержит нормальную подгруппу без кручения G_1 конечного индекса, которая обладает нормальным рядом $1 \leq N \leq G_1$, где подгруппа N нильпотентная, без кручения и обладает G_1 -плитусным рядом, а факторгруппа G_1/N – конечно порожденная абелева;
- (ii) если X – нильпотентная неабелева G_1 -инвариантная подгруппа без кручения из G_1 , то X содержит изолированную G_1 -инвариантную подгруппу Y такую, что факторгруппа X/Y является G_1 -центральной;
- (iii) группа G удовлетворяет условию максимальности для нормальных подгрупп тогда и только тогда, когда она конечно порожденная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Очевидно, в процессе доказательства группу G можно заменить на любую ее нормальную подгруппу конечного индекса. Поэтому можно считать, что группа G без кручения и, следовательно, G содержит максималь-

ную абелеву нормальную подгруппу без кручения A , которая определяет абелеву факторгруппу G/A . Из максимальности подгруппы A нетрудно заключить, что $A = C_G(A)$ и, следовательно, G/A индуцирует абелеву группу автоморфизмов группы A . Тогда из [14; теорема 2] следует, что G/A содержит подгруппу без кручения N/A такую, что подгруппа N нильпотентная, а факторгруппа G/N конечно порожденная. Из определения плинтуса и конечности ранга подгруппы N следует существование нормальной подгруппы $G_1 \leq G$ конечного индекса такой, что $N \leq G_1$ и N обладает G_1 -плинтусным рядом.

(ii) Пусть B – абелева нормальная подгруппа группы G_1 , определяющая абелеву факторгруппу G_1/B . Пусть $R = B \cap X$, и пусть $C = \text{is}_X(R)$. Если $C \neq X$, то можно положить $Y = C$. Если же $C = X$, то из [14; лемма 3] следует, что R содержится в центре подгруппы X . Так как центр нильпотентной подгруппы без кручения X является изолированной в X подгруппой, то отсюда следует, что подгруппа X абелева, но это приводит к противоречию.

(iii) Утверждение следует из [15; теорема 3].

Пусть A – абелева группа без кручения конечного ранга и G – группа ее операторов. Пусть B – подгруппа, порожденная всеми минимальными изолированными G -инвариантными подгруппами группы A . Подгруппу $\text{Soc}_G(A) = \text{is}_A(B)$ будем называть G -цоколем группы A .

ЛЕММА 2.2. Пусть A – абелева группа без кручения конечного ранга, на которой действует разрешимая группа операторов G конечного ранга, причем $C_G(A) = 1$. Пусть $H \leq G$ и $r_0(G) = r_0(H)$. Тогда:

- (i) если группа G нильпотентная, то $C_A(G) = C_A(H)$;
- (ii) $\text{Soc}_G(A) = \text{Soc}_H(A)$;
- (iii) если A – G -плинтус, то A – H -плинтус.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Пусть Z – центр группы G и $Z_1 = Z \cap H$. Пусть $E_1 = C_A(Z_1)$ и $E = C_A(Z)$, тогда $E \leq E_1$, а так как подгруппа Z абелева, то E_1 – Z -допустимая подгруппа. Так как $r_0(G) = r_0(H)$, то из [14; лемма 3] следует, что $E = E_1$. Поскольку $C_A(G) \leq E$ и $C_A(H) \leq E$, то, заменив группу A на E , можно применить индукцию по ступени нильпотентности группы G .

(ii) Из [14; теорема 2] следует, что группа G обладает нормальным рядом подгрупп

$$1 \leq N \leq F \leq G \quad (*)$$

таким, что: N – нильпотентная группа без кручения, факторгруппа F/N свободная абелева, факторгруппа G/F конечная, причем группа A обладает конечным рядом G -допустимых подгрупп, в факторах которого подгруппа N действует тождественно. Пусть $1 \leq N_1 \leq F_1 \leq H$ – пересечение ряда $(*)$ с подгруппой H . Из (i) следует, что $C_A(N_1) = C_A(N) = C$. Так как C – G -инвариантная подгруппа и в силу [16; теорема 16.2.2] всякая N_1 -инвариантная подгруппа из A имеет нетривиальное пересечение с C , то $\text{Soc}_G(A) \leq C$ и $\text{Soc}_H(A) \leq C$. Поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что $A = C$ и $N = 1$. Тогда группа G почти абелева и $|G : H| < \infty$. Очевидно, существует нормальная подгруппа $D \leq G$ конечного индекса такая, что $D \leq F \cap H$. Пусть $B = \text{Soc}_D(A)$, тогда из [16; лемма 21.1.1]

следует, что $\text{Soc}_G(A) \leq B$ и $\text{Soc}_H(A) \leq B$. Так как D – нормальная подгруппа группы G , то B – G -допустимая подгруппа в A и, следовательно, не ограничивая общности, можно считать, что $A = B$.

Пусть $U = A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ – делимая оболочка группы A . Тогда достаточно показать, что U является как полупростым $\mathbb{Q}G$ -модулем, так и полупростым $\mathbb{Q}H$ -модулем. Так как U – полупростой $\mathbb{Q}D$ -модуль, то существует конечное подмножество $X \subseteq U$ такое, что $X\mathbb{Q}D = U$ и $\text{Ann}_{\mathbb{Q}D}(x) = J_x$ – максимальный идеал кольца $\mathbb{Q}D$ для любого элемента $x \in X$. Пусть $I_x = \bigcap_{g \in G} J_x^g$; так как $|G/D| < \infty$, то J_x – полупростой G -инвариантный идеал кольца $\mathbb{Q}D$. Легко видеть, что $R_x = \mathbb{Q}G/I_x\mathbb{Q}G = (\mathbb{Q}D/I_x) * (G/D)$ – скрещенное произведение полупростого кольца $\mathbb{Q}D/I_x$ и конечной группы G/D . Тогда из [17; теорема 2.1] следует, что кольцо R_x является полупростым. Аналогичные рассуждения показывают, что кольцо $K_x = \mathbb{Q}H/I_x\mathbb{Q}H$ также является полупростым. Так как $U = X\mathbb{Q}D$, то $U = \sum_{x \in X} xR_x$ и $U = \sum_{x \in X} xK_x$, откуда следует утверждение леммы.

(iii) Из [14; теорема 2] следует, что G – конечное расширение конечно порожденной абелевой группы. Тогда $|G : H| < \infty$ и из определения G -плинтуса следует, что A – H -плинтус.

ЛЕММА 2.3. Пусть G – разрешимая группа конечного ранга, и пусть H – плотная подгруппа группы G . Пусть N – нормальная нильпотентная подгруппа без кручения группы G , и пусть T – изолятор в N коммутанта N' подгруппы N . Пусть $K = T \cap H$ и $F = N \cap H$. Предположим, что фактор F/K является H -центральной. Пусть A – центр подгруппы N , тогда $\Delta_G(A) \neq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно [13; лемма 2.1.2] $r_0(G) = r_0(H)$, тогда в силу [11; лемма 3.6] $\Delta_G(A) = 1$ влечет $\Delta_H(A) = 1$. Поэтому достаточно показать, что $\Delta_H(A) = 1$ и, не ограничивая общности, можно считать, что $G = NH$. Так как $FT/T \simeq F/(F \cap T) = F/K$, то фактор FT/T является H -центральной. Так как FT/T – плотная подгруппа в N/T , то нетрудно показать, что фактор N/T также является H -центральной. Покажем, что фактор N/T является G -центральной. Ввиду равенства $G = NH$ достаточно показать, что фактор N/T является N -центральной. Так как фактор N/T является H -центральной и H – плотная подгруппа в G , то факторгруппа $N/C_N(N/T)$ является периодической. Поэтому из [14; лемма 3] следует, что $N = C_N(N/T)$. Итак, фактор N/T является G -центральной. Покажем теперь, что $\Delta_G(A) \neq 1$.

Очевидно, достаточно показать, что каждый из факторов верхнего центрального ряда $\{Z_i : i = \overline{0, n}\}$ подгруппы N обладает конечным G -центральной рядом, состоящим из изолированных подгрупп. Доказательство проведем индукцией по n . Нетрудно заметить, что $T \leq Z_{n-1}$, а так как фактор N/T является G -центральной, то G -центральной является и фактор N/Z_{n-1} . Поэтому, используя предположение индукции, достаточно показать, что если утверждение верно для всех факторов Z_{i+1}/Z_i при $i \geq 1$, то оно верно и для Z_1 , где Z_1 – центр подгруппы N . Для этого, в свою очередь, используем индукцию по свободному рангу $r_0(N)$ подгруппы N . Пусть B/Z_1 – нетривиальный G -центральной фактор из Z_2/Z_1 . Так как Z_1 – центр подгруппы N , то $[B, N] = D \neq 1$. Пусть $a \in B$ и $d \in N$, тогда для любого элемента $g \in G$ выполняются равенства $[a, d]^g = [a^g, d^g] = [ax, dy]$, где $x \in Z_1$ и $y \in T$. Отсюда нетрудно заключить, что $[a, d]^g = [a, d]$

и, следовательно, подгруппа D является G -центральной. Тогда G -центральный является изолятор C подгруппы D в Z_1 и, переходя к факторгруппе N/C , можно воспользоваться предположением индукции, так как $r_0(N/C) < r_0(N)$.

Подмножество X кольца S называется *мультипликативным*, если $xu \in X$ для любых $x, u \in X$. Элемент $x \neq 0$ кольца S называется *регулярным*, если из равенств $xu = 0$ и $zx = 0$ следует $z = 0$ и $u = 0$.

Пусть X – мультипликативное подмножество кольца S , состоящее из регулярных элементов кольца S . Кольцо R называется *правым кольцом частных* кольца S относительно подмножества X , если $S \leq R$, все ненулевые элементы из X обратимы в R и каждый элемент из R представим в виде sx^{-1} , где $s \in S$ и $0 \neq x \in X$.

Пусть K – кольцо, G – группа и H – подгруппа группы G . Если кольцо KG обладает правым кольцом частных относительно мультипликативного подмножества $KH \setminus \{0\}$, то будем обозначать это кольцо частных через $KG(KH)^{-1}$.

ЛЕММА 2.4. Пусть N – нильпотентная группа без кручения конечного ранга, которая содержит нормальную подгруппу K , определяющую бесконечную циклическую факторгруппу N/K . Пусть Y – нормальная изолированная подгруппа группы N такая, что $r(N/Y) = 1$. Пусть k – поле, и пусть M – периодический kN -модуль, который не имеет kK -кручения и kY -кручения. Тогда существуют конечно порожденная плотная подгруппа H группы N и элемент $0 \neq a \in M$ такие, что:

- (i) для любого элемента $0 \neq b \in akN$, любой подгруппы $D \leq N$, содержащей H , и любого kD -подмодуля $U \leq bkD$ имеет место соотношение $U \cap bkH \neq 0$;
- (ii) kD -модуль akD является однородным для любой подгруппы $D \leq N$, содержащей H ;
- (iii) для любой подгруппы $Z \leq N$ такой, что $L = YH \leq Z$, модуль $akZ(kY)^{-1}$ является $kZ(kY)^{-1}$ -неприводимым.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Пусть $0 \neq a \in M$, тогда из [13; лемма 2.2.4] следует существование кольца частных $kN(kK)^{-1}$ и $kN(kK)^{-1}$ -модуля $akN(kK)^{-1}$ такого, что $akN \leq akN(kK)^{-1}$. Так как модуль M является kN -периодическим и факторгруппа N/K циклическая, то модуль $akN(kK)^{-1}$ имеет конечную размерность над телом $kK(kK)^{-1}$. Поэтому элемент a можно выбрать так, что $akN(kK)^{-1}$ – простой $kN(kK)^{-1}$ -модуль. Пусть $0 \neq b \in akN$, тогда $bkN(kK)^{-1}$ – простой $kN(kK)^{-1}$ -модуль. Так как модуль M без kK -кручения и факторгруппа N/K циклическая, то согласно [13; лемма 2.2.5] существует конечно порожденная плотная подгруппа $H \leq N$ такая, что $N = KH$ и $bkN = bkH \otimes_{kH} kN$. Из [13; лемма 2.2.4(iii)] следует, что $bkN(kK)^{-1} = bkH(kE)^{-1} \otimes_{kH} kN$, где $E = H \cap K$. Тогда $bkN(kK)^{-1} = bkD(kE)^{-1} \otimes_{kD} kN$ для любой подгруппы $D \leq N$, содержащей H , и, значит, $bkD(kE)^{-1}$ – простой $kD(kE)^{-1}$ -модуль. Отсюда нетрудно заключить, что $U \cap bkE \neq 0$ для любого kD -подмодуля $U \leq bkD$ и, следовательно, $U \cap bkH \neq 0$.

(ii) Так как кольцо kH нётерово, то элемент a можно выбрать так, что модуль akH является Круль-критическим и, следовательно, однородным. Тогда утверждение следует из (i).

(iii) Так как модуль M является kN -периодическим, то из [13; лемма 2.2.3(ii)] следует, что модуль M является kH -периодическим. Пусть $C = H \cap Y$. Так как факторгруппа H/C циклическая, то модуль $akH(kC)^{-1}$ имеет конечную размерность над телом $kC(kC)^{-1}$. Поэтому существует элемент $0 \neq y \in akH$ такой, что $ykH(kC)^{-1}$ является простым $kH(kC)^{-1}$ -модулем. Очевидно, для элемента y также выполняется утверждение (i), поэтому, заменив a на y , можно считать, что $akH(kC)^{-1}$ — простой $kH(kC)^{-1}$ -модуль. Из (i) следует, что $skZ \cap akH \neq 0$ для любого элемента $0 \neq c \in akZ$, а так как $akH(kC)^{-1}$ является простым $kH(kC)^{-1}$ -модулем, то отсюда следует, что $akZ(kY)^{-1}$ — простой $kZ(kY)^{-1}$ -модуль.

Пусть I — идеал группового кольца kG . Тогда $I^+ = \{g \in G : (1 - g) \in I\}$ — нормальная подгруппа группы G .

ЛЕММА 2.5. Пусть N — нильпотентная группа без кручения конечного ранга, и пусть k — поле. Пусть A — изолированная центральная подгруппа группы N , и пусть I — максимальный идеал групповой алгебры kA такой, что A/I^+ — периодическая группа. Пусть $X = kN \setminus kNI$, тогда:

- (i) кольцо kN/kNI является однородным и не имеет делителей нуля;
- (ii) для любого элемента $x \in X$ и любого элемента $y \in kN$ существуют элементы $a \in kN$ и $b \in X$ такие, что $xa = yb$;
- (iii) если $\{x_i\}$ — конечное множество элементов из X , то пересечение правых идеалов кольца kN , порожденных элементами x_i , не содержится в kNI .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что кольцо kN/kNI является скрещенным произведением $R * F = K$ поля $R = kA/I$ и нильпотентной группы без кручения $N/A = F$.

(i) Покажем сначала, что кольцо $K = R * F$ не имеет делителей нуля. Пусть x и y — ненулевые элементы кольца K такие, что $xy = 0$, и пусть B — подгруппа в G , порожденная носителями элементов x и y . Тогда $x, y \in R * B$ и, значит, можно считать, что подгруппа F конечно порожденная. В этом случае группа F обладает конечным центральным рядом с бесконечными циклическими факторами, и можно воспользоваться индукцией по длине этого ряда. Используя предположение индукции, можно считать, что $x, y \in S * \langle g \rangle$, где S — кольцо без делителей нуля и $\langle g \rangle$ — бесконечная циклическая группа. Если $g^r \in \text{Supp}(x)$ и $g^m \in \text{Supp}(y)$ — элементы носителей с максимальными показателями r и n , то несложные вычисления показывают, что $g^{r+m} \in \text{Supp}(xy)$ и, следовательно, $xy \neq 0$, что приводит к противоречию. Таким образом, кольцо $R * F$ не имеет делителей нуля. Тогда из [18; лемма 4.1(i)] следует существование тела $T = K(K)^{-1}$ и, значит, кольцо K является однородным.

(ii) Пусть H — конечно порожденная плотная подгруппа из N , содержащая носители элементов x и y , тогда $x, y \in kH$. Пусть $B = H \cap A$, и пусть $L = I \cap kB$. Так как A/I^+ — периодическая группа, то $|B/L^+| < \infty$ и нетрудно показать, что L — максимальный идеал кольца kB . Отсюда следует, что $Ikn \cap kH = LkH$. Пусть $Y = kH \setminus LkH$, тогда $Y = X \cap kH$.

Таким образом, не ограничивая общности, можно считать, что группа N конечно порожденная. Пусть $M = kN/xkN$, пусть $\bar{y}$ — образ элемента y в фактормоду-

ле M и D – подмодуль модуля M , порожденный элементом $\bar{y}$. Пусть $J = \text{Ann}_{kN}(\bar{y})$. Если $J \leq IkN$, то $D/DI \simeq kN/IkN = K$. Согласно [13; лемма 2.3.1] фактормодуль D/DI обладает конечным рядом, факторы которого изоморфны секциям фактормодуля M/MI , и, следовательно, фактормодуль M/MI содержит свободный K -подмодуль. Очевидно, $M/MI \simeq K/\bar{x}K$, где $\bar{x}$ – образ элемента x в kN/kNI , а так как $x \notin kNI$, то $\bar{x} \neq 0$. Поскольку кольцо K однородное, то M/MI не может содержать свободных подмодулей, что приводит к противоречию. Таким образом, J не содержится в IkN и, значит, $J \cap X \neq \emptyset$, откуда, очевидно, следует утверждение леммы.

(iii) Утверждение получается из (ii) индукцией по количеству элементов x_i .

§3. Стабильные модули

Пусть k – поле, и пусть A – абелева группа без кручения конечного ранга. Если I и J – идеалы в kA , то, следуя [19; 3.8], введем отношение эквивалентности $I \approx J$, если $I \cap kB = J \cap kB$ для некоторой конечно порожденной плотной подгруппы $B \leq A$. Обозначим через $[I]$ класс эквивалентности, содержащий идеал I .

Согласно [19; 3.9] если I – идеал кольца kA , то существует конечно порожденная плотная подгруппа $B \leq A$ такая, что для любой подгруппы C конечного индекса в B отображение $P \mapsto P \cap kC$ задает биекцию множества минимальных над $I \cap kB$ простых идеалов кольца kB на множество минимальных над $I \cap kC$ простых идеалов кольца kC . Такая подгруппа B называется *локальной* для I .

Пусть N – группа и K – ее нормальная подгруппа такая, что факторгруппа N/K абелева без кручения конечного ранга. Пусть L – плотная подгруппа в N такая, что $K \leq L$, факторгруппа L/K конечно порожденная. Тогда факторгруппа L/K свободная абелева со свободными порождающими $Kx_1, Kx_2, \dots, Kx_n$. Конечное множество подгрупп $\mathcal{X} = \{\langle K, \{x_j\}_{j \in J} \rangle : J \subseteq \{1, \dots, n\}\}$ будем называть *системой подгрупп* над K .

Пусть k – поле, $W = akN$ – циклический kN -модуль и $U = akL$. Очевидно, U – образ модуля $akK \otimes_{kK} kL$ при некотором kL -модульном гомоморфизме α . Положим $\mathcal{X}(U) = \{X \in \mathcal{X} : \ker \alpha \cap (akK \otimes_{kK} kX) = 0\}$, $r(U) = \max\{r(X/K) : X \in \mathcal{X}(U)\}$ и $\mathcal{M}\mathcal{X}(U) = \{X \in \mathcal{X}(U) : r(X/K) = r(U)\}$.

Пусть I – идеал кольца kK такой, что $|K/I^+| < \infty$. Очевидно, факторгруппа N/I^+ содержит характеристическую центральную подгруппу без кручения C конечного индекса. Пусть A – подгруппа конечного индекса из $C \cap L/I^+$, тогда U/UI – нётеров kA -модуль.

Пусть P – простой идеал в kA и $(kA)_P$ – локализация кольца kA по идеалу P . Носитель $\text{Supp}(U/UI)$ kA -модуля U/UI состоит из простых идеалов $P \leq kA$, для которых $(U/UI)_P = (U/UI) \otimes_{kA} (kA)_P \neq 0$ (см. [20; гл. II, §4.4]). В силу [20; гл. IV, §1.4] множество $\mathcal{M}(U/UI)$ минимальных элементов из $\text{Supp}(U/UI)$ конечно и состоит из простых идеалов кольца kA , минимальных над $\text{Ann}_{kA}(U/UI)$. Обозначим через $\mathcal{P}_A(U/UI)$ (или просто через $\mathcal{P}(U/UI)$) подмножество простых идеалов $P \in \mathcal{M}(U/UI)$ максимальной размерности и обозначим через $d(U/UI)$ эту размерность, если $\mathcal{M}(U/UI) \neq \emptyset$, т.е. $U/UI \neq 0$, а если $U/UI = 0$, то положим $d(U/UI) = -1$. Нетрудно показать, что $d(U/UI)$ не зависит от выбора центральной подгруппы A конечного индекса в L/I^+ . Поэтому далее везде будем считать, что подгруппа A является локальной для $\text{Ann}_{kA}(U/UI)$. Пусть

$P \in \mathcal{P}_A(U/UI)$, пусть $[P]$ – класс идеалов кольца kC , эквивалентных идеалу PkC , и пусть $\mathcal{L}\mathcal{P}_A(U/UI)$ – множество таких классов $[P]$.

Пусть Q – некоторая подгруппа конечного индекса из L такая, что $K \leq Q$, и пусть $V = akQ$. Пусть $B = A \cap Q/I^+$, тогда $|A/B| < \infty$ и U/UI является kB -модулем. Поскольку подгруппа A является локальной, то $\mathcal{L}\mathcal{P}_A(U/UI) = \mathcal{L}\mathcal{P}_B(U/UI)$. Из [13; лемма 2.6.2(i)] следует, что $\text{Supp}(V/UI) \subseteq \text{Supp}(U/UI)$. Очевидно, $\text{Supp}((V+UI)/UI) \subseteq \text{Supp}(V/UI)$, а так как B – центральная подгруппа в L/I^+ , то $\text{Supp}((V+UI)/UI) = \text{Supp}((Vg+UI)/UI) \subseteq \text{Supp}(V/UI)$ для любого $g \in L$. Так как $U/UI = \sum_{g \in T} (Vg+UI)/UI$, где T – трансверсаль к подгруппе Q в L , то $\text{Supp}(U/UI) \subseteq \text{Supp}(V/UI)$ и, следовательно, $\text{Supp}(U/UI) = \text{Supp}(V/UI)$. Тогда, очевидно, $\mathcal{L}\mathcal{P}_B(V/UI) = \mathcal{L}\mathcal{P}_A(U/UI)$.

Таким образом, множество $\mathcal{L}\mathcal{P}_A(U/UI)$ не зависит от выбора подгруппы L и, следовательно, можно положить $\mathcal{L}\mathcal{P}(akN/akNI) = \mathcal{L}\mathcal{P}_A(akL/akLI)$.

Пусть K – нормальная подгруппа группы G , идеал I группового кольца kK будем называть *крупным*, если $|K/I^+| < \infty$. Если крупный идеал I является G -инвариантным, то будем его называть G -*крупным*.

Пусть R – кольцо и W – R -модуль, через $\dim_R W$ обозначим однородную размерность модуля W , а через $K_R(W)$ – размерность Крулля модуля W . Определения и свойства однородной размерности и размерности Крулля можно найти в [21].

Пусть R – нётерово кольцо, N – нильпотентная группа конечного ранга, и пусть $\mathcal{D}$ – множество всех конечно порожденных плотных подгрупп группы N . Будем говорить, что RN -модуль M имеет *локальную размерность Крулля* $\text{LK}_{RN}(M)$, если $\text{LK}_{RN}(M) = \max\{K_{RN}(aRH) : a \in M, H \in \mathcal{D}\} < \infty$. При этом будем называть модуль M *локально критическим*, если $\text{LK}_{RN}(M/U) < \text{LK}_{RN}(M)$ для любого подмодуля $0 \neq U \leq M$. Если G – группа, N – ее нормальная нильпотентная подгруппа конечного ранга и $M = aRG$ – циклический RG -модуль, то в силу [13; лемма 2.5.1] модуль M имеет локальную размерность Крулля.

Пусть N – группа, K – ее нормальная подгруппа, определяющая абелеву факторгруппу без кручения N/K конечного ранга. Пусть L – плотная подгруппа из N такая, что факторгруппа L/K является конечно порожденной. Пусть k – поле, I – крупный идеал кольца kK и M – kN -модуль. Пусть $0 \neq a \in M$. Будем говорить, что циклический подмодуль $akN \leq M$ является I -*стабильным*, если одновременно выполняются следующие условия:

- (i) $r(akL) = d(akL/akLI)$;
- (ii) для любого подмодуля $U \leq akN$ и любого элемента $0 \neq b \in akN/U$ таких, что подмодуль bkN изоморфен некоторому подмодулю из M , имеют место равенства $\mathcal{P}(bkL/bkLI) = \mathcal{P}(akL/akLI)$ и $\mathcal{L}\mathcal{P}(bkN/bkNI) = \mathcal{L}\mathcal{P}(akN/akNI)$.

ЛЕММА 3.1. Пусть N – нильпотентная минимаксная нормальная подгруппа без кручения разрешимой группы G конечного ранга, и пусть K – изолированная G -инвариантная подгруппа из N , определяющая абелеву факторгруппу N/K . Пусть L – плотная подгруппа из N такая, что $K \leq L$ и факторгруппа L/K является конечно порожденной. Пусть $\mathcal{X}$ – система подгрупп из L над K . Пусть k – конечно порожденное поле и M – точный kN -модуль без kK -кручения. Тогда существуют G -крупный идеал $I \leq kK$ и элемент $0 \neq a \in M$ такие, что:

- (i) подмодуль akN является I -стабильным;

- (ii) для любой подгруппы $X \in \mathcal{X}(akL)$ существует идеал $P \in \mathcal{P}(akL/akLI)$ такой, что $P \cap kA_X = 0$, где $A_X = A \cap X/I^+$ и A – центральная подгруппа конечного индекса из L/I^+ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Из [13; лемма 2.5.3(iii)] следует существование элемента $0 \neq d \in M$ такого, что подмодуль dkL является локально критическим и $LK_{kL}(dkL) \leq LK_{kL}(xkL)$ для любого элемента $0 \neq x \in M$. Согласно [13; лемма 2.6.4] существуют элемент $0 \neq a \in dkL$ и G -крупный идеал $I \leq kK$ такие, что $r(akL) = d(akL/akLI)$ и для любого элемента $0 \neq x \in akL$ имеет место равенство $\mathcal{P}(xkL/xkLI) = \mathcal{P}(akL/akLI) = \mathcal{P}$. Так как подмодуль dkL является локально критическим, то из [13; лемма 2.5.2(ii)] следует, что $LK_{kL}(akL) \leq LK_{kL}(xkL)$ для любого элемента $0 \neq x \in M$.

Пусть Q – подмодуль в akN , и пусть $W = akN/Q$. Пусть $0 \neq b \in W$, причем подмодуль bkN изоморфен подмодулю из M . Тогда $b = \sum_{i=1}^n \bar{a}d_it_i$, где $\bar{a}$ – образ элемента a в фактормодуле W , $d_i \in kL$ и t_i – элементы некоторой трансверсали подгруппы L в N . Отсюда следует, что $bkL \leq \sum_{i=1}^n (x_ikL)t_i$, где $x_i = \bar{a}d_i \in \bar{a}kL \simeq akL/(akL \cap Q)$. Пусть C – центральная подгруппа без кручения конечного индекса в N/I^+ , и пусть $A = C \cap L/I^+$. Так как $(x_ikL)t_i/(x_ikL)t_iI$ – kA -модуль, причем подгруппа A содержится в центре группы N/I^+ , то $\text{Supp}((x_ikL)t_i/(x_ikL)t_iI) = \text{Supp}((x_ikL)/(x_ikL)I)$. Из [13; лемма 2.6.2(i)] следует, что $\text{Supp}((x_ikL)/(x_ikL)I) \subseteq \text{Supp}(\bar{a}kL/\bar{a}kLI) \subseteq \text{Supp}(akL/akLI)$. Так как $bkL \leq \sum_{i=1}^n (x_ikL)t_i$, то отсюда следует, что $\text{Supp}(bkL/bkLI) \subseteq \text{Supp}(akL/akLI)$.

Покажем индукцией по n , что bkL содержит циклический подмодуль Y , изоморфный подмодулю модуля $(ad_ikL)t_i$ для некоторого i . Если

$$V = bkL \cap \sum_{i=2}^n (x_ikL)t_i \neq 0,$$

то можно заменить bkL на ненулевой циклический kL -подмодуль из V и применить предположение индукции. Таким образом, можно считать, что $V = 0$ и, следовательно, $bkL \leq (x_1kL)t_1/U$, где $U = (x_1kL)t_1 \cap \sum_{i=2}^n (x_ikL)t_i$. Тогда $bkL \leq (ad_1kL)t_1/E$, где E – некоторый подмодуль из $(ad_1kL)t_1$. Так как модуль akL локально критический, то подмодуль $ad_1kL \leq akL$ также является локально критическим и из [13; лемма 2.5.2(ii)] следует, что $LK_{kL}(ad_1kL) = LK_{kL}(akL)$. Тогда модуль $(ad_1kL)t_1 \leq M$ является локально критическим и $LK_{kL}((ad_1kL)t_1) = LK_{kL}(akL)$. Если $E \neq 0$, то $LK_{kL}(bkL) < LK_{kL}(akL)$, что невозможно, так как $LK_{kL}(akL) \leq LK_{kL}(xkL)$ для любого элемента $0 \neq x \in M$.

Итак, bkL содержит циклический подмодуль Y , изоморфный подмодулю модуля $(ad_ikL)t_i$ для некоторого i . Из [13; лемма 2.6.2(i)] следует, что $\text{Supp}(Y/YI) \subseteq \text{Supp}(bkL/bkLI)$. Так как $ad_ikL \leq akL$, то Y изоморфен подмодулю из $(akL)t_i$. Отсюда следует, что $\mathcal{P}(Y/YI) = \mathcal{P}$ и, значит, $\mathcal{P} \subseteq \text{Supp}(bkL/bkLI)$. Тогда из соотношения $\text{Supp}(bkL/bkLI) \subseteq \text{Supp}(akL/akLI)$ получаем, что $\mathcal{P} = \mathcal{P}(bkL/bkLI)$ и, следовательно, $\mathcal{L}\mathcal{P}(bkN/bkNI) = \mathcal{L}\mathcal{P}(akN/akNI)$.

- (ii) В силу [13; лемма 2.2.5] существует конечно порожденная подгруппа $H \leq L$ такая, что $L = KH$ и $akL = akH \otimes_{kH} kL$. При этом подгруппу H можно выбрать так, что существует система $\mathcal{Y}$ подгрупп из H над $K \cap H$ такая, что

$X \in \mathcal{X}(akL)$ тогда и только тогда, когда $X = KY$, где $Y \in \mathcal{Y}(akH)$. Тогда ввиду [22; лемма 8] и [13; предложение 2.4.3(i)] идеал I можно выбрать так, что $(akH/akHJ) \otimes_{kB_X} F_X \neq 0$, где $J = I \cap k(K \cap H)$, B – центральная подгруппа конечного индекса из H/J^+ и F_X – поле частных кольца kB_X . Отсюда следует существование простого идеала $P \leq kB_X$ такого, что $P \in \mathcal{P}(akH/akHJ)$ и $P \cap kB_X = 0$. В силу [13; лемма 2.2.6] существует kH -модульный изоморфизм между $akH/akHJ$ и $akL/akLI$, откуда следует утверждение леммы.

§ 4. Сепараторы стабильных модулей

Пусть R – кольцо, и пусть M , X и Y – R -модули. Будем говорить, что модули X и Y *сепарированы* в M , если X и Y не имеют изоморфных секций, которые были бы изоморфны ненулевому подмодулю в M .

Пусть k – поле, G – группа и A – нормальная подгруппа группы G . Пусть M и W – kA -модули. Подгруппу $\text{Ser}_{(G,A)}(M, W) \leq G$, порожденную элементами $g \in G$ такими, что модули W и Wg не сепарированы в M , будем называть *сепаратором* модуля W в G .

ЛЕММА 4.1. *Пусть G – разрешимая группа конечного ранга, пусть N – ее минимаксная нормальная подгруппа, и пусть K – G -инвариантная подгруппа из N , определяющая абелеву факторгруппу без кручения N/K . Пусть k – поле и M – точный kN -модуль без kK -кручения. Пусть $0 \neq a \in M$, причем $W = akN$ является I -стабильным kN -модулем для некоторого G -крупного идеала $I \leq kK$. Тогда $\text{Ser}_{(G,N)}(M, W)$ действует на $\mathcal{L}\mathcal{P}(W/WI) = \mathcal{L}\mathcal{P}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению $\text{Ser}_{(G,N)}(M, W)$ обладает порождающим множеством H таким, что модули W и Wg не сепарированы в M для любого элемента $g \in H$. Пусть $g \in H$, тогда существуют секции U/V и X/Y модуля W такие, что U/V и $(X/Y)g$ изоморфны ненулевому подмодулю модуля M . Следовательно, существуют ненулевые элементы $b \in akN/V$ и $d \in akN/Y$ такие, что $bkN \simeq (dkN)g$. Так как модуль W является I -стабильным, то

$$\mathcal{L}\mathcal{P}(bkN/bkNI) = \mathcal{L}\mathcal{P}(dkN/dkNI) = \mathcal{L}\mathcal{P}.$$

Так как $bkN \simeq (dkN)g$, то

$$\mathcal{L}\mathcal{P}(bkN/bkNI) = \mathcal{L}\mathcal{P}(dkN/dkNI)^g$$

и, следовательно, $\mathcal{L}\mathcal{P} = \mathcal{L}\mathcal{P}^g$ для любого $g \in H$. Поскольку $\text{Ser}_{(G,N)}(M, W) = \langle H \rangle$, то отсюда следует утверждение леммы.

ЛЕММА 4.2. *Пусть G – разрешимая группа конечного ранга, N – ее нильпотентная минимаксная нормальная подгруппа без кручения и K – изолированная G -инвариантная подгруппа из N такая, что факторгруппа N/K абелева. Пусть k – конечно порожденное поле и M – точный kN -модуль, который не имеет kK -кручения. Пусть A – характеристическая центральная подгруппа конечного индекса в N/I^+ . Пусть $0 \neq a \in M$, причем $V = akN$ – I -стабильный kN -модуль. Тогда существует подгруппа H конечного индекса в $\text{Ser}_{(G,N)}(M, V)$ такая, что:*

- (i) $P \cap kS \neq 0$ для любого идеала P из любого класса $[P] \in \mathcal{L}\mathcal{P}(V/VI)$, где $S = \text{Soc}_H(A)$;

- (ii) если N/K – H -плинтус и L – плотная подгруппа в N , содержащая K и определяющая конечно порожденную факторгруппу L/K , то $\text{u-dim}_{kK} akL < \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предыдущей лемме подгруппа $\text{Ser}_{(G,N)}(M, V)$ действует на множестве $\mathcal{LP}(V/VI)$, а так как множество $\mathcal{LP}(V/VI)$ конечно, то существует подгруппа $H \leq \text{Ser}_{(G,N)}(M, V)$ конечного индекса, которая стабилизирует каждый класс $[P] \in \mathcal{LP}(V/VI)$. При этом, заменив H на ее подгруппу конечного индекса, можно считать, что $\Delta_H(A) = C_A(H)$ и, следовательно, $\Delta_H(A) \leq S$.

(i) Аргументы доказательства [19; 3.8] показывают, что изолятор B подгруппы P^+ в A является H -инвариантной подгруппой. Поэтому если $P^+ \neq 1$, то $P^+ \cap S \neq 1$ и, следовательно, $P \cap kS \neq 0$. Если же $P^+ = 1$, то из [19; 3.11] следует, что $P \cap kD \neq 0$, где $D = \Delta_H(A)$, а так как $\Delta_H(A) \leq S$, то $P \cap kS \neq 0$.

(ii) Так как модуль akN является I -стабильным, то $r(akL) = d(akL/akLI)$, а так как N/K – H -плинтус, то A также является H -плинтусом. Поскольку H стабилизирует классы $[P] \in \mathcal{LP}(V/VI)$, то из [19; 3.11] следует, что $r(akL) = d(akL/akLI) = 0$. Отсюда нетрудно получить, что $\text{u-dim}_{kX} akL < \infty$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.3. Пусть G – разрешимая группа конечного ранга и N – ее нильпотентная минимаксная нормальная подгруппа без кручения. Пусть K – изолированная G -инвариантная подгруппа из N такая, что факторгруппа N/K абелева. Пусть k – поле и M – точный kN -модуль, который имеет kN -кручение, но не имеет kX -кручения для любой собственной G -инвариантной изолированной подгруппы $X \leq N$, содержащей K . Предположим, что $r_0(\text{Ser}_{(G,N)}(M, akN)) = r_0(G)$ для любого элемента $0 \neq a \in M$. Тогда:

- (i) $\text{Soc}_G(N/K) = N/K$;
(ii) если факторгруппа N/K обладает G -плинтусным рядом, то все плинтусы из N/K имеют одинаковый ранг.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Так как модуль M имеет kN -кручение, то существует конечно порожденное подполе $f \leq k$ такое, что модуль M имеет fN -кручение. Из [13; лемма 3.1.2] следует, что $r_0(G) = r_0(\text{Ser}_{(G,N)}(M, afN))$ для любого элемента $0 \neq a \in M$. Тогда, заменив k на f , можно считать, что поле k является конечно порожденным.

По лемме 3.1 существует элемент $0 \neq a \in M$ такой, что модуль akN является I -стабильным для некоторого G -инвариантного идеала $I \leq kK$. Пусть A – центральная характеристическая подгруппа без кручения конечного индекса в N/I^+ , и пусть $T = \text{Soc}_G(A)$. Предположим, что $A \neq T$. Пусть R – прообраз подгруппы T в N , тогда модуль M без kR -кручения. Очевидно, систему $\mathcal{X}$ подгрупп над K можно выбрать так, что $R \cap L \in \mathcal{X}(W)$. Тогда из леммы 3.1(ii) следует, что $P \cap kT = 0$ для некоторого $P \in \mathcal{P}(akL/akLI)$. Пусть $Q = PkT$, тогда $[Q] \in \mathcal{LP}(akN/akNI)$ и $Q \cap kT = 0$. По лемме 4.2(i) существует подгруппа H конечного индекса в $\text{Ser}_{(G,N)}(M, akN)$ такая, что $Q \cap kS \neq 0$ для любого идеала Q из любого класса $[Q] \in \mathcal{LP}(akN/akNI)$, где $S = \text{Soc}_H(A)$. Так как $|\text{Ser}_{(G,N)}(M, akN) : H| < \infty$ и $r_0(\text{Ser}_{(G,N)}(M, akN)) = r_0(G)$, то $r_0(H) = r_0(G)$. Тогда из леммы 2.2(i) следует, что $S = T = \text{Soc}_G(A)$ и, следовательно, $Q \cap kT \neq 0$, что приводит к противоречию.

Таким образом, $A = \text{Soc}_G(A)$, а так как существует $\mathbb{Z}G$ -модульный изоморфизм между подгруппой A и подгруппой конечного индекса из N/K , то утверждение

становится очевидным.

(ii) Предположим, что утверждение неверно. Тогда подгруппа N содержит максимальные изолированные G -инвариантные подгруппы X и Y , содержащие K , такие, что $r(N/X) \neq r(N/Y)$ и, следовательно, $r(X) \neq r(Y)$. Очевидно, не ограничивая общности, можно считать, что $X \cap Y = K$. Пусть H — конечно порожденная плотная подгруппа из N . Так как факторгруппа N/K обладает G -плинтусным рядом, то N/X и N/Y являются G -плинтусами. Так как $r_0(Z) = r_0(G)$ для любой подгруппы Z конечного индекса в $\text{Sep}_{(G,N)}(M, akN)$, то из леммы 2.2(iii) следует, что N/X и N/Y являются Z -плинтусами для любой подгруппы Z конечного индекса в $\text{Sep}_{(G,N)}(M, akN)$. Поэтому из леммы 4.2(ii) следует существование элемента $b \in M$ такого, что $\text{u-dim}_{kX}(bkXH) = \text{u-dim}_{kY}(bkYH) = 0$. Тогда нетрудно показать существование конечно порожденной плотной подгруппы $F \leq N$ такой, что $H \leq F$ и $\text{u-dim}_{k(X \cap F)}(bkF) = \text{u-dim}_{k(Y \cap F)}(bkF) = 0$. Из [13; лемма 2.2.2] следует существование элемента $x \in bkF$ такого, что $K_{kF}(xkF) = r(Y \cap F) = r(X \cap F)$ и, следовательно, $r(Y) = r(X)$, но это приводит к противоречию.

§ 5. Стабилизаторы однородных модулей

Пусть U и V — подмодули модуля M такие, что $U \geq V$. Секцию U/V будем называть *собственной*, если $U \neq V \neq 0$. Подмодуль W модуля M будем называть *твердым* в M , если W однородный и не имеет собственных секций, изоморфных подмодулю модуля M .

Модули X и Y над кольцом R называются *подобными*, если их инъективные оболочки изоморфны. Пусть k — поле, G — группа и A — нормальная подгруппа группы G . Пусть M и W — kA -модули. По лемме 3.2 работы [23] $\text{Stab}_G[W] = \{g \in G : Wg \text{ и } W \text{ подобны}\}$ — подгруппа в G , которую называют *стабилизатором* в G класса модулей $[W]$, подобных W . Легко проверить, что $\text{Stab}_G[W] \leq \text{Sep}_{(G,A)}(M, W)$, а если подмодуль W твердый в M , то $\text{Stab}_G[W] = \text{Sep}_{(G,A)}(M, W)$.

Пусть I — идеал группового кольца kA абелевой группы A , тогда существует единственная минимальная подгруппа $C \leq A$, для которой $kA = (kC \cap I)kA$ и которую называют *контролером идеала* I .

ЛЕММА 5.1. Пусть H — нильпотентная минимаксная группа без кручения, K — ее нормальная подгруппа, определяющая свободную абелеву факторгруппу H/K . Пусть k — поле, $W = akH$ — циклический kH -модуль и I — H -крупный идеал кольца kK . Предположим, что $W = akL \otimes_{kL} kH$ для некоторой подгруппы L конечного индекса в H такой, что $K \leq L$ и $\text{char } k = p$ не делит $|H/L|$. Пусть A — центральная характеристическая подгруппа конечного индекса в H/I^+ . Пусть C — подгруппа в A , порожденная контролерами идеалов из $\mathcal{P}_A(W/WI)$, и D — прообраз подгруппы C в H . Тогда $D \leq L$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $W = V \otimes_{kL} kH$ и $K \leq L$, то $W/WI = (V/VI) \otimes_{kX} kY$, где $X = L/I^+$ и $Y = H/I^+$. Пусть $B = A \cap X$, тогда $(V/VI)kA = (V/VI) \otimes_{kB} kA$ и $p \notin \pi(A/B)$. Так как $W/WI = (V/VI) \otimes_{kX} kY$, то $\mathcal{P}_B(W/WI) = \mathcal{P}_B(V/VI)$ и $\mathcal{P}_A(W/WI) = \mathcal{P}_A((V/VI)kA)$. Очевидно, для любого $Q \in \mathcal{P}_B(W/WI)$ кольцо kA/QkA является скрещенным произведением $(kB/Q) * (A/B)$, а так как

$p \notin \pi(A/B)$, то из [17; теорема 2.1] следует, что кольцо kA/QkA является полупростым. Отсюда нетрудно заключить, что идеал QkA является пересечением конечного множества $\mathcal{L}$ простых идеалов кольца kA , а так как $(V/VI)kA = (V/VI) \otimes_{kB} kA$, то $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{P}_A(W/WI)$. Но подгруппа A выбрана так, что для любой подгруппы B конечного индекса в A отображение $P \mapsto P \cap kB$ задает биекцию $\mathcal{P}_A(W/WI) \rightarrow \mathcal{P}_B(W/WI)$, поэтому $P = (P \cap kB)kA$ для любого $P \in \mathcal{P}(W/WI)$. Таким образом, $C \leq B$, откуда, очевидно, следует утверждение леммы.

ЛЕММА 5.2. Пусть G – разрешимая группа конечного ранга, пусть N – ее нильпотентная минимаксная нормальная подгруппа без кручения. Пусть T – G -инвариантная изолированная подгруппа из N такая, что $r(N/T) = 1$. Пусть L – плотная подгруппа в N такая, что $T \leq L$ и факторгруппа L/T циклическая. Пусть k – поле, и пусть M – точный периодический kN -модуль, который не имеет kT -кручения. Пусть $0 \neq a \in M$ такой, что $akN = akL \otimes_{kL} kN$, причем $U \cap bkN \neq 0$ для любого элемента $0 \neq b \in akL$ и любого kN -подмодуля $0 \neq U \leq bkN$. Предположим, что $akF(kT)^{-1}$ является неприводимым $kF(kT)^{-1}$ -модулем для любой подгруппы $F \leq N$, содержащей L . Тогда $S = \text{Stab}_G[akN]$ содержит подгруппу конечного индекса, которая действует на факторе N/T тождественно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 3.1 следует существование G -крупного идеала $I \leq kT$ и элемента $b \in akL$ таких, что $\mathcal{P} = \mathcal{P}(ckL) = \mathcal{P}(bkL)$ для любого элемента $c \in bkN$. Нетрудно заметить, что элемент b обладает всеми перечисленными выше свойствами элемента a . Так как $akN(kT)^{-1}$ является неприводимым $kN(kT)^{-1}$ -модулем, то akN – однородный kN -модуль и, следовательно, $S = \text{Stab}_G[bkN]$. Поэтому элемент a можно заменить на b .

Пусть C – центральная циклическая подгруппа конечного индекса в L/I^+ , пусть E – контролер в C идеалов из $\mathcal{P}$, и пусть D – прообраз подгруппы C в подгруппе L . Пусть $p = \text{char } k$, и пусть P/L – силовская p -подгруппа из N/L ; если $\text{char } k = 0$, то $P = L$. Пусть $g \in S = \text{Stab}_G[akN]$, тогда существуют элементы $x, y \in akN$ такие, что $xkN \simeq ykNg$. Так как $ykN \cap akL \neq 0$, то элемент y можно выбрать так, что $ykN = ykP \otimes_{kP} kN$ и, следовательно, $xkN = xkY \otimes_{kY} kN$, где $Y = P^g$. Отсюда следует, что $xkL = xkL \otimes_{kK_g} kL$, где $K_g = L \cap P^g$. Так как N/P – p' -группа, то N/P^g – p' -группа и, следовательно, p не делит $|L/K|_g$. Тогда из леммы 5.1 следует, что $D \leq K_g \leq P^g$ для любого $g \in S$. Пусть $R = \bigcap_{g \in S} P^g$, тогда $D \leq R$ и R – S -инвариантная подгруппа. Если факторгруппа R/T циклическая, то утверждение леммы становится очевидным. Таким образом, можно считать, что $R/T \simeq \mathbb{Q}_p$, где $\mathbb{Q}_p = \{m/n \in \mathbb{Q} : n = p^t, \text{ где } t \in \mathbb{Z}\}$ – аддитивная группа p -ичных дробей. Тогда $S = C_S(R/T)\langle h \rangle$, где h действует на R/T как умножение на степень числа $1/p$. Отсюда следует, что $L \leq L^h$ и, значит, $L \leq L^g$ для любого $g \in S$.

Пусть d – размерность модуля $akL(kT)^{-1}$ над телом $kT(kT)^{-1}$. Тогда $akR(kT)^{-1}$ – полупростой $kL(kT)^{-1}$ -модуль, каждый простой подмодуль которого имеет размерность d над телом $kT(kT)^{-1}$. Предположим, что $m = |L^g/L| \neq 1$ для некоторого $g \in S$, тогда $akR(kT)^{-1}$ – полупростой $k(L^g)(kT)^{-1}$ -модуль, каждый простой подмодуль которого имеет размерность md над телом $kT(kT)^{-1}$ и, следовательно, $(akR(kT)^{-1})^g$ – полупростой $kL(kT)^{-1}$ -модуль, каждый простой подмодуль которого имеет размерность md над телом $kT(kT)^{-1}$. Но это приводит

к противоречию, так как модули $(akR(kT)^{-1})g$ и $akR(kT)^{-1}$ изоморфны. Таким образом, $L^g = L$ для любого $g \in S$ и, следовательно, N/T содержит циклическую S -инвариантную подгруппу L/T , откуда следует утверждение леммы.

ЛЕММА 5.3. *Пусть G – разрешимая группа конечного ранга, пусть N – ее нильпотентная минимаксная нормальная подгруппа без кручения. Пусть K – G -инвариантная изолированная подгруппа из N такая, что факторгруппа N/K абелева. Предположим, что N содержит изолированную G -инвариантную подгруппу Y такую, что $K \leq Y$ и факторгруппа N/Y циклическая. Пусть k – поле, и пусть M – точный kN -модуль, который не имеет kX -кручения для любой собственной G -инвариантной изолированной подгруппы $X \leq N$. Пусть элемент $0 \neq a \in M$ такой, что akN – твердый непериодический kN -модуль. Тогда $\text{Stab}_G[akN]$ содержит подгруппу конечного индекса, которая действует на факторе N/K тождественно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, $\text{Stab}_G[akN]$ содержит подгруппу конечного индекса S такую, что факторгруппа N/K обладает S -плинтусным рядом и в факторе N/Y подгруппа S действует тождественно. Так как модуль akN является твердым, то $\text{Ser}_{(S,N)}(akN, xkN) = \text{Stab}_G[akN]$ для любого элемента $0 \neq x \in akN$. Тогда из утверждения 4.3 следует, что $\text{Soc}_S(N/K) = N/K$ и все S -плинтусы из N/K имеют одинаковый ранг. Так как факторгруппа N/Y циклическая, то все плинтусы из N/K имеют ранг 1. Так как $\text{Soc}_S(N/K) = N/K$, то достаточно показать, что для любой изолированной S -инвариантной подгруппы $T \leq N$ такой, что $K \leq T$ и $r(N/T) = 1$, некоторая подгруппа конечного индекса из S действует на факторе N/T тождественно.

По лемме 2.4(i) существуют конечно порожденная плотная подгруппа $H \leq N$ и элемент $0 \neq c \in akN$ такие, что для любого элемента $0 \neq b \in ckN$, любой подгруппы $D \leq N$, содержащей $TH = L$, и любого kD -подмодуля $U \leq bkD$ имеет место соотношение $U \cap bkL \neq 0$. Кроме того, по лемме 2.4(iii) $ckF(kT)^{-1}$ является неприводимым $kF(kT)^{-1}$ -модулем для любой подгруппы $F \leq N$, содержащей L . Так как модуль akN является однородным, то $\text{Stab}_G[akN] = \text{Stab}_G[ckN]$. Тогда можно применить лемму 5.2.

ТЕОРЕМА 5.4. *Пусть G – разрешимая группа конечного ранга, пусть N – ее нильпотентная нормальная подгруппа без кручения. Пусть K – изолированная G -инвариантная подгруппа из N такая, что факторгруппа N/K абелева, причем существует G -инвариантная изолированная подгруппа $Y \leq N$ такая, что $K \leq Y$ и факторгруппа N/Y является G -центральной. Пусть k – поле, пусть M – точный kN -модуль, который имеет kN -кручения, но для любой собственной G -инвариантной изолированной подгруппы $X \leq N$, содержащей K , модуль M не имеет kX -кручения. Предположим, что $r_0(\text{Ser}_{(G,T)}(M, akT)) = r_0(G)$ для любого элемента $0 \neq a \in M$ и любой G -инвариантной подгруппы $T \leq N$. Тогда $\Delta_G(N) \neq 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как факторгруппа N/Y является G -центральной, то существуют плотная G -инвариантная подгруппа $X \leq N$ и G -инвариантная подгруппа $X_1 \leq N$ такие, что $Y \leq X_1 \leq X$ и факторгруппа X/X_1 бесконечная циклическая. Из [13; лемма 2.2.3] следует, что модуль M имеет kX -кручение, поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что $N = X$. Так как факторгруппа N/K

абелева, то, не ограничивая общности, можно считать, что K – изолятор коммутанта подгруппы N .

Из [13; лемма 2.3.5] следует существование элемента $0 \neq a \in M$ такого, что модуль akN является локально критическим, причем $\text{LK}_{kN}(akN) \leq \text{LK}_{kN}(xkN)$ для любого элемента $0 \neq x \in M$. Отсюда следует, что подмодуль akN является твердым в M и, значит, $\text{Ser}_{(G,N)}(M, akN) = \text{Stab}_G[akN] = S$. Кроме того, по лемме 2.4(ii) существуют элемент $x \in akN$ и конечно порожденная плотная подгруппа $Z \leq N$ такие, что для любой подгруппы $F \leq N$, содержащей Z , модуль akF является однородным. Так как модуль akN однородный, то $\text{Stab}_G[akN] = \text{Stab}_G[xkN]$ и, следовательно, не ограничивая общности, можно считать, что $x = a$.

Пусть A – центр подгруппы N ; так как $r_0(S) = r_0(G)$, то согласно [11; лемма 3.6] $\Delta_G(A) = 1$ влечет $\Delta_S(A) = 1$ и, следовательно, достаточно показать, что $\Delta_S(A) \neq 1$.

Пусть H – конечно порожденная плотная подгруппа из S такая, что $Z \leq H$. Пусть $\mathcal{G}$ – конечное множество порождающих подгруппы H , и пусть $g \in \mathcal{G}$. Тогда akN и $akNg$ имеют ненулевые изоморфные циклические подмодули ax_gkN и ay_gkNg , где $x_g, y_g \in kN$. Очевидно, существует конечно порожденная подгруппа $R \leq S$ такая, что $H \leq R$ и $x_g, y_g \in kF$ для любого $g \in \mathcal{G}$, где $F = N \cap R$. Тогда ax_gkF и ay_gkFg – изоморфные kF -модули для каждого элемента $g \in \mathcal{G}$ и, следовательно, $FH \leq \text{Stab}_R(akF)$. Так как $Z \leq H$ и $H \leq R$, то $Z \leq F = R \cap D$ и, следовательно, akF – однородный kF -модуль. Так как R – конечно порожденная разрешимая группа конечного ранга, то R – минимаксная группа (см. [24]). Пусть $L = F \cap K$, тогда из леммы 5.3 следует, что FH содержит подгруппу конечного индекса H_1 такую, что $F \leq H_1$ и в факторе F/L подгруппа H_1 действует тождественно. Тогда из леммы 2.3 следует, что $\Delta_S(A) \neq 1$.

§ 6. Индуцированные модули над метабелевыми группами конечного ранга

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть G – метабелева группа конечного свободного ранга, и пусть N – ее нильпотентная неабелева нормальная подгруппа без кручения такая, что $\Delta_G(N) = 1$. Пусть k – поле, и пусть M – kG -модуль, который имеет kN -кручение, но для любой G -инвариантной абелевой подгруппы $X \leq N$ модуль M не имеет kX -кручения. Тогда существует элемент $0 \neq a \in M$ такой, что $akG = akS \otimes_{kS} kG$, причем $r_0(S) < r_0(G)$, где $S = \text{Ser}_{(G,T)}(M, akT)$ для некоторой G -инвариантной подгруппы $T \leq N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, существует минимальная изолированная G -инвариантная подгруппа $Y \leq N$ такая, что модуль M имеет kY -кручение. Из условий теоремы следует, что подгруппа Y неабелева и, следовательно, не ограничивая общности, можно считать, что $Y = N$. Тогда для любой собственной G -инвариантной изолированной подгруппы $X \leq N$ модуль M не имеет kX -кручения. Так как подгруппа N неабелева, то из леммы 2.1(ii) следует, что она обладает изолированной G -инвариантной подгруппой $Y \leq N$ такой, что фактор N/Y является G -центральным. Теперь теорема следует из теоремы 5.4 и леммы 3.1.4 работы [13].

Из предыдущей теоремы и теоремы 4.2 работы [11] получается следующее

СЛЕДСТВИЕ 6.2. Пусть G – метабелева группа конечного свободного ранга, и пусть N – ее нильпотентная нормальная подгруппа без кручения такая, что $\Delta_G(N) = 1$. Пусть k – поле нулевой характеристики, и пусть M – kG -модуль, который имеет kN -кручение. Тогда существует элемент $0 \neq a \in M$ такой, что $akG = akS \otimes_{kS} kG$, причем $r_0(S/C_S(akS)) < r_0(G)$, где $S = \text{Ser}_{(G,T)}(M, akT)$ для некоторой G -инвариантной подгруппы $T \leq N$.

Отметим, что ввиду утверждения 4.5 работы [25] данное следствие не имеет места в случае, когда характеристика поля k ненулевая.

§ 7. Минимально бесконечные модули над разрешимыми группами конечного ранга

Пусть S – кольцо, на котором действует группа операторов G , пусть $0 \neq a \in S$, и пусть $J = \langle a \rangle$ – правый идеал кольца S , порожденный элементом a . Тогда $[a] = S/J$ – правый S -модуль.

Будем говорить, что S -модуль M принадлежит классу $\mathcal{U}_0(S, a, G)$, если M обладает вполне упорядоченным возрастающим рядом подмодулей таким, что каждый элемент x любого фактора этого ряда аннулируется правым идеалом Λ_x^g кольца S , где $g \in G$ и Λ_x – аннулятор некоторого элемента модуля $[a]$. Естественно, предполагается, что для каждого элемента x аннулятор Λ_x может быть свой. Будем говорить, что S -модуль M принадлежит классу $\mathcal{U}(S, a, G)$, если M содержит свободный S -подмодуль V такой, что $M/V \in \mathcal{U}_0(S, a, G)$.

ЛЕММА 7.1. Пусть N – нильпотентная группа без кручения конечного ранга, на которой действует группа операторов H , и пусть k – поле. Пусть A – изолированная центральная подгруппа группы N , и пусть I – максимальный H -инвариантный идеал групповой алгебры kA такой, что A/I^+ – непериодическая группа. Пусть M – kN -модуль, F – его подмодуль такой, что $M/F \in \mathcal{U}_0(kN, a, H)$, причем $a \notin kNI$. Тогда:

- (i) модуль M/F является kN -периодическим, причем аннулятор любого элемента из M/F не содержится в kNI ;
- (ii) фактормодуль $(MI \cap F)/FI$ является S -периодическим, где $S = kN/kNI$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Так как $M/F \in \mathcal{U}_0(kD, a, H)$, то модуль M/F обладает вполне упорядоченным возрастающим рядом $\{F_i\}$ подмодулей таким, что каждый элемент x любого фактора этого ряда аннулируется правым идеалом Λ_x^g кольца S , где $g \in G$ и Λ_x – аннулятор некоторого элемента модуля $[a]$. Доказательство проведем трансфинитной индукцией по длине этого ряда. Пусть $x \in M/F$, тогда существует трансфинитное число i такое, что $x \in F_i$ и $x \notin F_{i-1}$. Тогда образ $\bar{x}$ в факторе F_i/F_{i-1} элемента x аннулируется правым идеалом Λ_x^g кольца S , где $g \in H$ и Λ_x – аннулятор некоторого элемента модуля $[a]$. Так как $a \notin kNI^g$, то из леммы 2.5(ii) следует существование элемента $y \in kN \setminus kNI$ такого, что $xy \in F_{i-1}$. По предположению индукции существует элемент $z \in kN \setminus kNI$ такой, что $x(yz) \in F$. По лемме 2.5(i) кольцо kN/kNI не имеет делителей нуля и, значит, $yz \in kN \setminus kNI$. Отсюда следует утверждение.

(ii) Пусть $x \in MI \cap F$, тогда элемент x можно представить в виде $x = \sum x_i \alpha_i$, где $x_i \in M$ и $\alpha_i \in I$. Из (i) следует существование элементов $y_i \in kN \setminus kNI$ таких, что $x_i y_i \in F$. Из леммы 2.5(iii) следует, что пересечение идеалов, порожденных элементами y_i , не содержится в kNI и, следовательно, существует элемент $y \in kN \setminus kNI$ такой, что $x_i y \in F$ для всех i . Тогда $xy = (\sum x_i \alpha_i)y = \sum (x_i y) \alpha_i \in FI$.

ЛЕММА 7.2. Пусть H – разрешимая минимаксная группа, содержащая нильпотентную нормальную подгруппу без кручения D такую, что факторгруппа H/D является конечно порожденной абелевой. Пусть k – конечно порожденное поле, и пусть M – конечно порожденный kH -модуль без kD -кручения. Пусть C – изолированная D -центральная H -инвариантная подгруппа из D , на которой группа H действует рационально неприводимо. Тогда существует максимальный H -инвариантный идеал I кольца kC такой, что $MI \neq M$, и если $C \neq D$, то $|M/MI| = \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу [13; теорема 4.1.6], существует элемент $0 \neq a \in kD$ такой, что $M \in \mathcal{U}(kD, a, H)$. Из [26; теорема А] следует существование максимального H -инвариантного идеала $I \leq kC$ такого, что $a \notin kDI$ и $|A/I^+| < \infty$. Пусть F – свободный kD -подмодуль в M такой, что $M/F \in \mathcal{U}_0(kD, a, H)$. Тогда из предыдущей леммы следует, что фактормодуль $(MI \cap F)/FI$ является S -периодическим, где $S = kD/kDI$. Поскольку по лемме 2.5(i) кольцо S не имеет делителей нуля, то свободный S -модуль F/FI не имеет S -кручения. Отсюда следует, что $MI \cap F = FI$. Очевидно, $F \neq FI$, причем если $C \neq D$, то $|F/FI| = \infty$. Так как $(F + MI)/MI \simeq F/(MI \cap F) = F/FI$, то отсюда следует утверждение леммы.

ТЕОРЕМА 7.3. Пусть G – разрешимая группа конечного ранга, $\mathbb{F}$ – конечное поле, и пусть M – минимально бесконечный точный $\mathbb{F}G$ -модуль. Пусть N – нильпотентная нормальная подгруппа без кручения группы G такая, что факторгруппа G/N конечно порожденная абелева. Предположим, что модуль M не имеет $\mathbb{F}N$ -кручения. Тогда группа G конечно порождена, подгруппа N абелева и группа G действует сопряжениями на подгруппе N рационально неприводимо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из [13; лемма 2.2.5] следует существование элемента $0 \neq b \in M$ и конечно порожденной плотной подгруппы $H \leq G$ таких, что $G = NH$ и $b\mathbb{F}G = b\mathbb{F}H \otimes_{\mathbb{F}H} \mathbb{F}G$. Очевидно, подгруппа N содержит центральную изолированную G -инвариантную подгруппу A , на которой группа G действует рационально неприводимо. Пусть $D = H \cap N$ и $B = H \cap A$, тогда B – D -центральная изолированная H -инвариантная подгруппа в D , на которой подгруппа H действует рационально неприводимо. По лемме 7.2 существует H -инвариантный максимальный идеал $I \leq kB$ такой, что $b\mathbb{F}H \neq b\mathbb{F}HI$. Так как подгруппа B – N -центральная и $G = NH$, то идеал I является G -инвариантным. Тогда $b\mathbb{F}GI$ – $\mathbb{F}G$ -подмодуль модуля M и, следовательно, $|b\mathbb{F}G/b\mathbb{F}GI| < \infty$. Если $|G : H| = \infty$, то из соотношения $b\mathbb{F}G = b\mathbb{F}H \otimes_{\mathbb{F}H} \mathbb{F}G$ следует, что $|b\mathbb{F}G/b\mathbb{F}GI| = \infty$, а это приводит к противоречию. Таким образом, $|G : H| < \infty$ и, следовательно, группа G является конечно порожденной. По лемме 7.2 если $A \neq N$, то $|b\mathbb{F}G/b\mathbb{F}GI| = \infty$, но это приводит к противоречию.

ЛЕММА 7.4. Пусть G – группа конечного ранга, пусть $\mathbb{F}$ – конечное поле, и пусть M – точный минимально бесконечный $\mathbb{F}G$ -модуль. Предположим, что существует элемент $0 \neq a \in M$ такой, что $a\mathbb{F}G = a\mathbb{F}H \otimes_{\mathbb{F}H} \mathbb{F}G$, где H – подгруппа группы G , содержащая бесконечную G -допустимую подгруппу A . Тогда $|G : H| < \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $|G : H| = \infty$. Тогда из минимальной бесконечности модуля $a\mathbb{F}G$ следует, что $a\mathbb{F}H$ – простой $\mathbb{F}H$ -модуль, а из финитной аппроксимируемости модуля M следует, что $|a\mathbb{F}H| < \infty$. Отсюда следует, что $|A/C_A(a\mathbb{F}A)| < \infty$, а так как A – нормальная подгруппа группы G , то нетрудно показать, что $C_A(a\mathbb{F}A)$ содержит G -инвариантную подгруппу C конечного индекса. Тогда подгруппа C централизует подмодуль $a\mathbb{F}G$, но это противоречит лемме 1(2) из [7].

ЛЕММА 7.5. Пусть G – метабелева группа конечного ранга, $\mathbb{F}$ – конечное поле, и пусть M – точный минимально бесконечный $\mathbb{F}G$ -модуль. Пусть H – нормальная подгруппа конечного индекса в G . Тогда:

- (i) модуль M содержит минимально бесконечный $\mathbb{F}H$ -подмодуль N ;
- (ii) если факторгруппа $S = H/C_H(N)$ – конечно порожденная, то конечно порожденной является и группа G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Утверждение доказано в [7; лемма 4].

(ii) Пусть T – правая трансверсаль подгруппы H в группе G . Так как модуль M точный, то $\bigcap_{g \in T} C^g = 1$, где $C = C_H(N)$, и, следовательно, H является прямым произведением конечного числа групп, изоморфных группе S . Так как по лемме 2.1(iii) группа S удовлетворяет условию максимальности для нормальных подгрупп, то отсюда нетрудно получить, что подгруппа H также удовлетворяет условию максимальности для нормальных подгрупп. Из леммы 2.1(iii) следует, что подгруппа H конечно порожденная и, следовательно, конечно порожденной будет и группа G .

ТЕОРЕМА 7.6. Пусть G – метабелева группа конечного ранга, и пусть M – минимально бесконечный точный RG -модуль, где либо $R = \mathbb{F}$ – конечное поле, либо $R = \mathbb{Z}$. Тогда группа G конечно порождена.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала случай $R = \mathbb{F}$. Доказательство проведем индукцией по свободному рангу $r_0(G)$ группы G . Отметим, что ввиду леммы 7.5 группу G можно заменить любой ее нормальной подгруппой конечного индекса. Так как в силу [7; теорема 1] группа G почти без кручения, то ввиду леммы 2.1(i) можно считать, что группа G без кручения и содержит нормальную нильпотентную подгруппу N , определяющую конечно порожденную абелеву факторгруппу G/N , причем подгруппа N обладает G -плинтусным рядом. Если $|\Delta(G)| = \infty$, то утверждение следует из [7; теорема 2] и, значит, можно считать, что $|\Delta(G)| < \infty$, а так как G – группа без кручения, то $\Delta(G) = 1$.

Предположим, что для некоторой абелевой G -инвариантной подгруппы $A \leq N$ модуль M имеет $\mathbb{F}A$ -кручение. Из [10; теорема 2.2.3] следует существование элемента $0 \neq a \in M$ такого, что $a\mathbb{F}G = a\mathbb{F}K \otimes_{\mathbb{F}K} \mathbb{F}G$, где подгруппа K содержит A . Очевидно, $a\mathbb{F}K$ – минимально бесконечный $\mathbb{F}K$ -модуль. Поскольку $A \leq K$,

то из леммы 7.4 следует, что $|G : K| < \infty$. Так как $\Delta(G) = 1$, то согласно [11; лемма 3.7] A содержит K -инвариантную подгруппу B такую, что факторгруппа $B/C_B(a\mathbb{F}B)$ является периодической. Так как $B \cap Z(N \cap K) \neq 1$, то, заменив подгруппу B на $B \cap Z(N \cap K)$, можно считать, что факторгруппа $K/C_K(B)$ является конечно порожденной абелевой. Тогда из [27; лемма 5.2] следует, что B содержит минимаксную K -инвариантную подгруппу $D \neq 1$. Заменив подгруппу B на D , можно считать, что подгруппа B минимаксная и, следовательно, факторгруппа $B/C_B(a\mathbb{F}B)$ является черниковской. Из финитной аппроксимируемости модуля M следует финитная аппроксимируемость группы $B/C_B(a\mathbb{F}B)$ и, следовательно, $|B/C_B(a\mathbb{F}B)| < \infty$. Тогда $C_B(a\mathbb{F}B)$ содержит K -инвариантную подгруппу C конечного индекса и, следовательно, $C \leq C_K(a\mathbb{F}K)$. Так как $|G : K| < \infty$, то нетрудно показать, что K содержит G -инвариантную подгруппу H конечного индекса. Тогда по лемме 7.5(i) $a\mathbb{F}K$ содержит минимально бесконечный $\mathbb{F}H$ -подмодуль $b\mathbb{F}H$. Очевидно, $C \cap H \leq C_H(b\mathbb{F}H)$ и, следовательно, $r_0(H/C_H(b\mathbb{F}H)) < r_0(G)$. Тогда по предположению индукции $H/C_H(b\mathbb{F}H)$ — конечно порожденная группа и из леммы 7.5(ii) следует, что конечно порожденной является и группа G .

Таким образом, можно считать, что модуль M не имеет $\mathbb{F}A$ -кручения для любой абелевой нормальной подгруппы $A \leq G$. Ввиду теоремы 7.3 можно считать, что модуль M имеет $\mathbb{F}N$ -кручение. По теореме 6.1 существует элемент $0 \neq a \in M$ и подгруппа $S \leq G$ такие, что $akG = akS \otimes_{kS} kG$, $r_0(S) < r_0(G)$ и $N \leq S$, но это противоречит лемме 7.4.

Рассмотрим теперь случай $R = \mathbb{Z}$. Если модуль M имеет нулевую характеристику, то утверждение следует из [5; теорема 2]. Если модуль M имеет характеристику $p > 0$, то M можно рассматривать как $\mathbb{F}_p G$ -модуль, где $\mathbb{F}_p$ — поле порядка p , а в этом случае утверждение уже доказано.

СЛЕДСТВИЕ 7.7. Пусть G — метабелева группа конечного ранга, и пусть M — минимально бесконечный точный $\mathbb{F}G$ -модуль, где $\mathbb{F}$ — конечное поле. Тогда:

- (i) если $|\Delta(G)| = \infty$, то G является конечно порожденной почти абелевой группой;
- (ii) если $|\Delta(G)| < \infty$, то существуют нормальная подгруппа конечного индекса $H \leq G$ и минимально бесконечный $\mathbb{F}H$ -модуль $N \leq M$ такие, что $H/C_H(N) = A \rtimes T$ — полупрямое произведение абелевой группы без кручения A и свободной абелевой группы T , причем A является нётеровым T -плинтусом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение следует из предыдущей теоремы и теоремы 3 работы [8].

Список литературы

1. Groves J. R. J. Metabelian groups with finitely generated integral homology // Quart. J. Math. Oxford (2). 1982. V. 33. № 2. P. 405–420.
2. Robinson D. J. S., Wilson J. S. Soluble groups with many polycyclic quotients // Proc. London Math. Soc. (3). 1984. V. 48. № 2. P. 193–229.
3. Зайцев Д. И., Курдаченко Л. А., Тушев А. В. Модули над нильпотентными группами конечного ранга // Алгебра и логика. 1985. Т. 24. № 6. С. 631–666.

4. *Тушев А. В.* Фinitно-аппроксимируемые разрешимые группы без кручения со слабым условием минимальности для нормальных подгрупп // XVII Всесоюз. алгебраич. конф.: Тез. сообщ. Ч. 2. Кишинев: КГУ, 1985. С. 175.
5. *Тушев А. В.* Условие $\text{Min-}\infty\text{-}N$ и связанные с ним представления разрешимых групп // Укр. матем. журн. 1990. Т. 42. №5. С. 677–681.
6. *Karbe M. I., Kurdacenko L. A.* Just infinite modules over locally soluble groups // Arch. Math. (Basel). 1988. V. 51. P. 401–411.
7. *Тушев А. В.* Минимально бесконечные модули над локально полициклическими группами конечного ранга // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. Киев: Институт математики АН Украины, 1993. С. 312–325.
8. *Тушев А. В.* О разрешимых группах, все собственные факторгруппы которых имеют конечный ранг // Укр. матем. журн. 1993. Т. 45. №9. С. 1274–1281.
9. *Tushev A. V.* On modules over group rings of soluble groups of finite rank // London Math. Soc. Lecture Note Ser. 1999. V. 261. P. 718–727.
10. *Тушев А. В.* О примитивности групповых алгебр некоторых классов разрешимых групп // Матем. сб. 1995. Т. 186. №3. С. 143–160.
11. *Tushev A. V.* Spectra of conjugated ideals in group algebras of abelian groups of finite rank and control theorems // Glasg. Math. J. 1996. V. 38. P. 309–320.
12. *Tushev A. V.* Induced modules over group algebras of metabelian groups of finite rank // Comm. Algebra. 1999. V. 27. №12. P. 5921–5938.
13. *Тушев А. В.* О примитивных представлениях разрешимых групп конечного ранга // Матем. сб. 2000. Т. 191. №11. С. 117–160.
14. *Чарин В. С.* О группах автоморфизмов нильпотентных групп // Укр. матем. журн. 1954. Т. 4. №3. С. 295–304.
15. *Hall P.* Finiteness conditions for soluble groups // Proc. London Math. Soc. (3). 1954. V. 4. №16. P. 419–436.
16. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. М.: Наука, 1982.
17. *Passman D. S.* Algebraic crossed products // Contemp. Math. 1985. V. 43. P. 209–225.
18. *Kropheller P. H., Linnell P. A., Moody J. A.* Applications of a new K -theoretic theorem to soluble group rings // Proc. Amer. Math. Soc. 1988. V. 104. №3. P. 675–684.
19. *Wilson J. S.* Soluble products of minimax groups, and nearly surjective derivations // J. Pure Appl. Algebra. 1988. V. 53. P. 297–331.
20. *Бурбаки Н.* Коммутативная алгебра. М.: Мир, 1971.
21. *McConnell J. C., Robson J. C.* Noncommutative Noetherian rings. Chichester: Wiley, 1987.
22. *Brookes C. J. B.* Modules over polycyclic groups // Proc. London Math. Soc. (3). 1988. V. 57. P. 88–108.
23. *Brookes C. J. C., Brown K. A.* Primitive group rings and Noetherian rings of quotients // Trans. Amer. Math. Soc. 1985. V. 288. P. 605–623.
24. *Robinson D. J. S.* On the cohomology of soluble groups of finite rank // J. Pure Appl. Algebra. 1975. V. 6. P. 155–164.
25. *Wehrfritz B. A. F.* Groups whose irreducible representations have finite degree // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1981. V. 90. P. 411–421.
26. *Wehrfritz B. A. F.* Invariant maximal ideals in certain group algebras // J. London Math. Soc. (2). 1992. V. 46. P. 101–110.
27. *Hall P.* On the finiteness of certain soluble groups // Proc. London Math. Soc. (3). 1959. V. 9. №36. P. 595–622.