Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Б. Енгибарян, Консервативные системы интегральных уравнений свертки на полупрямой и всей прямой, *Матем. сб.*, 2002, том 193, номер 6, 61–82

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm660>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 07:13:40

УДК 517.9+519.24

Н. Б. Енгибарян

Консервативные системы интегральных уравнений свертки на полупрямой и всей прямой

Рассматривается следующая система интегральных уравнений свертки:

$$f(x) = g(x) + \int_a^\infty K(x-t)f(t) dt, \quad -\infty \leq a < \infty,$$

где $(m \times m)$ -матрица-функция K удовлетворяет условиям консервативности

$$K_{ij} \in L_1(\mathbb{R}), \quad K_{ij} \geq 0, \quad A \equiv \int_{-\infty}^\infty K(x) dx \in P_N, \quad r(A) = 1.$$

Здесь P_N – класс неотрицательных неразложимых $(m \times m)$ -матриц, $r(A)$ – спектральный радиус матрицы A . При $a = 0$ рассматриваемое уравнение является консервативной системой интегральных уравнений Винера–Хопфа. При $a = -\infty$ это уравнение является уравнением многомерного восстановления на всей прямой. Исследованы вопросы разрешимости неоднородного и однородного уравнений, асимптотические и другие свойства решений.

Применяется и развивается метод нелинейных уравнений факторизации в сочетании с новыми фактами по теории многомерного восстановления.

Библиография: 23 названия.

§ 1. Введение

Рассмотрим две системы интегральных уравнений свертки: консервативную систему интегральных уравнений Винера–Хопфа

$$f(x) = g(x) + \int_0^\infty K(x-t)f(t) dt \tag{1.1}$$

и многомерное уравнение восстановления на всей вещественной оси

$$f(x) = g(x) + \int_{-\infty}^\infty K(x-t)f(t) dt. \tag{1.2}$$

Здесь $g = (g_1, \dots, g_n)^T$, $f = (f_1, \dots, f_n)^T$ суть вектор-столбцы (T – знак транспонирования).

В обоих уравнениях предполагается, что ядро $K = (K_{ij})_{i,j=1}^m$ – матрица-функция на $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, удовлетворяющая условиям консервативности (или критичности):

$$0 \leq K_{ij} \in L_1(\mathbb{R}), \quad A \equiv \int_{-\infty}^\infty K(x) dx \in P_N, \quad r(A) = 1. \tag{1.3}$$

Здесь P_N – класс неотрицательных неразложимых (неприводимых) $(m \times m)$ -матриц, $r(A)$ – спектральный радиус матрицы A . В частности, A может быть стохастической (неприводимой) матрицей:

$$\sum_{i=1}^m (A)_{ij} = 1, \quad j = 1, \dots, m. \quad (1.4)$$

Скалярные ($m = 1$) и векторные уравнения (1.1) и (1.2) широко применяются в теории вероятностей, в теории переноса излучения, в кинетической теории газов, в других разделах математической физики. В скалярном случае для них построена достаточно полная аналитическая теория (см. работы [1]–[9] и цитированную в них литературу).

Векторный случай уравнений (1.1) и (1.2) существенно сложнее скалярного (см. [10]). Большинство методов скалярной теории оказалось непригодным или мало приспособленным для изучения векторных уравнений. Многие интуитивные предпосылки скалярной теории не имеют своих многомерных аналогов.

Метод нелинейных уравнений факторизации (НУФ) автора позволил подробно исследовать скалярные уравнения (1.1) и (1.2) (см. [4], [5], [9]) и значительно продвинуться в изучении векторного уравнения (1.1) (см. [5], [11], [12]). На пути развития теории консервативных систем уравнений Винера–Хопфа с использованием метода НУФ возникали две основные трудности:

- а) классификация факторизации по обратимости факторов;
- б) адекватное описание свойств решений уравнений многомерного восстановления на полуоси, возникающих вследствие факторизации.

В настоящей работе излагается единый подход к векторным консервативным уравнениям (1.1) и (1.2). Развитие метода НУФ в сочетании с некоторыми новыми фактами из теории многомерного восстановления [13], [14] дает возможность в значительной степени преодолеть отмеченные выше трудности и подробно исследовать рассматриваемые уравнения. Основное внимание уделяется вопросам построения положительных решений при $g \geq 0$. Эта проблема включает в себя консервативные задачи многоскоростной теории переноса нейтронов в полупространстве (см. [15]) и ряд других задач теории переноса излучения.

§ 2. Факторизация уравнений (1.1) и (1.2)

2.1. Обозначения. Пусть $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}_m$ – пространства вещественных m -мерных вектор-столбцов и вектор-строк соответственно; $\mathbb{R}^{m \times m}$ – алгебра $(m \times m)$ -матриц с единицей I . Через A^T обозначается матрица (или вектор), транспонированная к A . Неравенства $A > B$ и $A \geq B$ понимаются поэлементно. Запись $A \succ B$ означает, что $A \geq B$ и $A \neq B$. Через $r(A)$ обозначается спектральный радиус матрицы A (см. [16]). Запись $A < \infty$ означает, что хотя бы один элемент (несобственной) матрицы A равен $+\infty$.

Пусть P_N – класс неразложимых (неприводимых) $(m \times m)$ -матриц (см. [16], [17]).

Пусть G_1 и G_2 – подмножества некоторого линейного пространства. Обозначим $G_1 + G_2 = \{x + y; x \in G_1, y \in G_2\}$.

Введем в рассмотрение некоторые функциональные пространства. Пусть $L := L_1(-\infty, \infty)$, $L_+ := L_1(0, \infty)$. Через L_{loc} обозначается линейное топологическое пространство функций на $[0, \infty)$, интегрируемых (по Лебегу) на каждом конечном интервале.

Пусть E — одно из банаховых пространств функций на $[a, \infty)$ или (a, ∞) : L_p , $p \geq 1$; $M := L_\infty$; M_0 ; C_0 ; C_l . Здесь M — пространство ограниченных в существенном функций; C_l — пространство функций, которые непрерывны на $[a, \infty)$ (при $a > -\infty$) и на $(-\infty, \infty)$ (при $a = -\infty$) и имеют конечные пределы в $+\infty$ и $\pm\infty$ соответственно. Если $f \in M_0 \in M$ или $f \in C_0 \in C_l$, то $f(+\infty) = 0$ при $a > -\infty$ и $f(\pm\infty) = 0$ при $a = -\infty$.

Через E^m обозначается пространство m -мерных вектор-столбцов с элементами из E .

Пусть $L^{m \times m}$ и $L_+^{m \times m}$ — пространства $(m \times m)$ -матриц-функций с элементами из L и L_+ соответственно.

Во всех рассматриваемых пространствах вектор-функций и матриц-функций вводится топология поэлементной сходимости.

2.2. Нелинейное уравнение факторизации. Представим уравнения (1.1) и (1.2) в единой операторной форме:

$$(J - \check{K})f = g. \quad (2.1)$$

Здесь J — единичный оператор, а $\check{K}$ — интегральный оператор:

$$(\check{K}f)(x) = \int_a^\infty K(x-t)f(t) dt, \quad K \in L^{m \times m}, \quad -\infty \leq a < \infty.$$

Качественно отличаются друг от друга лишь частные случаи (1.1) и (1.2) уравнения (2.1) при $a = 0$ и $a = -\infty$ соответственно. При любом конечном a уравнение (2.1) может быть сведено к (1.1) простым сдвигом.

Оператор $\check{K}$ действует в любом из пространств E^m . При выполнении условий (1.3) оператор $J - \check{K}$ необратим в пространствах E^m , поскольку символ оператора вырождается (см. [10]): $\det(I - \hat{K}(0)) = \det(I - A) = 0$; здесь $\hat{K}(s)$ — (поэлементное) преобразование Фурье матрицы-функции K .

Уравнение (2.1) будет изучаться методом нелинейных уравнений факторизации (НУФ).

Пусть J — единичный оператор. Введем нижний и верхний вольтерровы операторы $\check{U}, \check{V}$:

$$(\check{U}f)(x) = \int_a^x U(x-t)f(t) dt, \quad (\check{V}f)(x) = \int_x^\infty V(t-x)f(t) dt, \quad U, V \in L_+^{m \times m}.$$

Рассмотрим факторизацию

$$J - \check{K} = (J - \check{V})(J - \check{U}). \quad (2.2)$$

Она эквивалентна следующей нелинейной системе интегральных уравнений относительно искомых ядер (см. [4], [5], [11], [12]), представляющей собой НУФ для задачи (2.2):

$$\begin{aligned} U(x) &= K^+(x) + \int_0^\infty V(t)U(x+t) dt, \\ V(x) &= K^-(x) + \int_0^\infty V(x+t)U(t) dt, \quad x > 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $K^\pm(x) = K(\pm x)$, $x > 0$.

Уравнения (2.3) мы будем рассматривать при несколько более общих условиях, чем условия консервативности (1.3). Предположим, что $A \succ 0$ и существуют векторы η, ζ , удовлетворяющие условиям

$$0 < \eta \in \mathbb{R}^n, \quad 0 < \zeta \in \mathbb{R}_n, \quad A\eta = \eta, \quad \zeta A = \zeta. \quad (2.4)$$

В случае (1.3) существование таких векторов следует из теоремы Перрона–Фробениуса (см. [16], [17]). Условия (2.4) выполняются также в случае, когда A – блочно-диагональная матрица, блоки которой удовлетворяют условиям (1.3).

Согласно теореме 2.1 работы [12] при выполнении условий (2.4) существует так называемое основное (или каноническое) решение НУФ (2.3), которое является (поэлементным) пределом в $L_+^{m \times m}$ следующих простых итераций:

$$\begin{aligned} U_{n+1}(x) &= K^+(x) + \int_0^\infty V_n(t)U_n(x+t) dt, \\ V_{n+1}(x) &= K^-(x) + \int_0^\infty V_n(x+t)U_n(t) dt, \\ U_0 &= V_0 = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.5)$$

Вкратце опишем доказательство сходимости итераций (2.5). Индукцией по n проверяется, что

$$U_n, V_n \in L_+^{m \times m}, \quad 0 \leq U_n, V_n \uparrow \text{ по } n. \quad (2.6)$$

Обозначим

$$B_n = \int_0^\infty U_n(x) dx, \quad C_n = \int_0^\infty V_n(x) dx, \quad B_n, C_n \in \mathbb{R}^{m \times m}.$$

Интегрируя соотношения (2.5) по x от 0 до ∞ и складывая их, получаем

$$B_{n+1} + C_{n+1} = A + C_n B_n.$$

Из этого равенства с учетом монотонности последовательностей B_n и C_n индукцией по n доказываются оценки

$$B_n \eta \leq \eta, \quad \zeta C_n \leq \zeta,$$

откуда следует сходимость:

$$B_n \rightarrow B, \quad C_n \rightarrow C, \quad B, C \geq 0, \quad B\eta \leq \eta, \quad \zeta C \leq \zeta, \quad (2.7)$$

и равенство

$$I - A = (I - C)(I - B). \quad (2.8)$$

Из (2.6) и (2.7) согласно теореме Б. Леви [18] следует (поэлементная) сходимость итераций (2.5) в $L_+^{m \times m}$:

$$U_n \rightarrow U, \quad V_n \rightarrow V, \quad U, V \geq 0, \quad \int_0^\infty U(x) dx = B, \quad \int_0^\infty V(x) dx = C.$$

2.3. О свойствах матриц B и C . Дальнейшее изучение факторизации (2.2) и ее применение к уравнению (2.1) связано со свойствами матриц B и C . Начнем с одного элементарного свойства, связанного с обратимостью матриц $I - B$ и $I - C$.

Из неравенств (2.7) имеем:

$$\gamma^+ := r(B) \leq 1, \quad \gamma^- := r(C) \leq 1, \quad \eta^* := \eta - B\eta \geq 0, \quad \zeta^* := \zeta - \zeta C \geq 0. \quad (2.9)$$

Используя (2.8), получаем

$$\zeta^*(I - B) = 0, \quad (I - C)\eta^* = 0. \quad (2.10)$$

Из необратимости $I - A$ следует, что хотя бы один из сомножителей $I - B$, $I - C$ в разложении (2.8) необратим. Учитывая неравенства $\gamma^\pm \leq 1$ и тот факт, что спектральный радиус является собственным значением неотрицательной матрицы, заключаем, что матрица $I - B$ (или $I - C$) обратима тогда и только тогда, когда $\gamma^+ < 1$ (или $\gamma^- < 1$).

Итак, числа $\gamma^\pm$ удовлетворяют условиям

$$0 \leq \gamma^\pm \leq 1, \quad (1 - \gamma^-)(1 - \gamma^+) = 0. \quad (2.11)$$

ЛЕММА 2.1. а) Пусть $\zeta^* \succ 0$. Тогда $\eta^* = 0$, $\gamma^- < 1$, $\gamma^+ = 1$. Если $B \in P_N$, то $\zeta^* > 0$.

б) Пусть $\eta^* \succ 0$. Тогда $\zeta^* = 0$, $\gamma^- = 1$, $\gamma^+ < 1$. Если $C \in P_N$, то $\eta^* > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (2.8) видно, что любой левосторонний (правосторонний) неподвижный вектор матрицы C (матрицы B) является таковым для матрицы A . Если $\gamma^- = 1$, то неотрицательная матрица C обладает (неотрицательным) неподвижным левосторонним вектором. Им может быть (с точностью до постоянного множителя) только вектор ζ . Поэтому возможны два альтернативных случая: либо $\gamma^- < 1$ и $\zeta^* \succ 0$, либо $\gamma^- = 1$ и $\zeta^* = 0$. В первом случае матрица $I - C$ обратима. Из (2.10) видно, что тогда матрица $I - B$ необратима, $\eta^* = 0$, $\gamma^+ = 1$. Выполнение строгого неравенства $\zeta^* > 0$ при $B \in P_N$ и $\gamma^- = 1$ является прямым следствием теоремы Перрона–Фробениуса. Утверждение б) леммы доказывается аналогичным образом. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЯ. 1) Для обеспечения включений $B, C \in P_N$ мы воспользуемся следующими несколько грубыми условиями. Пусть $A^\pm = \int_0^\infty K^\pm(x) dx$. Так как $B \geq A^+, C \geq A^-$, то из $A^\pm \in P_N$ следует, что $B, C \in P_N$.

2) Если $\gamma^- < 1$ или $\gamma^+ < 1$, то

$$(I - C)^{-1} = I + \tilde{C} \quad \text{или} \quad (I - B)^{-1} = I + \tilde{B}, \quad \tilde{B}, \tilde{C} \geq 0.$$

Имеем, например, $\tilde{C} = \sum_{n=1}^\infty C^n$.

3) Пусть матрицы B или C обладают правыми и левыми неподвижными положительными векторами. Тогда, введя соответствующие векторы $\eta^-, \zeta^+ > 0$ и переобозначив векторы η, ζ через η^+ и ζ^- соответственно, будем иметь равенства

$$B\eta^+ = \eta^+, \quad \zeta^+ B = \zeta^+ \quad \text{или} \quad \zeta^- C = \zeta^-, \quad C\eta^- = \eta^-. \quad (2.12)$$

Если $\gamma^- < 1$ и $B \in P_N$ или $\gamma^+ < 1$ и $C \in P_N$, то можно взять $\zeta^+ = \zeta^*$ и $\eta^- = \eta^*$ соответственно.

§ 3. Классификация факторизации (2.2)

3.1. Задача классификации. В силу необратимости оператора $J - \check{K}$ хотя бы один из сомножителей в правой части (2.2) необратим. Этот вопрос связан со значениями $\gamma^\pm$: оператор $J - \check{U}$ (или $J - \check{V}$) будет обратимым тогда и только тогда, когда $\gamma^+ < 1$ (или $\gamma^- < 1$).

Возможны случаи как простого вырождения оператора $J - \check{K}$ (только один из операторов $J - \check{U}$ и $J - \check{V}$ необратим), так и двойного вырождения (необратимость обоих сомножителей в правой части (2.2)).

Одним из основных вопросов, связанных с факторизацией (2.2), является следующая задача классификации: исходя из свойств ядра K определить, какое из чисел $\gamma^\pm$ равно единице, а какое меньше единицы. Эта задача достаточно подробно изучена в скалярном случае (см. [5], [19]). Некоторые результаты для векторного случая получены в [11], [12].

Основной целью настоящего и следующего параграфов является классификация факторизации (2.2) через моменты K . Но сначала приведем один результат, связанный с симметрией оператора $\check{K}$.

3.2. Случай симметрии ядра K . Пусть матрица-функция K обладает свойством симметрии $K(-x) = K^T(x)$. Тогда $V(x) = U^T(x)$, $\gamma^\pm = 1$ (см. [11], [12]).

Приведем одно обобщение этого свойства.

Пусть в классе матриц $\mathbb{R}^{m \times m}$ введена линейная операция $\#$: матрице A соответствует матрица $A^\#$. Указанную операцию назовем *обобщенным транспонированием*, если она обладает свойствами:

$$(A^\#)^\# = A, \quad (AB)^\# = B^\# A^\#, \quad r(A^\#) = r(A).$$

Основными примерами обобщенного транспонирования являются:

1. транспонирование T относительно главной диагонали;
2. транспонирование относительно второй большой диагонали:

$$(A^\#)_{ij} = A_{m+1-j, m+1-i}.$$

ЛЕММА 3.1. Пусть матрица-функция K обладает свойствами

$$K \in L^{m \times m}, \quad K(-x) = K^\#(x)$$

и нелинейные уравнения факторизации (2.3) имеют основное решение (U, V) . Тогда

а) $V(x) = U^\#(x)$, $\gamma^+ = \gamma^-$, а НУФ (2.3) принимают вид

$$U(x) = K(x) + \int_0^\infty U^\#(t)U(x+t) dt;$$

б) если выполнены условия (2.4), то $\gamma^\pm = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим итерации (2.5). Легко проверить индукцией по n , что $V_n = U_n^\#$, откуда следует равенство $V(x) = U^\#(x)$. Из свойств обобщенного транспонирования получаем $\gamma^+ = \gamma^-$. Утверждение б) следует из а) и (2.4). Лемма доказана.

3.3. Моменты. Введем моменты матриц-функций (или вектор-функций) на положительной полуоси. Обозначим

$$\tau_p(f) = \int_0^\infty f(x)x^p dx, \quad p = 0, 1, 2, \dots$$

В случае $f \geq 0$ компоненты матрицы $\tau_p(f)$ могут быть как конечными, так и бесконечными. В противном случае интегралы предполагаются абсолютно сходящимися.

Обозначим

$$\nu^\pm = \tau_1(K^\pm), \quad \omega = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x)x^2 dx (\leq \infty), \quad B^1 = \tau_1(U), \quad C^1 = \tau_1(V). \quad (3.1)$$

Если $\nu^\pm < \infty$, то существует интеграл

$$\nu := \nu^+ - \nu^- = \int_{-\infty}^\infty K(x)x dx.$$

Мы всегда будем предполагать, что хотя бы одна из матриц $\nu^\pm$ конечна. Вопрос о конечности моментов матриц-функций U и V изучен в [12]. Имеет место

ЛЕММА 3.2.

- а) Пусть $\gamma^- < 1$, $\tau_p(K^+) < +\infty$, $p = 1, 2, \dots$. Тогда $\tau_p(U) < +\infty$.
- б) Пусть $\gamma^+ < 1$, $\tau_p(K^-) < +\infty$, $p = 1, 2, \dots$. Тогда $\tau_p(V) < +\infty$.
- в) Пусть $\gamma^- = 1$, $\tau_p(K^+) < +\infty$, $p = 1, 2, \dots$. Тогда $\tau_{p-1}(U) < +\infty$.
- г) Пусть $\gamma^+ = 1$, $\tau_p(K^-) < +\infty$, $p = 1, 2, \dots$. Тогда $\tau_{p-1}(V) < +\infty$.

СЛЕДСТВИЕ. Если $\omega < \infty$, то обе матрицы B^1 и C^1 конечны.

3.4. Число σ . В [12] получен один результат по значениям $\gamma^\pm$ в случае, когда K не обладает свойством симметрии, но элементы матрицы ν знакопостоянны. Случай знакоприменности матрицы ν полностью оставался открытым. В настоящем параграфе будут получены результаты в этом направлении.

Ключевую роль в излагаемой классификации имеет следующая скалярная величина σ :

$$\sigma = \zeta \nu \eta, \quad -\infty \leq \sigma \leq +\infty.$$

Если $\nu^- < +\infty$ (или $\nu^+ < +\infty$), но $\nu^+ \neq \infty$ (соответственно $\nu^- \neq \infty$), то мы будем считать, что $\sigma = +\infty$ (соответственно $\sigma = -\infty$). При $B^1, C^1 < \infty$ из факторизации (2.2) аналогично скалярному случаю (см. [5]) легко получается формула

$$(I - C)B^1 - C^1(I - B) = \nu.$$

Умножая обе части этого равенства слева на вектор ζ и справа на вектор η , получаем

$$\zeta^* B^1 \eta - \zeta C^1 \eta^* = \sigma. \quad (3.2)$$

В формуле (3.2) число σ представлено в виде разности двух неотрицательных величин. Согласно лемме 2.1 η^*, ζ^* одновременно не могут быть ненулевыми. Поэтому имеет место один из случаев:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \zeta^* > 0, \quad \eta^* = 0, \quad \sigma = \zeta^* B^1 \eta \geq 0, \\ 2) \quad & \eta^* > 0, \quad \zeta^* = 0, \quad \sigma = -\zeta C^1 \eta^* \leq 0, \\ 3) \quad & \eta^* = \zeta^* = 0, \quad \sigma = 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Сказанное дает возможность классифицировать факторизацию (2.2) через сигнатуру числа σ . Имеет место

ЛЕММА 3.3. Пусть $\nu^\pm < +\infty$ и $B^1, C^1 < \infty$. Тогда

- а) если $\sigma > 0$, то $\gamma^+ = 1, \gamma^- < 1$;
- б) если $\sigma < 0$, то $\gamma^+ < 1, \gamma^- = 1$;
- в) если $\sigma = 0$, то $\gamma^\pm = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения а) и б) леммы являются прямыми следствиями альтернативы (3.3) и леммы 2.1. Пусть теперь $\sigma = 0$. Тогда априори возможны все три случая из (3.3). В первом случае имеем $\zeta^* B^1 \eta = 0$ и $\eta^* = 0$. Расположение ненулевых элементов матрицы B^1 совпадает с их расположением в матрице B . Поэтому $\zeta^* B \eta = 0$. С учетом первого из равенств (2.10) получаем $\zeta^* \eta = 0$. В силу положительности вектора η получаем $\zeta^* = \eta^* = 0$. Из леммы 2.1 следует $\gamma^\pm = 1$. Аналогично обстоит дело во втором из возможных случаев (3.3). В третьем случае согласно лемме 2.1 имеем $\gamma^\pm = 1$. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть $\omega < \infty$ (ω – второй момент ядра K). Тогда согласно лемме 3.2 условия $B^1, C^1 < \infty$ леммы 3.3 выполняются.

Если матрица ω не является конечной, то такая классификация является более сложной задачей. Ей будет посвящен следующий параграф.

§ 4. Классификация в случае $\omega < \infty$

4.1. Основное неравенство. Пусть $\nu^- < \infty$ и итерации U_n, V_n определяются согласно (2.5). Введем обозначения:

$$\begin{aligned} A^\pm &= \int_0^\infty K^\pm(x) dx, \quad B_n^1 = \tau_1(U_n), \quad C_n^1 = \tau_1(V_n), \\ \nu(l) &= \int_{-\infty}^l xK(x) dx, \quad \sigma(l) = \zeta\nu(l)\eta, \\ B_n^1(l) &= \int_0^l xU_n(x) dx, \quad C_n^1(l) = \int_0^l xV_n(x) dx, \quad 0 < l < +\infty. \end{aligned} \quad (4.1)$$

С учетом (2.5) индукцией по n можно показать конечность моментов C_n^1 . Если $0 < \nu \leq \infty$, то $\sigma(l) > 0$ при достаточно больших l .

ЛЕММА 4.1. Пусть $\nu^- < \infty$. Тогда имеет место неравенство

$$\zeta C_n^1 \eta^* + \sigma(l) \leq \zeta B^1(l)\eta - \zeta C_n B_n^1(l)\eta. \quad (4.2)$$

Аналогичное неравенство имеет место в случае $\nu^+ < \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножая обе части равенства (2.5) на x и интегрируя первое соотношение от 0 до l , а второе – от 0 до ∞ , вычитая второе соотношение из первого, получаем

$$B_{n+1}^1(l) - C_{n+1}^1 = \nu(l) + \int_0^\infty V_n(t) dt \int_0^{l+t} U_n(y)(y-t) dy.$$

Используя очевидные неравенства

$$\begin{aligned} B_{n+1}^1(l) &\leq B^1(l), \quad C_{n+1}^1 \geq C_n^1, \\ \int_0^{l+t} yU_n(y) dy &\geq B_n^1(l), \quad \int_0^{l+t} U_n(y) dy \leq B_n \leq B, \end{aligned}$$

получаем

$$C_n^1(I - B) + C_n B_n^1(l) \leq B^1(l) - \nu(l), \quad l < +\infty. \quad (4.3)$$

Умножая обе части (4.3) слева на ζ , а справа на η , приходим к (4.2). Лемма доказана.

Отметим, что неравенство (4.3) было доказано в [12] при более строгих предположениях.

4.2. Случай $\sigma = 0$. Из (4.2) следует ограниченность неубывающей числовой последовательности $\zeta C_n^1 \eta^*$. Поэтому

$$\zeta C_n^1 \eta^* \rightarrow z \in [0, \infty). \quad (4.4)$$

Совершая в (4.2) предельный переход при $n \rightarrow \infty$, получаем

$$z + \sigma(l) \leq \zeta^* B^1(l)\eta. \quad (4.5)$$

ЛЕММА 4.2. Пусть $\sigma = 0$ и $B, C \in P_N$. Тогда $\gamma^\pm = 1$; матрицы $I - C$, $I - B$ необратимы; $\eta^* = 0$, $\zeta^* = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что

$$\zeta^* = 0 \Rightarrow \eta^* = 0. \quad (4.6)$$

При $\zeta^* = 0$ из (4.5) будем иметь $z + \sigma(l) \leq 0$. Совершая предельный переход при $l \rightarrow \infty$, получаем $z \leq 0$. С учетом (4.4) получаем $z = 0$. Предположим, что $\eta^* \succ 0$. Тогда в силу неразложимости C имеем $C\eta^* \succ 0$. Если номер n достаточно большой, то $C_n\eta^* \succ 0$. Поэтому $C_n^1 \succ 0$ и $z > 0$. Из полученного противоречия следует (4.6). Аналогичным образом можно показать, что $\eta^* = 0 \Rightarrow \zeta^* = 0$. Остается применить лемму 2.1. Лемма доказана.

4.3. Случай $\sigma \neq 0$. Теорема о классификации.

ЛЕММА 4.3. Если $0 < \sigma \leq \infty$ или $-\infty \leq \sigma < 0$, то $\zeta^* \succ 0$ и $\eta^* \succ 0$ соответственно и имеют место утверждения леммы 2.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно рассмотреть случай $0 < \sigma \leq \infty$. Предположим, что $\zeta^* = 0$. Из (4.5) имеем $z + \sigma(l) \leq 0$. Совершая предельный переход при $l \rightarrow \infty$, приходим к противоречию: $z + \sigma \leq 0$. Поэтому $\zeta^* \succ 0$. Лемма доказана.

Объединяя леммы 4.2 и 4.3, с учетом леммы 3.2 и замечания 1) к лемме 2.1 приходим к следующей теореме.

ТЕОРЕМА 4.1 (о классификации факторизации (2.2)).

а) Пусть $\sigma = 0$ и $A^\pm \in P_N$. Тогда $\gamma^\pm = 1$; $B, C \in P_N$; $\eta^* = 0$, $\zeta^* = 0$.

б) Пусть $0 < \sigma \leq \infty$ и $A^+ \in P_N$. Тогда $\gamma^+ = 1$, $\gamma^- < 1$; $\eta^* = 0$, $\zeta^* > 0$; $B \in P_N$.

Если $\tau_p(K^+) < +\infty$, $p = 1, 2, \dots$, то $\tau_p(U) < +\infty$.

в) Пусть $-\infty \leq \sigma < 0$ и $A^- \in P_N$. Тогда $\gamma^+ < 1$, $\gamma^- = 1$; $\eta^* > 0$, $\zeta^* = 0$; $C \in P_N$.

Если $\tau_p(K^-) < +\infty$, $p = 1, 2, \dots$, то $\tau_p(V) < +\infty$.

§ 5. Применение факторизации (2.2) к уравнению (2.1)

5.1. Общие положения. Факторизация (2.2) сводит уравнение (2.1) к следующим двум уравнениям:

$$(J - \check{V})\varphi = g, \quad (5.1)$$

$$(J - \check{U})f = \varphi. \quad (5.2)$$

Предполагается, что g принадлежит одному из пространств $E^m(0, \infty)$. Для простоты некоторых формулировок без ограничения общности будем считать, что

$$g \geq 0.$$

Детальное рассмотрение всех интересных частных случаев уравнения (2.1) утомительно: вариантов много. Они охватывают неоднородные и однородные уравнения (1.1) и (1.2) в зависимости от значений $\gamma^\pm$, от существования моментов того или иного порядка у матриц-функций U и V , от разложимости или неразложимости матриц B и C , от функциональных свойств свободного члена g и требуемых свойств решения φ . Большинство этих частных случаев может быть рассмотрено по единой схеме. Поэтому достаточно перебрать лишь некоторые принципиальные варианты. В настоящем параграфе будут приведены некоторые формулы и факты общего характера.

5.2. Уравнение многомерного восстановления. В вопросах решения и изучения уравнений (5.1) и (5.2) существенную роль играют уравнения многомерного (марковского) восстановления вида (см. [20], [21], [13], [14])

$$\Phi(x) = W(x) + \int_0^x W(x-t)\Phi(t) dt, \quad (5.3)$$

где матрица-функция W удовлетворяет условиям

$$W \geq 0, \quad W \in L_+^{m \times m}, \quad \gamma \equiv r(G) \leq 1. \quad (5.4)$$

Здесь $G = \int_0^\infty W(t) dt$.

Уравнение (5.3) обладает единственным решением в классе матриц-функций, локально интегрируемых на $[0, \infty)$. При $\gamma < 1$ это решение обладает свойствами

$$0 \leq \Phi \in L_+^{m \times m}, \quad \int_0^\infty \Phi(x) dx = G(I - G)^{-1}.$$

В консервативном случае $\gamma = 1$ имеем $\Phi \notin L_+^{m \times m}$. В этом случае мы будем использовать результаты работ [13], [14].

Пусть выполнены условия консервативности

$$W \geq 0, \quad W \in L_+^{m \times m}, \quad G \in P_N, \quad \gamma = 1, \quad (5.5)$$

а η', ζ' — положительные (правый и левый) неподвижные векторы матрицы G :

$$\eta' = G\eta', \quad \zeta' = \zeta'G.$$

Имеет место следующая теорема восстановления.

ТЕОРЕМА R (восстановления). Пусть матрица W — ядро уравнения (5.3) — удовлетворяет условиям (5.5). Тогда

а) решение Φ имеет вид

$$\Phi(x) = \Phi_0 + \Phi_1(x) + \Phi_2(x) \equiv \Phi_0 + \Phi_3(x), \quad (5.6)$$

где $\Phi_0 = [\zeta' \tau_1(W) \eta']^{-1} \eta' \zeta'$, $\Phi_1 \in C_0^{m \times m}$, $\Phi_2 \in L_+^{m \times m}$; если $\tau_1(W) < \infty$, то $\Phi_0 = 0$;

б) если $\tau_2(W) < \infty$, то $\Phi_1, \Phi_3 \in L_+^{m \times m}$; если $\tau_k(W) < \infty$, $k \geq 2$, то $\tau_{k-2}(\Phi_3) < \infty$.

Утверждение а) теоремы доказано в [13; теорема 6.1]. Утверждение б) доказано в [14; теорема 5.1].

Обозначим через Φ^+ и Φ^- решения уравнения (5.3) в случаях $W = U$ и $W = V$ соответственно:

$$\Phi^+(x) = U(x) + \int_0^x U(x-t)\Phi^+(t) dt, \quad (5.7)$$

$$\Phi^-(x) = V(x) + \int_0^x V(x-t)\Phi^-(t) dt. \quad (5.8)$$

Согласно формуле (5.6) имеем

$$\Phi^\pm(x) = \Phi_0^\pm + \Phi_1^\pm(x) + \Phi_2^\pm(x) \equiv \Phi_0^\pm + \Phi_3^\pm(x), \quad (5.9)$$

где свойства $\Phi_k^\pm$ ($k = 0, \dots, 3$) определяются согласно теореме R, а соответствующие векторы $\eta^\pm, \zeta^\pm$ выбираются согласно соотношениям (2.12).

Функции Φ^+, Φ^- представляют собой резольвентные функции уравнений (5.2) и (5.1) соответственно. Прямой подстановкой (используя теорему Фубини [20]) можно убедиться, что эти уравнения обладают решениями вида

$$\varphi_b(x) = g(x) + \int_x^\infty \Phi^-(t-x)g(t) dt, \quad (5.10)$$

$$f_b(x) = \varphi_b(x) + \int_a^x \Phi^+(x-t)\varphi_b(t) dt, \quad (5.11)$$

если абсолютно сходятся интегралы, фигурирующие в этих соотношениях. В случае неоднозначной разрешимости уравнений (5.1) и (5.2) решение, построенное формулами (5.10) и (5.11), назовем *основным решением* (ОР) уравнения (2.1). Функции $\varphi_b(x)$ и $f_b(x)$ представляют собой минимальные решения соответствующих уравнений (см. [5]), т.е. $f_b \leq \tilde{f}$, $\varphi_b \leq \tilde{\varphi}$, где $\tilde{f}, \tilde{\varphi}$ – произвольные неотрицательные решения соответствующих уравнений. Напомним, что вектор-функция g считается неотрицательной. Функция f_b представляет собой минимальное решение также и уравнения (2.1) и тем самым является пределом по топологии L_{loc}^m следующих простых итераций (независимо от положительности g):

$$f^{(q+1)} = g + \check{K}f^{(q)}, \quad q = 0, 1, \dots, \quad f^{(0)} = 0.$$

Специальный интерес представляет выявление условий, при которых существует конечный предел основного решения в бесконечности. Решение однородного уравнения (1.1) ($g = 0$) строится несколько иным способом (см. § 7).

Всюду в дальнейшем без оговорки мы используем некоторые элементарные свойства свертки функций из тех или иных классов.

§6. Решение неоднородной консервативной системы Винера–Хопфа (1.1)

6.1. Случай $\gamma^- < 1, \gamma^+ = 1$. Рассмотрим уравнение (1.1) (т.е. уравнение (2.1) при $a = 0$) в условиях консервативности (1.3). Пусть $g \in E^m(0, \infty)$ и выполнены условия утверждения б) теоремы 4.1. Тогда $\gamma^- < 1, \gamma^+ = 1$ и уравнение (5.1) обладает единственным решением $\varphi \in E^m(0, \infty)$.

Рассмотрим теперь уравнение (5.2) (при $a = 0$). Оно имеет единственное решение в классе L_{loc}^m локально интегрируемых на $[0, \infty)$ вектор-функций. Это решение задается формулой (5.11). Используя формулу (5.6) для Φ^+ , приходим к следующей теореме.

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть выполнены условия

$$r(A) = 1, \quad A^+ \in P_N, \quad 0 < \sigma \leq \infty, \quad g \in E^m(0, \infty). \quad (6.1)$$

Тогда существует основное решение уравнения (1.1) $f_b \in L_{\text{loc}}^m$, причем:

а) если $g \in L_+^m$, то

$$f_b(x) = \mu + \rho(x) + \psi(x) \equiv \mu + h(x),$$

где $\mu = (\zeta^* G^+ \eta)^{-1} \left(\zeta^* \int_0^\infty \varphi(x) dx \right) \eta$, $\rho \in C_0^m$, $\psi \in L_+^m$;

б) если $g \in L_+^m \cap M_0^m$, то

$$\psi \in L_+^m \cap M_0^m, \quad \exists f_b(\infty) = \mu;$$

в) если $\tau_2(K^+) < \infty$, $\tau_1(g) < \infty$, то $h \in L_+^m$; если $\tau_p(K^+) < \infty$, $\tau_{p-1}(g) < \infty$, $p \geq 2$, то $\tau_{p-2}(|h|) < +\infty$;

г) если $g \in M$, то $f_b(x) = O(x)$, $x \rightarrow \infty$.

6.2. Случай $\gamma^- = 1, g \in L_+^m$. В указанном случае из формул (5.10) и (5.6) получаем следующее выражение для основного решения уравнения (5.1):

$$\varphi_b(x) = g(x) + \Phi_0^- \int_x^\infty g(t) dt + \int_0^\infty [\Phi_1^-(t) + \Phi_2^-(t)] g(x+t) dt,$$

откуда следует $\varphi_b \in C_0^m + L_+^m$. Если $g \in L_+^m \cap M_0^m$, то $\varphi_b - g \in C_0^m$.

Если $\tau_p(g) < +\infty$, $p \geq 1$, то $\tau_{p-1}(\varphi_b) < \infty$. Рассматривая уравнение (5.2) при $\gamma^- = 1, \gamma^+ < 1$, приходим к следующей теореме.

ТЕОРЕМА 6.2. Пусть $A^- \in P_N$, $r(A) = 1$, $g \in L_+^\infty$, $-\infty \leq \sigma < 0$. Тогда существует основное решение $f_b \in C_0^m + L_+^m$ уравнения (1.1), обладающее свойствами:

а) если $g \in L_+^m \cap M_0^m$, то $f_b \in C_0^m$;

б) если $\tau_p(g) < +\infty$, $\tau_p(K^+) < \infty$, $p \geq 1$, то $\tau_{p-1}(|f_b|) < \infty$. В частности, если $\tau_1(g) < \infty$, $\tau_1(K^+) < \infty$, то $f_b \in L_+^m$.

Пусть теперь $\gamma^\pm = 1$. Тогда символ уравнения (1.1) имеет двукратное вырождение. Случай, когда g обладает конечным моментом порядка $p \geq 1$, близок к случаю, когда выполнены условия (6.1) и g обладает конечным моментом порядка $p-1$.

ТЕОРЕМА 6.3. Пусть $r(A) = 1$, $A^\pm \in P_N$, $\sigma = 0$, $g \in L_+^m$. Тогда существует основное решение уравнения (1.1). Оно допускает представление $f_b(x) = \rho(x) + \psi(x)$, где $\psi \in L_+^m$, $\rho \in C^m[0, \infty)$, $\rho(x) = o(x)$, $x \rightarrow \infty$.

а) Если $\tau_1(g) < +\infty$, то $f_b(x) = \mu + \tilde{\rho}(x) + \psi(x)$, $\tilde{\rho} \in C_0^m$, $\psi \in L_+^m$. Если также $g \in M_0^m$, то $f_b(x) \rightarrow \mu$, $x \rightarrow \infty$, где $\mu = (\zeta' G^+ \eta)^{-1} \left[\zeta' \int_0^\infty \varphi(x) dx \right] \eta$.

б) Если $\tau_p(g) < +\infty$, $p \geq 2$, то $\tau_{p-2}(|f_b - \mu|) < \infty$.

6.3. Случай $\gamma^- = 1$, $g \notin L_+^m$. В предыдущем пункте мы рассматривали уравнение (1.1) в предположении $\gamma^- = 1$, $g \in L_+^m$. Если $g \in M_+^m$, то интеграл в (5.10) может расходиться. В таких случаях уравнение (5.1) не имеет положительного решения. Очевидным примером служит уравнение

$$\varphi(x) = g + \int_x^\infty V(t-x)\varphi(t) dt, \quad g = \text{const} (> 0). \quad (6.2)$$

В работе [22] показано, что если в скалярном ($m = 1$) уравнении (5.1) выполнены условия $\gamma^- = 1$, $\tau_1(V) < \infty$, $g \in M$, то существует “нефизическое” (знакопеременное) решение этого уравнения, которое может быть построено специальной процедурой. Ниже мы покажем возможность существования решения векторного уравнения (5.1) в условиях

$$\gamma^- = 1, \quad \tau_1(V) < \infty, \quad g \geq 0, \quad g \notin L_+^m. \quad (6.3)$$

Рассмотрим уравнение (6.2). Ищем его решение в виде $\varphi(x) = \alpha x + \beta$. Из (6.2) получаем следующие уравнения для определения α и β : $(I - C)\alpha = 0$, $(I - C)\beta = g + \tau_1(V)\alpha$. Имеем $\alpha = \lambda \eta^-$. Постоянная λ определяется из условия ортогональности вектора ζ к правой части уравнения для β . Как следствие получаем $\lambda = -[\zeta \tau_1(V) \eta^-]^{-1} \zeta g$, а β является решением линейной алгебраической системы $(I - C)\beta = g + \lambda \tau_1(V) \eta^-$. Вектор β определяется с точностью до слагаемого $s \eta^-$, которое представляет собой решение однородного уравнения. Об однородном уравнении более подробно речь пойдет в § 7.

Аналогичным образом можно построить решение уравнения (5.1) в случае, когда g является полиномом k -й степени от x , а ядро V обладает конечным моментом порядка $k + 1$. Тогда решение уравнения является полиномом степени $k + 1$.

На подробностях решения уравнения (1.1) при найденных видах функции φ мы останавливаться не будем. Отметим лишь, что в случае $\gamma^+ = 1$ функция f растет в бесконечности со скоростью, на единицу превышающей скорость роста φ .

Достаточно общим способом распространения свойств скалярного уравнения восстановления (УВ) на консервативные системы УВ является предложенный в [13] метод треугольной факторизации матричной структуры УВ. Сочетая треугольную факторизацию с факторизацией (2.2) и результатом работы [22], можно построить “нефизическое” решение векторного уравнения (1.1) в случае $\gamma^- = 1$, $g \in M_+^m$ в условиях конечности первого или второго момента ядра K .

Метод факторизации матричной структуры будет применен в п. 7.3 настоящей работы при изучении однородного уравнения.

§ 7. Однородная консервативная система уравнений Винера–Хопфа

7.1. Предварительные замечания. В настоящем параграфе мы используем факторизацию (2.2) для построения положительного решения консервативной однородной системы

$$S(x) = \int_0^\infty K(x-t)S(t) dt, \quad S(x) > 0. \quad (7.1)$$

Изучению (7.1) в скалярном случае посвящено огромное число исследований (см. [1]–[6], [23]). Задача включает в себя классическую проблему Милна в теории переноса излучения (см., например, [23]), ряд важных задач физической кинетики и теории вероятностей (см. [2], [6]).

Для скалярной задачи (7.1) в рамках приложений в теории вероятностей специально рассматриваются решения двух типов (см. [2]): P -решения и P^* -решения. В обоих случаях функция S должна быть неубывающей. В первом случае S считается ограниченной, а во втором случае – неограниченной.

В векторном случае задача (7.1) была поставлена в [13] и изучалась в [13], [14]. Результаты настоящей работы дают возможность значительно продвинуться в указанном направлении.

В случае $\gamma^- < 1$, $\gamma^+ = 1$ однородное уравнение (6.2) не имеет нетривиального решения в классе локально интегрируемых функций медленного (полиномиального) роста.

Нами будет рассмотрена задача (7.1) при следующих предположениях:

$$\gamma^- = 1, \quad C \in P_N. \quad (7.2)$$

7.2. Вопросы единственности. Вопрос описания общего решения консервативных уравнений (1.1) и (1.2) в тех или иных классах локально интегрируемых функций медленного роста недостаточно изучен даже в скалярном случае (см. [2], [5]). Ниже мы приведем один результат в указанном направлении. Рассмотрим однородное уравнение (5.1):

$$\varphi(x) = \int_x^\infty V(t-x)\varphi(t) dt. \quad (7.3)$$

При выполнении условий (7.2) это уравнение обладает очевидным нетривиальным решением $\varphi(x) = \lambda\eta^-$, $\lambda = \text{const}$, где η^- – положительный правый неподвижный вектор матрицы C (см. (2.12)).

В силу вольтерровой структуры уравнение (7.3) можно рассматривать как на положительной полуоси, так и на всей вещественной оси.

ЛЕММА 7.1. Пусть $\varphi \in M^m(-\infty, \infty)$ удовлетворяет уравнению (7.3). Тогда существует постоянная λ такая, что почти всюду

$$\varphi(x) = \lambda\eta^-, \quad x \in (-\infty, \infty). \quad (7.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В скалярном случае ($m = 1$) лемма является частным случаем теоремы 9.13 из [7]. Тогда

$$\varphi(x) = \lambda = \text{const}, \quad -\infty < x < \infty. \quad (7.5)$$

Этот факт может быть обобщен на векторный случай путем треугольной факторизации матричной структуры уравнения (7.3) методом работы [13].

Пусть $m > 1$. Рассмотрим следующую факторизацию:

$$J - \check{V} = (J - \check{T})(J - \check{W}), \quad (7.6)$$

где $\check{T}$ и $\check{W}$ – операторы вида $\check{V}$ с треугольными матричными ядрами: $T_{ij} = 0, j \geq i$; $W_{ij} = 0, j < i$.

Аналогично теореме 3.1 из [13] доказывается существование факторизации (7.6), причем

$$T, W \geq 0, \quad \int_0^\infty T(x) dx = P, \quad \int_0^\infty W(x) dx = Q,$$

где треугольные матрицы $P = (p_{ij})$, $Q = (q_{ij})$ обладают свойствами:

$$\begin{aligned} p_{ij} = 0, \quad j \geq i, \quad q_{ij} = 0, \quad j < i, \quad q_{mm} = 1, \quad q_{kk} < 1, \quad k < m, \\ Q\eta^- = \eta^-, \quad \zeta - \zeta P = (0, \dots, 0, \zeta_m) \succ 0. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Матрица P нильпотентна (с индексом $\leq m$). Поэтому оператор $J - \check{T}$ обратим в пространстве $M^m(-\infty, \infty)$. Следовательно, в силу разложения (7.6) построение ограниченного решения (7.3) сводится к следующей рекуррентной однородной системе:

$$(J - \check{W})\varphi = 0. \quad (7.8)$$

Рассмотрим последнее уравнение системы (7.16):

$$\varphi_m(x) = \int_x^\infty W_{mm}(t-x)\varphi_m(t) dt. \quad (7.9)$$

Из свойств (7.7) следует консервативность ядра скалярного уравнения (7.9). Поэтому в силу справедливости леммы в скалярном случае имеем $\varphi_m(x) = \lambda\eta_m^-$, $\lambda = \text{const}$. Из неравенств $q_{kk} < 1, k < m$ (см. (7.7)), следует, что рекуррентная (назад) система (7.8) обладает единственным ограниченным решением φ при любом значении λ . С учетом равенства $Q\eta^- = \eta^-$ (см. (7.7)) легко убедиться, что этим решением является $\varphi(x) = \lambda\eta^-$. Лемма доказана.

ЛЕММА 7.2. Пусть $\varphi \in M^m(0, \infty)$ удовлетворяет уравнению (7.3). Тогда

$$\varphi(x) = \lambda\eta^-, \quad x \in (0, \infty), \quad \lambda = \text{const}. \quad (7.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть функция $\varphi \in M^m(0, \infty)$ удовлетворяет уравнению (7.3) на положительной полуоси. Тогда в силу положительности вектора η^- существует положительная постоянная λ' такая, что

$$|\varphi(x)| \leq \lambda' \eta^-. \quad (7.11)$$

Продолжим это решение на отрицательную полуось. При $x < 0$ уравнение (7.3) можно переписать в виде:

$$\varphi(x) = \psi(x) + \int_x^0 V(t-x)\varphi(t) dt \quad (7.12)$$

со свободным членом

$$\psi(x) = \int_0^\infty V(t-x)\varphi(t) dt, \quad x < 0.$$

С учетом (7.11) получаем

$$|\psi(x)| \leq \lambda' \left[C - \int_0^{-x} V(t) dt \right] \eta^-. \quad (7.13)$$

Из оценки (7.13) легко следует, что неравенство (7.11) выполняется также на отрицательной полуоси. Сказанное означает, что продолженная вектор-функция φ является ограниченным решением уравнения (7.3) на всей прямой. Согласно лемме 7.1 имеем равенство (7.4), откуда следует (7.10). Лемма доказана.

7.3. Решение задачи (7.1). Напомним, что задача (7.1) рассматривается в условиях (7.2). Факторизация (2.2) сводит задачу к однородному уравнению (7.3) и неоднородному уравнению (5.2). Пусть S_0 – решение уравнения (5.2) при $\varphi(x) = \eta^-$:

$$S_0(x) = \eta^- + \int_0^x U(x-t)S_0(t) dt.$$

Используя формулу (5.11), получаем

$$S_0(x) = \left[I + \int_0^x \Phi^+(t) dt \right] \eta^-. \quad (7.14)$$

Формулой (7.14) определяется монотонно возрастающая абсолютно непрерывная вектор-функция S_0 .

Если $\gamma^+ < 1$, то

$$S_0 \in C_l^m, \quad S_0(+\infty) = G(I - G)^{-1} \eta^-. \quad (7.15)$$

Очевидно, что в этом случае S_0 является решением задачи (7.1).

Если $\gamma^+ = 1$, то S_0 неограничена: $S_0(+\infty) \neq \infty$. Тогда возникает необходимость обосновать, что S_0 удовлетворяет исходному уравнению (7.1). Дело в том, что факторизация (2.2) была построена как равенство операторов, действующих

в пространствах E^m , а S_0 в данном случае не принадлежит ни одному из этих пространств. Тем не менее, аналогично скалярному случаю (см. [5]) можно показать, что S_0 удовлетворяет уравнению (7.1).

Пусть наряду с (7.2) выполняются условия $\gamma^+ = 1$, $B \in P_N$. Тогда можно воспользоваться формулой (5.9) для резольвентной функции Φ^+ , что приводит к следующему представлению:

$$S_0(x) = (\Phi_0^+ \eta^-)x + \eta^- + \rho(x), \quad (7.16)$$

где

$$\rho(x) = \int_0^x \Phi_3^+(t) \eta^- dt, \quad \rho(x) = o(x), \quad x \rightarrow \infty. \quad (7.17)$$

Если $\tau_2(U) < \infty$, то

$$S_0(x) = (\Phi_0^+ \eta^-)x + \left[I + \int_0^\infty \Phi_3^+(t) dt \right] \eta^- - \tilde{\rho}(x), \quad (7.18)$$

где $\tilde{\rho}(x) = \int_x^\infty \Phi_3^+(t) \eta^- dt \in C_0^m$. Если $\tau_p(U) < \infty$, $p \geq 3$, то $\tau_{p-3}(|\tilde{\rho}|) < \infty$.

Используя условия леммы 3.2 существования моментов у ядра U и лемму единственности 7.2, приходим к следующей теореме.

ТЕОРЕМА 7.1. а) Пусть выполнены условия

$$r(A) = 1, \quad A^- \in P_N, \quad -\infty \leq \sigma \leq 0. \quad (7.19)$$

Тогда задача (7.1) обладает решениями вида $S(x) = \lambda S_0(x)$, где $\lambda > 0$, а S_0 — абсолютно непрерывная неубывающая вектор-функция, и имеет место формула (7.14).

б) Если $-\infty \leq \sigma < 0$, то S_0 обладает свойствами (7.15). Формулой $S(x) = \lambda S_0(x)$ задается общее решение задачи (7.1) в классе ограниченных вектор-функций.

в) Если $\sigma = 0$, $A^\pm \in P_N$, то имеет место формула (7.16). Если $\tau_p(K^+) < \infty$, $p \geq 4$, то $\tau_{p-4}(|\tilde{\rho}|) < \infty$.

Аналогичные утверждения могут быть сформулированы в случае, когда ядро K обладает одним из свойств симметрии, упомянутых в лемме 3.1. Некоторые результаты для этого случая были получены в [13], [14].

Вопросы единственности решения задачи (6.1) при $\sigma = 0$ мы рассматривать не будем. Ожидается следующий результат: решениями вида $S(x) = \lambda S_0(x)$, $\lambda > 0$, исчерпываются все решения задачи (6.1) в классе неубывающих вектор-функций (в скалярном симметрическом случае см. [2]).

§ 8. Многомерное уравнение восстановления на всей прямой

8.1. Общие положения. В настоящем параграфе мы будем заниматься вопросом применения факторизации (2.2) к уравнению (1.2).

Скалярное консервативное уравнение (1.2) является частным случаем (когда исходная мера обладает плотностью) известного в теории вероятностей уравнения восстановления на всей прямой (см. [6]–[9]). Наиболее известным результатом в этом направлении является теорема Карлина (см. [7; теорема 9.15]). В случае скалярного уравнения (1.2) эта теорема может быть сформулирована в следующем виде.

ТЕОРЕМА К (С. Карлин). *Пусть плотность вероятностей K удовлетворяет условиям*

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |x|K(x) dx < +\infty, \quad \nu \equiv \int_{-\infty}^{\infty} xK(x) dx \neq 0, \\ g \in L_1(-\infty, \infty), \quad g(\pm\infty) = 0. \end{aligned}$$

Пусть f – ограниченная функция, удовлетворяющая уравнению (1.2). Тогда пределы $f(\pm\infty)$ существуют и

$$f(+\infty) - f(-\infty) = \nu^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx.$$

В работе автора [9] показано, что в условиях теоремы К ограниченность g является необходимым и достаточным условием для существования ограниченного решения.

Векторное уравнение (1.2) до сих пор было недоступно методам гармонического анализа и другим методам скалярной теории. Если в скалярном случае роль сигнатуры и численного значения первого момента ядра K интуитивно очевидны, то в векторном случае ситуация существенно сложнее.

Бесконечность нижнего предела интегрирования в (1.2) качественно изменяет ситуацию по сравнению с уравнением Винера–Хопфа. Резко сокращается число содержательных вариантов, подлежащих рассмотрению в рамках задачи о построении положительных решений уравнения (1.2). Так, в случае “застоя” $\gamma^{\pm} = 1$ (например, при $\sigma = 0$) такое решение может не существовать даже при $g \in L^m := L_1^m(-\infty, \infty)$. Аналогично обстоит дело в случае простого вырождения, если $g \notin L_+^m$. Мы подтвердим сказанное в случае конечного первого момента ядра K . Этот факт имеет простую физическую (вероятностную) интерпретацию. Случаи $\gamma^- < 1$ и $\gamma^+ < 1$ эквивалентны (в отличие от уравнения Винера–Хопфа). Они сводятся друг к другу изменением ориентации координатной оси. Для рассмотрения нам остается случай

$$g \in L^m, \quad \gamma^- < 1. \tag{8.1}$$

8.2. Решение уравнения (1.2) в условиях (8.1). Уравнение (5.1) ($a = -\infty$) в условиях (8.1) имеет единственное решение $\varphi \in L^m$. Имеют место формула (5.10) и равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = (I - C)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx. \quad (8.2)$$

Уравнение (5.2) обладает основным (минимальным) решением f_b . Согласно формуле (5.11) имеем

$$f_b(x) = \varphi(x) + \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^+(x-t)\varphi(t) dt, \quad (8.3)$$

где резольвентная матрица-функция Φ^+ определяется из уравнения (5.7).

Однородное уравнение (5.2) обладает очевидными решениями

$$\tilde{f}(x) = \lambda \eta, \quad \lambda = \text{const.}$$

Используя формулу (5.9), получаем следующее представление для f_b :

$$f_b(x) = \rho(x) + \psi(x), \quad (8.4)$$

где

$$\rho(x) = \Phi_0^+ \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt + \int_{-\infty}^x \Phi_1^+(x-t)\varphi(t) dt, \quad \psi(x) = \int_{-\infty}^x \Phi_2^+(x-t)\varphi(t) dt. \quad (8.5)$$

Имеем $\psi \in L^m$. Аналогично скалярному случаю показывается, что $\rho \in C_l^m$. Имеем

$$\rho(-\infty) = 0, \quad \rho(+\infty) = \sigma_0^{-1} \left[\zeta^* \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx \right] \eta. \quad (8.6)$$

Некоторые дополнительные свойства g легко переносятся на вектор-функции φ, ψ :

$$\begin{aligned} &\text{если } g \in L^m \cap M^m, \text{ то } \varphi, \psi \in L^m \cap M^m; \\ &\text{если } g \in L^m \cap M_0^m, \text{ то } \varphi, \psi \in L^m \cap M_0^m. \end{aligned}$$

Пусть g обладает конечными моментами высших порядков на положительной полуоси. Из формулы (5.10) следует:

$$\tau_p(g) < \infty \Rightarrow \tau_p(\varphi_b) < \infty, \quad p \geq 0.$$

8.3. Теорема восстановления. Ниже мы покажем, что вектор $\rho(+\infty)$ можно выразить через прямые характеристики K и g . Убедимся, что имеет место формула

$$\rho(+\infty) = \sigma^{-1} \left[\zeta \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx \right] \eta \equiv \mu. \quad (8.7)$$

Если матрицы B^1 и C^1 (см. (3.1)) конечны, то верно соотношение $(I - C)B^1 - C^1(I - B) = \nu$ (см. п. 3.4), откуда получаем

$$\sigma_0 \equiv \zeta^* B^1 \eta = \sigma. \quad (8.8)$$

Если $\omega < \infty$, то формулу (8.8) можно доказать аналогично скалярному случаю (см. [9; лемма 3.1]). Формула (8.7) следует из (8.6), (8.2) и (8.8).

Нами доказана следующая теорема восстановления.

ТЕОРЕМА 8.1. Пусть в уравнении (1.2) $-\infty \leq \sigma \leq \infty$, $\sigma \neq 0$; $g \in L^m$. Если выполнено одно из условий

$$0 < \sigma \leq \infty, \quad A^+ \in P_N \quad (8.9)$$

или

$$-\infty \leq \sigma < 0, \quad A^- \in P_N, \quad (8.10)$$

то уравнение (1.2) обладает основным решением

$$f_b = \rho + \psi, \quad \psi \in L^m, \quad \rho \in C_l^m.$$

Если выполнены условия (8.9), то $\rho(-\infty) = 0$, $\rho(+\infty) = \mu$ (где μ определяется согласно (8.7)).

Если выполнены условия (8.10), то $\rho(-\infty) = -\mu$, $\rho(+\infty) = 0$.

Если $\sigma = \pm\infty$, то $\mu = 0$.

Если $g \in L^m \cap M^m$, то $\psi \in L^m \cap M^m$.

Если $g \in L^m \cap M_0^m$, то $\psi \in L^m \cap M_0^m$ и имеет место следующая формула

$$\rho(+\infty) - \rho(-\infty) = \sigma^{-1} \left[\zeta \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx \right] \eta. \quad (8.11)$$

В этом случае общее решение задачи в классе ограниченных вектор-функций имеет вид (см. лемму 7.1):

$$f(x) = f_b(x) + \lambda \eta, \quad \lambda = \text{const.}$$

Список литературы

1. Крейн М. Г. Интегральные уравнения на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов // УМН. 1958. Т. 13. №5. С. 3–120.
2. Spitzer F. The Wiener-Hopf equation, whose kernel is a probability density // Duke Math. J. 1957. V. 24. №3. P. 323–343.
3. Пресдорф З. Некоторые классы сингулярных уравнений. М.: Мир, 1979.
4. Енгибарян Н. Б., Арутюнян А. А. Интегральные уравнения на полупрямой с разностными ядрами и нелинейные функциональные уравнения // Матем. сб. 1975. Т. 97. №1. С. 35–58.
5. Арабаджян Л. Г., Енгибарян Н. Б. Уравнения свертки и нелинейные функциональные уравнения // Итоги науки и техники. Матем. анализ. Т. 22. М.: ВИНТИ, 1984. С. 175–240.
6. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984.
7. Рудин В. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.
8. Stone C. J. On absolutely continuous components and renewal theory // Ann. Math. Statist. 1966. V. 37. P. 271–275.
9. Yengibarjan N. B. Renewal equation on the whole line // Stochastic Process. Appl. 2000. V. 85. P. 237–247.
10. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов // УМН. 1958. Т. 13. №2. С. 3–72.
11. Енгибарян Н. Б. Факторизация матриц-функций и нелинейные интегральные уравнения // Изв. АН Арм. ССР. Сер. матем. 1980. Т. 15. №3. С. 233–244.

12. *Енгибарян Н. Б., Арабаджян Л. Г.* Системы интегральных уравнений Винера–Хопфа и нелинейные уравнения факторизации // Матем. сб. 1984. Т. 124 (166). № 2 (6). С. 189–216.
13. *Енгибарян Н. Б.* Теоремы восстановления для системы интегральных уравнений // Матем. сб. 1998. Т. 189. № 12. С. 59–72.
14. *Енгибарян Н. Б.* Асимптотические и структурные теоремы для уравнения марковского восстановления // Теория вероятн. и ее примен. (в печати).
15. *Гермогенова Т. А.* Локальные свойства решений уравнения переноса. М.: Наука, 1986.
16. *Ланкастер П.* Теория матриц. М.: Наука, 1978.
17. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1988.
18. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981.
19. *Арабаджян Л. Г.* О факторизации консервативных интегральных операторов Винера–Хопфа // Матем. заметки. 1989. Т. 46. № 1. С. 3–10.
20. *Королюк В. С., Броди С. М., Турбин А. Ф.* Подумарковские процессы и их применение // Итоги науки и техники. Теория вероятностей, матем. статистика, кибернетика. Т. 11. М.: ВИНТИ, 1974. С. 47–97.
21. *Севастьянов Б. А., Чистяков В. П.* Уравнения многомерного восстановления и моменты ветвящихся процессов // Теория вероятн. и ее примен. 1971. Т. 16. № 2. С. 207–217.
22. *Григорян Г. А.* Разрешимость одного класса интегральных уравнений Винера–Хопфа // Изв. НАН РА. Сер. матем. 1996. Т. 31. № 2.
23. *Соболев В. В.* Курс теоретической астрофизики. М.: Наука, 1985.

Бюраканская астрофизическая
обсерватория НАН РА, Армения

Поступила в редакцию
11.03.2001