Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Буслаев, О гипотезе Бейкера–Гаммеля–Уиллса в теории аппроксимаций Паде, *Матем. сб.*, 2002, том 193, номер 6, 25–38

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm658>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 16:12:27

УДК 517.524

В. И. Буслаев

О гипотезе Бейкера–Гаммеля–Уиллса в теории аппроксимаций Паде

Широко известная Паде-гипотеза (Padé conjecture), высказанная в 1961 году Г. Бейкером, Д. Гаммелем и Д. Уиллсом, утверждает, что для всякой мероморфной в единичном круге D функции f найдется бесконечная подпоследовательность ее диагональных аппроксимаций Паде, сходящаяся к f равномерно на компактах, лежащих в D и не содержащих полюсов f . В 2001 году Д. Любински указал мероморфную в D функцию, опровергающую Паде-гипотезу.

В работе указана функция, опровергающая голоморфный вариант Паде-гипотезы и одновременно опровергающая гипотезу Шталя (вариант Паде-гипотезы для алгебраических функций).

Библиография: 20 названий.

§ 1. Введение

Пусть f – функция, голоморфная в некоторой окрестности точки $z = 0$. Напомним, что *аппроксимацией Паде* типа $n, m \in \mathbb{N}$ функции f называется рациональная функция $[n/m]_f = P_{n,m}/Q_{n,m}$ такая, что $\deg P_{n,m} \leq n$, $\deg Q_{n,m} \leq m$, $Q_{n,m} \not\equiv 0$ и $(Q_{n,m}f - P_{n,m})(z) = O(z^{n+m+1})$ при $z \rightarrow 0$. Легко видеть, что многочлены $P_{n,m}$ и $Q_{n,m}$ с вышеуказанными свойствами существуют при всех $n, m \in \mathbb{N}$ и определяемая ими рациональная функция $P_{n,m}/Q_{n,m}$ единственна.

В теории аппроксимаций Паде одно из центральных мест занимают вопросы сходимости к приближаемой функции строки $[n/m]_f$, m фиксировано, $n \rightarrow \infty$, и диагонали $[n/n]_f$, $n \rightarrow \infty$, таблицы аппроксимаций Паде. При этом наибольший интерес вызывают вопросы равномерной сходимости диагонали. Один из ключевых принципиальных вопросов в этом направлении сформулирован в 1961 году Г. Бейкером, Д. Гаммелем и Д. Уиллсом в [1].

ГИПОТЕЗА (Бейкер–Гаммель–Уиллс). Пусть функция f голоморфна в некоторой окрестности точки $z = 0$ и мероморфна в единичном круге $D = \{|z| < 1\}$. Тогда найдется бесконечная подпоследовательность $\Lambda = \Lambda(f) \subseteq \mathbb{N}$ натуральных чисел такая, что $[n/n]_f \rightarrow f$ при $n \rightarrow \infty$, $n \in \Lambda$, равномерно на компактах, лежащих в D и не содержащих полюсов f .

В первоначальной постановке гипотезы Бейкера–Гаммеля–Уиллса требовалось, чтобы функция f имела неполярную особенность на окружности $\{|z| = 1\}$ (предпо-

Работа выполнена при финансовой поддержке фонда INTAS (грант № 2000-272), Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00564) и Российской программы поддержки ведущих научных школ (грант № 00-15-96132).

лагалось, что эта особенность будет “притягивать” к себе так называемые “лишние” (spurious) полюсы аппроксимаций, т.е. полюсы аппроксимаций, не соответствующие полюсам f в круге D). Однако затем было понято, что это требование является излишним [2; стр. 188]. Некоторые недостаточно четко сформулированные высказывания, близкие к гипотезе Бейкера–Гаммеля–Уиллса, можно найти уже в работах самого Паде, опубликованных им в конце XIX–начале XX веков. Впоследствии гипотеза Бейкера–Гаммеля–Уиллса приобрела широкую известность под названием Паде-гипотезы (Pade conjecture).

С самого начала было ясно, что подпоследовательность Λ в Паде-гипотезе может и не совпадать со всей последовательностью натуральных чисел, это подтверждалось целым рядом простых примеров. В дальнейшем в подтверждение этого факта Г. Валлин в 1974 году указал весьма любопытный пример, а именно он построил в [3] целую функцию f такую, что $\limsup_{n \rightarrow \infty} |[n/n]_f(z)| = \infty$ при всех $z \neq 0$. Вместе с тем следует отметить, что пример Г. Валлина (как и многие ранее известные примеры) не противоречит Паде-гипотезе.

Отметим также, что гипотеза Бейкера–Гаммеля–Уиллса сформулирована для общего класса мероморфных в D функций. Вместе с тем вполне содержательные (и более достоверные) варианты Паде-гипотезы могут быть получены, если ограничиться более узкими классами функций. Наиболее естественным и также имеющим принципиальное значение является голоморфный вариант Паде-гипотезы, в котором гипотеза формулируется в классе голоморфных в D функций. Для некоторых достаточно широких подклассов голоморфных функций справедливость Паде-гипотезы была известна задолго до 1961 года (года опубликования гипотезы). В частности, классическая теорема Маркова [4] может быть переформулирована следующим (не совсем естественным, но вполне уместным в данном контексте) образом: Паде-гипотеза верна для (марковского) класса функций вида $\hat{\mu}(z) = z \int_{-1}^1 \frac{d\mu(t)}{1-zt}$, где μ – положительная борелевская мера с носителем, лежащим на отрезке $[-1, 1]$, причем гипотеза верна при $\Lambda = \mathbb{N}$, а равномерная сходимость имеет место во всей области $\mathbb{C} \setminus ((-\infty, -1] \cup [1, \infty))$ (содержащей единичный круг D) голоморфности (марковских) функций. В дальнейшем аналоги теоремы Маркова для функций вида $\hat{\mu} + r$, где r – рациональная функция, были получены в работах А. Гончара [5] и Е. Рахманова [6].

В течение 40 лет до 2001 года ни Паде-гипотезу в ее общей постановке, ни ее голоморфный вариант не удавалось ни доказать, ни опровергнуть. Результаты положительного характера были получены только лишь для некоторых специальных классов функций. Приведем некоторые из полученных результатов и высказанных предположений, в той или иной мере имеющих отношение к Паде-гипотезе.

В 1981 году Г. Бейкер и П. Грейвс-Моррис высказали в [7] гипотезу для строк аппроксимаций Паде, аналогичную Паде-гипотезе для диагонали.

ГИПОТЕЗА (Бейкер–Грейвс-Моррис). Пусть функция f голоморфна в единичном круге $D = \{|z| < 1\}$. Тогда для всякого $m \in \mathbb{N}$ найдется бесконечная подпоследовательность $\Lambda = \Lambda(f) \subseteq \mathbb{N}$ такая, что $[n/m]_f \rightarrow f$ при $n \rightarrow \infty$, $n \in \Lambda$, равномерно на компактах, лежащих в D .

В ослабленном варианте гипотеза Бейкера–Грейвс-Морриса доказана в 1983 го-

ду А. Гончаром и С. Суетиным в [8]. А именно они показали, что для всякого $m \in \mathbb{N}$ существует постоянная c_m , зависящая только от m и такая, что для всякой голоморфной в круге D функции f найдется подпоследовательность $\Lambda \subseteq \mathbb{N}$, для которой $[n/m]_f \rightarrow f$ при $n \rightarrow \infty$, $n \in \Lambda$, равномерно в круге $\{|z| \leq c_m\}$. В частности, если f — целая функция, то найдется подпоследовательность Λ такая, что $[n/m]_f \rightarrow f$ при $n \rightarrow \infty$, $n \in \Lambda$, равномерно на любом компакте комплексной плоскости.

Вместе с тем удалось показать, что в общей постановке (в которой предполагается равномерная сходимость во всем единичном круге) гипотеза Бейкера–Грейвс–Морриса неверна. А именно в 1983 году автором указана в [8] голоморфная в D функция

$$f(z) = \frac{1 + \sqrt[3]{2}z}{1 - z^3}, \quad (1)$$

опровергающая гипотезу Бейкера–Грейвс–Морриса при $m = 2$. Действительно, полюсы аппроксимаций Паде $[n/2]_f$ функции (1) совпадают с корнями многочлена

$$Q_{n,2}(z) = \begin{bmatrix} f_{n-1} & f_n & f_{n+1} \\ f_n & f_{n+1} & f_{n+2} \\ z^2 & z & 1 \end{bmatrix},$$

где f_n , $n = 0, 1, \dots$, — коэффициенты разложения функции f в степенной ряд $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n = 1 + \sqrt[3]{2}z + z^3 + \sqrt[3]{2}z^4 + \dots$, и непосредственный подсчет показывает, что один из корней каждого из этих многочленов лежит в круге $\{|z| \leq 1/\sqrt[3]{2}\}$ (заметим, что коэффициенты f_n периодичны с периодом 3 и, следовательно, достаточно вычислить корни только лишь трех последовательных многочленов).

В 1997 году Г. Шталь высказал два специальных варианта Паде-гипотезы (см. [9; гипотезы 6 и 7]). В одном из этих вариантов на функцию f налагается дополнительное условие ее алгебраичности, а во втором — еще более сильное условие ее гиперэллиптичности. Напомним, что *гиперэллиптической функцией* называется алгебраическая функция вида $f(z) = r_1(z) + r_2(z)\sqrt{h(z)}$, где h — многочлен, r_1, r_2 — рациональные функции. Число $[(m-1)/2]$, где m — степень многочлена h , называется *родом гиперэллиптической функции*. Приведем здесь формулировку второй (более специализированной и, следовательно, более достоверной) из гипотез Шталя.

ГИПОТЕЗА (Шталь). Пусть функция f гиперэллиптически и мероморфна в единичном круге $D = \{|z| < 1\}$. Тогда найдется бесконечная подпоследовательность $\Lambda = \Lambda(f) \subseteq \mathbb{N}$ натуральных чисел такая, что $[n/n]_f \rightarrow f$ при $n \rightarrow \infty$, $n \in \Lambda$, равномерно на компактах, лежащих в D и не содержащих полюсов f .

Заметим, что Г. Шталь, высказывая свои гипотезы, имел весьма серьезные аргументы в поддержку их справедливости. Один из веских аргументов в пользу гипотез — это доказанная Г. Шталем в 1995 году в [10] теорема о сходимости по (логарифмической) емкости диагональных аппроксимаций Паде алгебраических функций. Еще более веский аргумент заключается в том, что вышеприведенная гипотеза доказана Г. Шталем в 1996 году в [11] в ситуации “общего положения” и

при некотором дополнительном условии на нули и полюсы рациональных функций r_1 и r_2 .

В 2000 году С. Суетин доказал в [12] Паде-гипотезу при том же дополнительном условии, что и у Г. Шталя, и также в ситуации “общего положения”, но для функций более общего, по сравнению с гиперэллиптическими, вида, а именно для функций вида

$$\hat{\rho}(z) = \int_S \frac{\rho(\zeta) d\zeta}{(z - \zeta)\sqrt{h(\zeta)}},$$

где h — многочлен четной степени, а “симметричный” компакт S комплексной плоскости и весовая функция $\rho(\zeta)$ удовлетворяют некоторым достаточно естественным требованиям.

В 2001 году Д. Любински дал отрицательный ответ на Паде-гипотезу в ее общей постановке. А именно в своем докладе на Международной конференции “Computational methods and function theory 2001, Aveiro, Portugal, 25–29 June 2001” он показал, что при $q = \exp\left(\frac{4\pi i}{99 + \sqrt{5}}\right)$ мероморфная в единичном круге D функция $H_q(z) = G_q(z)/G_q(qz)$, где

$$G_q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2} z^n}{(1-q)(1-q^2) \cdots (1-q^n)}$$

— функция Роджерса–Рамануджана, опровергает Паде-гипотезу.

В основе указанного контрпримера лежит следующее обнаруженное Д. Любински интересное свойство числителей P_n и знаменателей Q_n подходящих дробей непрерывной дроби Роджерса–Рамануджана, в которую разлагается функция H_q ,

$$H_q(z) = 1 + \frac{qz}{|1} + \frac{q^2 z}{|1} + \frac{q^3 z}{|1} + \cdots. \quad (2)$$

А именно если $q = \exp(2\pi i\tau)$, где τ — иррационально, и $q^n \rightarrow \beta$ при $n \rightarrow \infty$, $n \in \Lambda$, то

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \in \Lambda}} P_n(z) = G_q(z) \overline{G_q(q\beta z)}, \quad \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \in \Lambda}} Q_n(z) = G_q(qz) \overline{G_q(q\beta z)}$$

равномерно на компактах, лежащих в D (точнее, в круге голоморфности функции G_q , который совпадает с D при почти всех $|q| = 1$ и, в частности, при указанном выше конкретном q). При этом в силу хорошо известного равенства $(P_n Q_{n-1} - Q_n P_{n-1})(z) = (-1)^n z^n q^{n(n+1)/2}$ многочлены P_n и Q_n не имеют общих нулей. Затем с помощью компьютерной программы Mathematica/Matlab показывается, что при $q = \exp\left(\frac{4\pi i}{99 + \sqrt{5}}\right)$ функция G_q имеет в круге $\{|z| < 0.46\}$ ровно два простых нуля z_1 и z_2 , различных и по модулю, и по аргументу. Тем самым $\{\overline{\beta z_1}, \overline{\beta z_2}\} \not\subset \{z_1, z_2\}$ при любых $|\beta| = 1$. Поэтому подходящие дроби P_n/Q_n непрерывной дроби (2), а следовательно, и диагональные аппроксимации Паде функции H_q имеют при всех достаточно больших n по крайней мере один “лишний” полюс в этом

круге. Более подробное изложение этих утверждений (а также ряда других интересных утверждений о свойствах функций G_q и H_q) с их доказательствами см. в статье Д. Любински [13].

В 2001 году после доклада Д. Любински автор анонсировал в [14] контрпример и к голоморфному варианту Паде-гипотезы, и к гипотезе Шталя (функция H_q в контрпримере Любински не является ни голоморфной в D , ни алгебраической функцией). При этом оба контрпримера – это одна и та же гиперэллиптическая (рода 2) голоморфная в единичном круге D функция

$$f(z) = \frac{-27 + 6z^2 + 3(9+j)z^3 + \sqrt{81(3-(3+j)z^3)^2 + 4z^6}}{2z(9+9z+(9+j)z^2)}, \quad (3)$$

где $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ и выбрана та ветвь функции, при которой $f(0) = 0$. Детальное обоснование данного контрпримера приводится в следующем параграфе статьи.

Завершая этот вводный параграф, отметим, что исходной точкой к построению контрпримера (3) послужила доказанная автором в [15] (и опубликованная ранее в [16] в виде тезисов доклада) теорема о сходимости композиций дробно-линейных преобразований с предельно периодическими голоморфными по параметру коэффициентами. Однако сам пример основан на простейшем чисто периодическом случае этой общей теоремы. Этот чисто периодический случай (в котором доказательство элементарно) воспроизводится в следующем параграфе статьи в виде леммы 1, которая для удобства последующих вычислений переформулируется затем для еще более частного случая дробно-линейных преобразований, возникающих от непрерывных дробей, в виде леммы 2. В этих леммах утверждается, что всякой периодической непрерывной дроби с полиномиальными коэффициентами соответствует конечное число “плохих” точек, характеризующихся тем, что дробь сходится в некоторых их окрестностях, однако в самих точках сходимости дроби нет.

Заметим, что функция (3) имеет следующее разложение в периодическую с периодом 3 (так как $j^3 = 1$) непрерывную дробь

$$\frac{z|}{|3-3j^2z|} + \frac{jz^2|}{|3-3j^4z|} + \frac{j^2z^2|}{|3-3j^6z|} + \frac{j^3z^2|}{|3-3j^8z|} + \dots \quad (4)$$

Непосредственными вычислениями (которые в отличие от контрпримера Д. Любински могут быть произведены и вручную) в § 2 будет проверено, что “плохие” точки, соответствующие дроби (4), лежат в круге голоморфности функции (3) и для любой подпоследовательности Λ диагональные аппроксимации Паде функции (3) (которые, как известно, совпадают с подходящими дробями дроби (4)) не сходятся хотя бы в одной из “плохих” точек.

§ 2. Обоснование контрпримера

Рассмотрим дробно-линейное по w преобразование

$$S(w, z) = \frac{\alpha(z)w + \beta(z)}{\gamma(z)w + \delta(z)},$$

в котором коэффициенты $\alpha(z)$, $\beta(z)$, $\gamma(z)$, $\delta(z)$ являются многочленами от z . Неподвижные точки $p_{1,2}(z)$ дробно-линейного преобразования $S(w, z)$ являются решениями уравнения $S(w, z) = w$, т.е. квадратного (по w) уравнения $\gamma(z)w^2 + (\delta(z) - \alpha(z))w - \beta(z) = 0$. Следовательно, неподвижные точки дробно-линейного преобразования $S(w, z)$ — это две ветви алгебраической (точнее, гиперэллиптической) по параметру z функции

$$\begin{aligned} p_{1,2}(z) &= \frac{\alpha(z) - \delta(z) \pm \sqrt{(\alpha(z) - \delta(z))^2 + 4\beta(z)\gamma(z)}}{2\gamma(z)} \\ &= \frac{\alpha(z) - \delta(z) \pm \sqrt{I^2(z) - 4\Delta(z)}}{2\gamma(z)}, \end{aligned}$$

где $I(z) = \alpha(z) + \delta(z)$ и $\Delta(z) = \alpha(z)\delta(z) - \beta(z)\gamma(z)$ — соответственно след и определитель матрицы $\begin{pmatrix} \alpha(z) & \beta(z) \\ \gamma(z) & \delta(z) \end{pmatrix}$. Обозначим через Γ множество тех $z \in \mathbb{C}$, при которых неподвижные точки нейтральны, т.е. при которых

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial S(w, z)}{\partial w} \right|_{w=p_{1,2}(z)} &= \left| \frac{\Delta(z)}{(\gamma(z)w + \delta(z))^2} \right|_{w=p_{1,2}(z)} \\ &= \left| \frac{4\Delta(z)}{(I(z) \pm \sqrt{I^2(z) - 4\Delta(z)})^2} \right| = 1. \end{aligned}$$

Так как

$$\prod_{l=1}^2 \left| \frac{\partial S(w, z)}{\partial w} \right|_{w=p_l(z)} = 1,$$

то

$$\begin{aligned} \Gamma &= \{z \in \mathbb{C} : |I(z) + \sqrt{I^2(z) - 4\Delta(z)}| = |I(z) - \sqrt{I^2(z) - 4\Delta(z)}|\} \\ &= \{z \in \mathbb{C} : I^2(z) = 4t\Delta(z), 0 \leq t \leq 1\}. \end{aligned}$$

При $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ фиксируем ту ветвь $\sqrt{I^2(z) - 4\Delta(z)}$, для которой

$$|I(z) + \sqrt{I^2(z) - 4\Delta(z)}| > |I(z) - \sqrt{I^2(z) - 4\Delta(z)}|. \quad (5)$$

Тогда при $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ однозначные мероморфные функции

$$p(z) = \frac{\alpha(z) - \delta(z) + \sqrt{I^2(z) - 4\Delta(z)}}{2\gamma(z)} \quad \text{и} \quad \tilde{p}(z) = \frac{\alpha(z) - \delta(z) - \sqrt{I^2(z) - 4\Delta(z)}}{2\gamma(z)}$$

являются соответственно притягивающей и отталкивающей неподвижными точками дробно-линейного преобразования $S(w, z)$, т.е.

$$\left| \frac{\partial S(w, z)}{\partial w} \right|_{w=p(z)} < 1 < \left| \frac{\partial S(w, z)}{\partial w} \right|_{w=\tilde{p}(z)}.$$

Хорошо известно, что при всех $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ и всех $w \in \overline{\mathbb{C}}$ композиции (по w) $\underbrace{S \circ \dots \circ S}_n(w, z)$ сходятся при $n \rightarrow \infty$ к $p(z)$, если $w \neq \tilde{p}(z)$, и сходятся к $\tilde{p}(z)$, если $w = \tilde{p}(z)$ (в последнем случае $\underbrace{S \circ \dots \circ S}_n(\tilde{p}(z), z) = \tilde{p}(z)$ при всех $n = 1, 2, \dots$). На этой особенности предельного поведения композиций $\underbrace{S \circ \dots \circ S}_n(w, z)$ и будет основан объявленный выше контрпример. Предположим, что дробно-линейное преобразование $S(w, z)$ представлено в виде композиции $S_1 \circ \dots \circ S_m(w, z)$ m дробно-линейных преобразований $S_l(w, z)$, $l = 1, \dots, m$; оформим приведенные выше рассуждения в виде следующей леммы.

ЛЕММА 1. *Пусть имеется периодическая с периодом $m \in \mathbb{N}$ последовательность $S_1(w, z), S_2(w, z), \dots$ дробно-линейных (по w) преобразований с полиномиальными коэффициентами, и пусть $w_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ – некоторая фиксированная точка расширенной комплексной плоскости. Тогда*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_1 \circ \dots \circ S_n(w_0, z) = p(z) \quad \text{при} \quad z \in (\mathbb{C} \setminus \Gamma) \setminus \bigcup_{l=1}^m E_l(w_0),$$

$$S_1 \circ \dots \circ S_{nm+l}(w_0, z) = \tilde{p}(z) \quad \text{при} \quad z \in E_l(w_0), \quad n = 0, 1, \dots, \quad l = 1, \dots, m,$$

где Γ , $p(z)$, $\tilde{p}(z)$ определены выше для дробно-линейного преобразования $S(w, z) = S_1 \circ \dots \circ S_m(w, z)$, $E_l(w_0) = \{z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma : \tilde{p}(z) = S_1 \circ \dots \circ S_l(w_0, z)\}$, $l = 1, \dots, m$.

Действительно, лемма 1 является следствием вышесказанного, если учесть, что

$$S_1 \circ \dots \circ S_{nm+l}(w_0, z) = \underbrace{S \circ \dots \circ S}_n(S_1 \circ \dots \circ S_l(w_0, z), z),$$

$$n = 0, 1, \dots, \quad l = 1, \dots, m.$$

ДОПОЛНЕНИЕ К ЛЕММЕ 1. *В обозначениях леммы 1 имеют место равенства*

$$E_m(w_0) = \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma : S(w_0, z) = w_0, \left| \frac{\partial S(w_0, z)}{\partial w} \right| > 1 \right\},$$

$$E_l(w_0) = \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma : S^l(w_0, z) = w_0, \left| \frac{\partial S^l(w_0, z)}{\partial w} \right| > 1 \right\},$$

где $S^l(w, z) = S_{l+1} \circ \dots \circ S_m \circ S_1 \circ \dots \circ S_l(w, z)$, $l = 1, \dots, m-1$.

Действительно, легко видеть, что $E_m(w_0) = \{z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma : \tilde{p}(z) = w_0\}$, равенство $S(w_0, z) = w_0$ означает, что точка w_0 является неподвижной точкой дробно-линейного преобразования $S(w, z)$, а неравенство $\left| \frac{\partial S(w_0, z)}{\partial w} \right| > 1$ означает, что эта точка w_0 является отталкивающей неподвижной точкой. Аналогичным образом, при $l = 1, \dots, m-1$ равенство $S^l(w_0, z) = w_0$ означает, что точка

$S_1 \circ \dots \circ S_l(w_0, z)$ является неподвижной точкой дробно-линейного преобразования $S(w, z)$, а неравенство $\left| \frac{\partial S^l(w_0, z)}{\partial w} \right| > 1$ означает, что эта точка является отталкивающей неподвижной точкой.

Пусть теперь имеется непрерывная дробь

$$\frac{a_1 z}{|b_1 + c_1 z|} + \frac{a_2 z^2}{|b_2 + c_2 z|} + \frac{a_3 z^2}{|b_3 + c_3 z|} + \dots \quad (6)$$

с периодическими коэффициентами $a_{nm+l} = a_l \neq 0$, $b_{nm+l} = b_l \neq 0$, $c_{nm+l} = c_l$, $n = 0, 1, \dots$, $l = 1, \dots, m$. Хорошо известно (например, из критерия Прингсхейма [17] сходимости непрерывных дробей), что эта непрерывная дробь сходится в некоторой окрестности точки $z = 0$ к голоморфной функции $f(z)$. При этом очевидно, что $f(0) = 0$. Хорошо известно также, что диагональные аппроксимации Паде функции $f(z)$ совпадают с подходящими дробями непрерывной дроби (6), которые, в свою очередь, совпадают с $\frac{1}{z} S_1 \circ \dots \circ S_n(0, z)$, где $S_1 \circ \dots \circ S_n(0, z)$ — композиции в точке $w = 0$ дробно-линейных преобразований

$$S_n(w, z) = \frac{a_n z^2}{w + b_n + c_n z}, \quad n = 1, 2, \dots$$

(множитель $\frac{1}{z}$ в выражении $\frac{1}{z} S_1 \circ \dots \circ S_n(0, z)$ появляется в связи с тем, что дробно-линейное преобразование $S_1(w, z)$ записано в единой для всех преобразований форме и имеет по этой причине лишний множитель z). Таким образом,

$$[n/n]_f(z) = \frac{1}{z} S_1 \circ \dots \circ S_n(0, z). \quad (7)$$

Легко видеть, что $f(z) = p(z)/z$, где $p(z)$ — притягивающая неподвижная точка дробно-линейного преобразования

$$S(w, z) = \frac{a_1 z^2}{w + b_1 + c_1 z} \circ \dots \circ \frac{a_m z^2}{w + b_m + c_m z}. \quad (8)$$

Следовательно, f — мероморфная в $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ и голоморфная в некоторой окрестности точки $z = 0$ ветвь гиперэллиптической функции. Кроме того, так как притягивающая и отталкивающая точки не могут совпадать, при $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ имеем соотношение $f(z) \neq \tilde{f}(z) = \tilde{p}(z)/z$, где $\tilde{p}(z)$ — отталкивающая неподвижная точка дробно-линейного преобразования (8), f — другая ветвь гиперэллиптической функции. Учитывая равенство (7) и применяя лемму 1 к рассмотренной выше периодической (с периодом m) последовательности дробно-линейных преобразований

$$\frac{a_1 z^2}{w + b_1 + c_1 z}, \frac{a_2 z^2}{w + b_2 + c_2 z}, \dots$$

и к фиксированной точке $w_0 = 0$, получаем утверждение, непосредственно лежащее в основе построения контрпримера.

ЛЕММА 2. Пусть заданы числа $a_l \neq 0$, $b_l \neq 0$, c_l , $l = 1, \dots, m$, и пусть множества Γ , $E_l = E_l(0)$, $l = 1, \dots, m$, и функция $p(z)$ определены вышеописанным образом для дробно-линейного преобразования (8). Тогда

1°. $f(z) = p(z)/z$ – мероморфная в $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ и голоморфная в некоторой окрестности точки $z = 0$ ветвь гиперэллиптической функции;

2°. $f(z) \neq \tilde{f}(z)$ при всех $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$, где $\tilde{f}$ – другая (определенная в $\mathbb{C} \setminus \Gamma$) ветвь гиперэллиптической функции;

3°. $[nt + l/nt + l]_f(z) = \tilde{f}(z)$ при $z \in E_l$, $n = 0, 1, \dots$, $l = 1, \dots, m$;

4°. $[n/n]_f(z) \rightarrow f(z)$ при $n \rightarrow \infty$ и $z \in (\mathbb{C} \setminus \Gamma) \setminus \bigcup_{l=1}^m E_l$.

Легко видеть, что утверждение 4° леммы 2 использоваться при построении контрпримера никак не будет (и приведено в лемме 2 исключительно для большей ясности картины) и что для построения контрпримера к гипотезе Шталя, одновременно являющегося контрпримером к голоморфному варианту Паде-гипотезы, достаточно подобрать числа $a_l \neq 0$, $b_l \neq 0$, c_l , $l = 1, \dots, m$, таким образом, чтобы $\Gamma \cap D = \emptyset$, $F \cap D = \emptyset$, где F – множество полюсов f , и $E_l \cap D \neq \emptyset$ при всех $l = 1, \dots, m$. Действительно, в этом случае f – голоморфная в D ветвь гиперэллиптической функции и для любой подпоследовательности Λ натуральных чисел найдется такое l ($1 \leq l \leq m$), что Λ содержит бесконечное подмножество натуральных чисел вида $nt + l$ и, следовательно, в силу утверждений 3° и 2° леммы 2 $[n/n]_f(z) \rightarrow f(z)$ при $n \rightarrow \infty$, $n \in \Lambda$ и $z \in E_l \cap D$.

Проверим теперь, что для чисел $a_l = j^{l-1}$, $b_l = 3$, $c_l = -3j^{2l}$, где $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $l = 1, 2, 3$, множества Γ , F , E_l , определенные выше, таковы, что $\Gamma \cap D = \emptyset$, $F \cap D = \emptyset$, $E_l \cap D \neq \emptyset$, $l = 1, 2, 3$. При указанных значениях чисел a_l , b_l , c_l непрерывная дробь (6) совпадает с непрерывной дробью (4) и

$$S_l(w, z) = \frac{j^{l-1}z^2}{3 - 3j^{2l}z + w}, \quad l = 1, 2, 3.$$

Поэтому дробно-линейное преобразование (8) имеет следующий вид:

$$S(w, z) = S_1 \circ S_2 \circ S_3(w, z) = \frac{z^2}{3 - 3j^2z + \frac{jz^2}{3 - 3jz + \frac{j^2z^2}{3 - 3z + w}}}.$$

Полагая

$$S(w, z) = \frac{\alpha(z)w + \beta(z)}{\gamma(z)w + \delta(z)},$$

отсюда имеем $\alpha(z) = 3z^2(1 - jz)$, $\beta(z) = z^2[9 + 9j^2z + j(9 + j)z^2]$, $\gamma(z) = 9 + 9z + (9 + j)z^2$, $\delta(z) = 27 - 3z^2 - 3(9 + 2j)z^3$. Следовательно,

$$I(z) = \alpha(z) + \delta(z) = 27 - (27 + 9j)z^3,$$

$$\Delta(z) = \alpha(z)\delta(z) - \beta(z)\gamma(z) = \prod_{l=1}^3 (-j^{l-1}z^2) = -z^6,$$

$$\begin{aligned} \Gamma &= \{z \in \mathbb{C} : 27 - (27 + 9j)z^3 = \pm 2itz^3, 0 \leq t \leq 1\} \\ &= \{z \in \mathbb{C} : z = 3(27 + 9j \pm 2it)^{-1/3}, 0 \leq t \leq 1\}, \end{aligned}$$

а притягивающая неподвижная точка дробно-линейного преобразования $S(w, z)$ при $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ определяется равенством

$$\begin{aligned} p(z) &= \frac{\alpha(z) - \delta(z) + \sqrt{I^2(z) - 4\Delta(z)}}{2\gamma(z)} \\ &= \frac{-27 + 6z^2 + 3(9+j)z^3 + \sqrt{81(3 - (3+j)z^3)^2 + 4z^6}}{2(9 + 9z + (9+j)z^2)} \end{aligned}$$

(выбор ветви производится по правилу (5)). Таким образом, функция $f(z) = p(z)/z$ — это функция, задаваемая формулой (3). Множества E_1 , E_2 , E_3 найдем при помощи дополнения к лемме 1. Имеем

$$E_3 = \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma : S(0, z) = 0, \left| \frac{\partial S(0, z)}{\partial w} \right| > 1 \right\} = \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma : \beta(z) = 0, \left| \frac{\alpha(z)}{\delta(z)} \right| > 1 \right\}.$$

Заметим, что корень $z = 0$ многочлена $\beta(z)$ можно сразу исключить из рассмотрения на вопрос принадлежности к E_3 , так как $\alpha(0) = 0$. Непосредственный подсчет двух других корней z_3 и $\tilde{z}_3$ многочлена $\beta(z)$, т.е. корней многочлена $9 + 9j^2z + j(9+j)z^2$, показывает, что $z_3 \approx 0.993587 - 0.0646718i$, $|z_3| < 0.9957$, $|\tilde{z}_3| > 1.057$. Кроме того,

$$\left| \frac{\alpha(z_3)}{\delta(z_3)} \right| = \left| \frac{3z_3^2(1 - jz_3)}{\delta(z_3) + 3\beta(z_3)(j^2z_3 - 1)/z_3^2} \right| = \left| \frac{3z_3^2(1 - jz_3)}{3z_3^2j(1 - z_3)} \right| = \left| \frac{z_3 - j^2}{z_3 - 1} \right| > 1.$$

Таким образом, $E_3 \cap D = \{z_3\}$, $\tilde{z}_3 \notin D$. (Для полноты картины можно проверить также, что $\tilde{z}_3 \notin E_3$, т.е. $\tilde{z}_3$ — притягивающая неподвижная точка, но этот факт далее никак не будет использоваться.) Легко видеть, что $S_l(w, z) = S_1(w, j^{2(l-1)}z)$, $l = 1, 2, 3$. Поэтому $S^1(w, z) = S_2 \circ S_3 \circ S_1(w, z) = S(w, j^2z)$, $S^2(w, z) = S_3 \circ S_1 \circ S_2(w, z) = S(w, jz)$. Следовательно, $E_1 \cap D = \{jz_3\}$, $E_2 \cap D = \{j^2z_3\}$.

Непосредственный подсчет показывает, что

$$\begin{aligned} \min_{z \in \Gamma} |z| &= \min_{0 \leq t \leq 1} |3|27 + 9j \pm 2it|^{-1/3} = 3|27 + 9j + 2i|^{-1/3} \\ &= 3 \left(22.5^2 + \left(\frac{9\sqrt{3}}{2} + 2 \right)^2 \right)^{-1/6} > 1.032 > 1. \end{aligned}$$

Это означает, что $\Gamma \cap D = \emptyset$.

Заметим далее, что множество F полюсов f является подмножеством множества корней многочлена $\gamma(z)$ и что $\gamma(z) = \beta(jz)/(jz)^2$. Это означает, что $F \subseteq \{z_2, \tilde{z}_2\}$, где $z_2 = j^2z_3$, $\tilde{z}_2 = j^2\tilde{z}_3$. Покажем, что в точке z_2 полюса нет, т.е. покажем, что

$$\alpha(z_2) - \delta(z_2) + \sqrt{I^2(z_2) - 4\Delta(z_2)} = 0. \quad (9)$$

Действительно, так как z_2 – корень многочлена $\gamma(z)$, то

$$\begin{aligned} I^2(z_2) - 4\Delta(z_2) &= (\alpha(z_2) - \delta(z_2))^2 + 4\beta(z_2)\gamma(z_2) = (\alpha(z_2) - \delta(z_2))^2, \\ \left| \frac{I(z_2) + (\delta(z_2) - \alpha(z_2))}{I(z_2) + (\alpha(z_2) - \delta(z_2))} \right| &= \left| \frac{(\alpha(z_2) + \delta(z_2)) + (\delta(z_2) - \alpha(z_2))}{(\alpha(z_2) + \delta(z_2)) + (\alpha(z_2) - \delta(z_2))} \right| = \left| \frac{\delta(z_2)}{\alpha(z_2)} \right| \\ &= \left| \frac{\delta(z_2) + 3\gamma(z_2)(z_2 - 1)}{3z_2^2(1 - jz_2)} \right| = \left| \frac{3jz_2^2(j - z_2)}{3z_2^2(1 - jz_2)} \right| = \left| \frac{z_2 - j}{z_2 - j^2} \right| \\ &= \left| \frac{j^2z_3 - j}{j^2z_3 - j^2} \right| = \left| \frac{z_3 - j^2}{z_3 - 1} \right| > 1. \end{aligned}$$

Поэтому в соответствии с описанным выше правилом (5) выбора ветви гиперэллиптической функции имеем $\sqrt{I^2(z_2) - 4\Delta(z_2)} = \delta(z_2) - \alpha(z_2)$, т.е. имеем равенство (9). (Для полноты картины можно проверить, что точка $\tilde{z}_2 = j^2\tilde{z}_3$, лежащая вне D , является полюсом f , т.е. $F = \{\tilde{z}_2\}$.) Таким образом, $F \cap D = \emptyset$.

Итак, в соответствии со всем вышесказанным гиперэллиптическая функция f , задаваемая формулой (3), голоморфна в единичном круге D , а ее диагональные аппроксимации Паде не сходятся к f ни по какой подпоследовательности натуральных чисел хотя бы в одной из трех точек $z_1 = jz_3$, $z_2 = j^2z_3$, z_3 круга D . Следовательно, указанная функция f одновременно является контрпримером и к голоморфному варианту Паде-гипотезы, и к гипотезе Шталя.

§ 3. Некоторые замечания

Отметим, что в процессе построения контрпримера имелось желание сделать его по возможности более простым. При этом минимальный период непрерывной дроби (6), при котором удалось построить пример, оказался равным 3. Интересно, что ранее указанная автором функция (1), являющаяся контрпримером к гипотезе Бейкера–Грейвс–Морриса, также имеет периодические и также с периодом 3 коэффициенты разложения (но не в непрерывную дробь, а) в степенной ряд.

Можно показать, что контрпример к гипотезе Шталя, построенный на основе периодической непрерывной дроби (6), при $m \leq 2$ невозможен. В другую же сторону, а именно в сторону увеличения периода m непрерывной дроби, трудностей, кроме вычислительных, не возникает. При этом могут быть построены контрпримеры с увеличивающимся вместе с ростом m (т.е. вместе с ростом рода гиперэллиптической функции) числом “лишних” (spurious) полюсов.

Отметим также, что для уже найденного контрпримера (3) вычисления достаточно просты и могут быть произведены без использования компьютера. Действительно, все вычисления предыдущего параграфа фактически сводятся к нахождению точек ветвления функции f , т.е. корней многочлена $I^2(z) - 4\Delta(z) = 81(3 - (3+j)z^3)^2 + 4z^6$, а также корней многочлена $\gamma(z) = 9 + 9z + (9+j)z^2$, среди которых лежат полюсы функции f , с точностью до 0.001, а это несложно сделать и вручную.

Заметим, что функция H_q ($q = \exp(2\pi i\tau)$), задаваемая непрерывной дробью (2), является контрпримером к Паде-гипотезе не только при некоторых иррациональных τ , в частности при $\tau = 2/(99 + \sqrt{5})$, как это было показано Д. Любински, но

и при некоторых рациональных τ , в частности при $\tau = 1/6$. По всей видимости, функция H_q является контрпримером к Паде-гипотезе, а следовательно, и к гипотезе Штала при всех $\tau = 1/m$, где $m \geq 6$; при не слишком больших m это можно проверить непосредственно способом, описанным в § 2 и основывающимся на применении леммы 1 к дробно-линейному преобразованию

$$S(w, z) = \frac{qz}{w+1} \circ \dots \circ \frac{q^m z}{w+1} = \frac{\alpha_q(z)w + \beta_q(z)}{\gamma_q(z)w + \delta_q(z)},$$

соответствующему периодической непрерывной дроби (2). Основные вычислительные действия при проверке – это, как и раньше, нахождение корней многочленов

$$I_q^2(z) - 4\Delta_q(z) = 1 + 4z^m$$

и

$$\gamma_q(z) = \sum_{k=0}^{[(m-1)/2]} z^k q^{k(k+1)} \frac{(1 - q^{m-k-1}) \dots (1 - q^{m-2k})}{(1 - q) \dots (1 - q^k)}$$

(первое равенство здесь элементарно, а второе – это формула Хиршхорна [18] для знаменателя $(m-1)$ -й подходящей дроби непрерывной дроби (2)). Вместе с тем подчеркнем, что на основе функции H_q – ни при рациональных τ , ни при иррациональных τ – нельзя построить контрпример к голоморфному варианту Паде-гипотезы, так как при любом $|q| = 1$ “плохие” точки (т.е. точки, предельные для “лишних” полюсов) имеют такой же модуль, что и полюсы функции H_q . Другими словами, наличие полюсов у аппроксимируемой функции является необходимым условием построения контрпримера к Паде-гипотезе на основе функции H_q .

И наконец, сделаем последнее замечание, связанное с проверкой найденного контрпримера (3) путем вычисления на компьютере полюсов $[n/n]_f$ непосредственно по коэффициентам функции f . Легко видеть, что во введенных выше обозначениях функция f , задаваемая формулой (3), удовлетворяет следующему линейному дифференциальному уравнению 1-го порядка:

$$\begin{aligned} & 2(2z\gamma(z)f(z) + \delta(z) - \alpha(z))(I^2(z) - 4\Delta(z)) \\ & = (2z\gamma(z)f(z) + \delta(z) - \alpha(z))(I^2(z) - 4\Delta(z))'. \end{aligned}$$

Разлагая обе части этого равенства в ряд по степеням z и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях z , получаем линейное разностное уравнение, которому удовлетворяют коэффициенты $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ разложения функции f в степенной ряд $f(z) = \sum_{n=0}^\infty f_n z^n$. Точный вид получаемого разностного уравнения выписывать нет необходимости, заметим только, что его коэффициенты (после деления на n) имеют предел при $n \rightarrow \infty$, а характеристический многочлен равен

$$\begin{aligned} & \lambda^8 \gamma(\lambda^{-1})(I^2(\lambda^{-1}) - 4\Delta(\lambda^{-1})) \\ & = \lambda^8(9 + 9\lambda^{-1} + (9+j)\lambda^{-2})(81(3 - (3+j)\lambda^{-3})^2 + 4\lambda^{-6}). \end{aligned}$$

Так как максимальный по модулю корень этого характеристического многочлена равен z_2^{-1} , то по теореме Пуанкаре [19] для “почти всех решений” $\{g_n\}_{n=0}^\infty$ полученного разностного уравнения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g_{n+1}}{g_n} = z_2^{-1}$$

и, следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |g_n|^{1/n} = |z_2^{-1}| > 1.$$

Таким образом, $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ является “исключительным решением” (существующим по теореме Перрона [20], уточняющей теорему Пуанкаре), для которого

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |f_n|^{1/n} < 1.$$

Это означает, что при компьютерной проверке указанного контрпримера коэффициенты f_n , $n = 0, 1, \dots$, функции f должны вычисляться с “абсолютной” точностью, так как любые малые погрешности в вычислениях приводят при больших n к искаженной картине поведения коэффициентов f_n , кардинальным образом отличающейся от реальной. Однако при не слишком больших n поведение коэффициентов f_n , а также полюсов диагональных аппроксимаций Паде функции f соответствует ожидаемому, а именно $n - 2$ полюсов “притягиваются” к множеству Γ , один полюс стремится к точке $\tilde{z}_2 = j^2 \tilde{z}_3 \notin \Gamma$, являющейся единственным и лежащим вне единичного круга полюсом функции f , а один полюс стремится по подпоследовательностям $\Lambda_l = \{n \in \mathbb{N} : n \equiv l \pmod{3}\}$ соответственно к точкам z_l , $l = 1, 2, 3$, лежащим в единичном круге D .

Список литературы

1. Baker G. A., Jr., Gammel J. L., Wills J. G. An investigation of the applicability of the Padé approximant method // J. Math. Anal. Appl. 1961. V. 2. P. 405–418.
2. Baker G. A. Essentials of Padé approximants. New York: Academic Press, 1975.
3. Wallin H. The convergence of Padé approximants and the size of the power series coefficients // Appl. Anal. 1974. V. 4. P. 235–251.
4. Марков А. А. Два доказательства сходимости некоторых непрерывных дробей // Избранные труды по теории непрерывных дробей и теории функций, наименее уклоняющихся от нуля. М.: Гостехиздат, 1948. С. 106–119.
5. Гончар А. А. О сходимости аппроксимаций Паде для некоторых классов мероморфных функций // Матем. сб. 1975. Т. 97 (139). С. 607–629.
6. Разманов Е. А. О сходимости диагональных аппроксимаций Паде // Матем. сб. 1977. Т. 104 (146). С. 271–291.
7. Baker G. A., Jr., Graves-Morris P. R. Padé approximants. Part I: Basic theory // Encyclopedia of Mathematics and its Applications. V. 13. London: Addison-Wesley Publ. Co., 1981. P. 238–239.
8. Буслаев В. И., Гончар А. А., Суетин С. П. О сходимости подпоследовательностей m -й строки таблицы Паде // Матем. сб. 1983. Т. 120 (162). № 4. С. 540–545.
9. Stahl H. Conjectures around the Baker–Gammel–Wills conjecture // Constr. Approx. 1997. V. 13. P. 287–292.
10. Stahl H. Ortogonal polynomials with complex valued weight function. I, II // Constr. Approx. 1986. V. 2. P. 225–240, 241–251.

11. *Stahl H.* Diagonal Padé approximants to hyperelliptic functions // Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6). Spec. Iss. 1996. P. 121–193.
12. *Суетин С. П.* О равномерной сходимости диагональных аппроксимаций Паде для гиперэллиптических функций // Матем. сб. 2000. Т. 191. №9. С. 81–114.
13. *Lubinsky D.* Rogers–Ramanujan and the Baker–Gammel–Wills (Padé) conjecture // Ann. of Math. (2). (to appear).
14. *Buslaev V. I.* Simple counterexample to the Baker–Gammel–Wills conjecture // East J. Approx. 2001. V. 7. №4. P. 515–517.
15. *Буслаев В. И.* О теореме Ван Флека для правильных C -дробей с предельно периодическими коэффициентами // Изв. РАН. Сер. матем. 2001. Т. 65. №4. С. 35–48.
16. *Buslaev V. I.* Remarks on Poincaré and Van Vleck theorems // Industrial Mathematics Institute Preprint Series. V. 14. University of South Carolina, 1999. P. 1–21.
17. *Pringsheim A.* Über die Konvergenz unendlicher Kettenbrüche // Bayer. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. Sitzungsber. 1899. V. 28. P. 295–324.
18. *Hirschhorn M. D.* Partitions and Ramanujan's continued fraction // Duke Math. J. 1972. V. 39. P. 789–791.
19. *Poincaré H.* Sur les équations linéaires aux différentielles et aux différences finies // Amer. J. Math. 1885. V. 7. P. 203–258.
20. *Перрон О.* Über einen Satz des Herrn Poincaré // J. Reine Angew. Math. 1909. V. 136. P. 17–37; Über die Poincarésche lineare Differenzengleichung // J. Reine Angew. Math. 1910. T. 137. С. 6–64.

Математический институт
им. В. А. Стеклова РАН

Поступила в редакцию
24.12.2001