Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. З. Аров, М. А. Нудельман, Признаки подобия всех минимальных пассивных реализаций заданной передаточной функции (матрицы рассеяния или сопротивления), *Матем. сб.*, 2002, том 193, номер 6, 3–24

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm657>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 17:14:35

УДК 517.9

Д. З. Аров, М. А. Нудельман

**Признаки подобия всех минимальных пассивных
реализаций заданной передаточной функции
(матрицы рассеяния или сопротивления)**

В работе получены необходимые и достаточные условия на передаточную функцию пассивной линейной стационарной системы рассеяния (сопротивления), при которых минимальные системы указанного класса определяются по передаточной функции с точностью до подобия. Критерии формулируются в терминах ганкелева оператора, символом которого является определяемая по передаточной функции сжимающая оператор-функция, имеющая смысл субоператора внутреннего рассеяния простой консервативной системы рассеяния (соответственно сопротивления) с рассматриваемой передаточной функцией. Прослеживается связь условий подобия с теоремой о короне и ее матричными обобщениями.

Библиография: 23 названия.

§ 1. Введение

Теория линейных стационарных пассивных (иначе, диссипативных) систем развивается во взаимосвязи с теорией линейных операторов в гильбертовых пространствах и аналитических оператор-функций, теорией рассеяния, корреляционной теорией случайных процессов, теорией управления, теорией пассивных цепей, см. [1]–[8]. После работ Р. Калмана (см. [9]) хорошо известно, что минимальная система (не обязательно пассивная) с конечномерным пространством состояний восстанавливается по своей передаточной функции (п.ф.) с точностью до подобия. Однако для системы с бесконечномерным пространством состояний это не так: она восстанавливается по п.ф. лишь с точностью до слабого подобия. Оператор слабого подобия может быть неограниченным и неограниченно обратимым, в связи с чем основные операторы слабо подобных систем могут иметь существенно различные спектральные свойства, а соответствующие им эволюционные полугруппы могут иметь различные асимптотические свойства.

В настоящей работе для минимальных пассивных линейных стационарных систем с передаточными функциями классов Шура и Каратеодори, имеющими смысл

Д. З. Аровым работа выполнена при частичной финансовой поддержке Гражданского фонда научных исследований и развития США (CRDF US) и Правительства Украины (грант № UM1-2090).

матриц рассеяния и сопротивления, установлены необходимые и достаточные условия на п.ф., при которых такие системы определяются по п.ф. с точностью до подобия с ограниченным и ограниченно обратимым оператором подобия. Мы остаемся лишь на системах с дискретным временем. Полученные здесь результаты переносятся на системы с непрерывным временем известными преобразованиями, см. [1], [10]. В работе [11] нами получены необходимые и достаточные условия на матрицу рассеяния, при которых все ее минимальные пассивные реализации унитарно подобны. В работе [12] исследовалась проблема подобия минимальных пассивных реализаций матрицы рассеяния. Однако в общем случае она не была решена. Здесь мы тем же методом решаем эту проблему в общем случае, а также решаем аналогичные проблемы подобия и унитарного подобия для матриц сопротивления. Эти результаты, по существу, дают необходимые и достаточные условия на п.ф. класса Шура или Каратеодори, при которых рассматриваемое в теории абсолютной устойчивости систем с нелинейными обратными связями операторное неравенство Калмана–Якубовича–Попова имеет единственное положительное решение $H > 0$ (не обязательно ограниченное и ограниченно обратимое), т.е. минимальное и максимальное решения H_- и H_+ совпадают, а также необходимые и достаточные условия, при которых $H_+ < \gamma H_-$, где γ – некоторая константа. Эти приложения будут рассмотрены в совместной работе первого автора с М. А. Каацуком и Д. Р. Пиком.

Авторы благодарят А. А. Нудельмана за помощь при подготовке рукописи.

§ 2. Предварительные сведения

Все рассматриваемые в работе пространства предполагаются сепарабельными. Для гильбертовых пространств U и Y через $[U, Y]$ обозначается пространство линейных ограниченных операторов, действующих из U в Y ; $[U] := [U, U]$. Эволюция линейной стационарной системы с дискретным временем $\Sigma = (A, B, C, D; X, U, Y)$ описывается системой уравнений

$$\begin{cases} x(n+1) = Ax(n) + Bu(n), \\ y(n) = Cx(n) + Du(n), \end{cases} \quad n \geq 0,$$

четырёхблочный системный оператор составлен из коэффициентов системы:

$$M_\Sigma := \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in [X \oplus U, X \oplus Y];$$

$x(n) \in X$, $u(n) \in U$ и $y(n) \in Y$ называются соответственно *состоянием*, *входными* и *выходными данными* системы Σ в момент времени n ; гильбертовы пространства X , U и Y называются соответственно *пространствами состояний*, *входных* и *выходных данных*; A называется *основным оператором*, $\{A^n\}_{n \geq 0}$ – *эволюционной полугруппой системы*. Функция

$$\Theta_\Sigma(z) = D + zC(I - zA)^{-1}B$$

называется *передаточной функцией* (п.ф.) системы Σ , ибо при $x(0) = 0$ для $\hat{u}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u(n)z^n$ и $\hat{y}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} y(n)z^n$ имеем:

$$\hat{y}(z) = \Theta_{\Sigma}(z)\hat{u}(z).$$

Через $\mathbb{V}_k \mathcal{L}_k$ обозначается замкнутая линейная оболочка множеств $\mathcal{L}_k$,

$$X_{\Sigma}^c = \mathbb{V}_{k \geq 0} A^k B U, \quad X_{\Sigma}^o = \mathbb{V}_{k \geq 0} (A^*)^k C^* Y.$$

Система Σ называется:

- а) *управляемой*, если $X_{\Sigma}^c = X$,
- б) *наблюдаемой*, если $X_{\Sigma}^o = X$,
- в) *простой*, если $X_{\Sigma}^c \vee X_{\Sigma}^o = X$,
- г) *минимальной*, если $X_{\Sigma}^c = X$ и $X_{\Sigma}^o = X$.

Имеется следующее эквивалентное определение минимальности системы, основанное на понятии дилатации.

Система $\hat{\Sigma} = (\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, D; \hat{X}, U, Y)$ называется *дилатацией* системы $\Sigma = (A, B, C, D; X, U, Y)$, если при некоторых $\mathfrak{D}_*$ и $\mathfrak{D}$

$$\hat{X} = \mathfrak{D}_* \oplus X \oplus \mathfrak{D}, \quad \hat{A}^* \mathfrak{D}_* \subset \mathfrak{D}_*, \quad \hat{A} \mathfrak{D} \subset \mathfrak{D}, \quad \hat{B}^* \mathfrak{D}_* = \{0\}, \quad \hat{C} \mathfrak{D} = \{0\}$$

и

$$A = P_X \hat{A} | X, \quad B = P_X \hat{B}, \quad C = \hat{C} | X \quad (\hat{D} = D),$$

где P_X – ортопроектор на X , $T | X$ – сужение оператора T на X . Если $\hat{\Sigma}$ является дилатацией системы Σ , то Σ называется *сужением* системы $\hat{\Sigma}$. Система Σ называется *минимальной*, если она не имеет нетривиального сужения, т.е. если она не является дилатацией никакой другой системы.

Для двух голоморфных функций $\Theta_1(z)$ и $\Theta_2(z)$ пишем $\Theta_1 \simeq \Theta_2$, если $\Theta_1(z) \equiv \Theta_2(z)$ в некоторой окрестности точки $z = 0$. Если $\hat{\Sigma}$ – дилатация системы Σ , то $\Theta_{\hat{\Sigma}} \simeq \Theta_{\Sigma}$. Если $\Theta \simeq \Theta_{\Sigma}$, то Σ называется *реализацией функции* $\Theta(z)$; если при этом Σ – минимальная система, то она называется *минимальной реализацией функции* Θ . По произвольной реализации Σ функции Θ можно получить минимальные реализации Σ_0 и $\Sigma_{\bullet}$ этой функции, рассматривая, например, первое и второе сужения $\Sigma_0 = \Sigma_{\text{rest},1}$ и $\Sigma_{\bullet} = \Sigma_{\text{rest},2}$ системы Σ на подпространства

$$X_0 = \overline{P_{X_{\Sigma}^o} X_{\Sigma}^c}, \quad X_{\bullet} = \overline{P_{X_{\Sigma}^c} X_{\Sigma}^o}, \quad (1)$$

где через $\overline{\mathcal{L}}$ обозначается замыкание множества $\mathcal{L}$.

Две системы $\Sigma_i = (A_i, B_i, C_i, D; X_i, U, Y)$ ($i = 1, 2$) называются *подобными* (*унитарно подобными*), если существует оператор $R \in [X_1, X_2]$, имеющий $R^{-1} \in [X_2, X_1]$ (соответственно унитарный), такой, что

$$A_2 = R A_1 R^{-1}, \quad B_2 = R B_1, \quad C_2 = C_1 R^{-1}.$$

Система Σ называется *пассивной* (*консервативной*) *системой рассеяния*, если системный оператор M_{Σ} является сжимающим (соответственно унитарным).

Передаточная функция Θ_Σ такой системы называется *матрицей рассеяния*. Система $\Sigma = (A, B, C, D; X, U, Y)$ с $Y = U$ называется *пассивной (консервативной) системой сопротивления*, если

$$\begin{bmatrix} I - A^*A & C^* - A^*B \\ C - B^*A & D + D^* - B^*B \end{bmatrix} \geq 0$$

(соответственно если A – унитарный оператор, $C = B^*A$ и $D + D^* = B^*B$). Передаточная функция такой системы называется *матрицей сопротивления*. Условие пассивности эквивалентно следующему:

$$\begin{aligned} \|u(n)\|^2 - \|y(n)\|^2 &\geq \|x(n+1)\|^2 - \|x(n)\|^2 && \text{– для системы рассеяния,} \\ 2 \operatorname{Re}(u(n), y(n)) &\geq \|x(n+1)\|^2 - \|x(n)\|^2 && \text{– для системы сопротивления} \end{aligned}$$

$((\cdot, \cdot) - \text{скалярное произведение в } U (= Y))$, имеющему место для любых $n \geq 0$, $x(0) \in X$ и $u(k) \in U$ ($0 \leq k \leq n$). В условии консервативности вместо знака “ $\geq$ ” должен стоять знак “ $=$ ” и таким же свойством должна обладать сопряженная система $\Sigma^* = (A^*, C^*, B^*, D^*; X, Y, U)$.

Пассивная система рассеяния (сопротивления) Σ_0 называется *оптимальной*, если для любой другой пассивной системы рассеяния (соответственно сопротивления) Σ с $\Theta_\Sigma \simeq \Theta_{\Sigma_0}$ для состояний $x_{\Sigma_0}(n)$ и $x_\Sigma(n)$ этих систем в любой момент времени n при $x_{\Sigma_0}(0) = 0$ и $x_\Sigma(0) = 0$ и одинаковых последовательностях входных данных $u(k)$ ($0 \leq k \leq n$) имеем

$$\|x_{\Sigma_0}(n)\| \leq \|x_\Sigma(n)\|.$$

Наблюдаемая пассивная система рассеяния (сопротивления) $\Sigma_\bullet$ называется **-оптимальной*, если для любой другой наблюдаемой пассивной системы рассеяния (соответственно сопротивления) Σ с п.ф. $\Theta_\Sigma \simeq \Theta_{\Sigma_\bullet}$ имеем

$$\|x_\Sigma(n)\| \leq \|x_{\Sigma_\bullet}(n)\|$$

при $x_\Sigma(0) = 0$, $x_{\Sigma_\bullet}(0) = 0$ и одинаковой для $\Sigma_\bullet$ и Σ последовательности $u(k) \in U$ ($0 \leq k \leq n$).

Через $\mathcal{S}(U, Y)$ обозначим класс Шура голоморфных в $K = \{z : |z| < 1\}$ функций $\Theta(z)$ со значениями из $[U, Y]$ и с $\|\Theta(z)\| \leq 1$; через $\mathcal{C}(U)$ обозначим класс Каратеодори голоморфных в K функций $\Theta(z)$ со значениями из $[U]$ и с $\operatorname{Re} \Theta(z) \geq 0$.

Справедливы следующие утверждения, см. [1], [13]–[15].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $\Sigma = (A, B, C, D; X, U, Y)$ – пассивная система рассеяния (сопротивления).

Тогда $\Theta_\Sigma \in \mathcal{S}(U, Y)$ (соответственно $\Theta_\Sigma \in \mathcal{C}(U)$).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $\Theta \in \mathcal{S}(U, Y)$ ($\Theta \in \mathcal{C}(U)$). Тогда существует простая консервативная система рассеяния (соответственно сопротивления) Σ с $\Theta_\Sigma(z) = \Theta(z)$ и она определяется по Θ с точностью до унитарного подобия.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $\Theta \in \mathcal{S}(U, Y)$ ($\Theta \in \mathcal{C}(U)$). Тогда существуют минимальная и $*$ -оптимальная системы рассеяния (соответственно сопротивления) Σ_0 и $\Sigma_\bullet$ с п.ф. $\Theta(z)$. Они восстанавливаются по Θ с точностью до унитарного подобия и могут быть получены соответственно как первое и второе сужения $\Sigma_0 = \Sigma_{\text{rest},1}$ и $\Sigma_\bullet = \Sigma_{\text{rest},2}$ произвольной консервативной системы рассеяния (сопротивления) Σ с $\Theta_\Sigma(z) = \Theta(z)$.

Для функции $\Theta \in \mathcal{S}(U, Y)$ ($\Theta \in \mathcal{C}(U)$) будем рассматривать голоморфные в K функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ со значениями из $[U, \overset{\circ}{Y}]$ и $[\overset{\circ}{U}, Y]$ ($Y = U$ для $\Theta \in \mathcal{C}(U)$), являющиеся решениями факторизационных неравенств (здесь $\overset{\circ}{Y}$ и $\overset{\circ}{U}$ – некоторые сепарабельные, возможно, конечномерные гильбертовы пространства):

$$\text{а) } \varphi^*(z)\varphi(z) \leq I - \Theta^*(z)\Theta(z), \quad \text{б) } \psi(z)\psi^*(z) \leq I - \Theta(z)\Theta^*(z), \quad (2)$$

соответственно

$$\text{а) } \varphi^*(z)\varphi(z) \leq 2 \operatorname{Re} \Theta(z), \quad \text{б) } \psi(z)\psi^*(z) \leq 2 \operatorname{Re} \Theta(z), \quad \text{если } \Theta \in \mathcal{C}(U). \quad (3)$$

В множестве решений этих неравенств существуют максимальные решения φ_Θ и ψ_Θ такие, что для любых других решений имеем

$$\varphi^*(z)\varphi(z) \leq \varphi_\Theta^*(z)\varphi_\Theta(z), \quad \psi(z)\psi^*(z) \leq \psi_\Theta(z)\psi_\Theta^*(z).$$

Они определяются по Θ с точностью до постоянных унитарных множителей, слева для φ_Θ и справа для ψ_Θ , см. [16; гл. V, предложение 4.2] и [13] для $\Theta \in \mathcal{S}(U, Y)$; для $\Theta \in \mathcal{C}(U)$ см. [17]; доказательства аналогичны.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $\Theta \in \mathcal{S}(U, Y)$ ($\Theta \in \mathcal{C}(U)$). Пусть Σ – простая консервативная система рассеяния (соответственно сопротивления) с п.ф. $\Theta_\Sigma(z) = \Theta(z)$. Тогда имеют место следующие эквивалентности:

- а) система Σ наблюдаема $\Leftrightarrow \varphi_\Theta = 0$;
- б) система Σ управляема $\Leftrightarrow \psi_\Theta = 0$;
- в) система Σ минимальна $\Leftrightarrow \varphi_\Theta = 0$ и $\psi_\Theta = 0$.

Для системы рассеяния доказательство см. в [14], [15]. Для системы сопротивления доказательство аналогично, см. [17].

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\Theta \in \mathcal{S}(U, Y)$ ($\Theta \in \mathcal{C}(U)$). Пусть также $\varphi_\Theta = 0$ либо $\psi_\Theta = 0$. Тогда все минимальные пассивные системы рассеяния (сопротивления) с п.ф. Θ унитарно эквивалентны. Если $\varphi_\Theta = 0$ и $\psi_\Theta = 0$, то они к тому же консервативны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Σ – простая консервативная система с п.ф. $\Theta(z)$. Тогда $X_0 = X_\bullet = X_\Sigma^c$, если $\varphi_\Theta = 0$, и $X_0 = X_\bullet = X_\Sigma^o$, если $\psi_\Theta = 0$, где X_0 и $X_\bullet$ определены в (1). Так как при этом минимальная и $*$ -оптимальная системы $\Sigma_0 = \Sigma_{\text{rest},1}$ и $\Sigma_\bullet = \Sigma_{\text{rest},2}$ с п.ф. $\Theta(z)$ совпадают, то все минимальные пассивные системы рассеяния (сопротивления) с п.ф. $\Theta(z)$ унитарно подобны [11]. Если $\varphi_\Theta = 0$ и $\psi_\Theta = 0$, то $\Sigma_0 = \Sigma_\bullet = \Sigma$ и потому все минимальные пассивные системы с п.ф. Θ консервативны.

§ 3. Субоператор внутреннего рассеяния $s_\Theta(\zeta)$ и соответствующий ганкелев оператор Γ_Θ

3.1. Определение субоператора внутреннего рассеяния. Исследуем теперь проблемы подобия и унитарного подобия всех минимальных пассивных реализаций заданной матрицы рассеяния $\Theta \in \mathcal{S}(U, Y)$ или матрицы сопротивления $\Theta \in \mathcal{C}(U)$ в случае, когда $\varphi_\Theta \neq 0$ и $\psi_\Theta \neq 0$.

Пусть $\Sigma = (A, B, C, D; X, U, Y)$ – простая консервативная система рассеяния или сопротивления с п.ф. Θ . Пусть $\varphi_\Theta \neq 0$ и $\psi_\Theta \neq 0$. Это означает, что система Σ не является ни наблюдаемой, ни управляемой. Рассмотрим пространства

$$\mathfrak{D}_- = X \ominus X_\Sigma^c, \quad \mathfrak{D}_+ = X \ominus X_\Sigma^o. \quad (4)$$

Имеем: $A^* \mathfrak{D}_- \subset \mathfrak{D}_-$, $A \mathfrak{D}_+ \subset \mathfrak{D}_+$. Более того, операторы

$$V_- := A^* | \mathfrak{D}_- \ (\in [\mathfrak{D}_-]) \quad \text{и} \quad V_+ := A | \mathfrak{D}_+ \ (\in [\mathfrak{D}_+]) \quad (5)$$

– простые полуунитарные, т.е. изометрически отображают соответственно $\mathfrak{D}_-$ и $\mathfrak{D}_+$ в себя и не имеют унитарных частей. Если для унитарного (сжимающего) оператора $A \in [X]$ и простых полуунитарных операторов $V_\pm \in [\mathfrak{D}_\pm]$ имеют место соотношения (5), то говорят, что A является *унитарным (сжимающим) сцеплением* простых полуунитарных операторов V_- и V_+ в пространстве X , и для этого сцепления вводятся понятия оператора рассеяния и субоператора рассеяния. Для унитарных сцеплений это было сделано в работе [18] в порядке обобщения консервативной схемы рассеяния Лакса–Филлипса с дискретным временем, а для сжимающих сцеплений – в работе [19] в порядке обобщения диссипативной схемы рассеяния Лакса–Филлипса с дискретным временем. Следуя, в основном, работе [18], введем понятия оператора рассеяния и субоператора рассеяния унитарного сцепления A простых полуунитарных операторов V_- и V_+ . Для этого рассмотрим дефектные подпространства $\mathfrak{N}_-$ и $\mathfrak{N}_+$ операторов V_- и V_+ :

$$\mathfrak{N}_- = \mathfrak{D}_- \ominus V_- \mathfrak{D}_-, \quad \mathfrak{N}_+ = \mathfrak{D}_+ \ominus V_+ \mathfrak{D}_+. \quad (6)$$

Рассмотрим также подпространства

$$X_- = \bigvee_{n \geq 0} A^n \mathfrak{D}_-, \quad X_+ = \bigvee_{n \geq 0} (A^*)^n \mathfrak{D}_+.$$

Справедливы разложения Вольда:

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_- &= \bigoplus_{n=-\infty}^0 A^n \mathfrak{N}_-, & X_- &= \bigoplus_{n=-\infty}^{+\infty} A^n \mathfrak{N}_-, \\ \mathfrak{D}_+ &= \bigoplus_{n=0}^{+\infty} A^n \mathfrak{N}_+, & X_+ &= \bigoplus_{n=-\infty}^{+\infty} A^n \mathfrak{N}_+, \end{aligned}$$

и для любых $x \in X$ имеем

$$P_{X_{\pm}} x = \bigoplus_{-\infty}^{+\infty} P_{A^k \mathfrak{N}_{\pm}} x = \bigoplus_{-\infty}^{+\infty} A^k P_{\mathfrak{N}_{\pm}} A^{-k} x.$$

Пусть $L^2(\mathfrak{N})$ – гильбертово пространство слабо измеримых на ∂K функций $h(\zeta)$ ($= \sum_{-\infty}^{+\infty} h_k \zeta^k$) со значениями из гильбертова пространства $\mathfrak{N}$ и с

$$\begin{aligned} \|h\|^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\partial K} \|h(\zeta)\|^2 |d\zeta| \left(= \sum_{-\infty}^{+\infty} \|h_k\|^2 \right) < \infty; \\ H^2(\mathfrak{N}) &= \left\{ h(\zeta) \in L^2(\mathfrak{N}) : h(\zeta) = \sum_0^{\infty} h_k \zeta^k \right\}, \\ K^2(\mathfrak{N}) &= \left\{ h(\zeta) \in L^2(\mathfrak{N}) : h(\zeta) = \sum_{-\infty}^1 h_k \zeta^k \right\}, \end{aligned}$$

$H^2(\mathfrak{N})$ отождествляется с пространством Харди голоморфных в K функций $h(z) = \sum_0^{\infty} h_k z^k$ со значениями из гильбертова пространства $\mathfrak{N}$ и с $\|h\|^2 = \sum_0^{\infty} \|h_k\|^2 < \infty$ путем отождествления $h(z)$ с радиальным граничным значением $h(\zeta)$. Рассмотрим обобщенные преобразования Фурье $\mathcal{F}_{\pm} (\in [X, L^2(\mathfrak{N}_{\pm})])$, определяемые по формулам

$$\mathcal{F}_- x = \sum_{-\infty}^{+\infty} (P_{\mathfrak{N}_-} A^k x) \zeta^k, \quad \mathcal{F}_+ x = \sum_{-\infty}^{+\infty} (P_{\mathfrak{N}_+} A^k x) \zeta^{k-1}, \quad x \in X. \quad (7)$$

Они обладают следующими свойствами:

- а) $\mathcal{F}_{\pm}$ изометрически отображают $X_{\pm}$ на $L^2(\mathfrak{N}_{\pm})$;
- б) $\text{Ker } \mathcal{F}_{\pm} = X \ominus X_{\pm}$;
- в) $\mathcal{F}_- \mathfrak{D}_- = H^2(\mathfrak{N}_-)$, $\mathcal{F}_+ \mathfrak{D}_+ = K^2(\mathfrak{N}_+)$;
- г) $(\mathcal{F}_{\pm} A x)(\zeta) = \zeta^{-1} (\mathcal{F}_{\pm} x)(\zeta)$, $x \in X$.

Оператор

$$S = \mathcal{F}_+ \mathcal{F}_-^* (\in [L^2(\mathfrak{N}_-), L^2(\mathfrak{N}_+)]) \quad (8)$$

называется *оператором рассеяния унитарного сцепления A простых полуунитарных операторов V_- и V_+* . Так как $\|S\| \leq 1$ и S сплетает унитарные операторы умножения на ζ соответственно в пространствах $L^2(\mathfrak{N}_-)$ и $L^2(\mathfrak{N}_+)$, то существует единственная слабо измеримая в существенном ограниченная на ∂K сжимающая функция $s(\zeta)$ со значениями из $[\mathfrak{N}_-, \mathfrak{N}_+]$ ($s(\zeta) \in L^{\infty}(\mathfrak{N}_-, \mathfrak{N}_+)$, $\|s(\cdot)\|_{\infty} \leq 1$) такая, что

$$(Sh)(\zeta) = s(\zeta)h(\zeta) \quad \text{п.в., } h \in L^2(\mathfrak{N}_-). \quad (9)$$

Функция $s(\zeta)$ называется *субоператором рассеяния унитарного сцепления A простых полуунитарных операторов V_- и V_+* [18].

В работе [18] также показано, что если E_μ – спектральная функция рассматриваемого унитарного оператора A ($A = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\mu} dE_\mu$), то функции $\sigma(\mu; x) = (E_\mu x, x)$ являются абсолютно непрерывными на $[-\pi, \pi]$ для $x \in X_- \vee X_+$, а для субоператора рассеяния $s(\zeta)$ справедлива формула

$$s(e^{i\mu}) = 2\pi e^{-i\mu} \frac{1}{d\mu} P_{\mathfrak{N}_+} E_\mu | \mathfrak{N}_- \text{ п.в.}, \quad (10)$$

где производная от оператор-функции рассматривается в слабом смысле. Из этой формулы видно, что субоператор рассеяния $s(e^{i\mu})$ зависит лишь от части $A | X_- \vee X_+$ оператора A .

Если $A (\in [X])$ – сжимающее сцепление простых полуунитарных операторов, то вместо A можно рассмотреть минимальную унитарную дилатацию $\hat{A} (\in [\hat{X}])$ оператора A . Оператор $\hat{A}$ является унитарным сцеплением тех же простых полуунитарных операторов V_- и V_+ в пространство $\hat{X} (\supset X)$. Оператором рассеяния S и субоператором рассеяния $s(\zeta)$ сжимающего сцепления A простых полуунитарных операторов V_- и V_+ в пространство X являются оператор рассеяния и субоператор рассеяния унитарного сцепления $\hat{A}$ тех же операторов V_- и V_+ в пространстве $\hat{X}$, см. [16].

Если $\mathfrak{D}_-$ и $\mathfrak{D}_+$ ортогональны в X , то в этом и только этом случае $s(\zeta)$ является радиальным граничным значением некоторой функции $s(z)$ класса $\mathcal{S}(\mathfrak{N}_-, \mathfrak{N}_+)$,

$$s(\zeta) = s - \lim_{r \uparrow 1} s(r\zeta) \text{ п.в.}, \quad |\zeta| = 1.$$

В этом случае сцепление A называется *ортогональным*, а функция $s(z)$ называется *матрицей рассеяния ортогонального сцепления A операторов V_- и V_+ в пространство X ($\supset \mathfrak{D}_- \oplus \mathfrak{D}_+$)*. Из формулы Коши и формулы (10) вытекает следующая формула для матрицы рассеяния:

$$S(z) = P_{\mathfrak{N}_+} A(I - zA)^{-1} | \mathfrak{N}_-. \quad (11)$$

Поскольку оператор рассеяния S и субоператор рассеяния $s(\zeta)$ нами построены вполне определенным образом по простой консервативной системе сопротивления или рассеяния Σ с п.ф. $\Theta(z)$ (класса $\mathcal{C}(U)$ или $\mathcal{S}(U, Y)$ соответственно), а Σ определяется по п.ф. $\Theta(z)$ с точностью до унитарной эквивалентности, то S и $s(\zeta)$ в существенном однозначно определяются по $\Theta(z)$. Точнее, $s(\zeta)$ определяется по $\Theta(z)$ с точностью до умножения слева и справа на постоянные унитарные операторы $s(\zeta) \rightarrow R_1 s(\zeta) R_2$, где $R_1 (\in [\mathfrak{N}_+, Y_0])$ и $R_2 (\in [U_0, \mathfrak{N}_-])$ – некоторые унитарные операторы. Учитывая это, будем пользоваться обозначениями:

$$S_\Theta = S, \quad s_\Theta(\zeta) = s(\zeta), \quad s_\Theta(z) = s(z).$$

Будем называть S_Θ , $s_\Theta(\zeta)$ и $s_\Theta(z)$ соответственно *оператором внутреннего рассеяния*, *субоператором внутреннего рассеяния* и *матрицей внутреннего рассеяния простой консервативной системы Σ с п.ф. $\Theta(z)$ (класса $\mathcal{C}(U)$ или $\mathcal{S}(U, Y)$)*. Выделенные в пространстве состояний X системы Σ подпространства $\mathfrak{D}_-$ и $\mathfrak{D}_+$ и простые полуунитарные операторы в них V_- и V_+ интерпретируются как внутренние каналы рассеяния для системы Σ .

3.2. Аналитическое определение функции $s_\Theta(\zeta)$. Идея выделения внутренних каналов рассеяния у простой консервативной системы рассеяния возникла и существенно использовалась в исследованиях первого автора при развитии метода Дарлингтона [14], [17]. На этом пути в [14] была введена в рассмотрение функция $s_\Theta(\zeta)$ для $\Theta \in \mathcal{S}(U, Y)$, однако только в случае, когда разрешимы факторизационные уравнения

$$\begin{aligned} \text{а) } \varphi^*(\zeta)\varphi(\zeta) &= I - \Theta^*(\zeta)\Theta(\zeta) \quad \text{п.в., } \varphi \in \mathcal{S}(U, Y_0), \\ \text{б) } \psi(\zeta)\psi^*(\zeta) &= I - \Theta(\zeta)\Theta^*(\zeta) \quad \text{п.в., } \psi \in \mathcal{S}(U_0, Y). \end{aligned} \quad (12)$$

При этом $\varphi = \varphi_\Theta \in \mathcal{S}(U, Y_0)$ и $\psi = \psi_\Theta \in \mathcal{S}(U_0, Y)$ являются максимальными решениями этих уравнений, а $s_\Theta(\zeta)$ может быть определена как единственная функция $s(\zeta)$ из $L^\infty(U_0, Y_0)$ такая, что функция

$$\tilde{s}_\Theta(\zeta) := \begin{bmatrix} \psi_\Theta(\zeta) & \Theta(\zeta) \\ s(\zeta) & \varphi_\Theta(\zeta) \end{bmatrix} \quad (\in L^\infty(U_0 \oplus U, Y \oplus Y_0)) \quad (13)$$

является унитарнозначной п.в. на ∂K . Это условие равносильно тому, что φ_Θ и ψ_Θ являются решениями задач (12), и определению функции $s_\Theta(\zeta)$ соотношением

$$s_\Theta(\zeta)\psi_\Theta^*(\zeta) = -\varphi_\Theta(\zeta)\Theta^*(\zeta) \quad \text{п.в.} \quad (14)$$

В общем случае для $\Theta(z) \in \mathcal{S}(U, Y)$ функция $s_\Theta(\zeta)$ введена в работе [20] указанным выше образом как субоператор рассеяния унитарного сцепления $\hat{A} \in [\hat{X}]$ простых полуунитарных операторов V_- и V_+ . Там же показано, что $s(\zeta) = s_\Theta(\zeta)$ является единственным решением следующей аналитической задачи. Пусть $\Theta \in \mathcal{S}(U, Y)$. Далее, пусть $\varphi_\Theta \in \mathcal{S}(U, Y_0)$ и $\psi_\Theta \in \mathcal{S}(U_0, Y)$ – максимальные решения факторизационных неравенств (2). Требуется найти функцию $s(\zeta)$ такую, что

$$\tilde{s}(\zeta) = \begin{bmatrix} \psi_\Theta(\zeta) & \Theta(\zeta) \\ s(\zeta) & \varphi_\Theta(\zeta) \end{bmatrix} \in L^\infty(U_0 \oplus U, Y \oplus Y_0), \quad \|\tilde{s}\|_\infty \leq 1. \quad (15)$$

К сожалению, для Θ класса $\mathcal{C}(U)$ мы не имеем аналогичного определения функции $s_\Theta(\zeta)$ в общем случае. Однако в случае, когда существует решение $\varphi(z) \in H^2(U, \overset{\circ}{Y})$ или $\psi^*(\bar{z}) \in H^2(Y, \overset{\circ}{U})$ одного из факторизационных уравнений

$$\begin{aligned} \text{а) } \varphi^*(\zeta)\varphi(\zeta) &= 2 \operatorname{Re} \Theta(\zeta) \quad \text{п.в. } |\zeta| = 1, \\ \text{б) } \psi(\zeta)\psi^*(\zeta) &= 2 \operatorname{Re} \Theta(\zeta) \quad \text{п.в. } |\zeta| = 1, \end{aligned} \quad (16)$$

имеется следующий аналог формулы (14).

Факторизационные задачи (16) являются аналогами задач (12). В случае, когда $\dim U = \infty$, их следует понимать в следующем смысле. Включение $\varphi(z) \in H^2(U, \overset{\circ}{Y})$ означает, что $\varphi(z)$ является голоморфной в K функцией со значениями из $[U, \overset{\circ}{Y}]$ такой, что $\varphi(z)u \in H^2(\overset{\circ}{Y})$ при любом $u \in U$. Соотношение а) в (16) означает, что

$$\lim_{r \uparrow 1} \|\varphi(r\zeta)u\|^2 = \lim_{r \uparrow 1} \operatorname{Re}(\Theta(r\zeta)u, u) \quad \text{п.в., } \forall u \in U.$$

Аналогичный смысл имеет и решение $\psi(z)$ задачи б) в (16):

$$\lim_{r \uparrow 1} \|\psi^*(r\zeta)u\|^2 = \lim_{r \uparrow 1} \operatorname{Re}(\Theta(r\zeta)u, u) \quad \text{п.в.}, \quad \forall u \in U.$$

В случае, когда разрешима задача а) в (16) (соответственно б)), функция $\varphi_\Theta(z)$ (соответственно $\psi_\Theta(z)$) является максимальным решением этой задачи. Как будет показано, в этом случае функция $s_\Theta(\zeta)$ определяется соотношением соответственно

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad s_\Theta^*(\zeta)\varphi_\Theta(\zeta) &= \psi_\Theta^*(\zeta) \quad \text{п.в.}, \\ \text{б)} \quad s_\Theta(\zeta)\psi_\Theta^*(\zeta) &= \varphi_\Theta(\zeta) \quad \text{п.в.} \end{aligned} \quad (17)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть $\Theta \in \mathcal{C}(U)$ и $\Sigma = (A, B, C, D; X, U, U)$ – простая консервативная система сопротивления с матрицей сопротивления $\Theta(z)$. Пусть $\mathfrak{N}_+$ и $\mathfrak{N}_-$ – подпространства, определяемые по формулам (4), (6). Тогда функции $\varphi_\Theta(z) \in H^2(U, \mathfrak{N}_+)$ и $\psi_\Theta^*(\bar{z}) \in H^2(Y, \mathfrak{N}_-)$, определяемые по формулам

$$\text{а)} \quad \varphi_\Theta(z) = P_{\mathfrak{N}_+}(I - zA)^{-1}B, \quad \text{б)} \quad \psi_\Theta^*(\bar{z}) = P_{\mathfrak{N}_-}(I - zA^*)^{-1}A^*B, \quad (18)$$

являются максимальными решениями неравенств а) и б) в (3) и

$$\text{а)} \quad \varphi_\Theta(\zeta)u = (\mathcal{F}_+ A^* B u)(\zeta), \quad \text{б)} \quad \psi_\Theta^*(\zeta)u = (\mathcal{F}_- A^* B u)(\zeta), \quad (19)$$

где $\mathcal{F}_+$ и $\mathcal{F}_-$ – обобщенные преобразования Фурье, определенные формулами (7).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Theta \in \mathcal{C}(U)$, $\Sigma = (A, B, C, D; X, U, U)$ – простая консервативная система сопротивления с $\Theta_\Sigma(z) = \Theta(z)$. Рассмотрим $\Sigma_0 = \Sigma_{\text{rest}, 1} = (A_0, B_0, C_0, D; X_0, U, U)$ – минимальную и оптимальную систему сопротивления, получаемую как первое сужение системы Σ . Положим

$$N_0 = P_{\mathfrak{N}_+}B, \quad M_0 = P_{\mathfrak{N}_+}A.$$

Так как

$$BU \subset X_0 \oplus \mathfrak{N}_+, \quad AX_0 \subset X_0 \oplus \mathfrak{N}_+,$$

то получим равенство

$$\begin{bmatrix} I - A_0^* A_0 & C_0^* - A_0^* B_0 \\ C_0 - B_0^* A_0 & D + D^* - B_0^* B_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_0^* \\ N_0^* \end{bmatrix} [M_0, N_0].$$

Пользуясь этим равенством, получаем тождество

$$\Theta(z) + \Theta^*(z) = (1 - |z|^2)B_0^*(I - \bar{z}A_0^*)^{-1}(I - zA_0)^{-1}B_0 + \varphi_{\Sigma_0}^*(z)\varphi_{\Sigma_0}(z), \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_{\Sigma_0}(z) &= N_0 + zM_0(I - zA_0)^{-1}B_0 = P_{\mathfrak{N}_+}(B + zA(I - zA_0)^{-1}B_0) \\ &= P_{\mathfrak{N}_+}(B + zA(I - zA)^{-1}B) = P_{\mathfrak{N}_+}(I - zA)^{-1}B. \end{aligned}$$

Повторяя рассуждения из статьи [14], проведенные для $\Theta \in \mathcal{S}(U, Y)$, можно доказать, что из соотношения (20) и того факта, что Σ_0 – оптимальная система сопротивления с п.ф. $\Theta(z)$, вытекает, что $\varphi_{\Sigma_0}(z)$ – максимальное решение факторизационного неравенства а) в (3), т.е. что $\varphi_{\Theta}(z) = \varphi_{\Sigma_0}(z)$. Тем самым доказана формула а) в (18). Пользуясь ею, получаем, что

$$\varphi_{\Theta}(\zeta)u = \sum_0^{\infty} (P_{\mathfrak{N}_+} A^k B u) \zeta^k.$$

В то же время, так как $A^* B U \subset X_{\Sigma}^o$, то

$$\begin{aligned} P_{X_+} A^* B u &= \bigoplus_1^{\infty} A^{-k} P_{\mathfrak{N}_+} A^{k-1} B u, \\ (\mathcal{F}_+ A^* B u)(\zeta) &= \sum_0^{\infty} (P_{\mathfrak{N}_+} A^k B u) \zeta^k = \varphi_{\Theta}(\zeta)u, \end{aligned}$$

т.е. справедлива формула а) в (19).

Поскольку $\psi_{\Theta}^*(\bar{z})$ определяется по $\Theta^*(\bar{z})$ точно так же, как $\varphi_{\Theta}(z)$ определяется по $\Theta(z)$, а $\Theta^*(\bar{z})$ является п.ф. простой консервативной системы сопротивления Σ^* и $X_{\Sigma^*}^c = X_{\Sigma}^o$, $X_{\Sigma^*}^o = X_{\Sigma}^c$, то согласно уже доказанному для $\varphi_{\Theta}(z)$ получаем, что

$$\psi_{\Theta}^*(\bar{z}) = P_{\mathfrak{N}_-} (I - z A^*)^{-1} C^* = P_{\mathfrak{N}_-} (I - z A^*)^{-1} A^* B,$$

т.е. справедлива формула б) в (18). Кроме того,

$$\psi_{\Theta}^*(\zeta)u = \sum_0^{\infty} (P_{\mathfrak{N}_-} A^{*k+1} B u) \zeta^{-k} = (\mathcal{F}_- A^* B u)(\zeta),$$

так что справедлива формула б) в (19).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть $\Theta \in \mathcal{C}(U)$. Пусть для Θ разрешимо одно из факторизационных уравнений а) или б) в (17). Пусть φ_{Θ} и ψ_{Θ} – максимальные решения факторизационных неравенств (3). Тогда субоператор внутреннего рассеяния $s_{\Theta}(\zeta)$ может быть определен соответственно соотношением а) или б) в (17).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, полагаем $X = X_- \vee X_+$. Пусть разрешимо уравнение б) в (17). Тогда

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{F}_- \sum_{-m}^n A^k B u_k \right)(\zeta) &= \psi_{\Theta}^*(\zeta) h(\zeta), \quad \text{где } h(\zeta) = \sum_{-m}^n u_k \zeta^{-k+1}, \\ \left\| \mathcal{F}_- \sum_{-m}^n A^k B u_k \right\|_{L^2(\mathfrak{N}_-)}^2 &= \|\psi_{\Theta}^*(\zeta) h(\zeta)\|_{L^2(\mathfrak{N}_-)}^2 \\ &= 2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re}(\Theta(\zeta) h(\zeta), h(\zeta)) |d\zeta| = \left\| \sum_{-m}^n A^k B u_k \right\|^2. \end{aligned}$$

Здесь использовано предположение, что $X_- \vee X_+ = X$, из которого следует, что унитарный оператор A имеет абсолютно непрерывный спектр, т.е. что функции $\sigma(\mu, x) = (E_\mu x, x)$ являются абсолютно непрерывными для всех $x \in X$. Так как $\mathbb{V}_{-\infty}^\infty A^k B U = X$, то получаем, что $\mathcal{F}_-$ изометрично на всем X , т.е. $X_- = X$ и, следовательно, $X_+ \subset X_-$. Мы имеем:

$$\mathcal{F}_+(A^* B u) = \varphi_\Theta(\zeta)u, \quad \mathcal{F}_-(A^* B u) = \psi_\Theta^*(\zeta)u$$

и $\mathcal{F}_- (\in [X, L^2(\mathfrak{N}_-)])$ – унитарный оператор. Поэтому

$$(\mathcal{F}_+ \mathcal{F}_-^*)(\psi_\Theta^*(\zeta)u) = \mathcal{F}_+(A^* B u) = \varphi_\Theta(\zeta)u.$$

Осталось учесть, что $s_\Theta(\zeta) = s(\zeta)$ определяется по формулам (8), (9). В итоге приходим к соотношению б) в (17). Этим соотношением функция $s_\Theta(\zeta)$ определяется однозначно (как элемент пространства $L^\infty(U_0, Y_0)$), ибо из него вытекает, что

$$s_\Theta(\bar{\zeta})\psi_\Theta^*(\bar{\zeta})h(\zeta) = \varphi_\Theta(\bar{\zeta})h(\zeta), \quad h(\zeta) = \sum_{-m}^n u_k \zeta^k \in L^2(U).$$

Так как $\psi_\Theta^*(\bar{z})$ – внешняя функция, то

$$\bigvee_{-\infty}^\infty \psi_\Theta^*(\bar{\zeta})\zeta^k U = L^2(U_0),$$

и потому сжимающий оператор умножения на $s_\Theta(\bar{\zeta})$, действующий из $L^2(U_0)$ в $L^2(Y_0)$, однозначно определен соотношением б) в (17).

Если $\varphi_\Theta(\zeta)$ является решением факторизационной задачи а) в (12), то в предположении, что $X_- \vee X_+ = X$, получим равенство $X_+ = X$, равносильное тому, что $\mathcal{F}_+ (\in [X, L^2(\mathfrak{N}_+)])$ – унитарный оператор. При этом $X_- \subset X_+ = X$ и

$$(\mathcal{F}_- \mathcal{F}_+^*)\varphi_\Theta(\zeta)u = \psi_\Theta^*(\zeta)u,$$

т.е.

$$s_\Theta^*(\zeta)\varphi_\Theta(\zeta)u = \psi_\Theta^*(\zeta)u \quad \text{п.в., } u \in U.$$

Пришли к соотношению а) в (17). Этим соотношением однозначно определяется функция $s_\Theta^*(\zeta)$, а значит, и $s_\Theta(\zeta) (\in L^\infty(U_0, Y_0))$: так как $\varphi_\Theta(z)$ – внешняя функция, то

$$\bigvee_{-\infty}^\infty \varphi_\Theta(\zeta)\zeta^k U = L^2(Y_0),$$

и потому сжимающий оператор умножения на $s_\Theta^*(\zeta)$, действующий из $L^2(Y_0)$ в $L^2(U_0)$, однозначно определен соотношением а) в (17).

Заметим, что если обе задачи а) и б) в (18) разрешимы, то $X_- = X_+ = X$. При этом $s_\Theta(\zeta)$ – унитарнозначная функция п.в. на ∂K , определяемая каждым из соотношений а) и б) в (17).

3.3. Ганкелев оператор Γ_Θ с символом s_Θ , его геометрический смысл.

Пусть Θ принадлежит классу $\mathcal{S}(U, Y)$ или $\mathcal{C}(U)$. Пусть $s_\Theta(\zeta)$ – соответствующий субоператор внутреннего рассеяния, отвечающий функции $\Theta(z)$ согласно п. 3.1. Пусть Σ – простая консервативная система (соответственно рассеяния или сопротивления) с п.ф. $\Theta(z)$. Пусть $V_\pm (\in [\mathfrak{D}_\pm])$ – рассмотренные в п. 3.1 простые полу-унитарные операторы. Рассмотрим оператор

$$\Gamma = P_{\mathfrak{D}_+} | \mathfrak{D}_-, \quad (21)$$

определяющий угол между подпространствами $\mathfrak{D}_-$ и $\mathfrak{D}_+$. Рассмотрим также ганкелев оператор Γ_Θ с символом $s_\Theta(\zeta)$:

$$\Gamma_\Theta = P_{K^2(\mathfrak{N}_+)} M_{s_\Theta} | H^2(\mathfrak{N}_-), \quad (22)$$

где $M_{s_\Theta} (\in [L^2(\mathfrak{N}_-), L^2(\mathfrak{N}_+)])$ – оператор умножения на $s_\Theta(\zeta)$, т.е. $M_{s_\Theta} = S_\Theta$ – оператор внутреннего рассеяния. Имеем:

$$\Gamma_\Theta = P_{K^2(\mathfrak{N}_+)} \mathcal{F}_+ \mathcal{F}_-^* | H^2(\mathfrak{N}_-) = \mathcal{F}_+ \Gamma \mathcal{F}_-^* | H^2(\mathfrak{N}_-).$$

Здесь использованы свойства а)–г) преобразований $\mathcal{F}_\pm$. Учитывая, что $\mathcal{F}_+$ изометрически отображает $\mathfrak{D}_+$ на $K^2(\mathfrak{N}_+)$, а $\mathcal{F}_-$ изометрически отображает $\mathfrak{D}_-$ на $H^2(\mathfrak{N}_-)$, получаем, что операторы Γ и Γ_Θ связаны соотношениями

$$\Gamma_\Theta = \mathcal{F}_+ \Gamma \mathcal{F}_-^* | H^2(\mathfrak{N}_-), \quad \Gamma = \mathcal{F}_+^* \Gamma_\Theta \mathcal{F}_- | \mathfrak{D}_-. \quad (23)$$

§ 4. Основные результаты

Теперь мы можем сформулировать и доказать основные результаты работы.

Пусть Θ – функция класса $\mathcal{S}(U, Y)$ либо $\mathcal{C}(U)$. Если для нее $\varphi_\Theta = 0$ (т.е. $U_0 = \mathfrak{N}_- = \{0\}$) либо $\psi_\Theta = 0$ (т.е. $Y_0 = \mathfrak{N}_+ = \{0\}$), то будем считать, что $s_\Theta(\zeta) = 0$ и $\Gamma_\Theta = 0$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\Theta \in \mathcal{S}(U, Y)$ либо $\Theta \in \mathcal{C}(U)$. Пусть $s_\Theta(\zeta) (\in L^\infty(U_0, Y_0))$ – соответствующий субоператор внутреннего рассеяния. Тогда все минимальные пассивные системы (соответственно рассеяния либо сопротивления) с п.ф. $\Theta(z)$ унитарно подобны тогда и только тогда, когда определена матрица внутреннего рассеяния $s_\Theta(z)$, т.е. когда $s_\Theta(\zeta)$ является радиальным граничным значением функции $s_\Theta(z)$ класса $\mathcal{S}(U_0, Y_0)$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\Theta \in \mathcal{S}(U, Y)$ либо $\Theta \in \mathcal{C}(U)$. Пусть, кроме того, $s_\Theta(\zeta) (\in L^\infty(U_0, Y_0))$ – соответствующий субоператор внутреннего рассеяния. Пусть $\Gamma_\Theta (\in [H^2(U_0), K^2(Y_0)])$ – ганкелев оператор с символом $s_\Theta(\zeta)$. Тогда все минимальные пассивные системы (соответственно рассеяния или сопротивления) с п.ф. $\Theta(z)$ подобны тогда и только тогда, когда область значений оператора Γ_Θ замкнута в $K^2(Y_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть $\Theta \in \mathcal{S}(U, Y)$ либо $\Theta \in \mathcal{C}(U)$.

Если $\varphi_\Theta = 0$ либо $\psi_\Theta = 0$, то по соглашению $s_\Theta(\zeta) = 0$. Следовательно, $s_\Theta(\zeta) \equiv 0$. С другой стороны, согласно теореме 1 в рассматриваемом случае все минимальные пассивные системы с п.ф. $\Theta(z)$ унитарно подобны. Таким образом, утверждения теорем 2 и 3 справедливы в случае, когда $\varphi_\Theta = 0$ либо $\psi_\Theta = 0$. Пусть $\varphi_\Theta \neq 0$ и $\psi_\Theta \neq 0$. Рассмотрим простую консервативную систему (рассеяния либо сопротивления) $\Sigma = (A, B, C, D; X, U, Y)$ с п.ф. $\Theta(z)$. Пусть $\Sigma_0 = \Sigma_{\text{rest},1} = (A_0, B_0, C_0, D; X_0, U, Y)$ и $\Sigma_\bullet = \Sigma_{\text{rest},2} = (A_\bullet, B_\bullet, C_\bullet, D; X_\bullet, U, Y)$ – первое и второе сужения системы Σ . Согласно предложению 3 Σ_0 и $\Sigma_\bullet$ – минимальные оптимальная и *-оптимальная системы (рассеяния или сопротивления) с п.ф. $\Theta(z)$. Следовательно, они слабо подобны. Более того, замкнутый оператор R , осуществляющий слабое подобие систем $\Sigma_\bullet$ и Σ_0 , действующий из $X_\bullet$ в X_0 , действует на линеале

$$\text{Im}(\dot{A}/\dot{B}) = \left\{ \dot{x} = \sum_0^n \dot{A}^k \dot{B} u_k : n \geq 0, u_k \in U, 0 \leq k \leq n \right\}$$

по формуле

$$R \left(\sum_0^n A_\bullet^k B_\bullet u_k \right) = \sum_0^n A_0^k B_0 u_k.$$

Так как

$$\left\| \sum_0^n A_0^k B_0 u_k \right\| \leq \left\| \sum_0^n A_\bullet^k B_\bullet u_k \right\|,$$

то R – сжимающий оператор, определенный на всем пространстве $X_\bullet$. Далее, так как

$$\begin{aligned} \sum_0^n A_\bullet^k B_\bullet u_k &= P_{X_\bullet} \sum_{k=0}^n A^k B u_k, \\ \sum_0^n A_0^k B_0 u_k &= P_{X_0} \sum_{k=0}^n A^k B u_k, \end{aligned}$$

то получаем, что

$$R P_{X_\bullet} x = P_{X_0} x, \quad x \in X_\Sigma^c.$$

Следовательно, учитывая, что $X_\bullet \subset X_\Sigma^c$, получаем

$$R x = P_{X_0} x, \quad x \in X_\bullet. \quad (24)$$

Из этой формулы видно, что R является унитарным отображением $X_\bullet$ на X_0 тогда и только тогда, когда $X_0 = X_\bullet$. Так как

$$X_0 = X \ominus (\mathfrak{D}_+ \oplus (\mathfrak{D}_- \cap X_\Sigma^o)), \quad X_\bullet = X \ominus ((\mathfrak{D}_+ \cap X_\Sigma^c) \oplus \mathfrak{D}_-),$$

то $X_0 = X_\bullet$ тогда и только тогда, когда

$$\mathfrak{D}_+ \oplus (\mathfrak{D}_- \cap X_\Sigma^o) = (\mathfrak{D}_+ \cap X_\Sigma^c) \oplus \mathfrak{D}_-,$$

а это равенство имеет место тогда и только тогда, когда $\mathfrak{D}_-$ и $\mathfrak{D}_+$ ортогональны в X , где $\mathfrak{D}_-$ и $\mathfrak{D}_+$ определены в (4). Остается вспомнить, что $\mathfrak{D}_-$ и $\mathfrak{D}_+$ ортогональны тогда и только тогда, когда $s_\Theta(\zeta)$ является радиальным граничным значением функции $s_\Theta(z) \in \mathcal{S}(U_0, Y_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Как уже показано при доказательстве предыдущей теоремы, оператор $R \in [X_\bullet, X_0]$, определенный по формуле (24), устанавливает слабое подобие систем $\Sigma_\bullet$ и Σ_0 . Осталось выяснить, при каких условиях на Θ этот оператор ограниченно обратим. Ограниченная обратимость оператора R равносильна ограниченной обратимости оператора

$$R^* = P_{X_\bullet} | X_0 \quad (\in [X_0, X_\bullet]).$$

Этот оператор обратим, и по теореме Банаха он является ограниченно обратимым тогда и только тогда, когда его область значений замкнута, т.е. когда линеал

$$\mathcal{L} = P_{X_\bullet} X_0$$

замкнут. Имеем

$$\mathcal{L} = P_{X_\bullet} P_{X_\Sigma^c} X_0 = P_{X_\bullet} P_{X_\Sigma^c} (X_\Sigma^o \ominus (X_\Sigma^o \cap \mathfrak{D}_-)) = P_{X_\bullet} P_{X_\Sigma^c} X_\Sigma^o = P_{X_\Sigma^c} X_\Sigma^o.$$

Итак, нужно выяснить, при каких условиях на Θ линеал

$$\mathcal{L} = P_{X_\Sigma^c} X_\Sigma^o$$

замкнут. Через $M^\perp$ обозначим ортогональное дополнение в X к подпространству M . Имеем

$$(X_\Sigma^c)^\perp = \mathfrak{D}_-, \quad (X_\Sigma^o)^\perp = \mathfrak{D}_+.$$

Линеал $\mathcal{L}$ замкнут тогда и только тогда, когда замкнут линеал $(X_\Sigma^c)^\perp + X_\Sigma^o$, см. [21; лекция VIII, доказательство леммы о близких подпространствах]. Но

$$(X_\Sigma^c)^\perp + X_\Sigma^o = \mathfrak{D}_- + \mathfrak{D}_+^\perp,$$

а линеал $\mathfrak{D}_- + \mathfrak{D}_+^\perp$ замкнут тогда и только тогда, когда замкнут линеал

$$\mathcal{L}_1 = P_{\mathfrak{D}_+} \mathfrak{D}_-.$$

Учитывая формулы (21)–(23), получаем:

$$\mathcal{L}_1 = \Gamma \mathfrak{D}_- = \mathcal{F}_+^* \Gamma_\Theta \mathcal{F}_- \mathfrak{D}_- = \mathcal{F}_+^* \Gamma_\Theta H^2(\mathfrak{N}_-).$$

Так как $\mathcal{F}_+^*$ изометрически отображает $K^2(\mathfrak{N}_-)$ на $\mathfrak{D}_+$, то линеал $\mathcal{L}_1$ замкнут тогда и только тогда, когда замкнут линеал

$$\mathcal{L}_2 = \Gamma_\Theta H^2(\mathfrak{N}_-).$$

Итак, доказано, что оператор $R \in [X_\bullet, X_0]$, осуществляющий слабое подобие систем $\Sigma_\bullet$ и Σ_0 , является ограниченно обратимым тогда и только тогда, когда область значения ганкелева оператора Γ_Θ замкнута.

§5. Случай псевдопродолжимой передаточной функции

Пусть теперь $\dim U + \dim Y < \infty$.

Мероморфная в K функция $h(z)$ со значениями из $[U, Y]$ относится к классу Неванлинны $N(U, Y)$, если она представима в виде $h(z) = h_2^{-1}(z)h_1(z)$, где $h_1 \in \mathcal{S}(U, Y)$, h_2 — скалярная функция класса Шура $\mathcal{S} (= \mathcal{S}(\mathbb{C}, \mathbb{C}))$. Функция $h(z)$ класса $N(U, Y)$ относится к классу Смирнова $N_+(U, Y)$, если она представима в виде $h(z) = h_2^{-1}(z)h_1(z)$, где $h_1 \in \mathcal{S}(U, Y)$, h_2 — внешняя функция класса $\mathcal{S}$. Если $h(z) \in N_+(U, Y)$ и $h^{-1}(z) \in N_+(Y, U)$, то $h(z)$ относится к классу $N_{\text{out}}(U, Y)$ внешних функций из $N(U, Y)$. Имеем:

$$\mathcal{S}(U, Y) \subset N_+(U, Y), \quad \mathcal{C}(U) \subset N_+(U, U).$$

Более того, если $\Theta(z) \in \mathcal{C}(U)$ и $\operatorname{Re} \Theta(z) > 0$ в K , то $\Theta^{-1}(z) \in \mathcal{C}(U)$ и потому $\Theta(z) \in N_{\text{out}}(U, U)$.

Говорят, что функция $h(z)$ класса $N(U, Y)$ имеет мероморфное псевдопродолжение во внешность $K_e = \{z : 1 < |z| \leq \infty\}$ круга K с ограниченной характеристикой Неванлинны в K_e , если существует мероморфная в K_e функция $h_-(z)$ такая, что $h_-(1/z) \in N(U, Y)$ и

$$\lim_{r \uparrow 1} h(r\zeta) = \lim_{r \downarrow 1} h_-(r\zeta) \quad \text{п.в., } |\zeta| = 1.$$

Это псевдопродолжение $h_-(z)$ также будем обозначать через $h(z)$, как и исходную функцию, и будем рассматривать $h(z)$ как мероморфную функцию в объединении $K \cup K_e = (C \cup \{\infty\}) \setminus \partial K$.

Через $\Pi(U, Y)$ обозначим класс функций $h(z)$ из $N(U, Y)$, имеющих мероморфное псевдопродолжение в K_e с $h(1/z) \in N(U, Y)$. Если $M \subset N(U, Y)$, то через ΠM обозначим пересечение $M \cap \Pi(U, Y)$. Так,

$$\Pi \mathcal{S}(U, Y) = \Pi(U, Y) \cap \mathcal{S}(U, Y), \quad \Pi \mathcal{C}(U) = \Pi(U, U) \cap \mathcal{C}(U).$$

Пусть $\Theta \in \Pi \mathcal{S}(U, Y)$. Тогда функции

$$\Delta_\Theta(\zeta) := I - \Theta^*(\zeta)\Theta(\zeta) \geq 0 \quad \text{и} \quad \Delta_{\Theta^*}(\zeta) := I - \Theta(\zeta)\Theta^*(\zeta) \geq 0 \quad \text{п.в., } |\zeta| = 1,$$

являются граничными значениями функций

$$\Delta_\Theta(z) := I - \Theta^*\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)\Theta(z) \quad \text{и} \quad \Delta_{\Theta^*}(z) := I - \Theta(z)\Theta^*\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)$$

классов $N(U, U)$ и $N(Y, Y)$ соответственно. По теореме Розенблума–Ровняка [22] для $\Delta_\Theta(\zeta)$ и $\Delta_{\Theta^*}(\zeta)$ разрешимы факторизационные задачи а) и б) в (12) и максимальные решения φ_Θ и ψ_Θ этих задач удовлетворяют условиям

$$\varphi_\Theta \in \Pi \mathcal{S}(U, Y_0), \quad \psi_\Theta \in \Pi \mathcal{S}(U_0, Y). \quad (25)$$

Поэтому субоператор внутреннего рассеяния $s_\Theta(\zeta)$ определяется каждым из эквивалентных соотношений

$$\begin{aligned} \text{а) } s_\Theta(\zeta)\psi_\Theta^*(\zeta) &= -\varphi_\Theta(\zeta)\Theta^*(\zeta) \quad \text{п.в., } |\zeta| = 1, \\ \text{б) } \varphi_\Theta^*(\zeta)s_\Theta(\zeta) &= -\Theta^*(\zeta)\psi_\Theta(\zeta) \quad \text{п.в., } |\zeta| = 1, \end{aligned} \quad (26)$$

и $s_\Theta(\zeta)$ является граничным значением некоторой функции $s_\Theta(z)$ класса $N(U_0, Y_0)$ (см. [14]), так что соотношения (26) эквивалентны соответствующим уравнениям для $s_\Theta(z)$:

$$\begin{aligned} \text{а) } s_\Theta(z)\psi_\Theta^*\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) &= \varphi_\Theta(z)\Theta^*\left(\frac{1}{\bar{z}}\right), \\ \text{б) } \varphi_\Theta^*\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)s_\Theta(z) &= -\Theta^*\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)\psi_\Theta(z). \end{aligned}$$

Аналогичное утверждение справедливо и для $\Theta(z) \in \Pi\mathcal{C}(U)$. В этом случае $\Delta_\Theta(z)$ определяется формулой

$$\Delta_\Theta(z) = \Theta(z) + \Theta^*\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) \quad (\in N(U, U))$$

и для $\Delta_\Theta(\zeta)$ разрешимы факторизационные уравнения а) и б) в (16).

Максимальные решения $\varphi_\Theta(z)$ и $\psi_\Theta(z)$ этих уравнений удовлетворяют условиям

$$\varphi_\Theta \in \Pi H^2(U, Y_0), \quad \psi_\Theta \in \Pi H^2(U_0, U).$$

Субоператор внутреннего рассеяния $s_\Theta(\zeta)$ снова является радиальным граничным значением некоторой функции $s_\Theta(z) \in N(U_0, Y_0)$. Эта функция определяется каждым из эквивалентных соотношений

$$\begin{aligned} \text{а) } s_\Theta(z)\psi_\Theta^*\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) &= \varphi_\Theta(z), \\ \text{б) } \varphi_\Theta^*\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)s_\Theta(z) &= \psi_\Theta(z). \end{aligned} \quad (27)$$

Итак, для $\Theta \in \Pi\mathcal{S}(U, Y)$ и для $\Theta \in \Pi\mathcal{C}(U)$ субоператор внутреннего рассеяния $s_\Theta(\zeta)$ является радиальным граничным значением некоторой функции $s_\Theta(z)$ класса $N(U_0, Y_0)$ и

$$\|s_\Theta\|_\infty = \text{ess sup}\{\|s_\Theta(\zeta)\| : |\zeta| = 1\} \leq 1. \quad (28)$$

Обозначим через $H^\infty(U, Y)$ класс голоморфных ограниченных в K функций со значениями из $[U, Y]$,

$$S_{\text{in}}(U) = \{s(z) \in \mathcal{S}(U, U) : s^*(\zeta)s(\zeta) = I, s(\zeta)s^*(\zeta) = I \text{ п.в., } |\zeta| = 1\}$$

— класс двусторонне внутренних функций $s(z)$ со значениями из $[U]$; для $a_1(z) \in H^\infty(U_1, Y)$ и $a_2(z) \in H^\infty(U_2, Y)$ запись $(a_1, a_2)_L = I$ означает, что a_1 и a_2 взаимно просты слева, т.е. они не имеют общего непостоянного левого двусторонне

внутреннего делителя; для $a_1 \in H^\infty(U, Y_1)$ и $a_2 \in H^\infty(U, Y_2)$ запись $(a_1, a_2)_R = I$ означает, что a_1 и a_2 взаимно просты справа.

Поскольку $s_\Theta(z) \in N(U_0, Y_0)$ и удовлетворяет условию (28), то она в существенном однозначно представима в виде отношений

$$\text{а) } s_\Theta(z) = b_\bullet^{-1}(z)s_\bullet(z), \quad \text{б) } s_\Theta(z) = s_0(z)b_0^{-1}(z), \quad (29)$$

где

$$\begin{aligned} b_\bullet &\in S_{\text{in}}(Y_0), \quad s_\bullet \in \mathcal{S}(U_0, Y_0), \quad (b_\bullet, s_\bullet)_L = I, \\ b_0 &\in S_{\text{in}}(U_0), \quad s_0 \in \mathcal{S}(U_0, Y_0), \quad (b_0, s_0)_R = I, \end{aligned} \quad (30)$$

см., например, [23].

Функции $a_1 \in H^\infty(U_1, Y)$ и $a_2 \in H^\infty(U_2, Y)$ называются *сильно взаимно простыми слева*, если

$$\inf \{ \|a_1^*(z)y\| + \|a_2^*(z)y\| : z \in K, y \in Y, \|y\| = 1 \} > 0.$$

В этом случае пишут $[a_1, a_2]_L = I$. Функции $a_1 \in H^\infty(U, Y_1)$ и $a_2 \in H^\infty(U, Y_2)$ называются *сильно взаимно простыми справа*, и в этом случае пишут $[a_1, a_2]_R = I$, если

$$\inf \{ \|a_1(z)u\| + \|a_2(z)u\| : z \in K, u \in U, \|u\| = 1 \} > 0.$$

Пусть $H(b) = H^2(\mathcal{L}) \ominus bH^2(\mathcal{L})$ для $b \in S_{\text{in}}(\mathcal{L})$. По функции $s_\Theta(z)$, представленной в виде (29), определим оператор T_Θ по формуле

$$T_\Theta = M_{b_\bullet} \Gamma_\Theta \mid H(b_0) = P_{H(b_\bullet)} M_{s_\bullet} \mid H(b_0). \quad (31)$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\Theta \in \Pi\mathcal{C}(U)$, $\dim U < \infty$ ($\Theta \in \Pi\mathcal{S}(U, Y)$, $\dim U + \dim Y < \infty$). Пусть $s_\Theta(\zeta)$ – соответствующий субоператор внутреннего рассеяния. Пусть $b_\bullet, s_\bullet, b_0$ и s_0 взяты из представлений $s_\Theta(z)$ в (29). Пусть Γ_Θ – ганкелев оператор с символом $s_\Theta(\zeta)$. Пусть оператор T_Θ определен по формуле (31). Тогда следующие условия эквивалентны:

- а) все минимальные пассивные системы сопротивления (соответственно рассеяния) с п.ф. $\Theta(z)$ подобны;
- б) область значений ганкелева оператора Γ_Θ замкнута;
- в) $[b_\bullet, s_\bullet]_L = I$;
- г) $[b_0, s_0]_R = I$;
- д) оператор T_Θ ограниченно обратим либо $s_\Theta(z) \in \mathcal{S}(U_0, Y_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эквивалентность условий а) и б) установлена в теореме 3. Эквивалентность условий б), в) и г) установлена П. Фурманном для произвольной функции $s(z) \in N(U_0, Y_0)$.

Эквивалентность условий б) и д) проверяется непосредственно.

§6. Скалярный случай

Остановимся теперь на случае, когда $\dim U = \dim Y = 1$, т.е. п.ф. $\Theta(z)$ скалярная. В этом случае вместо обозначений $\mathcal{S}(U, Y)$, $\mathcal{C}(U)$, $N(U, Y)$, $\Pi(U, Y)$ и т.д. будем писать $\mathcal{S}$, $\mathcal{C}$, N , Π и т.д.

Пусть

$$f_{\Theta}(\zeta) = \begin{cases} 1 - |\Theta(\zeta)|^2, & \text{если } \Theta \in \mathcal{S}, \\ 2 \operatorname{Re} \Theta(\zeta), & \text{если } \Theta \in \mathcal{C}. \end{cases} \quad (32)$$

Факторизационное неравенство

$$|\varphi(\zeta)|^2 \leq f_{\Theta}(\zeta) \quad \text{п.в.,} \quad |\zeta| = 1,$$

имеет ненулевое решение $\varphi \in H^2$ тогда и только тогда, когда

$$\ln f_{\Theta} \in L^1. \quad (33)$$

По теореме Сегё это имеет место тогда и только тогда, когда разрешимо факторизационное уравнение

$$|\varphi(\zeta)|^2 = f_{\Theta}(\zeta) \quad \text{п.в.,} \quad |\zeta| = 1, \quad \varphi \in H^2. \quad (34)$$

Если это уравнение разрешимо, то $\varphi_{\Theta}(z)$, максимальное решение этого уравнения, — внешняя функция.

Субоператор внутреннего рассеяния $s_{\Theta}(\zeta)$ определяется по формуле

$$s_{\Theta}(\zeta) = \frac{\varphi_{\Theta}(\zeta)}{\overline{\varphi_{\Theta}(\zeta)}}, \quad \text{если } \Theta \in \mathcal{C}, \quad (35)$$

$$s_{\Theta}(\zeta) = -\frac{\varphi_{\Theta}(\zeta)}{\overline{\varphi_{\Theta}(\zeta)}} \overline{\Theta(\zeta)}, \quad \text{если } \Theta \in \mathcal{S}. \quad (36)$$

ЛЕММА 1. Пусть $\Theta \in \mathcal{S}$ либо $\Theta \in \mathcal{C}$. Пусть для $f = f_{\Theta}$ разрешимо факторизационное уравнение (34), т.е. выполняется условие (33). Тогда следующие условия эквивалентны:

$$\text{а) } \Theta \in \Pi, \quad \text{б) } \varphi_{\Theta} \in \Pi, \quad \text{в) } s_{\Theta}(z) \in \Pi, \quad \text{г) } s_{\Theta} \in N.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Theta \in \Pi$. Тогда $f_{\Theta}(\zeta)$ — граничное значение функции $f_{\Theta}(z)$ класса Π . Поэтому

$$\overline{\varphi_{\Theta}(\zeta)} = \frac{f_{\Theta}(\zeta)}{\varphi_{\Theta}(\zeta)}$$

— граничное значение функции класса N . Следовательно, $\varphi_{\Theta} \in \Pi$. Из формул (35) и (36) вытекает, что при этом $s_{\Theta}(\zeta)$ является граничным значением некоторой функции $s_{\Theta}(z)$ класса Π . Обратно, пусть $s_{\Theta}(\zeta)$ является граничным значением некоторой функции класса N . Пусть $\Theta \in \mathcal{S}$ и $\Theta \neq 0$. Тогда

$$\Theta(\zeta)s_{\Theta}(\zeta) = -\frac{\varphi_{\Theta}^2(\zeta)\overline{\Theta(\zeta)}\Theta(\zeta)}{1 - |\Theta(\zeta)|^2} = -\varphi_{\Theta}^2(\zeta) - \frac{\varphi_{\Theta}^2(\zeta)}{1 - |\Theta(\zeta)|^2}$$

– граничное значение функции класса N . Поэтому $f_\Theta(\zeta) = 1 - \overline{\Theta(\zeta)}\Theta(\zeta)$ – граничное значение функции класса N . Так как

$$\overline{\Theta(\zeta)} = \frac{1 - f_\Theta(\zeta)}{\Theta(\zeta)},$$

то получаем, что $\Theta \in \Pi$.

Пусть $\Theta \in \mathcal{C}$ и $S_\Theta(z) \in N$. Тогда из формулы (34) вытекает, что $\varphi_\Theta \in \Pi$. Следовательно, $f_\Theta(\zeta) = \Theta(\zeta) + \Theta^*(\zeta)$ – граничное значение функции класса N , так что $\Theta \in \Pi$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\Theta \in \mathcal{C}$ (либо $\Theta \in \mathcal{S}$).

1. Пусть для функции f_Θ , определенной по формуле (32), не выполняется условие (33). Тогда все минимальные пассивные системы сопротивления (рассеяния) с п.ф. $\Theta(z)$ унитарно подобны и консервативны.

2. Пусть для f_Θ выполняется условие (33), но $\Theta \notin \Pi$. Тогда минимальные оптимальная и *-оптимальная пассивные системы сопротивления (рассеяния) с п.ф. $\Theta(z)$ не подобны.

3. Пусть $\Theta \in \Pi\mathcal{C}$ ($\Theta \in \Pi\mathcal{S}$) и $f_\Theta(\zeta) > 0$ ($\Theta \notin \mathcal{S}_{\text{in}}$ соответственно). Пусть $s_\bullet(z)$ и $b_\bullet(z)$ взяты из представления (29) с условием (30). Тогда:

- а) все минимальные пассивные системы сопротивления (рассеяния) с п.ф. $\Theta(z)$ унитарно подобны в том и только том случае, если $b_\bullet(z) \equiv \text{const}$, т.е. если $s_\Theta(z) \in \mathcal{S}_{\text{in}}$ ($s_\Theta \in \mathcal{S}$ соответственно);
- б) все минимальные пассивные системы сопротивления (рассеяния) с п.ф. $\Theta(z)$ подобны тогда и только тогда, когда $b_\bullet(z)$ и $s_\bullet(z)$ сильно взаимно просты, т.е. когда

$$\inf \{|b_\bullet(z)| + |s_\bullet(z)| : z \in K\} > 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 1 теоремы вытекает из теоремы 1. Утверждение 3а) вытекает из теоремы 2. Утверждение 3б) вытекает из теоремы 4.

Остается доказать утверждение 2 теоремы. Пусть $\Theta \notin \Pi$, но выполняется условие (32). По лемме 1 $s_\Theta(\zeta)$ не является граничным значением никакой функции $s_\Theta(z)$ класса N . Тогда для ганкелева оператора Γ_Θ с символом $s_\Theta(\zeta)$ имеем

$$\text{Ker } \Gamma_\Theta = \{0\}. \quad (37)$$

Действительно, если

$$\mathcal{L} = \text{Ker } \Gamma_\Theta (\subset H^2) \neq \{0\},$$

то $\mathcal{L}$, будучи инвариантным подпространством в H^2 относительно оператора S_+ умножения на z , представимо в виде $\mathcal{L} = b_1 H^2$, где $b_1 \in \mathcal{S}_{\text{in}}$. Тогда мы получили бы, что $s_1(\zeta) := s_\Theta(\zeta)b_1(\zeta)$ – граничное значение некоторой функции $s_1(z) \in \mathcal{S}$ и, следовательно, $s_\Theta(\zeta)$ – граничное значение функции класса N , что противоречит условию. При условии (37) область значений оператора Γ_Θ не может быть замкнутой. Действительно, в противном случае по теореме Банаха мы имели бы

$$\|\Gamma_\Theta h\| \geq c\|h\|, \quad h \in H^2,$$

при некоторой константе c . Это невозможно, так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Gamma_{\Theta} S_+^n h\| = 0.$$

Остается применить теорему 3.

Список литературы

1. Аров Д. З. Пассивные линейные стационарные динамические системы // Сиб. матем. журн. 1979. Т. 20. №2. С. 211–228.
2. Arov D. Z. A survey on passive networks and scattering systems which are lossless or have minimal losses // Archiv für Elektronik und Übertragungstechnik. Internat. J. Electronics Commun. 1995. V. 49. №5/6. P. 252–265.
3. Arov D. Z. Passive linear systems and scattering theory // Dynamical systems, control, coding, computing vision. Basel: Birkhäuser, 1999. P. 27–44. (Progr. Systems Control Theory. V. 25.)
4. Лившиц М. С. Операторы, колебания, волны. Открытые системы. М.: Наука, 1966.
5. Willems J. C. Dissipative dynamical systems. Part I: General theory; Part II: Linear systems with quadratic supply rates // Arch. Ration. Mech. Anal. 1973. V. 45. P. 321–393.
6. Hill D. J., Moylan P. J. Dissipative dynamical systems: basic input-output and state properties // J. Franklin Inst. 1980. V. 309. P. 327–357.
7. Helton J. W. The characteristic functions of operator theory and electrical network realization // Indiana Univ. Math. J. 1972. V. 22. P. 403–404.
8. Helton J. W. Discrete time systems, operator models, and scattering theory // J. Funct. Anal. 1974. V. 16. P. 15–38.
9. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971.
10. Arov D. Z., Nudelman M. A. Passive linear stationary dynamical scattering systems with continuous time // Integral Equations Operator Theory. 1996. V. 24. P. 1–45.
11. Аров Д. З., Нудельман М. А. Критерий унитарного подобия минимальных пассивных систем рассеяния с заданной передаточной функцией // Укр. матем. журн. 2000. Т. 52. №2. С. 147–156.
12. Аров Д. З. Условия подобия всех минимальных пассивных систем рассеяния с заданной матрицей рассеяния // Функц. анализ и его прилож. 2000. Т. 34. №4. С. 71–74.
13. Ball J. A., Cohen N. De Branges–Rovnyak operator models and systems theory: A survey // Oper. Theory Adv. Appl. 1991. V. 50. P. 93–136.
14. Аров Д. З. Устойчивые диссипативные линейные стационарные динамические системы рассеяния // J. Operator Theory. 1979. V. 1. P. 95–126.
15. Arov D. Z., Kaashoek M. A., Puk D. R. Minimal and optimal linear discrete time-invariant dissipative scattering systems // Integral Equations Operator Theory. 1997. V. 29. P. 127–154.
16. Надь Б. С., Фояш Ч. Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. М.: Мир, 1970.
17. Аров Д. З. Оптимальные и устойчивые пассивные системы // Докл. АН СССР. 1979. Т. 247. С. 265–268.
18. Адамян В. М., Аров Д. З. Унитарные сцепления простых полуунитарных операторов // Математические исследования. Т. 1. №2. Кишинев, 1966. С. 3–64.
19. Аров Д. З. Теория рассеяния с диссипацией энергии // Докл. АН СССР. 1974. Т. 216. №4. С. 713–716.
20. Boiko S. S., Dubovoj V. K. On some extremal problem connected with the suboperator of the scattering through inner channels of the system // Доповіді НАН Укр. 1997. Т. 4. С. 7–11.
21. Никольский Н. К. Лекции об операторе сдвига. М.: Наука, 1980.

- 22. *Rosenblum M., Rovnyak J.* Hardy classes and operator theory. New York: Oxford Univ. Press, 1985.
- 23. *Fuhrmann P. A.* Linear systems and operator in Hilbert space. New York: McGraw-Hill, 1981.

Южно-Украинский государственный
педагогический университет им. К. Д. Ушинского,
г. Одесса

Поступила в редакцию
03.05.2001