Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Климов, Бесконечномерная версия теории Морса для липшицевых функционалов, *Матем. сб.*, 2002, том 193, номер 6, 105–122

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm662>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 12:29:09

УДК 517.946

В. С. Климов

Бесконечномерная версия теории Морса для липшицевых функционалов

Изучаются типовые числа критических точек липшицевых функционалов, определенных на конечно-дефектных подмногообразиях сепарабельного рефлексивного пространства. Устанавливаются варианты неравенств Морса. Показывается, что топологический индекс изолированной критической точки равен альтернированной сумме ее типовых чисел.

Библиография: 22 названия.

Введение

В статье изучаются типовые числа критических точек липшицевых функционалов, определенных на конечно-дефектных подмногообразиях сепарабельного рефлексивного пространства. Устанавливаются варианты неравенств Морса. Показывается, что топологический индекс изолированной критической точки равен альтернированной сумме ее типовых чисел.

Первоначально бесконечномерные версии результатов Морса доказывались для класса C^2 дважды непрерывно дифференцируемых функционалов (см., например, [1] и приведенную там библиографию). Развитая теория оказалась неприменимой к интегральным функционалам на пространствах Соболева, принадлежащим C^2 лишь при существенных дополнительных ограничениях. В связи с этим в [2] предложен вариант теории Морса для функционалов класса $C^{1,1}$. Мы снижаем порядок гладкости функционалов (по сравнению с [2]) на единицу. Полученные результаты применимы, в частности, к негладким функционалам многомерного вариационного исчисления.

Основные обозначения: $\overline{\mathfrak{M}}^{\circ}(\mathfrak{M}, \partial\mathfrak{M})$ – замыкание (внутренность, граница) подмножества $\mathfrak{M}$ метрического пространства $(\mathfrak{X}, \rho)$;

$$\theta_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{N}, \mathfrak{M}) = \sup_{x \in \mathfrak{N}} \inf_{y \in \mathfrak{M}} \rho(x, y)$$

– уклонение множества $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{X}$ от множества $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{X}$ в метрике ρ ; в B -пространстве (банаховом пространстве) X с нормой $\|\cdot\|$ метрика ρ вводится равенством $\rho(x, y) = \|x - y\|$; через $\Gamma(X)$ обозначается совокупность конечномерных подпространств B -пространства X ; X^* – сопряженное к X пространство, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – каноническая билинейная форма на $X \times X^*$; $s(x^*, \mathscr{D}) = \sup\{\langle x, x^* \rangle, x \in \mathscr{D}\}$ ($x^* \in X^*$) – опорная функция множества $D \subset X$; $\text{Cv}(X)$ – совокупность всех непустых выпуклых замкнутых подмножеств B -пространства X ; $\mathfrak{B}_X = \{x \in X, \|x\| \leq 1\}$ – единичный шар

пространства X . Далее, $\mathcal{L}(X, Y)$ – B -пространство непрерывных линейных отображений B -пространства X в B -пространство Y ; $\text{Ker } A$, $\text{Im } A$ – ядро и область значений линейного отображения $A: X \rightarrow Y$. Если $\text{Im } A = Y$, то A называют эпиморфизмом X на Y ; в этом случае верна оценка $\theta_X(0, A^{-1}y) \leq C\|y\|$, наименьшая из подобных постоянных C обозначается через $\varkappa(A)$ и называется константой Банаха эпиморфизма $A: X \rightarrow Y$.

Через $\Lambda(\mathcal{D}, Y)$ обозначается совокупность отображений (не обязательно линейных) множества $\mathcal{D} \subset X$ в B -пространство Y , удовлетворяющих локальному условию Липшица, т.е. $h \in \Lambda(\mathcal{D}, Y)$, если для каждой точки x из $\mathcal{D}$ найдутся ее относительная окрестность O и константа L такие, что $\|h(x_1) - h(x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\|$ ($x_1, x_2 \in O$); полагаем $\Lambda(\mathcal{D}, \mathbb{R}) = \Lambda(\mathcal{D})$. Стандартным образом определяются классы непрерывных, вполне непрерывных, слабо непрерывных и усиленно непрерывных отображений из $\mathcal{D} \subset X$ в Y (см., например, [3; §1], [4; §§1, 5]); далее $C^1(\mathcal{D}, Y)$ – класс непрерывно дифференцируемых отображений области $\mathcal{D} \subset X$ в пространство Y , $C^{1,1}(\mathcal{D}, Y)$ – часть $C^1(\mathcal{D}, Y)$, состоящая из отображений $h: \mathcal{D} \rightarrow Y$, для которых отображение $x \rightarrow h'(x)$ принадлежит классу $\Lambda(\mathcal{D}, \mathcal{L}(X, Y))$.

Многозначное отображение множества $\mathcal{D}_1$ в множество $\mathcal{D}_2$ – это оператор, сопоставляющий элементу x из $\mathcal{D}_1$ некоторое множество $\mathcal{F}(x) \subset \mathcal{D}_2$; если $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}_1$, то $\mathcal{F}(\mathcal{D}) = \bigcup_{x \in \mathcal{D}} \mathcal{F}(x)$ – область значений отображения $\mathcal{F}$ на множестве $\mathcal{D}$. Отображение $\mathcal{F}: \mathcal{D}_1 \rightarrow \mathcal{D}_2$ ($\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ – подмножества метрических пространств $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2$ соответственно) называют ограниченным, если для каждого ограниченного множества $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}_1$ область значений $\mathcal{F}(\mathcal{D})$ есть ограниченное подмножество $\mathfrak{R}_2$. Оператор тождественного преобразования обозначается символом I . Все рассматриваемые в статье банаховы пространства предполагаются действительными.

§1. Типовые числа критических значений

Всюду далее V – сепарабельное бесконечномерное рефлексивное B -пространство, V^* – сопряженное к нему, символы “ $\rightarrow$ ” и “ $\rightharpoonup$ ” означают сильную и слабую сходимость соответственно; $\mathbb{R}^k$ – k -мерное евклидово пространство точек $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)$, $C^1(V, \mathbb{R}^k)$ – класс непрерывно дифференцируемых отображений из V в $\mathbb{R}^k$. Если $h \in C^1(V, \mathbb{R}^k)$, $x \in V$ и производная $h'(x): V \rightarrow \mathbb{R}^k$ есть эпиморфизм, то x называют *регулярной точкой* отображения h . Элемент $\xi \in \mathbb{R}^k$ именуют *регулярным значением* отображения h , если множество $h^{-1}(\xi) = \{x \in V, h(x) = \xi\}$ либо пусто, либо состоит из регулярных точек. Регулярное значение ξ из $\mathbb{R}^k$ назовем *равномерно регулярным*, если константа Банаха $\varkappa(h'(x))$ оператора $h'(x)$ равномерно ограничена на каждом из множеств $h^{-1}(\xi) \cap R\mathfrak{B}_V$ ($R < \infty$). Если оператор $h': V \rightarrow \mathcal{L}(V, \mathbb{R}^k)$ усиленно непрерывен, то каждое регулярное значение равномерно регулярно.

Ниже рассматривается множество M , определяемое равенством

$$M = g^{-1}(\xi) = \{v \in V, g(v) = \xi\}, \quad (1)$$

где $g = (g_1, \dots, g_k)$ – оператор класса $C^{1,1}(V, \mathbb{R}^k)$, удовлетворяющий условиям:

Ig) оператор $g': V \rightarrow \mathcal{L}(V, \mathbb{R}^k)$ вполне непрерывен;

IIg) ξ – равномерно регулярное значение оператора g , $M = g^{-1}(\xi) \neq \emptyset$.

Условие Ig) влечет усиленную непрерывность оператора $g: V \rightarrow \mathbb{R}^k$ [3; §7]. В частности, множество M слабо замкнуто в пространстве V . Для каждой точки u из M касательное к $C^{1,1}$ -многообразию $M \subset V$ пространство $T_u M$ можно идентифицировать с ядром $\text{Ker } g'(u) \subset V$ оператора $g'(u): V \rightarrow \mathbb{R}^k$, обозначаемым далее символом T_u . Очевидно, T_u имеет коразмерность k : $\text{codim } T_u = k$; в этом смысле M – конечно-дефектное подмногообразие пространства V . Далее, $\mathcal{N}(u) = T_u^\perp = \{v^* \in V^*, \langle v, v^* \rangle = 0 \ \forall v \in T_u\}$ – аннулятор пространства T_u . Очевидно, что $\mathcal{N}(u) = \{v^* \in V^*, v^* = \lambda^* g'(u) = \lambda_1 g'_1(u) + \dots + \lambda_k g'_k(u), \lambda_i \in \mathbb{R}\}$.

Пусть Q – замкнутое подмножество пространства V . Обозначим через $S(Q)$ совокупность ограниченных многозначных отображений (м-отображений) $\mathcal{F}: Q \rightarrow V^*$, удовлетворяющих условиям:

- 1) $\mathcal{F}(u) \in \text{Cv}(V^*)$ для каждого u из Q ;
- 2) для произвольных последовательностей $v_i \in Q$, $v_i^* \in \mathcal{F}(v_i)$, обладающих свойствами

$$v_i \rightarrow v, \quad v_i^* \rightarrow v^*, \quad \overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} \langle v_i, v_i^* \rangle \leq \langle v, v^* \rangle, \quad (2)$$

имеют место соотношения: $v_i \rightarrow v, v^* \in \mathcal{F}(v)$.

Аналогичные классы однозначных отображений рассматривались в [2]–[7]. Примеры м-отображений класса $S(Q)$ можно найти в [8], [9]; близкие вопросы обсуждаются в §3 нашей статьи. Сужение м-отображения класса $S(Q)$ на замкнутое множество $Q_0 \subset Q$ есть отображение класса $S(Q_0)$. В частности, сужение отображения $\mathcal{F}$ класса $S(V)$ на определяемое равенством (1) многообразие M есть отображение класса $S(M)$.

С произвольным м-отображением $\mathcal{F}$ класса $S(M)$ свяжем м-отображение $\mathcal{F}_M$, сопоставляющее элементу $u \in M$ множество сужений функционалов v^* из $\mathcal{F}(u)$ на пространство T_u . Таким образом, $\mathcal{F}_M(u)$ есть множество класса $\text{Cv}(T_u^*)$. Элемент $u \in M$ назовем *особой точкой* отображения $\mathcal{F}_M$, если $0 \in \mathcal{F}_M(u)$, что эквивалентно требованию $0 \in \mathcal{F}(u) + \mathcal{N}(u)$. С учетом данного ранее описания пространства $\mathcal{N}(u)$ получаем, что особые точки отображения $\mathcal{F}_M$ совпадают с решениями операторного включения

$$0 \in \mathcal{F}(u) + \lambda^* g'(u), \quad g(u) = \xi,$$

где векторный параметр $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ играет роль естественного обобщения собственного значения, $\lambda^* g'(u) = \lambda_1 g'_1(u) + \dots + \lambda_k g'_k(u)$, равенство $g(u) = \xi$ задает некоторое условие нормировки.

Множество $\mathfrak{M}$ назовем *особым* для поля $\mathcal{F}$, если любой элемент u из $\mathfrak{M}$ есть особая точка отображения $\mathcal{F}_M$. Особое множество изолировано, если в некоторой его окрестности нет других особых точек отображения $\mathcal{F}_M$. Пересечение множества особых точек отображения $\mathcal{F}$ класса $S(M)$ с любым шаром $R\mathfrak{B}_V$ компактно [10]. Отображение $\mathcal{F}$ класса $S(M)$ назовем *невыврожденным* на множестве $\mathfrak{M} \subset M$, если $\mathfrak{M}$ не содержит особых точек отображения $\mathcal{F}_M$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 [10]. Пусть м-отображение $\mathcal{F}$ класса $S(M)$ невыврождено на замкнутом множестве $\mathfrak{M} \subset M$, причем $\theta_V(\mathfrak{M}, 0) < R$. Тогда существуют пространство E из $\Gamma(V)$, равномерно ограниченное отображение w

класса $\Lambda(M \cap R\mathfrak{B}_V, E)$ и постоянная $\delta > 0$, обладающие свойствами

$$\begin{aligned} w(y) - y &\in T_y \quad (y \in M \cap R\mathfrak{B}_V), \\ \|w(y)\| &\leq R, \quad s(w(y) - y, \mathcal{F}(y)) < -\delta \quad (y \in \mathfrak{M}). \end{aligned} \quad (3)$$

Пространство E , отображение w и постоянная δ , обладающие отмеченными в предложении 1 свойствами, определяются неоднозначно. Опишем один из способов выбора пространства E . Последовательность $E_n \in \Gamma(V)$ ($n = 1, 2, \dots$) назовем *исчерпывающей пространство V* , если $E_n \subset E_{n+1}$ и $\bigcup_n E_n = V$. Фиксируем исчерпывающую V последовательность $E_n \in \Gamma(V)$ ($n = 1, 2, \dots$), $M \cap E_1 \neq \emptyset$, $\dim E_1 > k$. В качестве пространства E можно взять, например, пространство E_n при достаточно большом n . Неравенство (3) влечет соотношение $\langle y - w(y), y^* \rangle > \delta$ ($y \in \mathfrak{M}$, $y^* \in \mathcal{F}(y)$); в этом смысле поле $I - w$ есть конечномерная остроугольная аппроксимация м-отображения $\mathcal{F}$ [11].

Пусть Ω – ограниченное открытое (в относительной топологии) подмножество многообразия M , $\partial\Omega$ – граница области Ω . Если м-отображение $\mathcal{F}$ класса $S(M)$ невырождено на $\partial\Omega$, то согласно предложению 1 существуют E из $\Gamma(V)$ и поле w класса $\Lambda(\partial\Omega, E)$ такие, что

$$y - w(y) \in T_y, \quad \langle y - w(y), y^* \rangle > 0, \quad y \in \partial\Omega, \quad y^* \in \mathcal{F}(y), \quad (4)$$

и $\Omega \cap E \neq \emptyset$. Поскольку $\partial(\Omega \cap E) \subset \partial\Omega \cap E$, поле $I - w$ невырождено на $\partial(\Omega \cap E)$. Поэтому определено вращение $\gamma(I - w, \Omega \cap E)$ поля $I - w$ на $\partial(\Omega \cap E)$ (см., например, [12; часть 2, § 6]). Это вращение не зависит от произвола в способе выбора пространства E и поля w , подчиненных требованиям (4). Число $\gamma(I - w, \Omega \cap E)$ назовем *вращением поля $\mathcal{F}_M$ на $\partial\Omega$* и обозначим символом $\gamma(\mathcal{F}_M, \Omega)$.

Отметим некоторые свойства вращения. Если отображение $\mathcal{F}$ невырождено на $\overline{\Omega}$, то $\gamma(\mathcal{F}_M, \Omega) = 0$ (принцип нулевого вращения). Вращение аддитивно и гомотопически инвариантно; доказательства проводятся по стандартным схемам [2], [4], [10]–[13]. Если $\mathfrak{N}$ – ограниченное изолированное особое множество м-отображения $\mathcal{F}$, то для ограниченных окрестностей O множества $\mathfrak{N}$ таких, что поле $\mathcal{F}$ невырождено на $O \setminus \mathfrak{N}$, вращение $\gamma(\mathcal{F}_M, O)$ одинаково. Оно называется *индексом особого множества $\mathfrak{N}$* и обозначается символом $\text{ind}(\mathfrak{N}, \mathcal{F}_M)$. Если отображение $\mathcal{F}$ невырождено на границе ограниченного открытого множества $\Omega \subset M$, то в области Ω существует лишь конечное число изолированных особых множеств $\mathfrak{N}_1, \dots, \mathfrak{N}_r$ отображения $\mathcal{F}$ и $\gamma(\mathcal{F}_M, \Omega) = \text{ind}(\mathfrak{N}_1, \mathcal{F}_M) + \dots + \text{ind}(\mathfrak{N}_r, \mathcal{F}_M)$ (вариант теоремы об алгебраическом числе особых точек).

Основное внимание далее уделяется потенциальным отображениям. Приведем некоторые определения. Пусть $\mathcal{D}$ – подмножество B -пространства X , $h \in \Lambda(\mathcal{D})$, $v \in \overset{\circ}{\mathcal{D}}$. *Обобщенная производная $h^0(v; \bar{v})$ функционала h по направлению $\bar{v}$ в точке v* определяется равенством

$$h^0(v; \bar{v}) = \overline{\lim}_{u \rightarrow v, t \rightarrow +0} \frac{h(u + t\bar{v}) - h(u)}{t} \quad (\bar{v} \in X).$$

Множество $\partial h(v) = \{v^* \in X^*, \langle \bar{v}, v^* \rangle \leq h^0(v; \bar{v}) \forall \bar{v} \in X\}$ называют *обобщенным градиентом* функционала h в точке v . Известно, что $\partial h(v) \in \text{Cv}(X^*)$ и $h(v; \bar{v}) = \max\{\langle \bar{v}, v^* \rangle, v^* \in \partial h(v)\}$ [14; гл. 2].

Отображение $\mathcal{F}$ класса $S(M)$ назовем *потенциальным*, если существуют содержащее M открытое множество $O \subset V$ и функционал f класса $\Lambda(O)$ такие, что $\mathcal{F}(u) = \partial f(u)$ ($u \in M$). В этом случае функционал f назовем *потенциалом* отображения $\mathcal{F}$, особые точки отображения $\mathcal{F}_M$ – *критическими точками* функционала f , неособые точки $\mathcal{F}_M$ – *регулярными точками* f . Если $\mathcal{K}_f$ – множество критических точек функционала f , то $f(\mathcal{K}_f)$ – множество критических, а $\mathbb{R} \setminus f(\mathcal{K}_f)$ – множество регулярных значений f .

Напомним некоторые понятия алгебраической топологии. Пусть $\mathfrak{R}'$ – подпространство метрического пространства $\mathfrak{R}$. Через $H_l(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}')$, $l = 0, 1, \dots$, обозначается группа относительных целочисленных гомологий с компактными носителями [15]–[17] пары $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}')$; $b_l(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}')$ – ранг группы $H_l(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}')$, называемый *l -м числом Бетти* пары $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}')$. Если $b_l(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}') < \infty \forall l \geq 0$ и $b_l(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}') = 0$ при $l > l_0$, то число $\chi(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}') = b_0(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}') + \dots + (-1)^l b_l(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}') + \dots$ называют *эйлеровой характеристикой* пары $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}')$. Эти понятия имеют смысл и при $\mathfrak{R}' = \emptyset$; в таком случае полагают $H_l(\mathfrak{R}, \emptyset) = H_l(\mathfrak{R})$, $\chi(\mathfrak{R}, \emptyset) = \chi(\mathfrak{R})$, $H_l(\mathfrak{R})$ – группа абсолютных целочисленных гомологий с компактными носителями пространства $\mathfrak{R}$, $\chi(\mathfrak{R})$ – эйлерова характеристика $\mathfrak{R}$. Если пара $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}')$ такова, что два из чисел $\chi(\mathfrak{R})$, $\chi(\mathfrak{R}')$, $\chi(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}')$ определены, то определено и третье, причем [16; § 5.5]

$$\chi(\mathfrak{R}) - \chi(\mathfrak{R}') = \chi(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}'). \quad (5)$$

Существенную роль в дальнейшем играет

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть b – регулярное значение потенциала f m -отображения $\mathcal{F}$ класса $S(M)$. Пусть лебегово множество $M_b = \{v \in M, f(v) \leq b\}$ непусто и ограничено. Тогда определена эйлерова характеристика $\chi(M_b)$ пространства M_b и $\gamma(\mathcal{F}_M, \overset{\circ}{M}_b) = \chi(M_b)$ [10].

Не оговаривая каждый раз особо, считаем далее, что $\mathcal{F}$ есть потенциальное m -отображение класса $S(M)$ с потенциалом f . Пусть c – единственное критическое значение функционала f в сегменте $[a, b]$, $-\infty < a < c < b < \infty$. В силу предложения 2 ограниченность множества M_b влечет конечность эйлеровых характеристик $\chi(M_b)$, $\chi(M_a)$. Применяя к паре пространств (M_b, M_a) равенство (5), получаем $\chi(M_b, M_a) = \chi(M_b) - \chi(M_a)$. В частности, при любом целом $l \geq 0$ числа $b_l(M_b, M_a)$ конечны и последовательность $b_l(M_b, M_a)$ финитна. Из теоремы 2 работы [10] следует, что числа $b_l(M_b, M_a)$ не зависят от выбора отрезка $[a, b]$, для которого $c \in (a, b)$, $[a, b] \setminus \{c\} \subset \mathbb{R} \setminus f(\mathcal{K}_f)$, $\theta_V(M_b, 0) < \infty$. Таким образом, числа $b_l(M_b, M_a)$ характеризуют значение c . Положим $m_l(c) = b_l(M_b, M_a)$, $l = 0, 1, \dots$; определяемые таким образом величины $m_l(c)$ назовем *типовыми числами критического значения c* .

ТЕОРЕМА 1. Пусть c – изолированное критическое значение функционала f , $\mathcal{K}_f^c$ – множество критических точек f на поверхности уровня $f^{-1}(c) = \{u \in M, f(u) = c\}$. Пусть $\theta_V(M_b, 0) < \infty$ при некотором $b < c$. Тогда

$$\text{ind}(\mathcal{K}_f^c, \mathcal{F}_M) = \sum_{l \geq 0} (-1)^l m_l(c). \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале отметим, что $\mathcal{K}_f^c$ – изолированное критическое множество, т.е. в некоторой его окрестности нет критических точек функционала f . Действительно, в предположении противного существует последовательность $u_i \in \mathcal{K}_f$, $\theta_V(u_i, \mathcal{K}_f^c) \rightarrow 0$, $f(u_i) \neq c$. Ввиду компактности множества $\mathcal{K}_f^c$ [10] можно считать, что $u_i \rightarrow u$, $u \in \mathcal{K}_f^c$. Но тогда $f(u_i) \rightarrow f(u) = c$, а это противоречит изолированности критического значения c .

Равенство (6) вытекает из цепи соотношений

$$\begin{aligned} \text{ind}(\mathcal{K}_f^c, \mathcal{F}_M) &= \gamma(\mathcal{F}_M, \overset{\circ}{M}_b) - \gamma(\mathcal{F}_M, \overset{\circ}{M}_a) = \chi(M_b) - \chi(M_a) \\ &= \chi(M_b, M_a) = \sum_{l \geq 0} (-1)^l b_l(M_b, M_a) = \sum_{l \geq 0} (-1)^l m_l(c), \end{aligned}$$

где $a < c < b$, c – единственное критическое значение функционала f на отрезке $[a, b]$, $\theta_V(M_b, 0) < \infty$. Здесь последовательно используются теорема об алгебраическом числе особых точек, предложение 2, равенство $\chi(M_b, M_a) = \chi(M_b) - \chi(M_a)$, вытекающее из (5), и, наконец, определения эйлеровой характеристики пары (M_b, M_a) и типовых чисел $m_l(c)$. Теорема доказана.

Пусть функционал f имеет на луче $(-\infty, b]$ конечное число критических значений $c_1, \dots, c_N$, причем $c_1 < c_2 < \dots < c_N < b$, и $\theta_V(M_b, 0) < \infty$. Очевидно, $c_1 = \min\{f(u), u \in M\}$; минимум f на M достигается [10]. Введем в рассмотрение многочлены

$$\mathcal{A}(t) = \sum_{i=1}^N \sum_{l \geq 0} m_l(c_i) t^l = \sum_{l \geq 0} a_l t^l, \quad \mathcal{B}(t) = \sum_{l \geq 0} b_l(M_b) t^l.$$

В указанных предположениях имеет место

ТЕОРЕМА 2. *Справедливо равенство*

$$\mathcal{A}(t) - \mathcal{B}(t) = (1+t)\mathcal{P}(t), \quad (7)$$

где $\mathcal{P}$ – многочлен с неотрицательными коэффициентами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $d_0 < c_1 < d_1 < c_2 < \dots < d_{N-1} < c_N < d_N = b$. Рассматривая точную гомологическую последовательность пары $(M_{d_i}, M_{d_{i-1}})$, приходим [17; §16] к равенствам

$$\sum_{l \geq 0} m_l(c_i) t^l - \left\{ \sum_{l \geq 0} b_l(M_{d_i}) t^l - \sum_{l \geq 0} b_l(M_{d_{i-1}}) t^l \right\} = (1+t)\mathcal{P}_i(t),$$

где $\mathcal{P}_i$ ($i = 1, \dots, N$) – многочлен с неотрицательными коэффициентами. Так как $d_0 < c_1$, то $M_{d_0} = \emptyset$. Суммируя данные равенства по i от 1 до N , получаем $\mathcal{A}(t) - \mathcal{B}(t) = (1+t)(\mathcal{P}_1(t) + \dots + \mathcal{P}_N(t))$. Последнее равенство влечет (7). Теорема доказана.

Из равенства (7) следуют неравенства Морса

$$\sum_{i=0}^l (-1)^{l-i} (a_i - b_i(M_b)) \geq 0 \quad (8)$$

и их ослабленные варианты $a_l \geq b_l(M_b)$, $l = 0, 1, \dots$. Начиная с некоторого номера l неравенства (8) становятся равенствами, это также вытекает из (7).

§ 2. Типовые числа критических точек

Ниже используется следующее дополнение к предложению 1.

ЛЕММА 1. Пусть Q — замкнутое подмножество многообразия M и $\theta_V(Q, 0) < R$, $\mathfrak{N}$ — множество принадлежащих Q особых точек отображения $\mathcal{F}$ класса $S(Q)$. Тогда существуют последовательности $E_n \in \Gamma(V)$, $\delta_n > 0$ и отображение w класса $\Lambda(Q \setminus \mathfrak{N}, V)$, обладающие свойствами:

$$\begin{aligned} \|w(y)\| &\leq R, & w(y) - y &\in T_y & (y \in Q \setminus \mathfrak{N}), \\ w(y) &\in E_n, & s(w(y) - y, \mathcal{F}(y)) &< -\delta_n & \left(y \in Q, \quad \theta_V(y, \mathfrak{N}) \geq \frac{1}{n} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f_0(y) = \theta_V(y, \mathfrak{N})/\theta_V(Q, \mathfrak{N})$ ($y \in Q$). Очевидно, что $f_0 \in \Lambda(Q)$, $0 \leq f_0(y) \leq 1$ ($y \in Q$), $\mathfrak{N} = \{y \in Q, f_0(y) = 0\}$. Пусть $\alpha_n = 1/2^n$, $\beta_n = 3\alpha_n$, $n = 1, 2, \dots$. Построим систему функций φ_n класса $\Lambda(\mathbb{R})$, удовлетворяющих условиям:

- 1) $\varphi_n(t) \geq 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t) = 1$, $0 < t \leq 1$,
- 2) $\{t : \varphi_n(t) > 0\} = (p_n, q_n)$, $\alpha_n < p_n < q_n < \beta_n$, $n = 1, 2, \dots$.

Система интервалов (p_n, q_n) , $n = 1, 2, \dots$, образует открытое покрытие промежутка $(0, 1]$ кратности 2.

Положим $\mathfrak{M}_n = \{y \in Q, \alpha_n \leq f_0(y) \leq \beta_n\}$. Множество $\mathfrak{M}_n$ ограничено, замкнуто и не содержит особых точек поля $\mathcal{F}$. Согласно предложению 1 существуют пространство $E'_n \in \Gamma(V)$, отображение w_n класса $\Lambda(Q, E'_n)$ и постоянная $\delta'_n > 0$, обладающие свойствами

$$\begin{aligned} \|w_n(y)\| &\leq R, & w_n(y) - y &\in T_y & (y \in Q \setminus \mathfrak{N}), \\ w_n(y) &\in E'_n, & s(w_n(y) - y, \mathcal{F}(y)) &< -\delta'_n & (y \in \mathfrak{M}_n). \end{aligned} \quad (10)$$

Рассмотрим поле

$$w(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(f_0(y)) w_n(y), \quad y \in Q.$$

Его сужение на $Q \setminus \mathfrak{N}$ принадлежит классу $\Lambda(Q \setminus \mathfrak{N}, V)$. Соотношения (10) влекут выполнение свойств (9) при подходящем выборе E_n , δ_n ($n = 1, 2, \dots$). Лемма доказана.

Далее через $\Lambda_1(V)$ обозначается часть класса $\Lambda(V)$, состоящая из функционалов, для которых градиентное отображение $v \rightarrow \partial f(v) = \mathcal{F}(v)$ принадлежит классу $S(V)$. Применим лемму 1 к сужению отображения $\mathcal{F} = \partial f$ ($f \in \Lambda_1(V)$) на множество $Q = M_b = \{u \in M, f(u) \leq b\}$. Как и в теоремах 1, 2, считаем M_b ограниченным множеством. В этом случае $\mathfrak{N} = M_b \cap \mathcal{K}_f$ — множество принадлежащих M_b критических точек функционала f . Отображение $v(y) = w(y) - y$

$(y \in M_b \setminus \mathfrak{N})$ принадлежит классу $\Lambda(M_b \setminus \mathfrak{N}, V)$ и удовлетворяет вытекающим из (9) соотношениям

$$v(y) \in T_y, \quad f^0(y; v(y)) < -\delta_n \quad \left(y \in M_b, \quad \theta_V(y, \mathfrak{N}) \geq \frac{1}{n} \right). \quad (11)$$

При любом y_0 из $M_b \setminus \mathfrak{N}$ задача Коши

$$y' = v(y), \quad y(0) = y_0 \quad (12)$$

имеет единственное решение $y(t, y_0)$, определенное на максимальном промежутке $[0, \omega(y_0))$. Первое из соотношений (11) гарантирует включение $y(t, y_0) \in M$. Объединяя (11), (12), приходим к оценке правой верхней производной $D^*f(y(t, y_0))$ функции $f \circ y$:

$$D^*f(y(t, y_0)) \leq -\delta_n, \quad \text{если} \quad \theta_V(y(t, y_0), \mathfrak{N}) \geq \frac{1}{n}. \quad (13)$$

Неравенство (13) влечет строгое убывание функции $f \circ y$ на $[0, \omega(y_0))$, скорость этого убывания отделена от нуля на любом отрезке траектории $y = y(t, y_0)$, отделенном от множества $\mathfrak{N}$.

Пусть c — единственное критическое значение функционала f на некотором сегменте $[a, b]$ ($a < c < b$) и множество $\mathcal{K}_f^c$ критических точек f на поверхности $f^{-1}(c)$ конечно. Фиксируем y_0 из M , $c < f(y_0) \leq b$. Решение $y = y(t, y_0)$ задачи Коши (13) определено на некотором промежутке $[0, \omega(y_0))$. Если $f(y(t, y_0)) \geq c_1 > c$ на каком-то отрезке $[0, t_0]$, то $D^*f(y(t, y_0)) < -\delta$ с некоторым $\delta > 0$ на том же отрезке. Поэтому множество $\{t > 0, f(y(t, y_0)) > c\}$ есть конечный или бесконечный интервал $(0, \tau(y_0))$. Таким образом, $f(y(t, y_0)) > c$ ($0 \leq t < \tau(y_0)$) и $\lim_{t \rightarrow \tau(y_0)-0} f(y(t, y_0)) = c$.

ЛЕММА 2. Пусть $u_0 \in f^{-1}(c)$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что если $y_0 \in M$, $b \geq f(y_0) > c$ и $\|y_0 - u_0\| < \delta$, то $\|y(t, y_0) - u_0\| < \varepsilon$ $\forall t \in [0, \tau(y_0))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале рассмотрим представляющийся более сложным случай, когда $u_0 \in \mathcal{K}_f^c$. Если доказываемое утверждение неверно, то найдутся число $\varepsilon_0 > 0$ и последовательности $y_n \in M$, $t_n \in [0, \tau(y_n))$ такие, что $b \geq f(y_0) > c$, $\|y_n - u_0\| < 1/n$, $\|y(t_n, y_n) - u_0\| > \varepsilon_0$. Ввиду ограниченности отображения v время $\mathcal{T}_n$ пребывания траектории $y = y(t, y_n)$ вне $(\varepsilon_0/2)$ -окрестности множества $\mathfrak{N}$ ограничено снизу положительной константой: $\mathcal{T}_n \geq \mathcal{T}_0 > 0 \quad \forall n$. За это время значение функционала f на траектории $y = y(t, y_n)$ уменьшится на положительную величину ε_1 , не зависящую от n . Но это противоречит соотношениям $f(y_n) \geq f(y(t_n, y_n)) > c$ ($0 \leq t < \tau(y_n)$), $f(y_n) \rightarrow c$.

Если u_0 — регулярная точка функционала f , то найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что все элементы множества $\{u \in M, \|u - u_0\| < \varepsilon_0\}$ — также регулярные точки. Теперь доказательство можно провести по той же схеме, что и выше. Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Для любой точки y_0 из $f^{-1}((c, b]) = \{u \in M, c < f(u) \leq b\}$ существует принадлежащий $f^{-1}(c)$ предел $\lim_{t \rightarrow \tau(y_0)-0} y(t, y_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\tau(y_0) < \infty$, то существование предела вытекает из ограниченности поля v и условия $y' = v(y)$. Рассмотрим более сложный случай $\tau(y_0) = \infty$. Для любого $\delta > 0$ найдется такое число t , что $\theta_V(y(t, y_0), \mathfrak{N}) < \delta$. Действительно, в противном случае $\theta_V(y(t, y_0), \mathfrak{N}) \geq \delta \forall t$; отсюда следовало бы, что $f(y(t, y_0)) \rightarrow -\infty$ при $t \rightarrow \infty$. Поэтому для каждого натурального числа n найдется такое t_n , что $\theta_V(y(t_n, y_0), \mathfrak{N}) \leq 1/n$. Некоторая подпоследовательность последовательности $y(t_n, y_0)$ сходится к критической точке u_0 функционала f . Отсюда в силу леммы 2 вытекает, что вся траектория $y(t, y_0)$ при $t \rightarrow \infty$ сходится к u_0 . Лемма доказана.

Наряду с введенным выше полем $v = v(y)$ рассмотрим его подправленный вариант $v_1(y) = v(y)(f(y) - c)_+$ ($y \in M_b \setminus \mathfrak{N}$) и аналогичную (12) задачу Коши

$$y' = v_1(y), \quad y(0) = y_0. \quad (14)$$

Если $f(y_0) \leq c$, то решение $y_1(t, y_0)$ задачи (14) постоянно: $y_1(t, y_0) = y_0$ ($t \geq 0$). Для начальных значений из $f^{-1}((c, b])$ решение $y_1(t, y_0)$ получается из решения $y(t, y_0)$ задачи (12) путем замены времени: справедливо равенство

$$y_1(t, y_0) = y(s, y_0) \quad \left(s = \int_0^t (f(y_1(\tau, y_0)) - c) d\tau \right). \quad (15)$$

Отметим вытекающую из (14) оценку

$$\frac{d}{dt}(f(y_1(t, y_0)) - c) \geq -k(f(y_1(t, y_0)) - c) \quad (0 < k < \infty),$$

приводящую к неравенству $f(y_1(t, y_0)) - c \geq \exp(-kt)(f(y_0) - c)$. В частности, $f(y_1(t, y_0)) > c$, если $0 < t < \infty$, $c < f(y_0) \leq b$ и $f(y_1(t, y_0)) \rightarrow c$ при $t \rightarrow \infty$.

ЛЕММА 4. Пусть $u_0 \in f^{-1}(c)$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что если $y_0 \in M$, $b \geq f(y_0) > c$ и $\|y_0 - u_0\| < \delta$, то $\|y_1(t, y_0) - u_0\| < \varepsilon \forall t \in [0, \infty)$.

ЛЕММА 5. Для любой точки y_0 из $f^{-1}((c, b])$ существует принадлежащий $f^{-1}(c)$ предел $\lim_{t \rightarrow \infty} y_1(t, y_0)$, обозначаемый далее символом $y_1(\infty, y_0)$.

Леммы 4, 5 следуют из лемм 2, 3 и (15).

ЛЕММА 6. Пусть c — единственное критическое значение функционала f на отрезке $[c, b]$, $c < b$, $\theta_V(M_b, 0) < \infty$ и каждая критическая точка u_0 из $\mathcal{K}_f^c$ является изолированной. Тогда множество M_c есть деформационный ретракт множества M_b .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем в рассмотрение отображение $\Psi: M_b \times [0, 1] \rightarrow M_b$, определяемое равенством

$$\Psi(y_0, \mu) = y_1\left(\frac{\mu}{1-\mu}, y_0\right);$$

в частности, $\Psi(y_0, 1) = y_1(\infty, y_0)$ при любом y_0 из M_b . Из лемм 4, 5 вытекает непрерывность отображения Ψ ; справедливы соотношения: $\Psi(y_0, 0) = y_0$ ($y_0 \in M_b$), $\Psi(y_0, \mu) = y_0$ ($y_0 \in M_c$, $0 \leq \mu \leq 1$), $\Psi(y_0, 1) \in M_c$ ($y_0 \in M_b$). Лемма доказана.

ЛЕММА 7. Пусть c – единственное критическое значение функционала f на отрезке $[a, c]$, $a < c$, и $\theta_V(M_c, 0) < \infty$. Тогда множество M_a есть деформационный ретракт множества $M_c \setminus \mathcal{K}_f^c$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $v(y) = w(y) - y$ ($y \in M_c \setminus \mathfrak{N}$) – поле класса $\Lambda(M_c \setminus \mathfrak{N}, V)$, удовлетворяющее соотношениям (11) (с заменой b на c), $y_0 \in M_c \setminus \mathcal{K}_f^c$, $y(t, y_0)$ – решение задачи Коши (12). Функция $t \rightarrow f(y(t, y_0))$ строго убывает на том отрезке $[0, \beta(y_0)]$, где $f(y(t, y_0)) \geq a$. Определим функцию $\mathcal{T}(\cdot)$ на $M_c \setminus \mathcal{K}_f^c$ равенством $\mathcal{T}(y_0) = \min\{t \geq 0, f(y(t, y_0)) \leq a\}$. Легко установить непрерывность функции $\mathcal{T}(\cdot)$. Положим $\Psi(y_0, \mu) = y(\mu\mathcal{T}(y_0), y_0)$ ($0 \leq \mu \leq 1$, $y_0 \in M_c \setminus \mathcal{K}_f^c$). Определяемое таким образом отображение $\Psi: (M_c \setminus \mathcal{K}_f^c) \times [0, 1] \rightarrow M_c \setminus \mathcal{K}_f^c$ задает искомую деформацию множества $M_c \setminus \mathcal{K}_f^c$ на множество M_a . Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Если выполнены условия лемм 6, 7, то группы $H_l(M_b, M_a)$ и $H_l(M_c, M_c \setminus \mathcal{K}_f^c)$ изоморфны:

$$H_l(M_b, M_a) \simeq H_l(M_c, M_c \setminus \mathcal{K}_f^c), \quad l = 0, 1, \dots \quad (16)$$

Пусть z_0 – изолированная критическая точка функционала f , $c = f(z_0)$, $H_l(M_c, M_c \setminus \{z_0\})$, $l = 0, 1, \dots$, – группа локальных гомологий [16; гл. 4, § 3] пространства M_c в точке z_0 . Если число $m_l(z_0) = \text{rang } H_l(M_c, M_c \setminus \{z_0\}) < \infty$, то его называют l -м типовым числом критической точки z_0 . Для любой окрестности U точки z_0 группы $H_l(M_c \cap U, (M_c \cap U) \setminus \{z_0\})$ изоморфны группе $H_l(M_c, M_c \setminus \{z_0\})$, поэтому $m_l(z_0) = \text{rang } H_l(M_c \cap U, (M_c \cap U) \setminus \{z_0\})$.

Установим связь между типовыми числами критических значений и типовыми числами критических точек функционала.

ТЕОРЕМА 3. Пусть c – изолированное критическое значение функционала f , $\mathcal{K}_f^c = \{z_1, \dots, z_r\}$ – соответствующее критическое множество. Тогда типовые числа $m_l(c)$ критического значения c и типовые числа $m_l(z_i)$ критических точек z_i ($i = 1, \dots, r$) связаны равенством

$$m_l(c) = \sum_{i=1}^r m_l(z_i), \quad l = 0, 1, \dots \quad (17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим произвольные непересекающиеся окрестности U_i (относительно пространства M_c) точек z_i ($i = 1, \dots, r$). Используя (16) и вырезая множество $M_c \setminus \bigcup_{i=1}^r U_i$, имеем последовательно

$$H_l(M_b, M_a) \simeq H_l(M_c, M_c \setminus \mathcal{K}_f^c) \simeq H_l\left(\bigcup_{i=1}^r U_i, \bigcup_{i=1}^r (U_i \setminus \{z_i\})\right).$$

Так как окрестности U_i не пересекаются, то

$$H_l(M_b, M_a) \simeq \bigoplus_{i=1}^r H_l(U_i, U_i \setminus \{z_i\}).$$

Теперь (17) вытекает из определений $m_l(c)$ и $m_l(z_i)$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Если z_1 – единственная изолированная критическая точка функционала f на поверхности уровня $f^{-1}(c)$, то $m_l(c) = m_l(z_1)$ ($l \geq 0$) и

$$\text{ind}(z_1, \mathcal{F}_M) = \sum_{l \geq 0} (-1)^l m_l(z_1). \quad (18)$$

Из (17) следует равенство $m_l(c) = m_l(z_1)$ ($l \geq 0$). Оно позволяет отождествить (в предположении $\mathcal{K}_f^c = \{z_1\}$) типовые числа критической точки z_1 с типовыми числами критического значения $c = f(z_1)$. Равенство (18) есть частный случай (6). Оно верно при более слабых предположениях относительно числа $c = f(z_1)$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть z_1 – изолированная критическая точка функционала f и существует последовательность d_n регулярных значений f : $d_n < f(z_1)$, $d_n \rightarrow f(z_1)$. Тогда $m_l(z_1) < \infty \quad \forall l$, $m_l(z_1) = 0$ при $l \geq l_0$ и имеет место (18).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, можно считать, что V, V^* – локально равномерно выпуклые пространства. При выполнении этого предположения функционал $f_0(v) = \|v\|^2$ непрерывно дифференцируем на V , а его производная f'_0 есть оператор класса $S(V)$ [9]. С помощью подходящей замены переменной можно добиться того, что $z_1 = 0$ есть единственная критическая точка функционала f на множестве $\{v \in M, \|v\| \leq 2\}$. Оператор ∂f невырожден на множестве $P = \{v \in M, 1 \leq \|v\| \leq 2\}$, поэтому найдется такое число $\varepsilon_0 > 0$, что $\theta_{V^*}(0, \partial f(v) + \mathcal{N}(v)) \geq 2\varepsilon_0 \quad \forall v \in P$.

Фиксируем бесконечно дифференцируемую функцию $\varphi: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, обладающую свойствами: $\varphi(t) = 0$, если $0 \leq t \leq 1$; $\varphi(t) = 1$, если $t \geq 4$; $0 < \varphi'(t)$, если $1 < t < 4$. Положим $h(v) = \varphi(f_0(v))$ ($v \in V$). Отметим следующие свойства функции h : $h \in C^1(V)$, $h(v) = 0$ ($\|v\| \leq 1$), $h(v) = 1$ ($\|v\| \geq 2$), $0 < h(v) < 1$ ($1 < \|v\| < 2$), $h'(v) = \varphi'(f_0(v))f'_0(v)$.

Покажем, что при любом $\varepsilon > 0$ функционал $g_\varepsilon = f + \varepsilon h$ принадлежит классу $\Lambda_1(V)$. Справедливо равенство $\partial g_\varepsilon(v) = \partial f(v) + \varepsilon h'(v)$, из которого вытекает ограниченность м-отображения $\mathcal{F} = \partial g_\varepsilon: V \rightarrow V^*$. Пусть $v_i \in V$, $v_i^* \in \mathcal{F}(v_i)$ – последовательности, обладающие свойствами (2). Положим $w_i^* = h'(v_i)$, $u_i^* = v_i^* - \varepsilon w_i^* \in \partial f(v_i)$ ($i = 1, 2$). Так как V – рефлексивное пространство, то

можно считать, что w_i^* слабо сходится к некоторому элементу $w^* \in V^*$. Тогда $u_i^* \rightharpoonup u^* = v^* - \varepsilon w^*$ и $\lim_{i \rightarrow \infty} \langle v_i - v, u_i^* + \varepsilon w_i^* \rangle \leq 0$. Прореживая, если это необходимо, последовательность v_i , можно считать, что $\langle v_i - v, w_i^* \rangle \rightarrow \gamma_0$. Если $\gamma_0 \geq 0$, то имеем $\lim_{i \rightarrow \infty} \langle v_i - v, u_i^* \rangle \leq 0$. Так как $\partial f \in S(V)$, то из последнего неравенства получаем: $v_i \rightarrow v$, $u^* \in \partial f(v)$, $v^* = u^* + \varepsilon w^* \in \partial f(v) + \varepsilon h'(v) = \mathcal{F}(v)$.

Рассмотрим случай $\gamma_0 < 0$. В этом случае последовательность $w_i^* = h'(v_i)$ не стремится к нулю; можно считать, что последовательность $\|v_i\|$ ограничена от 1 и 2: $1 < R_1 \leq \|v_i\| \leq R_2 < 2$. Но $h'(v_i) = \varphi'(f_0(v_i))f'_0(v_i)$, откуда следует, что $\lim_{i \rightarrow \infty} \langle v_i - v, f'_0(v_i) \rangle < 0$. Так как $f'_0 \in S(V)$, то это снова влечет соотношения $v_i \rightarrow v$, $v^* \in \mathcal{F}(v)$.

Включение $g_\varepsilon \in \Lambda_1(V)$ при любом $\varepsilon > 0$ доказано. Положим $\varepsilon = f(0) - d_n$. Фиксируем n и ε так, что $\varepsilon \|h'(v)\| < \varepsilon_0$ ($v \in M$, $\|v\| \leq 2$). Тогда функционал g_ε не имеет ненулевых критических точек на множестве $\{v \in M, \|v\| \leq 2\}$. Вне этого множества $h(v) = 1$, $g_\varepsilon(v) = f(v) + \varepsilon$; из равенства $g_\varepsilon(v) = f(0)$ следует, что $f(v) = d_n$, v — регулярная точка функционалов f, g_ε . Поэтому 0 есть единственная критическая точка функционала g_ε на поверхности уровня $g_\varepsilon(v) = f(0)$. Типовые числа точки $z_1 = 0$ для функционалов f, g_ε одинаковы, поскольку эти функционалы совпадают в окрестности этой точки. Имеем последовательно

$$\text{ind}(z_1, \mathcal{F}_M) = \text{ind}(z_1, (\partial g_\varepsilon)_M) = \sum_{l \geq 0} m_l(z_1).$$

Теорема доказана.

§ 3. Интегральные функционалы класса Λ_1 на пространствах Соболева

Для применения общих результатов §§ 1, 2 необходимо располагать содержательными примерами функционалов класса Λ_1 . Большое число примеров, относящихся к гладким функционалам, можно найти в [2]–[7], [18]–[20]. Основное содержание этого параграфа связано с рассмотрением негладких функционалов на пространствах Соболева.

Пусть ω — измеримое подмножество $\mathbb{R}^N$ конечной и положительной N -мерной лебеговой меры mes_N , $S(\omega)^n$ — линейное метрическое пространство измеримых и п.в. конечных функций $z: \omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ (n и N никак не связаны), $L^p(\omega)^n$ ($1 \leq p \leq \infty$) — пространство Лебега измеримых на ω функций со значениями в $\mathbb{R}^n$; линейные операции и метрика в пространствах $S(\omega)^n$, $L^p(\omega)^n$ вводятся стандартным образом. Как обычно, q — двойственный к p показатель, в частности $q = p/(p-1)$, если $1 < p < \infty$; билинейная форма

$$\langle z, z^* \rangle = \int_{\omega} z(x) \cdot z^*(x) dx \quad (19)$$

задает двойственность между пространствами $L^p(\omega)^n$ и $L^q(\omega)^n$.

Далее изучается интегральный функционал

$$J_{\Phi}(y, z) = \int_{\omega} \Phi(x, y(x), z(x)) dx \quad (20)$$

при следующих ограничениях на интегрант $\Phi(x, \eta, \zeta)$ ($x \in \omega$, $\eta \in \mathbb{R}^m$, $\zeta \in \mathbb{R}^n$).

Φ_1) Функция $\Phi: \omega \times (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ и ее производная $\Phi'_\eta: \omega \times (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^m$ каратеодориевские, т.е. непрерывны по $(\eta, \zeta) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ почти для всех x из ω и измеримы по x при всех $(\eta, \zeta) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$; $\Phi(\cdot, 0, 0) \in L^1(\omega)$.

Φ_2) При любых (x, η) из $\omega \times \mathbb{R}^m$ функция $\Phi(x, \eta, \cdot): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ строго выпукла; ниже $\partial_\zeta \Phi(x, \eta, \zeta)$ – субдифференциал функции $\Phi(x, \eta, \cdot): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ в точке ζ [14], [18]–[20].

Φ_3) Существуют функция r_0 из $L^1(\omega)$ и постоянные $c, c_0 > 0$ такие, что справедливы неравенства

$$\begin{aligned} |\Phi'_\eta(x, \eta, \zeta)|^{q_1} + |\zeta^*|^q &\leq c(|\zeta|^p + |\eta|^{p_1}) + r_0(x), \\ \Phi(x, 0, \zeta) &\geq c_0|\zeta|^p - r_0(x), \end{aligned} \quad (21)$$

в которых $1 < p, p_1 < \infty$, q и q_1 – двойственные к p и p_1 показатели, $\zeta^* \in \partial_\zeta \Phi(x, \eta, \zeta)$.

Из условий Φ_1 – Φ_3) вытекают оценки

$$c_1|\zeta|^p - d_1|\eta|^{p_1} - r_1(x) \leq \Phi(x, \eta, \zeta) \leq c_2|\zeta|^p + d_2|\eta|^{p_1} + r_2(x),$$

в которых $r_i \in L^1(\omega)$, c_i, d_i – положительные константы ($i = 1, 2$). Определяемый равенством

$$\Phi^*(x, \eta, \zeta^*) = \sup_{\zeta \in \mathbb{R}^n} (\zeta \cdot \zeta^* - \Phi(x, \eta, \zeta))$$

сопряженный к Φ интегрант $\Phi^*: \omega \times (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ также есть каратеодориевская на $\omega \times (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$ функция, удовлетворяющая неравенствам

$$\frac{(c_2 p)^{q-1}}{q} |\zeta^*|^q - d_2 |\eta|^{p_1} - r_2(x) \leq \Phi^*(x, \eta, \zeta^*) \leq \frac{(c_1 p)^{q-1}}{q} |\zeta^*|^q + d_1 |\eta|^{p_1} + r_1(x).$$

Включение $\zeta^* \in \partial_\zeta \Phi(x, \eta, \zeta)$ эквивалентно равенству $\zeta \cdot \zeta^* = \Phi(x, \eta, \zeta) + \Phi(x, \eta, \zeta^*)$.

Обозначим через A м-отображение из $\omega \times (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$ в $\mathbb{R}^n$, сопоставляющее тройке $(x, \eta, \zeta) \in \omega \times (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$ субдифференциал функции $\Phi(x, \eta, \cdot): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ в точке ζ . Из теоремы Скорца–Драгоны и известных свойств субдифференциалов [18]–[20] следует, что отображение $A: \omega \times (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$ удовлетворяет некоторому аналогу условия C Лузина: для каждого $\varepsilon > 0$ существует такой компакт $\omega_\varepsilon \subset \omega$, что $\text{mes}_N(\omega \setminus \omega_\varepsilon) < \varepsilon$ и отображение $A: \omega_\varepsilon \times (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$ полунепрерывно сверху по совокупности переменных. Отсюда вытекает следующее свойство, которое естественно назвать *суперпозиционной измеримостью отображения* A : для любых $y \in S(\omega)^m$, $z \in S(\omega)^n$ м-отображение $x \rightarrow A(x, y(x), z(x))$ измеримо [18]–[20]. Совокупность измеримых сечений отображения $x \rightarrow A(x, y(x), z(x))$ обозначим символом $\mathcal{A}_0(y, z)$. Многозначное отображение $\mathcal{A}_0: S(\omega)^m \times S(\omega)^n \rightarrow S(\omega)^n$ выпуклозначно и измеримо.

Обозначим через $\mathcal{A}$ сужение $\mathcal{A}_0$ на $L^{p_1}(\omega)^m \times L^p(\omega)^n$. Из неравенства (21) следует, что $\mathcal{A}(y, z) \subset L^q(\omega)^n$ для любых $y \in L^{p_1}(\omega)^m$, $z \in L^p(\omega)^n$; определяемое таким образом м-отображение $\mathcal{A}: L^{p_1}(\omega)^m \times L^p(\omega)^n \rightarrow L^q(\omega)^n$ выпуклозначно и замкнуто. Включение $z^* \in \mathcal{A}(y, z)$ равносильно равенству $\langle z, z^* \rangle = J_\Phi(y, z) +$

$J_{\Phi^*}(y, z^*)$, где билинейная форма $\langle \cdot, \cdot \rangle$ определена на $L^p(\omega)^n \times L^q(\omega)^n$ равенством (19), функционал $J_{\Phi}: L^{p_1}(\omega)^m \times L^p(\omega)^n \rightarrow \mathbb{R}$ — равенством (20) и, наконец, функционал $J_{\Phi^*}: L^{p_1}(\omega)^m \times L^q(\omega)^n \rightarrow \mathbb{R}$ — аналогичным (20) соотношением

$$J_{\Phi^*}(y, z^*) = \int_{\omega} \Phi^*(x, y(x), z^*(x)) dx.$$

Выпуклозначность м-отображения $\mathcal{A}: L^{p_1}(\omega)^m \times L^p(\omega)^n \rightarrow L^q(\omega)^n$ очевидна; замкнутость $\mathcal{A}$ выполняется в усиленной форме.

ЛЕММА 8. Пусть функция Φ удовлетворяет условиям $\Phi_1)$ – $\Phi_3)$. Пусть $y_i \in L^{p_1}(\omega)^m$, $z_i \in L^p(\omega)^n$, $z_i^* \in \mathcal{A}(y_i, z_i)$, $i = 1, 2, \dots$, причем

$$y_i \rightarrow y \quad \text{в } L^{p_1}(\omega)^m, \quad z_i \rightarrow z \quad \text{в } L^p(\omega)^n, \quad z_i^* \rightarrow z^* \quad \text{в } L^q(\omega)^n, \quad (22)$$

$$\overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} \langle z_i, z_i^* \rangle \leq \langle z, z^* \rangle. \quad (23)$$

Тогда $z_i \rightarrow z$ в $L^p(\omega)^n$, $z^* \in \mathcal{A}(y, z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (22) и известных результатов о полунепрерывности снизу интегральных функционалов [18]–[20] вытекают неравенства

$$\lim_{i \rightarrow \infty} J_{\Phi}(y_i, z_i) \geq J_{\Phi}(y, z), \quad \lim_{i \rightarrow \infty} J_{\Phi^*}(y_i, z_i^*) \geq J_{\Phi^*}(y, z^*). \quad (24)$$

Так как $z_i^* \in \mathcal{A}(y_i, z_i)$, то $\langle z_i, z_i^* \rangle = J_{\Phi}(y_i, z_i) + J_{\Phi^*}(y_i, z_i^*)$. Последнее равенство и оценки (23), (24) влекут соотношения

$$\begin{aligned} \langle z, z^* \rangle &\geq \overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} \langle z_i, z_i^* \rangle = \overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} (J_{\Phi}(y_i, z_i) + J_{\Phi^*}(y_i, z_i^*)) \\ &\geq \lim_{i \rightarrow \infty} J_{\Phi}(y_i, z_i) + \lim_{i \rightarrow \infty} J_{\Phi^*}(y_i, z_i^*) \geq J_{\Phi}(y, z) + J_{\Phi^*}(y, z^*) \geq \langle z, z^* \rangle. \end{aligned}$$

Поскольку левая часть равна правой, то всюду в приведенной цепи соотношений знак $\geq$ можно заменить знаком равенства. В частности, $J_{\Phi}(y_i, z_i) \rightarrow J_{\Phi}(y, z)$, $\langle z_i, z_i^* \rangle \rightarrow \langle z, z^* \rangle$ при $i \rightarrow \infty$, $J_{\Phi}(y, z) + J_{\Phi^*}(y, z^*) = \langle z, z^* \rangle$, $z^* \in \mathcal{A}(y, z)$.

При фиксированном z функционал $J_{\Phi}(\cdot, z): L^{p_1}(\omega)^m \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условию Липшица

$$|J_{\Phi}(u, z) - J_{\Phi}(v, z)| \leq k \|u - v; L^{p_1}\| \quad (25)$$

с константой k , зависящей лишь от $\|u; L^{p_1}\| + \|v; L^{p_1}\| + \|z; L^p\|$. Это стандартным образом выводится из дифференцируемости функции Φ по переменной η и оценки (21). Из оценки (25) следует, в частности, что $J_{\Phi}(y_i, z_i) - J_{\Phi}(y, z_i) \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$, а так как $J_{\Phi}(y_i, z_i) \rightarrow J_{\Phi}(y, z)$, то и $J_{\Phi}(y, z_i) \rightarrow J_{\Phi}(y, z)$ при $i \rightarrow \infty$.

Введем в рассмотрение функциональную последовательность

$$\rho_i(x) = \Phi(x, y(x), z(x)) - \Phi(x, y(x), z_i(x)) - (z(x) - z_i(x)) \cdot z_i^*(x), \quad i = 1, 2, \dots$$

В силу выпуклости функции Φ по ζ последовательность ρ_i неотрицательна. Справедливо равенство

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\omega} \rho_i(x) dx = \lim_{i \rightarrow \infty} (J_{\Phi}(y, z) - J_{\Phi}(y, z_i) - \langle z - z_i, z_i^* \rangle) = 0.$$

Отсюда следует, что $\rho_i \rightarrow 0$ по мере. После прореживания и переобозначений можно считать, что для x , принадлежащих множеству ω' полной меры в ω , выполняются условия: $\rho_i(x) \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$, $|y(x)| + |z(x)| < \infty$, функция $\Phi(x, y(x), \cdot): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ строго выпукла.

Фиксируем x из ω' . Из соотношения $\rho_i(x) \rightarrow 0$ вытекает ограниченность последовательности $(z_i(x), z_i^*(x))$. Если $(z_0(x), z_0^*(x))$ – предельная точка этой последовательности, то

$$\begin{aligned} \Phi(x, y(x), z_0(x)) + \Phi^*(x, y(x), z_0^*(x)) &= z_0(x) \cdot z_0^*(x), \\ \Phi(x, y(x), z(x)) - \Phi(x, y(x), z_0(x)) &= (z(x) - z_0(x)) \cdot z_0^*(x). \end{aligned}$$

Так как $\Phi(x, y(x), \cdot): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ – строго выпуклая функция, то последнее равенство возможно лишь в случае $z(x) = z_0(x)$. Таким образом, $z_i(x) \rightarrow z(x)$ п.в.

Выше показано, что из любого бесконечного подмножества последовательности z_i можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся п.в. к функции z . Это возможно, лишь если $z_i \rightarrow z$ по мере.

Последовательность $w_i(x) = \Phi(x, y_i(x), z_i(x)) + d_1|y_i(x)|^{p_1} + r_1(x)$ неотрицательна; она сходится по мере к функции $w(x) = \Phi(x, y(x), z(x)) + d_1|y(x)|^{p_1} + r_1(x) \geq 0$, при этом $\|w_i; L^1(\omega)\| \rightarrow \|w; L^1(\omega)\|$. Отсюда следует (см., например, [18; гл. 8, 10]) равностепенная интегрируемость последовательностей $w_i, |z_i|^p$. Теперь сходимость $z_i \rightarrow z$ в $L^p(\omega)^n$ очевидна. Лемма доказана.

При любом y из $L^{p_1}(\omega)^m$ функционал $J_{\Phi}(y, \cdot): L^p(\omega)^n \rightarrow \mathbb{R}$ выпуклый. Обобщенная производная функционала $J_{\Phi}(y, \cdot)$ по направлению $\bar{z}$ в точке z вычисляется [14], [18], [20] по формуле

$$J_{\Phi}^0(y, z; \bar{z}) = \sup\{\langle \bar{z}, z^* \rangle, z^* \in \mathcal{A}(y, z)\}.$$

Из (25) и выпуклости функционала $J_{\Phi}(y, \cdot): L^p(\omega)^n \rightarrow \mathbb{R}$ следует, что функционал $J_{\Phi}: L^{p_1}(\omega)^m \times L^p(\omega)^n \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет локальному условию Липшица. Как нетрудно видеть,

$$J_{\Phi}^0(y, z; \bar{y}, \bar{z}) = \sup\{\langle \bar{y}, \Phi'_{\eta}(\cdot, y, z) \rangle + \langle \bar{z}, z^* \rangle, z^* \in \mathcal{A}(y, z)\}. \quad (26)$$

Перейдем теперь к рассмотрению интегральных функционалов на пространствах Соболева. Пусть ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $C_0^{\infty}(\omega)$ – множество финитных бесконечно дифференцируемых в ω функций, $\overset{\circ}{W}_p^1(\omega)$ – замыкание $C_0^{\infty}(\omega)$ в метрике, порождаемой нормой $\|v; \overset{\circ}{W}_p^1\| = \|\nabla v; L^p\|$. Здесь и далее

$$\nabla v = \left(\frac{\partial v}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial v}{\partial x_n} \right)$$

– градиент функции v . Отображение $\nabla: \overset{\circ}{W}_p^1(\omega) \rightarrow L^p(\omega)^n$ устанавливает изометрический изоморфизм между пространством $\overset{\circ}{W}_p^1(\omega)$ и некоторым замкнутым подпространством пространства $L^p(\omega)^n$. Отсюда следует, например, что $\overset{\circ}{W}_p^1(\omega)$ ($1 < p < \infty$) – сепарабельное рефлексивное пространство. Сопряженное к $\overset{\circ}{W}_p^1(\omega)$ пространство $W_q^{-1}(\omega)$ состоит из линейных на $\overset{\circ}{W}_p^1(\omega)$ функционалов, допускающих представление

$$v^*(v) = \langle v, v^* \rangle = \int_{\omega} \left(z_1^* \frac{\partial v}{\partial x_1} + \dots + z_n^* \frac{\partial v}{\partial x_n} \right) dx = \langle \nabla v, z^* \rangle, \quad (27)$$

где $z^* = (z_1^*, \dots, z_n^*) \in L^q(\omega)^n$. В $W_q^{-1}(\omega)$ вводится норма сопряженного к $\overset{\circ}{W}_p^1(\omega)$ пространства. Функционал $-v^*$, противоположный к определяемому равенством (27), будем обозначать символом $\operatorname{div} z^*$. Равенство (27) с учетом принятого обозначения может быть записано в виде $\langle v, v^* \rangle = -\langle v, \operatorname{div} z^* \rangle$.

Фиксируем число $p_1 \in (1, \infty)$ так, что $1/p_1 > 1/p - 1/n$. При таком выборе p_1 пространство $\overset{\circ}{W}_p^1(\omega)$ компактно вложено в $L^{p_1}(\omega)$ [21]. В частности, если $v_i \rightharpoonup v$ в $\overset{\circ}{W}_p^1(\omega)$, то $v_i \rightarrow v$ в $L^{p_1}(\omega)$.

Пусть $\Phi: \omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ – интегрант, удовлетворяющий условиям Φ_1 – Φ_3) при $m = 1$, $N = n$. Определим на пространстве $\overset{\circ}{W}_p^1(\omega)$ функционал f , полагая $f(v) = J_{\Phi}(v, \nabla v)$. Поскольку $J_{\Phi} \in \Lambda(L^{p_1}(\omega) \times L^p(\omega)^n)$, то $f \in \Lambda(\overset{\circ}{W}_p^1(\omega))$. Из равенства (26) следует, что обобщенная производная функционала f по направлению $\bar{v}$ в точке v вычисляется по формуле

$$f^0(v; \bar{v}) = \sup \{ \langle \bar{v}, \Phi'_{\eta}(\cdot, v, \nabla v) \rangle + \langle \nabla \bar{v}, z^* \rangle, z^* \in \mathcal{A}(v, \nabla v) \},$$

а обобщенный градиент $\partial f(v)$ определяется соотношением

$$\partial f(v) = \Phi'_{\eta}(\cdot, v, \nabla v) - \operatorname{div} \mathcal{A}(v, \nabla v).$$

Очевидно, что $\mathcal{F} = \partial f$ – ограниченное отображение из $\overset{\circ}{W}_p^1(\omega)$ в $W_q^{-1}(\omega)$, $\mathcal{F}(v) \in C_V(W_q^{-1}(\omega)) \quad \forall v$.

ЛЕММА 9. Если интегрант $\Phi: \omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям Φ_1 – Φ_3) при $m = 1$, $N = n$, то функционал $f(v) = J_{\Phi}(v, \nabla v)$ принадлежит классу $\Lambda_1(\overset{\circ}{W}_p^1(\omega))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно установить включение $\mathcal{F} = \partial f \in S(\overset{\circ}{W}_p^1(\omega))$. Пусть $v_i \in \overset{\circ}{W}_p^1(\omega)$, $v_i^* \in \mathcal{F}(v_i)$ – последовательности, обладающие свойствами (2). Тогда $v_i \rightarrow v$ в $L^{p_1}(\omega)$, последовательность $w_i = \Phi'_{\eta}(\cdot, v_i, \nabla v_i)$ ограничена в пространстве $L^{q_1}(\omega)$. Без ограничения общности можно считать, что $w_i \rightharpoonup w$ в $L^{q_1}(\omega)$. Поэтому $\langle v_i, w_i \rangle \rightarrow \langle v, w \rangle$; здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – стандартная билинейная форма на $L^{p_1}(\omega) \times L^{q_1}(\omega)$.

Так как $v_i^* \in \mathcal{F}(v_i)$, то найдется такой элемент z_i^* из $\mathcal{A}(v_i, \nabla v_i)$, что $v_i^* = w_i - \operatorname{div} z_i^*$. Последовательность z_i^* ограничена в $L^q(\omega)^n$. Можно считать, что $z_i^* \rightarrow z^*$ в $L^q(\omega)^n$ и $v^* = w - \operatorname{div} z^*$. Из соотношений

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \langle v_i, w_i \rangle = \langle v, w \rangle, \quad \overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} \langle v_i, v_i^* \rangle \leq \langle v, v^* \rangle$$

следует неравенство (23) с $z_i = \nabla v_i$, $z = \nabla v$. В силу леммы 8 $z_i \rightarrow z$ в $L^p(\omega)^n$, $z^* \in \mathcal{A}(y, z)$, поэтому $v_i \rightarrow v$ в $\overset{\circ}{W}_p^1(\omega)$, $v^* \in \mathcal{F}(v) = \Phi'_\eta(\cdot, v, \nabla v) - \operatorname{div} \mathcal{A}(v, \nabla v)$. Лемма доказана.

Условием леммы 9 удовлетворяет, например, функционал

$$f(v) = \int_{\omega} (|\nabla v|^p + |\nabla v| + a(x)v) dx,$$

где $a \in L^{q_1}(\omega)$. Функционалы такого рода характерны для задач механики вязко-пластических сред (см., например, [18], [22]).

Приведенный пример носит иллюстративный характер. Аналогичные лемме 9 результаты верны и для более общих пространств Соболева.

Теоремы 1–4 являются новыми и для гладких функционалов класса Λ_1 . Применительно к интегральным функционалам на пространстве $\overset{\circ}{W}_p^1(\omega)$ существенно, что, вообще говоря, $p \neq 2$, так что рассматриваемые B -пространства не предполагаются гильбертовыми.

По известным схемам (см., например, [2]–[11], [13]) установленные в работе утверждения могут быть использованы для исследования операторных уравнений и включений. Наиболее интересными представляются приложения к оценкам числа решений соответствующих нелинейных задач.

Список литературы

1. Palais R. S., Smale S. A generalized Morse theory // Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.). 1964. V. 70. № 1. P. 165–172.
2. Скрыпник И. В. Нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка. Киев: Наукова думка, 1973.
3. Вайнберг М. М. Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений. М.: Наука, 1972.
4. Бобылёв Н. А., Емельянов С. В., Коровин С. К. Геометрические методы в вариационных задачах. М.: Магистр, 1998.
5. Похожаев С. И. О разрешимости нелинейных уравнений с нечетными операторами // Функц. анализ и его прилож. 1967. Т. 1. № 3. С. 66–73.
6. Browder F. E. Nonlinear elliptic boundary value problems and the generalized topological degree // Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.). 1970. V. 76. № 5. P. 999–1005.
7. Скрыпник И. В. Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач. М.: Наука, 1990.
8. Климов В. С. О топологических характеристиках негладких функционалов // Изв. РАН. Сер. матем. 1998. Т. 62. № 5. С. 117–134.
9. Климов В. С., Сенчакова Н. В. Об относительном вращении многозначных потенциальных векторных полей // Матем. сб. 1991. Т. 182. № 10. С. 1393–1407.
10. Климов В. С. Бесконечномерный вариант теоремы Пуанкаре–Хопфа и гомологические характеристики функционалов // Матем. сб. 2001. Т. 192. № 1. С. 51–66.

11. *Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обутовский В. В.* Топологические методы в теории неподвижных точек многозначных отображений // УМН. 1980. Т. 35. №1. С. 59–126.
12. *Милнор Дж., Уоллес А.* Дифференциальная топология. Начальный курс. М.: Мир, 1972.
13. *Красносельский М. А., Забрейко П. П.* Геометрические методы нелинейного анализа. М.: Наука, 1975.
14. *Кларк Ф.* Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988.
15. *Масси У.* Теория гомологий и когомологий. М.: Мир, 1981.
16. *Дольд А.* Лекции по алгебраической топологии. М.: Мир, 1976.
17. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. Методы теории гомологий. М.: Наука, 1984.
18. *Экланд И., Темам Р.* Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979.
19. *Обен Ж. П., Экланд И.* Прикладной нелинейный анализ. М.: Мир, 1988.
20. *Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.
21. *Соболев С. Л.* некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.
22. *Мосолов П. П., Мясников В. П.* Механика жесткопластических сред. М.: Наука, 1981.

Ярославский государственный
университет им. П. Г. Демидова

Поступила в редакцию
20.04.2001