Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Гайсин, Решение проблемы Пойа, *Матем. сб.*, 2002, том 193, номер 6, 39–60

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm659>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 14:19:25

УДК 517.53

А. М. Гайсин

Решение проблемы По́йа

В самой общей постановке дано полное решение проблемы По́йа о росте целых функций с вещественными тейлоровскими коэффициентами на положительной полуоси.

Библиография: 20 названий.

Пусть

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \quad (1)$$

— целая трансцендентная функция с вещественными коэффициентами, а $\{p_n\}$ — последовательность перемен знаков коэффициентов (каждое натуральное число p_n последовательно определяется как номер, для которого $a_{p'_n} a_{p_n} < 0$, где $p'_n = \max\{k < p_n : a_k \neq 0\}$). Через $k(t)$ обозначим считающую функцию последовательности $\{p_n\}$, т.е. $k(t) = \sum_{p_n \leq t} 1$. Если существует предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{k(t)}{t} = \Delta,$$

то $\{p_n\}$ называется *измеримой последовательностью*, а число Δ — ее *плотностью*.

В работе [1] По́йа показал, что если $\Delta = 0$, то в каждом угле $\{z : |\arg z| \leq \varepsilon\}$ ($\varepsilon > 0$) функция (1) имеет тот же порядок, что и во всей плоскости. Естественно возникает вопрос: нельзя ли в этом утверждении угол заменить на положительный луч $\{z : \arg z = 0\}$? Утвердительный ответ на этот вопрос дан в работе [2].

Более 70 лет внимание многих математиков привлекала следующая актуальная задача, восходящая к той же работе По́йа [1]: при каких условиях на последовательность $\{p_n\}$ перемен знаков коэффициентов ряда (1) имеет место равенство

$$d(f; \mathbb{R}^+) = 1, \quad (2)$$

где $\mathbb{R}^+$ — положительная полуось $[0, \infty)$,

$$d(f; \mathbb{R}^+) = \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln |f(x)|}{\ln M_f(x)}, \quad M_f(x) = \max_{|z|=x} |f(z)|?$$

Следует отметить, что и более общий аналог равенства (2) $d(f; \gamma) = 1$ (γ — любая кривая, уходящая в бесконечность) впервые был рассмотрен и установлен По́йа

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00655).

также в работе [1] для одного класса целых функций f конечного порядка, имеющих, вообще говоря, комплексные тейлоровские коэффициенты. Именно этот результат По́йа дал толчок к многочисленным исследованиям, в которых были получены различные его обобщения. Но в самой общей постановке эта задача, как и задача о равенстве (2) для целых функций с вещественными тейлоровскими коэффициентами, оказалась весьма сложной. Поэтому полученные до сих пор результаты были далеки от окончательных.

В настоящей работе речь пойдет об оценках величины $d(f; \mathbb{R}^+)$ для функций (1). В дальнейшем сформулированную выше задачу о равенстве По́йа (2) будем называть *проблемой По́йа*.

Вкратце остановимся на наиболее важных результатах, связанных с этой проблемой.

В работе [2] установлено, что если функция (1) имеет конечный порядок и $\Delta = 0$, то $d(f; \mathbb{R}^+) = 1$. При $\Delta = 0$ равенство (2) для функций (1) конечного нижнего порядка доказано М. Н. Шереметой в [3]. И наконец, в работе [4] найден критерий того, что для любой функции (1) конечного порядка (конечного нижнего порядка) при $x \rightarrow \infty$ вне некоторого множества $E \subset [0, \infty)$ нулевой нижней логарифмической плотности имеет место асимптотическое равенство

$$\ln M_f(x) = (1 + o(1)) \ln |f(x)|.$$

Здесь мы будем рассматривать случай, когда функция $f(z)$ имеет произвольный рост. Этот наиболее общий случай мало исследован. Отметим следующие работы.

А. И. Павлов показал [5], что если

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} < \infty, \quad \text{б) } \frac{n}{p_n} \downarrow, \quad (3)$$

то найдется последовательность $\{x_n\}$ ($0 < x_n \uparrow \infty$) такая, что

$$\ln M_f(x_n) = (1 + o(1)) \ln |f(x_n)|, \quad x_n \rightarrow \infty. \quad (4)$$

С другой стороны, для каждой последовательности $\{p_n\}$ такой, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} = \infty,$$

существует целая функция $f(z)$, ограниченная на положительном луче, для которой $\{p_n\}$ – последовательность перемен знаков коэффициентов [6]. Так что условие а) из (3) необходимо для справедливости (4).

Пусть

$$Q(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{p_n^2}\right),$$

$$q(p_n) = -\ln |Q'(p_n)|, \quad \alpha(t) = \max_{p_n \leq t} q(p_n).$$

В работе [7] нами доказана следующая теорема (формулировка дается применительно к рядам (1)).

ТЕОРЕМА А. Пусть

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} < \infty. \quad (5)$$

Если

$$\int_1^{\infty} \frac{\alpha(t)}{t^2} dt < \infty, \quad (6)$$

то при $x \rightarrow +\infty$ вне некоторого множества $E \subset [0, \infty)$ нулевой логарифмической плотности

$$\ln M_f(x) = (1 + o(1)) \ln |f(x)|.$$

Ясно, что это более сильная оценка, чем (4). С другой стороны, последовательности типа (3) имеют в некотором смысле правильное распределение и входят в класс так называемых интерполяционных последовательностей, структура которых описана в [8]. Последовательности же $\{p_n\}$, удовлетворяющие условиям теоремы А, вообще не обязаны быть интерполяционными. Действительно, рассмотрим систему отрезков $\Delta_j = [2^{j^2} - [2^{j^2}/j^2], 2^{j^2}]$ ($[a]$ — целая часть a). Пусть $\{p_n\}$ — возрастающая последовательность натуральных чисел из $\bigcup_j \Delta_j$. Для этой последовательности условия (5) и (6) выполнены [7], хотя, очевидно, условие b) из (3) вообще не имеет места. Более того, последовательность $\{p_n\}$ даже не интерполяционная [8].

До настоящего времени оставался открытым следующий вопрос: каковы минимальные ограничения на последовательность $\{p_n\}$, при которых для любой целой функции $f(z)$, заданной рядом (1) с вещественными коэффициентами Тейлора, будет справедливо равенство (4)?

Еще в работе [9] М. Н. Шереметой была высказана гипотеза о справедливости асимптотического равенства (4) для любых последовательностей $\{p_n\}$, для которых выполняется лишь необходимое условие (5). В [9] было даже приведено доказательство этого сильного утверждения. Еще некоторое время этот факт считался доказанным (см., например, [2]). Однако позднее в упомянутом доказательстве был обнаружен пробел, который М. Н. Шеремета не смог устранить и сформулировал в виде отдельной задачи, которая в той или иной постановке приводилась в разделе нерешенных проблем ряда выпусков журнала “Математичні студії” (Львов) последних лет. Так что до сих пор гипотеза М. Н. Шереметы не была ни доказана, ни опровергнута.

В настоящей работе построен контрпример, опровергающий гипотезу М. Н. Шереметы. Основной результат статьи — теорема 2, которая дает полный ответ на проблему Пойа.

§ 1. Основные результаты

Через L обозначим класс всех непрерывных функций $w = w(x)$ таких, что $0 < w(x) \uparrow \infty, x \rightarrow \infty$. Пусть

$$W = \left\{ w : w \in L, \int_1^{\infty} \frac{w(x)}{x^2} dx < \infty \right\}.$$

Мы будем рассматривать более общую ситуацию, а именно вместо рядов (1) будем исследовать ряды Дирихле с вещественными коэффициентами

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s} \quad (s = \sigma + it), \quad (7)$$

абсолютно сходящиеся во всей плоскости. Считаем, что последовательность $\Lambda = \{\lambda_n\}$ ($0 < \lambda_n \uparrow \infty$) фиксирована и удовлетворяет условиям

$$\sup_t [n(t+1) - n(t)] < \infty, \quad \lambda_{n+1} - \lambda_n > e^{-\Delta(\lambda_n)} \quad (n \geq 1), \quad (8)$$

где $n(t) = \sum_{\lambda_n \leq t} 1$, Δ — некоторая функция из W , $\ln t = O(\Delta(t))$, $t \rightarrow \infty$.

Пусть $\{p_n\}$ — последовательность перемен знаков коэффициентов ряда (7). Положим

$$Q(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\mu_n^2}\right), \quad \Phi(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{q_n^2}\right), \quad (9)$$

где $\mu_n = \lambda_{p_n}$, $q_n = \mu_n + \varepsilon_n$, $\varepsilon_n = (1/n^2)e^{-\Delta(\mu_n)}$.

Пусть

$$-\ln |Q'(\mu_n)| = q(\mu_n), \quad \alpha(t) = \max_{\mu_n \leq t} q(\mu_n).$$

В работе [7] доказана

ТЕОРЕМА В. Пусть

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} < \infty. \quad (10)$$

Если

$$\int_1^{\infty} \frac{\alpha(t)}{t^2} dt < \infty, \quad (11)$$

то при $\sigma \rightarrow +\infty$ вне некоторого множества $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, a'_n]$ ($0 < a_1 < a'_1 \leq a_2 < a'_2 \leq \dots \leq a_n < a'_n \leq \dots$) нулевой плотности, т.е.

$$\text{mes}(E \cap [0, \sigma]) = o(\sigma), \quad \sigma \rightarrow \infty,$$

справедливо асимптотическое равенство

$$\ln M(\sigma) = (1 + o(1)) \ln |F(\sigma)|, \quad (12)$$

где $M(\sigma) = \sup_{|t| < \infty} |F(\sigma + it)|$.

Отметим, что теорема А есть следствие более общей теоремы В.

В дальнейшем будем считать, что все исключительные множества $E \subset [0, \infty)$ имеют вид $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, a'_n]$ ($0 < a_1 < a'_1 \leq a_2 < a'_2 \leq \dots \leq a_n < a'_n \leq \dots$).

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ — последовательность, удовлетворяющая условиям (8). Ясно, что такая последовательность имеет конечную верхнюю плотность, т.е.

$$D = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n} < \infty.$$

Через $R(\Lambda)$ обозначим класс всех целых функций F , представимых во всей плоскости рядами Дирихле (7) с вещественными коэффициентами. Если последовательность Λ имеет конечный индекс конденсации δ , т.е.

$$\delta = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln \left| \frac{1}{L'(\lambda_n)} \right| < \infty, \quad L(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_n^2} \right),$$

то соответствующий подкласс функций F из $R(\Lambda)$ будем обозначать через $B(\Lambda)$. Отметим, что если, например, $\inf_n (\lambda_{n+1} - \lambda_n) = \tau > 0$, то $\delta < \infty$ (см., например, [10]).

Пусть $u \in L$, а $h = h(\sigma)$ – некоторая непрерывная на $[0, \infty)$ функция, $h(\sigma) \rightarrow 0$ при $\sigma \rightarrow \infty$. Если $E_\beta \subset [0, \infty)$ – исключительное множество, вне которого при $\sigma \rightarrow \infty$ выполняется асимптотическое равенство

$$u(\sigma + (1 + \beta^{-1})h(\sigma)) = u(\sigma) + o(1)$$

($0 < \beta < \infty$), то множество $[0, \infty) \setminus E_\beta$ будем называть β -асимптотическим множеством для пары функций (u, h) . Имеет смысл рассматривать и β -асимптотическое семейство e_β для этой пары функций, состоящее из всех ее β -асимптотических множеств $e_\alpha(\beta)$, т.е. $e_\beta = \bigcup_\alpha e_\alpha(\beta)$.

Пусть $F \in R(\Lambda)$,

$$F^*(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n Q'(\lambda_n) e^{\lambda_n s}, \quad (13)$$

где a_n – коэффициенты ряда (7), $Q(z)$ – целая функция, определенная в (9). Поскольку последовательность Λ имеет конечную верхнюю плотность, то $Q(z)$, а следовательно, и $Q'(z)$, является целой функцией экспоненциального типа и ряд (13) сходится абсолютно и равномерно во всей плоскости. Так как функция $Q'(z)$ принимает вещественные значения на вещественной оси, то $F^* \in R(\Lambda)$.

Пусть $\mu(\sigma)$ и $\mu^*(\sigma)$ – максимальные члены рядов (7) и (13) соответственно. Далее, пусть

$$N(t) = \int_0^t \frac{n_\mu(x)}{x} dx, \quad n_\mu(x) = \sum_{\mu_n \leq x} 1, \quad M(t; Q) = \max_{|z|=t} |Q(z)|.$$

Отметим, что если выполняется условие (10), то функции $N(t)$ и $\ln M(t; Q)$ принадлежат W [10].

Пусть $w(x) = \Delta(x) + \ln M(ex; Q)$, где $\Delta(x)$ – функция из условий (8). Тогда существует функция $w^* \in W$ такая, что $w^*(t) = \beta(t)w(t)$, $0 < \beta(t) \uparrow \infty$, $t \rightarrow \infty$ [7]. Через $v = v(\sigma)$ обозначим решение уравнения

$$3 \ln \mu(\sigma) = w^*(v). \quad (14)$$

Пусть $k(\sigma)$, $\mu^*(\sigma)$ – центральный индекс и максимальный член ряда (13). Через $e_\beta = \{e_\alpha(\beta)\}$ в дальнейшем будем обозначать β -асимптотическое семейство для пары функций (u, h) , $u = u(\sigma) = \ln 3 + \ln \ln \mu(\sigma)$, $h = h(\sigma) = w^*(v(\sigma))/v(\sigma)$ такое, что если $\sigma \in e_\alpha(\beta)$ и $e_\alpha(\beta) \in e_\beta$, то $\lambda_{k(\sigma)} \leq v(\sigma)$. Здесь $v = v(\sigma)$ – решение уравнения (14).

Сформулируем теперь наши основные результаты.

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполняется условие (10). Тогда для любой функции $F \in R(\Lambda)$ справедлива оценка

$$q(F) \leq d(F; \mathbb{R}^+). \quad (15)$$

Здесь $\mathbb{R}^+$ – положительный луч $[0, \infty)$,

$$d(F; \mathbb{R}^+) = \overline{\lim}_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{\ln |F(\sigma)|}{\ln M(\sigma)}, \quad q(F) = \inf_{0 < \beta \leq 1/5} \sup_{\alpha} \overline{\lim}_{\substack{\sigma \in e_{\alpha}(\beta) \\ \sigma \rightarrow \infty}} \frac{\ln \mu^*(\sigma)}{\ln \mu(\sigma)}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. В условиях теоремы 1 семейство $e_{\beta} = \{e_{\alpha}(\beta)\}$ для каждого β ($0 < \beta < \infty$) непусто. При этом каждое $e_{\alpha}(\beta)$ получается исключением из $[0, \infty)$ некоторого множества конечной меры.

СЛЕДСТВИЕ. Если выполняется условие (10), то для любой функции $F \in R(\Lambda)$ имеют место оценки

$$0 \leq d(F; \mathbb{R}^+) \leq 1. \quad (16)$$

Оценки (16) неуклучаемы. Точность правой границы следует из теоремы В. С другой стороны, для любой последовательности $\{\mu_n\}$, удовлетворяющей условию (10), но для которой условие (11) не выполняется, существует функция $F \in B(\Lambda)$ такая, что $d(F; \mathbb{R}^+) = 0$. Это устанавливается нами при доказательстве следующей (основной) теоремы.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполняется условие (10). Для того чтобы для любой функции $F \in B(\Lambda)$ было справедливо равенство $d(F; \mathbb{R}^+) = 1$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (11).

Из теорем 1, 2 легко получаются аналогичные утверждения для целых функций с вещественными тейлоровскими коэффициентами. Чтобы убедиться в этом, необходимо сделать замену $z = e^s$.

Отметим еще следующее. Если в теореме 2 речь идет о выполнении равенства $d(F; \mathbb{R}_+) = 1$ для любой функции $F \in B(\Lambda)$, то оценка снизу (15) для $d(F; \mathbb{R}_+)$ в теореме 1, вообще говоря, зависит от самой функции F . Точнее: при фиксированной последовательности Λ величина $q(F)$ в оценке (15) зависит от поведения коэффициентов ряда (7). Что касается оценок (16), они носят наиболее общий характер и устанавливают связь между ростом и убыванием для каждой целой функции $F \in R(\Lambda)$ на положительном луче $\mathbb{R}^+$. Действительно, из оценки $0 \leq d(F; \mathbb{R}^+)$ следует, что существуют функция $\varepsilon(r) \downarrow 0$, $r \rightarrow \infty$, и последовательность $\{\zeta_n\}$, $\zeta_n \in \mathbb{R}^+$, такие, что

$$\ln |F(\zeta_n)| > -\varepsilon(\zeta_n) \ln M(\zeta_n). \quad (17)$$

Отметим, что аналогичная оценка для произвольных целых функций на фиксированном луче была установлена Бёрлингом в работе [11]: для любых $\varepsilon > 0$, $\theta \in [0, 2\pi)$ (θ фиксировано) множество

$$\{r \in \mathbb{R}^+ : \ln |f(re^{i\theta})| > -(1 + \varepsilon) \ln M(r; f)\}$$

неограничено.

Смысл оценки (17) заключается в том, что при выполнении условия (10) целая функция $F \in R(\Lambda)$ не может сколь угодно быстро убывать на любой последовательности $\{\zeta_n\}$, стремящейся к бесконечности вдоль $\mathbb{R}^+$.

§ 2. Вспомогательные факты

ЛЕММА 1. Пусть $u \in L$, $w \in W$, а $v = v(\sigma)$ – решение уравнения

$$w(v) = e^{u(\sigma)}.$$

Тогда при $\sigma \rightarrow \infty$ вне некоторого множества $E \subset [0, \infty)$ конечной меры имеет место асимптотическое равенство

$$u(\sigma + dh(\sigma)) = u(\sigma) + o(1),$$

где

$$h = h(\sigma) = \frac{w(v(\sigma))}{v(\sigma)},$$

а d ($0 < d < \infty$) – фиксированная постоянная.

Лемма 1 установлена в [12]. Она доказывается по той же схеме, что и теорема Бореля–Неванлинны из [13]. Более подробное доказательство леммы 1 содержится в [14].

ЛЕММА 2. Пусть $0 < \lambda_n \uparrow \infty$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} < \infty, \quad f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right).$$

Тогда существует последовательность $\{r_n\}$, $0 < r_n \uparrow \infty$, $r_{n-1} < r_n \leq 4r_{n-1}$ ($n \geq 2$), такая, что

$$\ln |f(z)| > -20 \ln M(r_n; f), \quad |z| = r_n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО основано на теореме 3.5.6 из [15; гл. 3, § 3.5]:

ТЕОРЕМА. Пусть $f(z)$ – целая функция, а

$$M(r; f) = \max_{|z|=r} |f(z)|, \quad m(r; f) = \min_{|z|=r} |f(z)|.$$

Зададим непрерывную функцию $q(r) > 1$ и обозначим через $\delta(r)$ меру множества Δ_r , состоящего из тех точек t отрезка $[0, r]$, для которых выполняется неравенство

$$\ln m(t; f) \leq -q(r) \ln M(r; f), \quad t \in \Delta_r.$$

Если имеет место соотношение

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\delta(r)(1 + q(r))}{r} > 2,$$

то $f(z) \equiv 0$.

Нам понадобится следствие этой теоремы.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $f(z)$ — целая функция, отличная от тождественного нуля, а $q > 1$ — некоторая постоянная. Обозначим через $\sigma(r)$ меру множества тех точек t отрезка $[0, r]$, для которых имеет место неравенство

$$\ln m(t; f) > -q \ln M(r; f). \quad (18)$$

Тогда

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\sigma(r)}{r} \geq \frac{q-1}{q+1}.$$

Отметим, что в работе [15] это следствие сформулировано и, более того, доказано неверно (в [15] правая часть оценки (18) вместо $M(r; f)$ содержит величину $M(t; f)$). На это обстоятельство любезно обратил наше внимание А. Ю. Попов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ. Заметим, что при $q(r) \equiv q$ для всех t из множества $[0, r] \setminus \Delta_r$ выполняется оценка (18). Но тогда, применяя сформулированную выше теорему, получаем, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\sigma(r)}{r} \geq 1 - \frac{2}{q+1} = \frac{q-1}{q+1}.$$

Следствие установлено.

Для доказательства леммы 2 положим $q = 5$. Тогда, применяя следствие к целой функции

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right),$$

получаем, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\sigma(r)}{r} \geq \frac{2}{3},$$

т.е. $\sigma(r) > r/2$ при $r \geq 2^{n_0-1}$. Следовательно, в каждом отрезке $[2^{n-1}, 2^n]$ ($n \geq n_0$) найдется точка x_n такая, что

$$\ln m(x_n; f) > -5 \ln M(2^n; f) > -5 \ln M(2x_n; f).$$

Но для нашей функции $f(z)$

$$\ln M(r; f) = 2r^2 \int_0^\infty \frac{n(t)}{t(t^2 + r^2)} dt, \quad n(t) = \sum_{\lambda_j \leq t} 1.$$

Следовательно,

$$\ln m(x_n; f) > -20 \cdot 2x_n^2 \int_0^\infty \frac{n(t)}{t[t^2 + 4x_n^2]} dt > -20 \ln M(x_n; f) \quad (n \geq n_0).$$

Поскольку $x_{n+1} \leq 2^{n+1} = 4 \cdot 2^n \leq 4x_n$ ($n \geq n_0$), то последовательность $\{r_n\}$ ($r_n = x_{n+n_0-1}$, $n \geq 1$) удовлетворяет всем требованиям.

Лемма 2 доказана.

ЛЕММА 3. Пусть γ – кривая, соединяющая точку z_0 с окружностью $\{z : |z - z_0| = R\}$, состоящая из конечного числа кусочно гладких жордановых кривых, а $g(z)$ – функция, аналитическая в круге $D(z_0; R) = \{z : |z - z_0| < R\}$ и непрерывная в его замыкании $\overline{D}(z_0; R)$. Пусть

$$M = \max_{\overline{D}(z_0; R)} |g(t)|, \quad m = \max_{\gamma} |g(t)|.$$

Тогда при $0 < \beta \leq 1/5$ для всех z из круга $\overline{D}(z_0; \beta R)$ верна оценка:

$$|g(z)| \leq m^{1-2\beta} M^{2\beta}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ основано на следующей теореме из [15]:

ТЕОРЕМА. Пусть область D представляет собой круг $D(0; R)$ с выброшенным из него множеством E , состоящим из конечного числа кусочно гладких кривых и конечного числа областей, ограниченных такими кривыми, а Δ – некоторое подмножество интервала $(0, R)$, имеющее меру δ .

Если для любого $x \in \Delta$ на окружности $\{z : |z| = x\}$ есть хотя бы одна точка, принадлежащая множеству E , то

$$w(z; E, D) \geq \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \left[\frac{R - |z|}{R + |z|} \left(\frac{\delta}{2R - \delta} \right) \right] \quad (z \in D),$$

где $w(z; E, D)$ – гармоническая мера множества E относительно области D .

Докажем лемму. Пусть для удобства $z_0 = 0$. Тогда, полагая $\Delta = (0, R)$, $E = \gamma$, $D = D(0, R)$, из предыдущей теоремы получаем, что если $|z| \leq \beta R$ ($0 < \beta < 1/2$), то

$$w(z; \gamma, D) \geq \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg}(1 - 2\beta) > 0.$$

Рассмотрим функцию $y(\beta) = \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg}(1 - 2\beta) - 1 + 2\beta$. Имеем: $y(0) = y(\frac{1}{2}) = 0$.

Легко проверяется, что при $0 < \beta < \beta_1 = \frac{\pi - \sqrt{-\pi^2 + 4\pi}}{2\pi}$ функция $y = y(\beta)$ возрастает. Поскольку $1/5 < \beta_1$, то $y(\beta) > 0$ при $0 < \beta \leq 1/5$. Следовательно, $w(z; \gamma, D) > 1 - 2\beta$, если $|z| \leq \beta R$ ($0 < \beta \leq 1/5$).

С учетом этой оценки, применяя теорему о двух константах [15; гл. 2, § 2.4, теорема 2.4.4], получаем требуемую оценку.

Лемма установлена.

ЗАМЕЧАНИЕ. Лемма 3 доказана в работе [16] для β , удовлетворяющих условию $0 < \beta \leq q < 1/2$, где q – некоторая достаточно малая величина. Здесь показано, что можно положить $q = 1/5$.

ЛЕММА 4. Пусть $\rho(r)$ – уточненный порядок такой, что $r^{1-\rho(r)} \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow \infty$. Если a_n ($n \geq 1$) – положительные числа, удовлетворяющие условию

$$\frac{n}{a_n^{\rho(a_n)}} = \Delta \quad (0 < \Delta < \infty),$$

то целая функция

$$\varphi(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{a_n^2}\right)$$

обладает свойствами:

1) при $\varphi \neq \pm\pi/2$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln |\varphi(re^{i\varphi})|}{r^{\rho(r)}} = h(\varphi) = \pi\Delta |\cos \varphi|;$$

2) вне кругов $\{z : |z \pm a_n i| < 1\}$ ($n \geq 1$)

$$\ln |\varphi(re^{i\varphi})| > [h(\varphi) - \epsilon] r^{\rho(r)}, \quad r > r_0(\epsilon) \quad \forall \epsilon > 0.$$

Эта лемма есть частный случай теоремы 1.2.6' из [17].

ЛЕММА 5. Пусть $\alpha(r)$ – положительная неубывающая непрерывная на $[0, \infty)$ функция порядка ρ ($0 < \rho < \infty$), принадлежащая классу сходимости, т.е.

$$\int_1^{\infty} \frac{\alpha(r)}{r^2} dr < \infty.$$

Тогда существует уточненный порядок $\rho(r)$ функции $\alpha(r)$ такой, что

$$\int_1^{\infty} r^{\rho(r)-\rho-1} dr < \infty. \quad (19)$$

Лемма доказана в [18]. Она утверждает, что уточненный порядок $\rho(r)$ наряду с (19) удовлетворяет условию

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\alpha(r)}{r^{\rho(r)}} = 1.$$

ЛЕММА 6. Пусть Q и Φ – функции, определенные формулами (9). Тогда

$$|\ln |Q'(\lambda_n)| - \ln |\Phi(\lambda_n)|| \leq a + b\Delta(\lambda_n) \quad (n \geq 1),$$

где $0 < a < \infty$, $0 < b < \infty$, Δ – функция из условий (8).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$Q'(\lambda_n) = -\frac{2}{\lambda_n} \prod_{\substack{j \neq n \\ j=1}}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda_n^2}{\mu_j^2}\right), \quad \Phi(\lambda_n) = \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda_n^2}{q_j^2}\right),$$

$$q_j = \mu_j + \varepsilon_j, \quad \varepsilon_j = \frac{1}{j^2} e^{-\Delta(\mu_j)} \quad (j \geq 1).$$

Из (8) видно, что $0 < \mu_1 < q_1 < \mu_2 < q_2 < \dots < \mu_n < q_n < \dots$. Далее,

$$\Delta_{k,n}^+ = \ln \left| 1 - \frac{\lambda_n}{q_k} \right| - \ln \left| 1 - \frac{\lambda_n}{\mu_k} \right| = \int_{\mu_k}^{q_k} \frac{\lambda_n}{t(t - \lambda_n)} dt \quad (\mu_k \neq \lambda_n).$$

Отсюда

$$|\Delta_{k,n}^+| \leq \int_{\mu_k}^{q_k} \frac{\lambda_n}{t|t - \lambda_n|} dt = I_{n,k} \quad (\mu_k \neq \lambda_n).$$

Но

$$I_{n,k} \leq \ln \left(1 + \frac{\varepsilon_k}{q_k} \right) + \ln \left(1 + \frac{\varepsilon_k}{|\mu_k - \lambda_n|} \right) + \ln \left(1 + \frac{\varepsilon_k}{|q_k - \lambda_n|} \right).$$

Из условий (8) следует, что $I_{n,k} \leq c/k^2$ ($k \geq k_0$), где c и k_0 — постоянные, не зависящие от $n \geq 1$. Точно такая же оценка справедлива и для $|\Delta_{k,n}^-|$, где

$$\Delta_{k,n}^- = \ln \left| 1 + \frac{\lambda_n}{q_k} \right| - \ln \left| 1 + \frac{\lambda_n}{\mu_k} \right|.$$

Наконец, для $\mu_k = \lambda_n$

$$\begin{aligned} \left| \ln \frac{2}{\mu_k} - \ln \left| 1 \pm \frac{\mu_k^2}{q_k^2} \right| \right| &= \left| \ln \frac{2q_k^2}{\mu_k |q_k^2 \pm \mu_k^2|} \right| \leq \left| \ln \frac{2q_k}{\mu_k \varepsilon_k} \right| \\ &= \ln \left[2 \left(1 + \frac{\varepsilon_k}{\mu_k} \right) \right] + 2 \ln k + \Delta(\mu_k) \leq M + b\Delta(\lambda_n) \quad (n \geq 1). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |\ln |Q'(\lambda_n)| - \ln |\Phi(\lambda_n)|| &\leq \sum_{\mu_k \neq \lambda_n} (|\Delta_{k,n}^+| + |\Delta_{k,n}^-|) + M + b\Delta(\lambda_n) \\ &\leq 2c \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} + N + M + b\Delta(\lambda_n) = a + b\Delta(\lambda_n) \quad (n \geq 1). \end{aligned}$$

Лемма установлена.

§ 3. Доказательство теоремы 1

Очевидно, $d(F; \mathbb{R}^+) \leq 1$. Установим оценку снизу.

Пусть $w(x) = \Delta(x) + \ln M(ex; Q)$; $w^*(x) = \beta(x)w(x)$ ($0 < \beta(x) \uparrow \infty$, $x \rightarrow \infty$) — некоторая функция из W . В силу условия (10) эта функция существует. Пусть $v = v(\sigma)$ — решение уравнения (14), а

$$h = h(\sigma) = \frac{w^*(v(\sigma))}{v(\sigma)}.$$

Тогда из леммы 1 получаем, что при $\sigma \rightarrow \infty$ вне некоторого множества $E'_\beta \subset [0, \infty)$ конечной меры

$$\mu(\sigma + (1 + \beta^{-1})h(\sigma)) = \mu^{1+o(1)}(\sigma) \quad \left(0 < \beta \leq \frac{1}{5}\right). \quad (20)$$

Следовательно, при $\sigma \rightarrow \infty$ вне E'_β

$$R_v = \sum_{\lambda_n > v} |a_n| e^{\lambda_n(\sigma + h(\sigma))} \leq \mu(\sigma + 2h(\sigma)) \sum_{\lambda_n > v} e^{-h(\sigma)\lambda_n} < \mu^{-2(1+o(1))}(\sigma). \quad (21)$$

Пусть

$$F_a(s) = \sum_{\lambda_n \leq a} a_n e^{\lambda_n s}, \quad \widehat{F}_a(s) = \sum_{\lambda_n \leq a} a_n \Phi(\lambda_n) e^{\lambda_n s} \quad (s = \sigma + it),$$

где

$$\Phi_a(z) = \prod_{q_n \leq a} \left(1 - \frac{z^2}{q_n^2}\right).$$

Поскольку все числа $a_n \Phi_a(\lambda_n)$ ($\lambda_n \leq a$) одного знака, можно считать, что $a_n \Phi_a(\lambda_n) \geq 0$ ($\lambda_n \leq a$). Тогда имеем:

$$\widehat{M}_a(\sigma) = \widehat{F}_a(\sigma),$$

где $\widehat{M}_a(\sigma) = \sup_{|t| < \infty} |\widehat{F}_a(\sigma + it)|$. Отсюда для $\widehat{M}_a(\sigma)$ получаем представление

$$\widehat{M}_a(\sigma) = \frac{1}{2\pi i} \int_C q_a(t) F_a(t + \sigma) dt, \quad (22)$$

где $q_a(t)$ — функция, ассоциированная по Борелю с функцией $\Phi_a(z)$, C — любой замкнутый контур, охватывающий сопряженную диаграмму $q_a(t)$, т.е. начало координат.

Положим $a = v(\sigma)$, а в качестве C возьмем контур $\{t : |t| = h(\sigma)\}$. Тогда из (22) получаем, что для $\lambda_n \leq v(\sigma)$

$$|a_n| |\Phi_v(\lambda_n)| e^{\lambda_n \sigma} \leq h(\sigma) \left[\max_{|\zeta - \sigma| \leq h(\sigma)} |F(\zeta)| + \sum_{\lambda_n > v} |a_n| e^{\lambda_n(\sigma + h(\sigma))} \right] \max_{|t| = h(\sigma)} |q_v(t)|. \quad (23)$$

Но

$$\ln M(r; \Phi_v) = \int_0^v \ln \left(1 + \frac{r^2}{t^2} \right) dn_q(t), \quad n_q(t) = \sum_{q_n \leq t} 1.$$

Поскольку $|n_\mu(t) - n_q(t)| \leq 1$, то, учитывая определения величин $v = v(\sigma)$, $h = h(\sigma)$, при $\sigma \rightarrow \infty$ имеем

$$\begin{aligned} \ln M(r; \Phi_v) &= n_q(v) \ln \left(1 + \frac{r^2}{v^2} \right) + 2r^2 \int_0^v \frac{n_q(t)}{t(t^2 + r^2)} dt \\ &\leq \frac{n_q(v)}{v} r + N_q(v) \leq \frac{n_q(v)}{v} r + \ln M(v; \Phi) = o(1)h(\sigma)r + o(1) \ln \mu(\sigma). \end{aligned}$$

Так как

$$\max_{|t|=h(\sigma)} |q_v(t)| \leq \int_0^\infty M(r; \Phi_v) e^{-h(\sigma)r} dr,$$

то, учитывая предыдущую оценку, а также (21), из (23) получаем, что для всех $\lambda_n \leq v(\sigma)$ при $\sigma \rightarrow \infty$ вне E'_β

$$|a_n| |\Phi_v(\lambda_n)| e^{\lambda_n \sigma} \leq \mu^{-2(1+o(1))}(\sigma) + \mu^{o(1)}(\sigma) \max_{|\zeta - \sigma| \leq h(\sigma)} |F(\zeta)|. \quad (24)$$

Но при $\lambda_n \leq v$

$$|\Phi_v(\lambda_n)| = |\Phi(\lambda_n)| \prod_{q_n > v} \left| 1 - \frac{\lambda_n^2}{q_n^2} \right|^{-1} > |\Phi(\lambda_n)|.$$

Тогда, применяя лемму 6, имеем

$$|\Phi(\lambda_n)| = |Q'(\lambda_n)| \left| \frac{\Phi(\lambda_n)}{Q'(\lambda_n)} \right| \geq |Q'(\lambda_n)| e^{-a-b\Delta(\lambda_n)} \quad (n \geq 1).$$

Поскольку $\Delta(\lambda_n) \leq \Delta(v) = o(w^*(v))$ при $\lambda_n \leq v$, а $w^*(v) = 3 \ln \mu(\sigma)$, то из (24) получаем, что для всех $\lambda_n \leq v$ при $\sigma \rightarrow \infty$ вне E'_β

$$|a_n Q'(\lambda_n)| e^{\lambda_n \sigma} \leq 1 + \mu^{o(1)}(\sigma) \max_{|\zeta - \sigma| \leq h(\sigma)} |F(\zeta)|. \quad (25)$$

Пусть $\mu^*(\sigma)$ – максимальный член ряда

$$F^*(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n Q'(\lambda_n) e^{\lambda_n s}. \quad (26)$$

Через $x = x(\sigma)$ обозначим решение уравнения $w^*(x) = 2 \ln \mu^*(\sigma)$. Тогда из леммы 1 получаем, что при $\sigma \rightarrow \infty$ вне некоторого множества $E_1 \subset [0, \infty)$ конечной меры

$$R_x^* = \sum_{\lambda_n > x} |a_n| |Q'(\lambda_n)| e^{\lambda_n \sigma} \leq [\mu^*(\sigma)]^{-1(1+o(1))}. \quad (27)$$

Следовательно, из (21), (27) при $\sigma \geq \sigma_0$, $\sigma \notin E_1 \cup E'_\beta$, получаем, что

- 1) $\lambda_{\nu(\sigma)} \leq v(\sigma)$,
- 2) $\lambda_{k(\sigma)} \leq x(\sigma)$,

где $\nu(\sigma)$ и $k(\sigma)$ – центральные индексы рядов (7) и (26) соответственно.

Далее,

$$|Q'(\lambda_n)| \leq \frac{2}{\lambda_n} \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\lambda_n^2}{\mu_j^2}\right) \leq M(\lambda_n; Q) \quad (n \geq n_0).$$

Следовательно,

$$\mu^*(\sigma) = |a_k Q'(\lambda_k)| e^{\lambda_k \sigma} \leq \mu(\sigma) e^{w(x)} = \mu(\sigma) \mu^*(\sigma)^{o(1)},$$

где $x = x(\sigma)$, $k = k(\sigma)$. Значит, $(1 + o(1)) \ln \mu^*(\sigma) \leq \ln \mu(\sigma)$ при $\sigma \rightarrow \infty$ вне E_1 . Так что вне E_1 имеем: $w^*(x) = 2 \ln \mu^*(\sigma) < 3 \ln \mu(\sigma) = w^*(v)$ ($\sigma \geq \sigma_1$). Это означает, что $\lambda_{k(\sigma)} \leq x(\sigma) < v(\sigma)$ при $\sigma \geq \sigma_1$, но $\sigma \notin E_1$. С учетом этого из (25) получаем, что при $\sigma \rightarrow \infty$ вне $E_1 \cup E'_\beta$

$$\mu^*(\sigma) < 1 + \mu^{o(1)}(\sigma) \max_{|\zeta - \sigma| \leq h(\sigma)} |F(\zeta)|. \quad (28)$$

Применяя лемму 3, имеем

$$\begin{aligned} \max_{|\zeta - \sigma| \leq h(\sigma)} |F(\zeta)| &\leq \max_{\sigma \leq t \leq \beta^{-1}h(\sigma)} |F(t)|^{1-2\beta} \max_{|t - \sigma| \leq \beta^{-1}h(\sigma)} |F(t)|^{2\beta} \\ &\leq |F(t_0)|^{1-2\beta} M^{2\beta} (\sigma + \beta^{-1}h(\sigma)), \end{aligned} \quad (29)$$

$\sigma \leq t_0 \leq \beta^{-1}h(\sigma)$, $0 < \beta \leq 1/5$. Воспользуемся еще раз оценкой (20). Тогда

$$\begin{aligned} \mu(\sigma) &\leq M(\sigma) \leq M(\sigma + \beta^{-1}h(\sigma)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{\lambda_n(\sigma + \beta^{-1}h(\sigma))} \\ &\leq \mu(\sigma + (1 + \beta^{-1})h(\sigma)) \left[n(v) + \sum_{\lambda_n > v} e^{-h(\sigma)\lambda_n} \right] < \mu^{1+o(1)}(\sigma) \end{aligned} \quad (30)$$

при $\sigma \rightarrow \infty$ вне множества $E'_\beta \subset [0, \infty)$ конечной меры. Здесь мы учли то, что $n(v) < Av < Ae^{b\Delta(v)} < Ae^{bw(v)} = \mu^{o(1)}(\sigma)$ при $\sigma \rightarrow \infty$. Следовательно, с учетом оценок (29), (30) из (28) получаем, что при $\sigma \rightarrow \infty$ вне множества $E_\beta = E_1 \cup E'_\beta$ конечной меры

$$(1 + o(1)) \mu^*(\sigma) \leq |F(t_0)|^{1-2\beta} \mu(\sigma)^{(1+o(1))2\beta}.$$

Следовательно, при $\sigma \rightarrow \infty$ вне E_β

$$\frac{\ln \mu^*(\sigma)}{\ln \mu(\sigma)} \leq (1 + o(1))2\beta + (1 - 2\beta) \frac{\ln |F(t_0)|}{\ln \mu(\sigma)}, \quad 0 < \beta \leq \frac{1}{5}, \quad \sigma \leq t_0 \leq \beta^{-1}h(\sigma).$$

Учитывая еще раз оценки (30), отсюда получаем, что

$$\overline{\lim}_{\substack{\sigma \in e'_\beta \\ \sigma \rightarrow \infty}} \frac{\ln \mu^*(\sigma)}{\ln \mu(\sigma)} \leq 2\beta + (1 - 2\beta)d(F; \mathbb{R}^+), \quad (31)$$

где $0 < \beta \leq 1/5$, $e'_\beta = [0, \infty) \setminus E_\beta$.

Из (30) видно, что e'_β является β -асимптотическим множеством для пары функций (u, h) , где $u(\sigma) = \ln 3 + \ln \ln \mu(\sigma)$, $h = h(\sigma)$, причем $\lambda_{k(\sigma)} \leq v(\sigma)$ при $\sigma \in e'_\beta$.

Значит, $e'_\beta \in e_\beta$, где e_β — β -асимптотическое семейство для пары (u, h) . Следовательно, из (31) имеем

$$q(F) = \inf_{0 < \beta \leq 1/5} \sup_{\alpha} \overline{\lim}_{\substack{\sigma \in e_\alpha(\beta) \\ \sigma \rightarrow \infty}} \frac{\ln \mu^*(\sigma)}{\ln \mu(\sigma)} \leq 2\beta + (1 - 2\beta)d(F; \mathbb{R}^+),$$

где $e_\alpha(\beta) \in e_\beta$. Поскольку левая часть этого неравенства от β не зависит, то, устремляя β к нулю, откуда получаем требуемую оценку (15).

Теорема 1 полностью доказана.

§ 4. Доказательство теоремы 2

1°. Достаточность доказана в теореме В. Это следует также из оценки (15). Действительно, поскольку последовательность $\Lambda = \{\lambda_n\}$ удовлетворяет условиям (8), а последовательность $\{\mu_n\}$ ($\mu_n = \lambda_{p_n}$) — условиям (10), (11), то найдется функция $\theta \in W$ такая, что [7]

$$-\ln |\Phi(\lambda_n)| \leq \theta(\lambda_n) \quad (n \geq 1).$$

С учетом леммы 6 отсюда имеем:

$$-\ln |Q'(\lambda_n)| \leq w(\lambda_n), \quad w \in W \quad (n \geq 1). \quad (32)$$

Пусть $v = v(\sigma)$ — решение уравнения $3 \ln \mu(\sigma) = w^*(v)$, где w^* — некоторая функция из W такая, что $w(t) = o(w^*(t))$, $t \rightarrow \infty$. Если $\nu = \nu(\sigma)$ — центральный индекс ряда (7), то при $\sigma \geq \sigma_0$ вне некоторого множества $E \subset [0, \infty]$ конечной меры $\lambda_{\nu(\sigma)} \leq v(\sigma)$ (см. § 3). Следовательно, при $\sigma \geq \sigma_0$, $\sigma \notin E$, из (32) получаем

$$\mu(\sigma) = |a_\nu| e^{\lambda_\nu \sigma} = |a_\nu Q'(\lambda_\nu)| e^{\lambda_\nu \sigma} \frac{1}{|Q'(\lambda_\nu)|} \leq \mu^*(\sigma) e^{w(v)} = \mu^*(\sigma) \mu^{o(1)}(\sigma).$$

Отсюда следует, что при $\sigma \rightarrow \infty$ вне E

$$1 + o(1) \leq \frac{\ln \mu^*(\sigma)}{\ln \mu(\sigma)}.$$

Поскольку $d(F; \mathbb{R}^+) \leq 1$, то из последней оценки с учетом (15) получаем, что $d(F; \mathbb{R}^+) = 1$.

2°. Необходимость. Пусть условие (11) не выполнено, т.е.

$$\int_1^\infty \frac{\alpha(t)}{t^2} dt = \infty. \quad (33)$$

Функция $\alpha(t)$ — неубывающая ступенчатая и непрерывная справа. Пусть $\{t_n\}$ ($0 < t_n \uparrow \infty$) — последовательность всех точек разрыва $\alpha(t)$, и пусть $\alpha(t) = \alpha_n$ при $t_n \leq t < t_{n+1}$ ($n \geq 1$). Из условия (10) следует, что [10]

$$\int_1^\infty \frac{\ln M(r; Q)}{r^2} dr < \infty.$$

Следовательно, существует уточненный порядок $\rho(r)$ такой, что [18]:

$$2 \ln(1 + r^2) + 20 \ln M(r; Q) \leq r^{\rho(r)} \quad (r \geq 1), \quad \int_1^\infty r^{\rho(r)-2} dr < \infty. \quad (34)$$

Пусть $w = w(r)$ – функция из W такая, что $r^{\rho(r)} = o(w(r))$ при $r \rightarrow \infty$. Из (33), (34) следует, что множество индексов

$$J = \{n : n \geq 1, \alpha(t_n) > w(t_n)\}$$

неограничено. Пусть $I_j = [\tau_j, \tau'_j)$ ($\tau_j < \tau'_j, j \geq 1$) – максимальные интервалы, на которых $w(t) \geq \alpha(t)$. Ясно, что $I_i \cap I_j = \emptyset$ ($i \neq j$). Положим $I = \bigcup_j I_j$,

$$\alpha^*(t) = \begin{cases} \alpha(t), & \text{если } t \notin I, \\ \min_{x \in I_j} \alpha(x), & \text{если } t \in I_j. \end{cases}$$

Подправленная таким образом функция $\alpha^*(t)$ неубывающая и непрерывная справа, $0 \leq \alpha^*(t) \leq \alpha(t)$. Поскольку $w \in W$, то

$$\int_I \frac{\alpha(t)}{t^2} dt \leq \int_I \frac{w(t)}{t^2} dt < \infty.$$

Следовательно, с учетом (33) заключаем, что

$$\int_1^\infty \frac{\alpha^*(t)}{t^2} dt = \infty. \quad (35)$$

Пусть $\{x_j\}$ – последовательность всех точек разрыва функции $\alpha^*(t)$. Поскольку функция $\alpha(t)$ ступенчатая, а $w(t)$ – непрерывная и возрастающая, то $\{x_j\}$ есть подпоследовательность $\{t_n\}$, т.е. $x_j = \mu_{n_j}$ ($j \geq 1$). Пусть $\alpha^*(t) = \alpha_j^*$ при $x_j \leq t < x_{j+1}$. Из условия (35) следует существование неубывающей функции $g(t) = \alpha^*(t)\beta^{-1}(t)$ ($\beta(t)$ – неограниченная неубывающая на $[\mu_1, \infty)$ функция, $\beta(t) > 0, \beta(t) \equiv \text{const} = \beta_j$ при $x_j \leq t < x_{j+1}, j \geq 1$) такой, что [16]:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \int_{\mu_1}^\infty \frac{g(t)}{t^2} dt = \infty; \\ 2) \quad & g(t) = \begin{cases} g_j, & \text{если } x_j \leq t < x_{j+1} \quad (j \geq 1), \\ g_1, & \text{если } \mu_1 \leq t < x_1 \quad (j \geq 1), \end{cases} \end{aligned} \quad (36)$$

где $g_j = \alpha_j^*/\beta_j$ ($j \geq 1$), $g_j \uparrow \infty, 0 < \beta_j \rightarrow \infty, j \rightarrow \infty$.

Далее, из леммы 2 следует существование окружностей

$$K_n = \{z : |z| = r_n\}, \quad \lambda_1 < r_n \uparrow \infty, \quad r_{n-1} < r_n \leq 4r_{n-1},$$

таких, что

$$\frac{1}{|Q(z)|} \leq M^{20}(r; Q), \quad |z| = r = r_n \quad (n \geq 1). \quad (37)$$

Пусть $X = \{x_j\}$, а $\Delta_j = (r'_j, r''_j)$ ($r'_j = r_{n_j}$, $r''_j = r_{n_j+1}$) – все интервалы, каждый из которых содержит хотя бы одну точку из X . Здесь $\{r_{n_j}\}$ – подпоследовательность последовательности $\{r_n\}$, фигурирующей в оценках (37). Так как $1 < p_1$, то $\lambda_1 < \mu_1 < x_1$. Не теряя общности, можно считать, что $\lambda_1 < r'_1 < \mu_1 < x_1 < r''_1$. (Вообще говоря, последовательность $\{r_n\}$ может и не содержать таких точек r'_1, r''_1 . В этом случае их выбираем произвольно, но так, чтобы $Q(r'_1) \neq 0$, $Q(r''_1) \neq 0$ и выполнялись предыдущие оценки.)

Пусть $G_j = d_j h_j$, а P_j ($j \geq 1$) – точки плоскости с координатами (d_j, G_j) , где

$$d_j = \min_k \{x_k : x_k \in \Delta_j \cap \Lambda\}, \quad h_j = \int_{\mu_1}^{d_j} \frac{q(t)}{t^2} dt. \quad (38)$$

Из условий (36) следует, что $h_j \uparrow \infty$ при $j \rightarrow \infty$. Убедимся, что в этом случае

$$R_j = \frac{G_{j+1} - G_j}{d_{j+1} - d_j} \uparrow \infty. \quad (39)$$

Действительно,

$$G_{j+1} - G_j = (d_{j+1} - d_j)h_j + d_{j+1} \int_{d_j}^{d_{j+1}} \frac{g(t)}{t^2} dt.$$

Следовательно,

$$R_j = h_j + \frac{d_{j+1}}{d_{j+1} - d_j} \int_{d_j}^{d_{j+1}} \frac{g(t)}{t^2} dt.$$

Так как $\lim_{j \rightarrow \infty} h_j = \infty$, то $\lim_{j \rightarrow \infty} R_j = \infty$. Далее,

$$\begin{aligned} R_j - R_{j-1} &= \frac{d_{j+1}}{d_{j+1} - d_j} \int_{d_j}^{d_{j+1}} \frac{g(t)}{t^2} dt - \frac{d_j}{d_j - d_{j-1}} \int_{d_{j-1}}^{d_j} \frac{g(t)}{t^2} dt + \int_{d_{j-1}}^{d_j} \frac{g(t)}{t^2} dt \\ &= \frac{d_{j+1}}{d_{j+1} - d_j} \int_{d_j}^{d_{j+1}} \frac{g(t)}{t^2} dt - \frac{d_{j-1}}{d_j - d_{j-1}} \int_{d_{j-1}}^{d_j} \frac{g(t)}{t^2} dt. \end{aligned}$$

Поскольку функция $g(t)$ неубывающая, а $g_j < g_{j+1}$ при всех $j \geq 1$ ($g_j = g(x_j)$), то

$$\int_{d_j}^{d_{j+1}} \frac{g(t)}{t^2} dt \geq g(d_j) \frac{d_{j+1} - d_j}{d_j d_{j+1}}, \quad \int_{d_{j-1}}^{d_j} \frac{g(t)}{t^2} dt < g(d_j) \frac{d_j - d_{j-1}}{d_{j-1} d_j}.$$

Следовательно, $R_j - R_{j-1} > 0$ при всех $j \geq 2$. Таким образом, $R_j \uparrow \infty$ при $j \rightarrow \infty$. Поэтому, соединяя попарно все точки P_j и P_{j+1} ($j \geq 1$) отрезками прямых, получаем некоторый выпуклый полигон (ломаную) L . Если $y = \varphi(t)$ – уравнение L , то ясно, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi(t)}{t} = +\infty. \quad (40)$$

Пусть $\rho(r)$ – уточненный порядок, введенный выше, а $\{\nu_n\}$ – последовательность положительных чисел такая, что

$$\frac{n}{\nu \rho(\nu_n)} = 1 \quad (n \geq 1).$$

Положим

$$P(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{\nu_n^2}\right).$$

Если $z = re^{i\varphi}$, $|\varphi| \leq \pi/4$, то согласно лемме 4 существует равномерный по φ предел

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln |P(re^{i\varphi})|}{r\rho(r)} = \pi \cos \varphi. \quad (41)$$

Рассмотрим теперь ряд Дирихле

$$F(s) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\lambda_k s} \quad (s = \sigma + it), \quad (42)$$

коэффициенты которого определим следующим образом:

$$a_k = \begin{cases} 0, & \text{если } \lambda_k \neq \mu_n \ (n \geq 1), \\ \exp(-\mu_k h_j) \frac{1}{Q'(\mu_k)P(\mu_k)}, & \text{если } \mu_k \in \Delta_j \ (j \geq 1), \\ \frac{\varepsilon_k}{\mu_k} \exp(-\varphi_j(\mu_k) - 1), & \text{если } \mu_k \in \Delta'_j \ (j \geq 1), \\ -\operatorname{sign} Q'(\mu'), & \text{если } \lambda_1 \leq \lambda_k < r'_1, \end{cases}$$

где $\Delta_j = (r'_j, r''_j)$, $\Delta'_j = (r''_j, r'_{j+1})$, $y_j = \varphi_j(t)$ — уравнение прямой, проходящей через точки P_j и P_{j+1} , $\varepsilon_k = \operatorname{sign} Q'(\mu_k)$, $\mu' = \min\{\mu_n : \mu_n \in \Delta_1\}$.

По предположению последовательность Λ имеет конечный индекс конденсации, а $P(\mu_k) \geq 1$ ($k \geq 1$). Поскольку $h_i \uparrow \infty$ и выполняется условие (40), то ряд Дирихле (42) абсолютно сходится во всей плоскости, т.е. $F \in B(\Lambda)$. Так как $\mu_n = \lambda_{p_n}$, $P(\mu_n) > 0$, а $\operatorname{sign} Q'(\mu_n) = (-1)^n$ ($n \geq 1$), то $\{p_n\}$ — последовательность перемен знаков коэффициентов ряда (42).

Оценим функцию $F(s)$ на вещественной оси сверху.

Пусть Γ_n — контур, составленный отрезками лучей $\{\mu : \arg \mu = \pm \pi/4\}$, соединяющими окружности K_n и K_{n+1} , и дугами этих окружностей. Если

$$F_j(\sigma) = \sum_{\lambda_k \in \Delta_j} a_k e^{\lambda_k \sigma} \quad (j \geq 1),$$

то имеем

$$F_j(\sigma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_j} \frac{e^{-\mu h_j + \mu \sigma}}{Q(\mu)P(\mu)} d\mu,$$

где $\Delta_j = (r'_j, r''_j)$ ($r'_j = r_{n_j}$, $r''_j = r_{n_j+1}$), $C_j = \Gamma_{n_j}$, а величина h_j определена в (38).

Оценим теперь функцию $F_j(\sigma)$. Для этого сначала оценим функции $Q(\mu)$ и $P(\mu)$ на контуре C_j .

Поскольку $|Q(re^{\pm \pi i/4})| \geq 1$, то с учетом (37) и (41) на контуре C_j ($j \geq 1$) получаем, что для любого $\epsilon > 0$

$$|\mu|(1 + |\mu|^2) \frac{1}{|Q(\mu)P(\mu)|} \leq \exp \left[2 \ln(1 + r^2) + 20 \ln M(r; Q) - \left(\pi \frac{\sqrt{2}}{2} - \epsilon \right) r^{\rho(r)} \right],$$

где $|\mu| = r$, $r'_j \leq r \leq r''_j$, $j \geq j_0$.

Воспользуемся теперь оценкой из (34). Тогда

$$\max_{\mu \in C_j} \left(3|\mu|(1 + |\mu|^2) \frac{1}{|Q(\mu)P(\mu)|} \right) \leq A < \infty \quad (j \geq 1), \quad (43)$$

где A – постоянная, не зависящая от $j \geq 1$. Если

$$L_j(\mu) = \frac{e^{-\mu h_j + \mu \sigma}}{Q(\mu)P(\mu)},$$

то

$$|F_j(\sigma)| \leq \left(\frac{1}{2\pi} \int_{C_j} |d\mu| \right) \max_{\mu \in C_j} |L_j(\mu)| = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{C_j} |d\mu| \right) |L_j(\mu'_j)|,$$

где μ'_j – некоторая точка, принадлежащая контуру C_j . Далее, поскольку $r'_j < r''_j < 4r'_j$, то

$$\frac{1}{2\pi} \int_{C_j} |d\mu| \leq 3|\mu'_j| \quad (j \geq 1).$$

Следовательно, учитывая оценку (43), имеем

$$\begin{aligned} |F_j(\sigma)| &\leq \frac{3|\mu'_j|}{1 + |\mu'_j|^2} \frac{1 + |\mu'_j|^2}{|Q(\mu'_j)P(\mu'_j)|} e^{-(\operatorname{Re} \mu'_j)(h_j - \sigma)} \\ &\leq \frac{A}{1 + |\mu'_j|^2} \exp(-\gamma_j h_j + \gamma_j \sigma), \end{aligned}$$

где $\gamma_j = \operatorname{Re} \mu'_j$, $r'_j \leq \gamma_j \leq r''_j$, $j \geq 1$.

Таким образом,

$$|F(\sigma)| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{A}{1 + |\mu_j|^2} e^{-\gamma_j h_j + \gamma_j \sigma} + R(\sigma),$$

где

$$R(\sigma) = \sum_{\lambda_k \notin \Delta} |a_k| e^{\lambda_k \sigma}, \quad \Delta = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Delta_j.$$

Отсюда получаем, что

$$|F(\sigma)| \leq B \exp \left[\max_{j \geq 1} (-\gamma_j h_j + \gamma_j \sigma) \right] + R(\sigma). \quad (44)$$

Поскольку $h_j \uparrow \infty$ при $j \rightarrow \infty$, то $\max_{j \geq 1} (-\gamma_j h_j + \gamma_j \sigma) = H(\sigma)$ существует при любом фиксированном $\sigma > 0$. Далее, при $\sigma \geq \sigma_0$ имеем:

$$0 < H(\sigma) = -\gamma_\nu h_\nu + \gamma_\nu \sigma \leq 4r'_\nu(-h_\nu + \sigma) < 4d_\nu(-h_\nu + \sigma),$$

где $r'_\nu \leq \gamma_\nu \leq r''_\nu$, d_ν – ближайшая к r'_ν точка скачка функции $g(t)$ из интервала Δ_ν . Тогда из (44) получаем, что

$$|F(\sigma)| \leq B \left[4 \max_{j \geq 1} (-d_j h_j + d_j \sigma) \right] + R(\sigma), \quad (45)$$

где d_j – ближайшая к r'_j точка скачка функции $g(t)$ из интервала $\Delta_j = (r'_j, r''_j)$.

Пусть $R_{n-1} \leq \sigma < R_n$, где числа R_n определены формулой (39). Поскольку $R_n \uparrow \infty$, то для таких σ (см. [17; гл. 2, § 6, п. 2])

$$\max_{j \geq 1} (-d_j h_j + d_j \sigma) = -d_n h_n + d_n \sigma = m(\sigma). \quad (46)$$

Коэффициенты ряда $R(\sigma)$ выбраны нами специальным образом, а именно они таковы, что построенная выше ломаная L является полигоном Ньютона для ряда (см. [17; гл. 2, § 6, п. 2])

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_m e^{\nu_m \sigma} = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-d_j h_j} e^{d_j \sigma} + R(\sigma),$$

где $\{\nu_m\} = \{d_j\} \cup \{\mu_k : \mu_k \in \Lambda \setminus \Delta\}$.

Следовательно, при $R_{n-1} \leq \sigma < R_n$ из (10), (45), (46) получаем, что

$$|F(\sigma)| \leq B e^{4m(\sigma)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k} e^{m(\sigma)} \leq C e^{4m(\sigma)}. \quad (47)$$

Оценим $m(\sigma)$ сверху. Для $R_{n-1} \leq \sigma < R_n$ имеем

$$m(\sigma) = -d_n h_n + d_n \sigma \leq \frac{d_n d_{n+1}}{d_{n+1} - d_n} \int_{d_n}^{d_{n+1}} \frac{g(t)}{t^2} dt \leq g(t'_n),$$

где t'_n — наибольшая точка скачка функции $g(t)$ из интервала (r'_n, r''_n) (на участке $[t'_n, d_{n+1})$ функция $g(t)$ постоянна!). Поскольку по построению

$$g(t) \equiv \frac{\alpha^*(t'_n)}{\beta(t'_n)}, \quad t'_n \leq t < d_{n+1},$$

то при $R_{n-1} \leq \sigma < R_n$

$$m(\sigma) \leq g(t'_n) = \frac{\alpha^*(t'_n)}{\beta(t'_n)} \leq \frac{\alpha(t'_n)}{\beta(t'_n)}. \quad (48)$$

С другой стороны, для тех же σ имеем: $\ln \mu(\sigma) \geq \ln |a'_n| + t'_n \sigma$, где a'_n — коэффициент ряда (42), соответствующий показателю t'_n , а $\mu(\sigma)$ — максимальный член этого ряда. Поскольку $r'_n < t'_n < r''_n$, то с учетом (46), (41) для $R_{n-1} \leq \sigma < R_n$ получаем, что

$$\begin{aligned} \ln \mu(\sigma) &\geq -t'_n h_n + t'_n \sigma + \ln \frac{1}{|Q'(t'_n)|} + \ln \frac{1}{|P(t'_n)|} \\ &\geq \frac{r'_n}{r''_n} m(\sigma) + \alpha(t'_n) + \ln \frac{1}{|P(t'_n)|} > \alpha(t'_n) - 2\pi(t'_n)^{\rho(t'_n)} \\ &= \alpha(t'_n) + o(1)w(t'_n) = (1 + o(1))\alpha(t'_n), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (49)$$

Здесь мы учли то, что $t'_n \in X$, т.е. $w(t'_n) \leq \alpha(t'_n)$.

Таким образом, для $R_{n-1} \leq \sigma < R_n$ из (47)–(49) окончательно получаем, что при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{\ln |F(\sigma)|}{\ln \mu(\sigma)} \leq \frac{\ln C}{\ln \mu(\sigma)} + 4 \frac{m(\sigma)}{\ln \mu(\sigma)} \leq o(1) + (1 + o(1)) \frac{1}{\beta(t'_n)}. \quad (50)$$

Далее, из (49) видно, что $\ln \mu(\sigma) \rightarrow \infty$ при $\sigma \rightarrow \infty$, а поскольку

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} < \infty,$$

то из результатов работ [19], [20] следует, что $\sup_{\sigma > 0} |F(\sigma)| = \infty$. Следовательно, из (50) окончательно получаем, что

$$d(F; \mathbb{R}^+) = \varlimsup_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{\ln |F(\sigma)|}{\ln M(\sigma)} = 0.$$

Теорема полностью доказана.

В заключение автор благодарит В. В. Напалкова, И. Ф. Красичкова-Терновского и других участников семинара по теории функций комплексного переменного за обсуждение работы.

Список литературы

1. *Pólya G.* Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen // Math. Z. 1929. V. 29. P. 549–640.
2. *Шеремета М. Н.* Об одной теореме По́йа // Укр. матем. журн. 1983. Т. 35. № 1. С. 119–124.
3. *Шеремета М. Н.* О целых функциях с вещественными тейлоровскими коэффициентами // Укр. матем. журн. 1985. Т. 37. № 6. С. 786–787.
4. *Гайсин А. М.* К одной теореме По́йа о целых функциях с вещественными коэффициентами Тейлора // Сиб. матем. журн. 1997. Т. 38. № 1. С. 46–55.
5. *Павлов А. И.* О росте на положительном луче целых функций с вещественными коэффициентами // Матем. заметки. 1973. Т. 14. № 3. С. 395–402.
6. *Edrei A.* Gap and density theorems for entire function // Scripta Math. 1958. V. 23. P. 117–141.
7. *Гайсин А. М.* Оценка ряда Дирихле с вещественными коэффициентами на луче // Матем. заметки. 1996. Т. 60. № 6. С. 810–823.
8. *Berndtsson B.* A note on Pavlov–Korevaar–Dixon interpolation // Indag. Math. (N.S.). 1978. V. 40. P. 409–414.
9. *Шеремета М. Н.* Об одном свойстве целых функций с вещественными тейлоровскими коэффициентами // Матем. заметки. 1975. Т. 18. № 3. С. 315–402.
10. *Леонтьев А. Ф.* Последовательности полиномов из экспонент. М.: Наука, 1980.
11. *Beurling A.* Some theorems on boundedness of analytic functions // Duke Math. J. 1949. V. 16. P. 355–359.
12. *Гайсин А. М.* Оценка ряда Дирихле, показатели которого – нули целой функции с нерегулярным поведением // Матем. сб. 1994. Т. 185. № 2. С. 33–56.
13. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. М.: Наука, 1970.
14. *Гайсин А. М.* Асимптотические свойства функций, заданных рядами экспонент // Дисс. ... докт. физ.-матем. наук. Уфа: Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, 1994.
15. *Евграфов М. А.* Асимптотические оценки и целые функции. М.: Наука, 1979.

16. *Гайсин А. М.* Ряды Дирихле с лакунами Фейера // Препринт ISBN 5-13-000024-2. Уфа: Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, 1999.
17. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент. М.: Наука, 1976.
18. *Бойчук В. С.* О некоторых свойствах уточненного порядка // Сиб. матем. журн. 1979. Т. 20. № 2. С. 229–236.
19. *Schwartz L.* Étude des sommes d'exponentielles réelles. Paris: Herman & Cie, 1943.
20. *Евграфов М. А.* Об одной теореме единственности для рядов Дирихле // УМН. 1962. Т. 17. № 3. С. 169–175.

Институт математики с вычислительным центром
Уфимского научного центра УрО РАН, г. Уфа
E-mail: gaisin@imat.rb.ru

Поступила в редакцию
10.05.2000 и 18.09.2001