Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Чельцов, Д. Парк, Глобальные лог-канонические пороги и обобщенные точки
Эккарда, *Матем. сб.*, 2002, том 193, номер 5, 149–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm656>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 13:21:06

УДК 513.6

И. А. Чельцов, Дж. Парк

Глобальные лог-канонические пороги и обобщенные точки Эккарда

В работе доказано, что лог-канонический порог произвольного гиперплоского сечения H гладкой гиперповерхности $X \subset \mathbb{P}^n$ степени $n \geq 3$ больше либо равен $(n-1)/n$. Также показано, что при условии выполнения лог-программы минимальных моделей лог-канонический порог $H \subset X$ равен $(n-1)/n$ тогда и только тогда, когда H является конусом в $\mathbb{P}^{n-1}$ над гладкой гиперповерхностью степени n в $\mathbb{P}^{n-2}$.

Библиография: 16 названий.

§ 1. Введение

Лог-канонические пороги были введены В. В. Шокуровым в работе [1] для измерения того, насколько особенности лог-пар отличаются от лог-канонических особенностей. Впоследствии было показано, что лог-канонические пороги обладают рядом интересных и полезных свойств.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Рассмотрим лог-каноническую пару (X, B) , замкнутое подмногообразие $Z \subset X$ и $\mathbb{Q}$ -Картье дивизор D на многообразии X .¹ *Лог-каноническим порогом* дивизора D вдоль подмногообразия Z по отношению к лог-каноническому дивизору $K_X + B$ называется число

$$\mathrm{lct}_Z(D; X, B) = \sup\{c : \text{дивизор } K_X + B + cD \text{ лог-каноничен вдоль } Z\}.$$

Из определения легко следует, что $\mathrm{lct}_Z(D; X, B) \in [0, 1]$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. В случае тривиальной границы $B = 0$ мы будем использовать обозначение $\mathrm{lct}_Z(D; X)$ вместо $\mathrm{lct}_Z(D; X, 0)$, а в случае $Z = X$ — обозначение $\mathrm{lct}(D; X, B)$ вместо $\mathrm{lct}_X(D; X, B)$.

Лог-канонические пороги достаточно часто появляются в других областях математики в неявном виде.

Работа выполнена при частичной поддержке Национального научного фонда США (грант NSF DMS-0100991).

¹Если не оговорено особо, все многообразия подразумеваются проективными и определенными над полем $\mathbb{C}$. Основные определения и понятия содержатся в работах [1] и [2].

ПРИМЕР 1.3. 1) Рассмотрим гиперповерхность $D \subset \mathbb{C}^n$, заданную обращением в нуль непостоянной голоморфной функции f в окрестности начала координат O . Как следует из работы [3], лог-канонический порог $\text{lct}_O(D; \mathbb{C}^n)$ совпадает со следующим числом:

$$\sup\{c : \text{функция } |f|^{-c} \text{ принадлежит классу } L^2 \text{ в окрестности точки } O\}.$$

2) Другой пример – многочлены Бернштейна–Сато из теории дифференциальных операторов и, в частности, из теории $\mathcal{D}$ -модулей (см. [4]). Напомним коротко определение многочленов Бернштейна–Сато. Хорошо известно, что для любого сходящегося степенного ряда

$$f \in \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$$

существуют ненулевой многочлен $b(s) \in \mathbb{C}[s]$ и линейный дифференциальный оператор

$$Q = \sum_{I,j} f_{I,j} s^j \frac{\partial^I}{\partial z_I}$$

такие, что $b(s)f^s = Qf^{s+1}$ для некоторых сходящихся степенных рядов $f_{I,j}$. Для фиксированного степенного ряда f многочлены $b(s)$ образуют идеал в кольце $\mathbb{C}[s]$. *Многочленом Бернштейна–Сато* функции f называется нормированный многочлен, который порождает этот идеал. Можно показать, что $\text{lct}_0(D; \mathbb{C}^n)$ является абсолютным значением наибольшего корня многочлена Бернштейна–Сато функции f (см. [3]).

Недавно М. Мустата исследовал свойства лог-канонических порогов посредством схем струй (см. [5]). В частности, он получил следующий результат.

ТЕОРЕМА 1.4. *Для гладкого многообразия X и эффективного дивизора s целочисленными коэффициентами D на многообразии X*

$$\text{lct}(D; X) = \dim X - \sup_{m \geq 0} \frac{\dim D_m}{m+1},$$

где D_m – m -я схема струй дивизора D .

Напомним, что m -я схема струй X_m многообразия X – это схема, замкнутые точки которой над $x \in X$ являются морфизмами

$$\mathcal{O}_{X,x} \rightarrow k[t]/(t^{m+1}).$$

В случае, когда X – гладкое многообразие, схема X_m является аффинным расслоением над X размерности $(m+1)\dim X$.

Для изучения геометрии одного конкретно взятого многообразия часто приходится исследовать линейные системы, связанные с каноническим дивизором этого многообразия. Одно из возможных направлений для исследований – нахождение “экстремальных” элементов в таких линейных системах.

Под экстремальностью элементов линейной системы обычно понимают следующее: “хороший” элемент и “плохой” элемент. Поясним, что подразумевают под “хорошим” и “плохим”.

М. Рид предложил считать “хорошим” элементом “общий слон”, а В. Шокуров позднее рассмотрел более общее понятие:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5. Рассмотрим нормальное многообразие X и субграницу $D = S + B$ на многообразии X такие, что дивизоры S и B не имеют общих компонент, дивизор S приведен и $[B] \leq 0$. Дивизор $K_X + D$ называется n -*дополняемым*, если существует такой дивизор D^+ на многообразии X , что выполнены следующие условия:

- (1) nD^+ имеет целые коэффициенты, а $n(K_X + D^+)$ линейно тривиален;
- (2) $nD^+ \geq nS + \lfloor (n+1)B \rfloor$;
- (3) $K_X + D^+$ лог-каноничен.

В случае выполнения перечисленных условий дивизор $K_X + D^+$ называется n -*дополнением* дивизора $K_X + D$.

Теперь рассмотрим свойство элементов линейных систем, обратное к “хорошему”. Впервые оно было рассмотрено Ш. Килом и Дж. Маккерноном в работе [6]. Заметим, что это свойство – антитезис “общего слона” М. Рида.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6. Рассмотрим нормальное многообразие X и некоторый эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор B на нем. *Специальным тигром* лог-канонического дивизора $K_X + B$ называется такой эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор D , что дивизор $K_X + B + D$ численно тривиален, но не лог-терминален по Кавамате.

Предположим, что лог-пара (X, B) лог-канонична. В этом случае мы можем использовать лог-канонические пороги для описания специальных тигров лог-канонического дивизора $K_X + B$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.7. Рассмотрим лог-каноническую пару (X, B) с непустой линейной системой $|(K_X + B)|$. *Глобальным лог-каноническим порогом* лог-пары (X, B) называется вещественное число

$$\mathrm{glct}(X, B) = \sup\{r : K_X + B + rD \text{ лог-каноничен для всех } D \in |(K_X + B)|\}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.8. Из определения следует, что $\mathrm{glct}(X, B) \in [0, 1]$.

В случае $B = 0$ глобальный лог-канонический порог лог-пары (X, B) будет обозначаться через $\mathrm{glct}(X)$.

Величина глобального лог-канонического порога лог-пары (X, B) показывает, насколько особыми могут быть элементы линейной системы $|(K_X + B)|$. Отметим, что часто бывает полезным также обратить внимание на специальные тигры, реализующие глобальный лог-канонический порог.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.9. Рассмотрим нормальное многообразие X и некоторый эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор B на X . *Диким тигром* лог-канонического дивизора $K_X + B$ называется такой эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор D , что дивизор $K_X + B + D$ линейно тривиален и $\mathrm{lct}(D; X, B) = \mathrm{glct}(X, B)$. Под диким тигром на многообразии X мы будем подразумевать дикий тигр канонического дивизора K_X .

Отметим, что определение дикого тигра использует линейную тривиальность в отличие от численной тривиальности в определении специального тигра.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.10. Понятие дикого тигра в некотором смысле противопоставляется понятию 1-дополняемости лог-канонического дивизора $K_X + B$ – более

интересное и детальное описание связи между 1-дополнениями и дикими тиграми содержится в работе [7].

В настоящей работе нас интересует в основном нахождение диких тигров на гладких гиперповерхностях степени $n \geq 3$ в $\mathbb{P}^n$.

Авторы благодарят М. М. Гриненко, В. А. Исковских, А. В. Пухликова и В. В. Шокурова за интересные и плодотворные обсуждения.

§ 2. Точки Эккарда

Точкой Эккарда называется точка на гладкой кубической поверхности Σ , которая является точкой пересечения трех прямых, лежащих на кубике Σ . Другими словами, точка p на гладкой кубической поверхности Σ называется точкой Эккарда, если существует элемент в линейной системе $|-K_\Sigma|$, являющийся конусом с вершиной p и основанием, состоящим из трех различных точек.

Теперь мы рассмотрим дикие тигры на гладких поверхностях дель Пеццо и, в частности, на гладких кубиках. Последнее позволит увидеть специальные свойства точек Эккарда.

Первый шаг в поиске диких тигров на многообразии – определение глобального лог-канонического порога. Однако благодаря явному геометрическому описанию гладких поверхностей дель Пеццо дикие тигры на них могут быть найдены непосредственно с помощью исследования свойств плоских кубических кривых и точек общего положения на $\mathbb{P}^2$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.1. *Пусть S – гладкая поверхность дель Пеццо степени d . Тогда имеет место одно из следующего:*

- (1) $d = 9$, $S \cong \mathbb{P}^2$, $\text{glct}(S) = \frac{1}{3}$, дикий тигр – тройная прямая;
- (2) $d = 8$, $S \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, $\text{glct}(S) = \frac{1}{2}$, дикий тигр состоит из двойного слоя проекции на один из сомножителей и двух, возможно, совпадающих слоев проекции на другой сомножитель;
- (3) $d = 8$, $S \cong \mathbb{F}_1$, $\text{glct}(S) = \frac{1}{3}$, дикий тигр состоит из тройного слоя проекции на $\mathbb{P}^1$ и двойного исключительного сечения;
- (4) $d = 7$, $\text{glct}(S) = \frac{1}{3}$, дикий тигр состоит из цепочки трех исключительных кривых, взятых с кратностями 2, 3 и 2 соответственно;
- (5) $d = 6$, $\text{glct}(S) = \frac{1}{2}$, дикий тигр состоит либо из цепочки трех гладких рациональных кривых с самопересечениями $-1, 0, -1$ и кратностями 1, 2 и 1 соответственно, либо из цепочки четырех исключительных кривых, взятых с кратностями 1, 2, 2 и 1 соответственно, либо из четырех гладких рациональных кривых, пересекающихся в конфигурации $\mathbb{D}_4$, причем центральная кривая исключительна и имеет кратность 2, две кривые в вершине графа $\mathbb{D}_4$ также исключительны и имеют кратность один, а оставшаяся кривая имеет кратность один и индекс самопересечения нуль;
- (6) $d = 5$, $\text{glct}(S) = \frac{1}{2}$, дикий тигр состоит из четырех исключительных кривых, пересекающихся в конфигурации $\mathbb{D}_4$, так что центральная кривая имеет кратность 2, а все остальные кривые имеют кратность один;
- (7) $d = 4$, $\text{glct}(S) = \frac{2}{3}$, дикий тигр состоит из трех гладких рациональных кривых, трансверсально пересекающихся в одной точке, причем все

три кривые входят с кратностью один, две кривые исключительны и одна кривая имеет самопересечение нуль;

- (8) $d = 3$, S – гладкая кубика с точкой Эккарда, $\mathrm{glct}(S) = \frac{2}{3}$, дикий тигр состоит из трех исключительных кривых, пересекающихся в одной точке, каждая из которых имеет кратность один;
- (9) $d = 3$, S – общая гладкая кубика в $\mathbb{P}^3$, $\mathrm{glct}(S) = \frac{3}{4}$, дикий тигр состоит из прямой и коники с кратностями один, которые касаются друг друга;
- (10) $d = 2$, поверхность S содержит антиканонический дивизор с одной такнодальной точкой, $\mathrm{glct}(S) = \frac{3}{4}$, дикий тигр состоит из двух исключительных кривых, которые пересекаются в одной точке с кратностью два и каждая из которых имеет кратность один;
- (11) $d = 2$, поверхность S не содержит антиканонических дивизоров с такнодальными точками, $\mathrm{glct}(S) = \frac{5}{6}$, дикий тигр состоит из одной каспидальной рациональной кривой, которая имеет кратность один;
- (12) $d = 1$, антиканоническая линейная система $|-K_S|$ содержит каспидальную рациональную кривую, $\mathrm{glct}(S) = \frac{5}{6}$, дикий тигр состоит из одной каспидальной рациональной кривой, которая имеет кратность один;
- (13) $d = 1$, антиканоническая линейная система $|-K_S|$ не содержит каспидальных рациональных кривых, $\mathrm{glct}(S) = 1$, дикий тигр состоит из любой кривой в антиканонической линейной системе $|-K_S|$, взятой с кратностью один.

Мы оставим утверждение 2.1 без доказательства (см. [7]), а теперь рассмотрим гладкие кубические поверхности. Как мы уже показали, в этом случае для диких тигров имеется только две возможности. Если кубика содержит точку Эккарда, то дикий тигр состоит из трех прямых, пересекающихся в точке Эккарда. В противном случае дикий тигр состоит из гиперплоского сечения, которое распадается на конику и касательную к ней прямую.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Существование на кубике точки Эккарда является условием коразмерности один.

Ожидается, что точки Эккарда связаны с определенными бирациональными свойствами расслоений на кубические поверхности (см. [8] и [7]). Поэтому естественно попытаться разумно обобщить понятие точки Эккарда для гиперповерхностей степени $n \geq 4$ в $\mathbb{P}^n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Рассмотрим гладкую гиперповерхность X степени $n \geq 3$ в $\mathbb{P}^n$. Точка p на X называется *обобщенной точкой Эккарда*, если существует элемент S в антиканонической линейной системе $|-K_X|$, который является конусом в $\mathbb{P}^{n-1}$ над гладкой гиперповерхностью степени n в $\mathbb{P}^{n-2}$ с вершиной p .

Очевидно, что понятие обобщенной точки Эккарда совпадает с классическим понятием в случае $n = 3$. Поэтому в дальнейшем мы будем называть обобщенные точки Эккарда просто точками Эккарда.

Как уже отмечалось ранее, если гладкая кубическая поверхность обладает точкой Эккарда, то ее дикий тигр является конусом над тремя различными точками. Это свойство может быть обобщено следующим образом.

ТЕОРЕМА 2.4. *Рассмотрим гладкую гиперповерхность X степени $n \geq 3$ в $\mathbb{P}^n$. Предположим, что X содержит точку Эккарда p . Тогда конус S в линейной системе $|-K_X|$ из определения обобщенной точки Эккарда является диким тигром гиперповерхности X . В частности,*

$$\mathrm{LCS}\left(X, \frac{n-1}{n}S\right) = \{p\} \quad \text{и} \quad \mathrm{lct}(S; X) = \mathrm{glct}(X) = \frac{n-1}{n}.$$

Мы докажем теорему 2.4 в следующем параграфе.

В случае, когда глобальный лог-канонический порог кубической поверхности равен $\frac{2}{3}$, она содержит точку Эккарда. Естественно предположить, что аналогичное утверждение верно и в многомерном случае.

ГИПОТЕЗА 2.5. *Пусть X — гладкая гиперповерхность степени $n \geq 3$ в $\mathbb{P}^n$. Предположим, что ее глобальный лог-канонический порог равен $(n-1)/n$. Тогда дикий тигр S гиперповерхности X является конусом в $\mathbb{P}^{n-1}$ с вершиной p над гладкой гиперповерхностью степени n в $\mathbb{P}^{n-2}$. В частности, p является точкой Эккарда и*

$$\mathrm{LCS}\left(X, \frac{n-1}{n}S\right) = \{p\}.$$

Естественно, что гипотеза 2.5 выполнена в случае $n = 3$. В §4 мы докажем гипотезу 2.5 в дополнительном предположении существования лог-программы минимальных моделей. Таким образом, мы докажем гипотезу 2.5 в случае $n = 4$, поскольку лог-программа минимальных моделей выполнена в размерности 3.

Отметим еще один вопрос, связанный с глобальными лог-каноническими порогами и дикими тиграми на гладких многообразиях Фано. Как мы уже видели, глобальный лог-канонический порог общей кубической поверхности равен $\frac{3}{4}$, а ее дикий тигр состоит из взаимокасающихся прямой и коники. Глобальный лог-канонический порог общей поверхности дель Пеццо степени 2 равен $\frac{5}{8}$, а ее дикий тигр — каспидальная кубика.

ВОПРОС 2.6. Чему равен глобальный лог-канонический порог общей гиперповерхности степени n в $\mathbb{P}^n$ и каков ее дикий тигр?

§3. Нижняя граница глобальных лог-канонических порогов

Рассмотрим гладкую гиперповерхность W степени m в $\mathbb{P}^n$ для $n \geq 4$ и ее гиперплоское сечение H . Из теоремы Лефшеца следует, что $\mathrm{Pic} W = \mathbb{Z}H$. В частности, гиперплоское сечение H неприводимо и приведено.

ЛЕММА 3.1. *Для любой кривой C на H выполнено равенство $\mathrm{mult}_C H = 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим достаточно общую точку r в $\mathbb{P}^n$ и конус P_r над кривой C с вершиной в точке r . Тогда $P_r \cap W = C \cup R_p$ для некоторой кривой R_p на гиперповерхности W степени $(m-1) \deg C$.

В силу общности выбора точки r кривые C и R_p пересекаются трансверсально ровно в $(m-1) \deg C$ различных точках (см. [9]). С другой стороны, выполнено равенство $H \cdot R_p = \deg R_p = (m-1) \deg C$. Таким образом, имеет место неравенство

$$H \cdot R_p \geq \deg R_p \cdot \mathrm{mult}_C H = (m-1) \deg C \cdot \mathrm{mult}_C H.$$

СЛЕДСТВИЕ 3.2. *Гиперплоское сечение H имеет изолированные особенности и, в частности, оно нормально.*

ТЕОРЕМА 3.3. *Лог-канонический порог дивизора H на гиперповерхности W не может быть меньше чем $\lambda = \min\{(n-1)/m, 1\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем $\alpha \in (0, \lambda)$, рассмотрим лог-пару $(\mathbb{P}^{n-1}, \alpha H)$ вместо лог-пары $(W, \alpha H)$ и предположим, что особенности лог-пары $(\mathbb{P}^{n-1}, \alpha H)$ не лог-терминальны по Кавамате. Тогда подсхема лог-канонических особенностей

$$\mathcal{L} = \text{LCS}(\mathbb{P}^{n-1}, \alpha H)$$

нульмерна.

Рассмотрим дивизор Картье D такой, что

$$D \equiv K_{\mathbb{P}^{n-1}} + \alpha H + (\lambda - \alpha)H'$$

для общего дивизора H' в линейной системе $|H|$. Тогда

$$\theta_{\mathbb{P}^{n-1}}(D) = \begin{cases} \theta_{\mathbb{P}^{n-1}}(-1), & \text{если } m - n \geq -1, \\ \theta_{\mathbb{P}^{n-1}}(m - n), & \text{если } m - n < -1. \end{cases}$$

Из теоремы Шокурова об обращении в нуль (см. [10]) следует существование точной последовательности

$$H^0(\mathbb{P}^{n-1}, \theta_{\mathbb{P}^{n-1}}(D)) \rightarrow H^0(\mathcal{L}, \theta_{\mathcal{L}}(D)) \rightarrow 0.$$

С другой стороны, $H^0(\mathbb{P}^{n-1}, \theta_{\mathbb{P}^{n-1}}(D)) = 0$, но $H^0(\mathcal{L}, \theta_{\mathcal{L}}(D)) \neq 0$.

СЛЕДСТВИЕ 3.4. *Предположим, что $n = m$. Тогда глобальный лог-канонический порог гиперповерхности W больше либо равен $(n-1)/n$.*

Доказательство теоремы 2.4 непосредственно вытекает из следствия 3.4.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.5. Из доказательства теоремы 3.3 следует, что если лог-канонический порог α гиперплоского сечения H на гиперповерхности W не равен единице, то место лог-канонических особенностей $\text{LCS}(W, \alpha H)$ состоит ровно из одной точки.

ПРИМЕР 3.6. Предположим, что гиперповерхность W в $\mathbb{P}^n$ задана уравнением

$$x_0^m - x_1^m + \sum_{i=2}^n x_i^m = 0,$$

а ее гиперплоское сечение H задано уравнением $x_0 - x_1 = 0$. Тогда лог-канонический порог дивизора H равен λ . Следовательно, наше число λ является точной нижней границей для лог-канонических порогов гиперплоских сечений гладких гиперповерхностей степени m в $\mathbb{P}^n$.

§ 4. Доказательство гипотезы 2.5 с точностью до существования лог-программы минимальных моделей

Зафиксируем гладкую гиперповерхность X степени $n \geq 4$ в $\mathbb{P}^n$ и рассмотрим гиперплоское сечение S гиперповерхности X .

Основная цель этого параграфа – доказать гипотезу 2.5 в случае $n = 4$. А именно мы покажем, что при выполнении лог-программы минимальных моделей в размерности $n - 1$ гиперплоское сечение S является конусом в $\mathbb{P}^{n-1}$ над гладкой гиперповерхностью степени n в $\mathbb{P}^{n-2}$ в том и только том случае, когда лог-пара $\left(X, \frac{n-1}{n}S\right)$ не лог-терминальна по Кавамате.

Предположим, что лог-пара $\left(X, \frac{n-1}{n}S\right)$ не лог-терминальна по Кавамате.

Тогда множество центров лог-канонических особенностей $\text{LCS}\left(X, \frac{n-1}{n}S\right)$ непусто и состоит из конечного числа точек. Более того, из замечания 3.5 следует, что

$$\text{LCS}\left(X, \frac{n-1}{n}S\right) = \{p\}$$

для некоторой точки $p \in X$.

Мы можем вместо $\left(X, \frac{n-1}{n}S\right)$ рассматривать лог-пару $\left(\mathbb{P}^{n-1}, \frac{n-1}{n}S\right)$.

Далее предположим, что лог-программа минимальных моделей выполнена в размерности $n - 1$.

ЛЕММА 4.1. *Существует такой бирациональный морфизм*

$$f: V \rightarrow \mathbb{P}^{n-1},$$

что выполнены следующие свойства:

- (1) *f является изоморфизмом вне множества $\text{LCS}\left(\mathbb{P}^{n-1}, \frac{n-1}{n}S\right) = \{p\}$;*
- (2) *многообразие V имеет $\mathbb{Q}$ -факториальные лог-терминальные особенности;*
- (3) *существует такой эффективный f -исключительный $\mathbb{Q}$ -дивизор E на многообразии V , что его носитель совпадает со всем f -исключительным множеством на V , $[E] \neq 0$ и*

$$K_V + \frac{n-1}{n}f_*^{-1}(S) + E = f^*\left(K_{\mathbb{P}^{n-1}} + \frac{n-1}{n}S\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим лог-терминальное раздутие

$$g: V' \rightarrow \mathbb{P}^{n-1}$$

для лог-пары $\left(\mathbb{P}^{n-1}, \frac{n-1}{n}S\right)$. Особенности многообразия V' лог-терминальны по Кавамате и $\mathbb{Q}$ -факториальны – мы можем рассмотреть терминальное раздутие $h: V \rightarrow V'$ многообразия V' . Тогда бирациональный морфизм

$$f = g \circ h: V \rightarrow \mathbb{P}^{n-1}$$

будет удовлетворять всем необходимым требованиям.

Зафиксируем бирациональный морфизм $f: V \rightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ и положим $\tilde{S} = f_*^{-1}(S)$.

Отметим, что особенности лог-пары $\left(V, \frac{n-1}{n}\tilde{S} + E\right)$ лог-каноничны, поскольку особенности лог-пары $\left(\mathbb{P}^{n-1}, \frac{n-1}{n}S\right)$ лог-каноничны. С другой стороны, лог-канонический дивизор $K_V + \frac{n-1}{n}\tilde{S} + E$ не является численно эффективным. Следовательно, существует такое экстремальное стягивание

$$g: V \rightarrow W,$$

что дивизор $-\left(K_V + \frac{n-1}{n}\tilde{S} + E\right)$ является g -обильным.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Кривые, стягиваемые морфизмом g в точку, не могут лежать в слоях бирационального морфизма f , поскольку дивизор $-\left(K_V + \frac{n-1}{n}\tilde{S} + E\right)$ одновременно и g -обилён, и f -численно тривиален. В частности, многообразие W не может быть точкой.

ЛЕММА 4.3. *Предположим, что экстремальное стягивание g стягивает подмногообразие $F \subset V$ на подмногообразие $Z \subset W$. Тогда $\dim F - \dim Z = 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\dim F - \dim Z > 1$. Рассмотрим слой G морфизма g над точкой подмногообразия Z . Тогда $G \cap E \neq \emptyset$ и из $\mathbb{Q}$ -факториальности многообразия V следует существование кривой, содержащейся в множестве $G \cap E$, которая стягивается как морфизмом f , так и морфизмом g .

СЛЕДСТВИЕ 4.4. *Если $g: V \rightarrow W$ является расслоением Мори, то g – расслоение на коники.*

Следующее утверждение принадлежит В. В. Шокурову (см. [11]).

ЛЕММА 4.5. *Рассмотрим многообразие Y с терминальными особенностями и бирациональное стягивание $h: Y \rightarrow Z$. Предположим, что некоторая кривая C на многообразии Y является неприводимой компонентой исключительного множества бирационального морфизма h . Тогда выполнено неравенство $K_Y \cdot C > -1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что утверждение леммы локально по базе, и мы можем ограничиться рассмотрением аналитической окрестности точки $h(C) = q$ на многообразии Z . Более того, мы можем считать, что все исключительное множество бирационального морфизма h состоит из кривой C .

Предположим, что $K_Y \cdot C \leq -1$. Выберем такой дивизор H на многообразии Y , что $H \cdot C = 1$. Тогда выполнено равенство $(K_Y + H) \cdot C = 0$ (см. [11]).

Рассмотрим K_Y -флип бирационального морфизма h

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\varphi} & Y^+ \\ h \searrow & & \swarrow h^+ \\ & Z & \end{array}$$

и положим $H^+ = \varphi(H)$. Тогда размерность исключительного множества $Ex(h^+)$ бирационального морфизма h^+ равна $\dim Y - 2$, поскольку сумма размерностей исключительных множеств бирациональных морфизмов h и h^+ не может быть меньше чем $\dim Y - 1$ (см. [2] и [11]).

Из численной h -тривиальности дивизора $K_Y + H$ следует, что

$$H^+ \cdot C' < 0$$

для любой кривой C' , принадлежащей исключительному множеству бирационального морфизма h^+ . Следовательно, $Ex(h^+) \subset H^+$.

Пусть E – исключительный дивизор раздутья некоторой компоненты исключительного множества $Ex(h^+)$. При этом мы можем считать, что центр дивизора E на многообразии Y не содержится в дивизоре H . Тогда имеет место неравенство

$$a(E; Y, H) \leq a(E; Y^+, H^+) \leq 0,$$

где $a(E; Y, H)$ и $a(E; Y^+, H^+)$ – дискрепантности дивизора E по отношению к лог-каноническим дивизорам $K_Y + H$ и $K_{Y^+} + H^+$ соответственно. Последнее противоречит терминальности многообразия Y .

ЛЕММА 4.6. *Морфизм g не может быть малым стягиванием, исключительное множество которого содержит кривую в качестве неприводимой компоненты.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что g является малым стягиванием, а некоторая кривая C является неприводимой компонентой исключительного множества бирационального морфизма g . По лемме 4.5 выполнено неравенство $K_Y \cdot C > -1$. С другой стороны,

$$\left(K_Y + \frac{n-1}{n}\tilde{S}\right) \cdot C = (f^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(-1)) - E) \cdot C = -\deg f_*(C) - E \cdot C \leq -1.$$

Следовательно, $\tilde{S} \cdot C < 0$ и $C \subset \tilde{S}$. Таким образом,

$$(K_Y + \tilde{S}) \cdot C < \left(K_Y + \frac{n-1}{n}\tilde{S}\right) \cdot C \leq -1.$$

Рассмотрим нормализацию $\nu: \hat{S} \rightarrow \tilde{S}$ многообразия $\tilde{S}$. По формуле присоединения

$$K_{\hat{S}} + \text{Diff}_{\hat{S}}(0) = \nu^*((K_Y + \tilde{S})|_{\tilde{S}}).$$

Причем кривая $\nu_*^{-1}(C)$ не содержится в дифференте $\text{Diff}_{\hat{S}}(0)$, поскольку многообразии $\hat{S}$ гладко в общей точке кривой C . Следовательно, $K_{\hat{S}} \cdot \nu_*^{-1}(C) < -1$. С другой стороны,

$$K_{\hat{S}} \cdot \nu_*^{-1}(C) \geq -1,$$

так как кривая $\nu_*^{-1}(C)$ стягиваема.

Мы показали, что экстремальное стягивание g является стягиванием подмногообразия F многообразия V на подмногообразии Z многообразия W , а также что выполнены равенство $\dim F - \dim Z = 1$ и неравенство $\dim Z \geq 1$.

Пусть C – общий слой морфизма g над Z . Тогда

$$\left(K_Y + \frac{n-1}{n}\tilde{S}\right) \cdot C = (f^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(-1)) - E) \cdot C = -\deg f_*(C) - E \cdot C < -\deg f_*(C),$$

поскольку кривая C пересекается с исключительным множеством бирационального морфизма f .

ЛЕММА 4.7. Если g не является расслоением на коники, то $F = \tilde{S}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для достаточно общего слоя C морфизма g из неравенства

$$-1 \leq K_V \cdot C = \left(K_V + \frac{n-1}{n}\tilde{S}\right) \cdot C - \frac{n-1}{n}\tilde{S} \cdot C < -\deg f_*(C) - \frac{n-1}{n}\tilde{S} \cdot C$$

следует, что $F \subset \tilde{S}$. Если коразмерность F в V больше единицы, то

$$-1 \geq -\deg f_*(C) > \left(K_V + \frac{n-1}{n}\tilde{S}\right) \cdot C = (K_V + \tilde{S}) \cdot C - \frac{1}{n}\tilde{S} \cdot C > -1 - \frac{1}{n}\tilde{S} \cdot C > -1,$$

где предпоследнее неравенство обусловлено леммой 4.5. Следовательно, подмногообразие $F \subset V$ имеет коразмерность 1 и $F = \tilde{S}$.

Таким образом, экстремальное стягивание g является либо расслоением на коники, либо стягиванием дивизора $\tilde{S}$ на некоторое подмногообразие $Z \subset W$ размерности $n-3$.

ТЕОРЕМА 4.8. Предположим существование лог-программы минимальных моделей в размерности $n-1$. Тогда гипотеза 2.5 верна для данного n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что g – расслоение на коники. Тогда $[E] \cap C \neq \emptyset$, поскольку никакая компонента дивизора E не лежит в слоях g . Значит,

$$\deg f_*(C) = -\left(K_V + \frac{n-1}{n}\tilde{S} + E\right) \cdot C = 2 - \frac{n-1}{n}\tilde{S} \cdot C - E \cdot C < 2.$$

Таким образом, $f_*(C)$ является прямой на S , а S является конусом в $\mathbb{P}^{n-1}$.

Предположим, что g стягивает $\tilde{S}$ на многообразие Z размерности $n-3$. Тогда

$$-\deg f_*(C) > \left(K_V + \frac{n-1}{n}\tilde{S}\right) \cdot C = (K_V + \tilde{S}) \cdot C - \frac{1}{n}\tilde{S} \cdot C = -2 - \frac{1}{n}\tilde{S} \cdot C > -2.$$

Значит, $f_*(C)$ – прямая на S . Следовательно, S является конусом в $\mathbb{P}^{n-1}$.

СЛЕДСТВИЕ 4.9. Гипотеза 2.5 выполнена в случае $n=4$.

СЛЕДСТВИЕ 4.10. Глобальный лог-канонический порог гладкой кватрики X в $\mathbb{P}^4$ равен $\frac{3}{4}$ тогда и только тогда, когда кватрика X содержит точку Эккарда.

§ 5. Одно приложение

Рассмотрим кольцо дискретного нормирования $\mathcal{O}$ с полем частных K и предположим, что поле вычетов имеет характеристику нуль.

Для схемы $\pi: X \rightarrow \operatorname{Spec} \mathcal{O}$ обозначим ее схемно-теоретический слой $\pi^*(O)$ символом S_X , где O – замкнутая точка схемы $\operatorname{Spec} \mathcal{O}$.

ТЕОРЕМА 5.1. Рассмотрим два гладких расслоения X и Y на многообразиях Фано над схемой $\operatorname{Spec} \mathcal{O}$ такие, что их общие слои изоморфны гладкой гиперповерхности степени n в $\mathbb{P}_K^n$ для $n \geq 3$. Тогда каждое бирациональное отображение расслоения X на расслоение Y над $\operatorname{Spec} \mathcal{O}$ бирегулярно, если оно бирегулярно на общем слое.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С одной стороны, наше бирациональное отображение не может быть изоморфизмом в коразмерности один (см. [12]). С другой стороны, антиканонические дивизоры слоев S_X и S_Y очень обильны, а их глобальные лог-канонические пороги строго больше $\frac{1}{2}$. Требуемое утверждение следует теперь непосредственно из применения метода работы [7].

Отметим, что теорема 5.1 следует из бирациональной жесткости гладких гиперповерхностей степени n в $\mathbb{P}^n$. Однако бирациональная жесткость доказана пока только для общих гладких гиперповерхностей степени $n > 3$ в $\mathbb{P}^n$ и для всех гладких гиперповерхностей степени $n \in [4, 8]$ в $\mathbb{P}^n$ (см. [13]–[16]).

Список литературы

1. Шокуров В. В. Трехмерные лог-перестройки // Изв. РАН. Сер. матем. 1992. Т. 56. № 1. С. 105–201.
2. Kawamata Y., Matsuda K., Matsuki K. Introduction to the minimal model problem // Adv. Stud. Pure Math. 1987. V. 10. P. 283–360.
3. Kollár J. Singularities of pairs // Algebraic geometry. Proc. Summer Research Institute, Santa Cruz, CA, USA. July 9–29, 1995. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1997. P. 221–287. (Proc. Symp. Pure Math. V. 62.)
4. Björk J. E. Rings of differential operators. Amsterdam: North-Holland, 1979.
5. Mustata M. Jet schemes of locally complete intersection canonical singularities // Preprint, 2000.
6. Keel S., McKernan J. Rational curves on quasi-projective surfaces // Mem. Amer. Math. Soc. 1999. V. 669.
7. Park J. Birational maps of del Pezzo fibrations // J. Reine Angew. Math. 2001. V. 538. P. 213–221.
8. Corti A. Del Pezzo surfaces over Dedekind schemes // Ann. of Math. (2). 1996. V. 144. № 3. P. 641–683.
9. Пухликов А. В. Замечание о теореме В. А. Исковских и Ю. И. Манина о трехмерной квартирке // Труды МИАН. 1995. Т. 208. С. 278–289.
10. Ambro F. Ladders on Fano varieties // J. Math. Sci. (New York). 1999. V. 94. P. 1126–1135.
11. Шокуров В. В. Письма бирационалиста. IV // Preprint, 2001.
12. Corti A. Factoring birational maps of threefolds after Sarkisov // J. Algebraic Geom. 1995. V. 4. P. 223–254.
13. Исковских В. А., Манин Ю. И. Трехмерные квартики и контрпримеры к проблеме Люрота // Матем. сб. 1971. Т. 86. С. 140–166.
14. Pukhlikov A. V. Birational isomorphisms of four-dimensional quintic // Invent. Math. 1987. V. 87. P. 303–329.
15. Pukhlikov A. V. Birational automorphisms of Fano hypersurfaces // Invent. Math. 1998. V. 134. P. 401–426.
16. Чельцов И. А. О гладкой четырехмерной квинтике // Матем. сб. 2000. Т. 191. № 9. С. 139–160.

Ливерпульский университет,
Ливерпуль, Великобритания;
University of Georgia, Athens, USA
E-mail: cheltsov@yahoo.com, wlog@bigfoot.com

Поступила в редакцию
31.05.2001