Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. А. Шамоян, Слабо обратимые элементы в весовых анизотропных пространствах голоморфных в поликруге функций, *Матем. сб.*, 2002, том 193, номер 6, 143–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm664>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 15:37:10

УДК 517.55

Ф. А. Шамоян

Слабо обратимые элементы в весовых анизотропных пространствах голоморфных в поликруге функций

В работе исследуются вопросы слабой обратимости в весовых L^p -пространствах голоморфных в поликруге функций. Найдено полное описание весовых функций, при которых каждая голоморфная и ограниченная функция в поликруге, не имеющая нулей, слабо обратима в соответствующих пространствах. Кроме того, установлено, что при $n \geq 2$, в отличие от одномерного случая, слабая обратимость внешних функций в известном смысле равносильна слабой обратимости внутренних функций.

Библиография: 19 названий.

Введение

Пусть $\mathbf{D}^n = \{z = (z_1, \dots, z_n), |z_j| < 1, j = \overline{1, n}\}$ – единичный поликруг в n -мерном комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$, T^n – его остов, X – некоторое топологическое пространство голоморфных в $\mathbf{D}^n$ функций, в котором множество всех многочленов от $z_1, \dots, z_n$ всюду плотно, при этом операторы

$$S(f)(z) = z_1 \cdots z_n \cdot f(z_1, \dots, z_n), \quad \Phi_z(f) = f(z), \quad z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{D}^n,$$

являются непрерывными в X .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $f \in X$ и существует последовательность многочленов $\{P_k\}_1^\infty$ такая, что

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} P_k(z)f(z) = 1, \quad z \in \mathbf{D}^n,$$

причем сходимость имеет место в топологии пространства X ; тогда говорят, что f *слабо обратима* в пространстве X .

Понятие слабой обратимости теснейшим образом связано с вопросами полноты систем многочленов в весовых пространствах голоморфных функций (см. [1]–[3]). Очевидно, что слабая обратимость функции f в пространстве X равносильна ее цикличности относительно оператора S в пространстве X , т.е. полноте системы $\{S^k\}_{k \in \mathbb{Z}_+^n}$ в пространстве X . Вопросы слабой обратимости исследовались в основном в пространствах голоморфных функций одной переменной (см. [4]–[7]).

В настоящей работе мы рассматриваем слабую обратимость ограниченных аналитических в $\mathbf{D}^n$ функций в весовых L^p -пространствах. Для изложения основных результатов статьи введем следующие обозначения. Пусть $H(\mathbf{D}^n)$ – множество

Работа выполнена при поддержке Министерства образования (грант № Е-00-1-66) и Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 01-01-00992).

всех голоморфных в $\mathbf{D}^n$ функций; $H^p(\mathbf{D}^n)$ ($0 < p \leq +\infty$) – пространство Харди в $\mathbf{D}^n$ (см. [8]); $\varphi(\mathbf{r}) = (\varphi_1(r_1), \dots, \varphi_n(r_n))$, $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)$, $r_j \in \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, где φ_j ($j = 1, 2, \dots$) являются монотонно растущими положительными и непрерывными функциями на $\mathbb{R}_+$. Символом $A^p(\varphi)$ ($0 < p < +\infty$) обозначим следующее пространство голоморфных в $\mathbf{D}^n$ функций:

$$A^p(\varphi) = \left\{ f \in H(\mathbf{D}^n) : \|f\|_{A^p(\varphi)} = \left(\int_{\mathbf{D}^n} |f(z)|^p \exp \left(-\varphi \left(\frac{1}{1-|z|} \right) \right) dm_{2n}(z) \right)^{1/p} < +\infty \right\},$$

где $\exp \left(-\varphi \left(\frac{1}{1-|z|} \right) \right) = \prod_{j=1}^n \exp \left(-\varphi_j \left(\frac{1}{1-|z_j|} \right) \right)$, $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{D}^n$, dm_{2n} – $2n$ -мерная мера Лебега на $\mathbf{D}^n$.

Мы получим полную характеристику вектор-функций φ , для которых каждая функция $f \in H^\infty(\mathbf{D}^n)$, $f(z) \neq 0$, $z \in \mathbf{D}^n$, слабо обратима в пространстве $A^p(\varphi)$. Кроме того, устанавливается, что слабая обратимость внешних функций в $A^p(\varphi)$ в известном смысле равносильна слабой обратимости внутренних функций, т.е. если $n \geq 2$ и в пространстве $A^p(\varphi)$ слабо обратима каждая внешняя функция $f \in H^\infty(\mathbf{D}^n)$, то в $A^p(\varphi)$ слабо обратима каждая внутренняя функция $S(z)$, $S(z) \neq 0$, $z \in \mathbf{D}^n$, и наоборот. Отметим, что при $n = 1$, как хорошо известно (см. [5], [9]), если $Q \in A^p(\varphi)$ и Q – внешняя, то Q слабо обратима в $A^p(\varphi)$ для произвольного φ , а внутренняя функция $S(z) = \exp \left(-\frac{1+z}{1-z} \right)$, $z \in \mathbf{D} = \mathbf{D}^1$, слабо не обратима в $A^p(\varphi)$, $0 < p < +\infty$, даже в том случае, когда φ имеет степенной порядок роста меньше единицы (см. [5], [6]).

Основные результаты этой статьи были изложены на Международной конференции по комплексному анализу в Институте им. Л. Эйлера в июне 1999 г. и анонсированы в заметке [10].

§1. Формулировка основных результатов и доказательство вспомогательных утверждений

Пусть $\varphi(\mathbf{r}) = (\varphi_1(r_1), \dots, \varphi_n(r_n))$, $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}_+^n = \mathbb{R}_+ \times \dots \times \mathbb{R}_+$; предположим, что каждая функция φ_j удовлетворяет всем указанным выше условиям и, кроме того,

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln r}{\varphi_j(r)} = 0, \quad j = \overline{1, n}. \quad (1)$$

Такие вектор-функции в дальнейшем назовем *весовыми*. Пусть $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ – весовая вектор-функция на $\mathbb{R}_+^n$,

$$m_k^{(j)} = \sup_{r \in [0, 1)} \left\{ r^k \exp \left(-\frac{1}{p} \varphi_j \left(\frac{1}{1-r} \right) \right) \right\}, \quad j = \overline{1, n}, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad (2)$$

$$M_k^{(j)} = \sup_{s \in \mathbb{Z}_+} \{ m_s^{(j)} s^k \}, \quad j = \overline{1, n}, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad (3)$$

$$T_j(r) = \sup_{k \geq 1} \left\{ \frac{r^k}{M_k^{(j)}} \right\}, \quad r \in \mathbb{R}_+, \quad (4)$$

$$T_*(r) = \min_{1 \leq j \leq n} T_j(r), \quad T^*(r) = \max_{1 \leq j \leq n} T_j(r), \quad r \in \mathbb{R}_+. \quad (5)$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ – весовая вектор-функция.

1) Если

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln T_*(r)}{r^{3/2}} dr = +\infty, \quad (6)$$

то каждая функция $f \in H^\infty(\mathbf{D}^n)$, $f(z) \neq 0$, $z \in \mathbf{D}^n$, слабо обратима в пространстве $A^p(\varphi)$, $1 \leq p < +\infty$.

2) Обратно, пусть функции $\varphi_j(e^y)$ выпуклы на $\mathbb{R}_+$, $j = \overline{1, n}$, и

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln T^*(r)}{r^{3/2}} dr < +\infty, \quad (7)$$

тогда существует функция $f \in H^\infty(\mathbf{D}^n)$, $f(z) \neq 0$, $z \in \mathbf{D}^n$, слабо не обратимая в пространстве $A^p(\varphi)$ при всех $1 \leq p < +\infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В одномерном случае при более жестких ограничениях на регулярность роста функции φ и в других терминах аналогичный результат получен Н. К. Никольским в [5], а в пространстве голоморфных в круге функций с заданным ростом коэффициентов разложения – А. Бёрлингом в [11].

Из теоремы 1 непосредственно вытекает

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\varphi(\mathbf{r}) = (\varphi_0(r), \dots, \varphi_0(r))$, где функция $\varphi_0(e^y)$ выпукла в $\mathbb{R}_+$, тогда следующие утверждения равносильны:

- 1) каждая функция $f \in H^\infty(\mathbf{D}^n)$ слабо обратима в $A^p(\varphi)$;
- 2) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln T_0(r)}{r^{3/2}} dr = +\infty$, где, как и прежде, T_0 определяется по формулам (2)–(4).

Для формулировки второго результата статьи напомним, что функция $f \in H^\infty(\mathbf{D}^n)$ называется внешней, если

$$\ln |f(0)| = \int_{T^n} \ln |f(\zeta)| dm_n(\zeta),$$

где $dm_n(\zeta)$ – нормированная мера Лебега на T^n ; функция $S(z)$ называется внутренней, если $S \in H^\infty(\mathbf{D}^n)$, $|S(\zeta)| = 1$ почти всюду по мере Лебега на T^n .

ТЕОРЕМА 2. Пусть $n \geq 2$, $1 \leq p < +\infty$, $\varphi = (\varphi_0, \dots, \varphi_0)$, при этом функция $\varphi_0(e^y)$ выпукла на $\mathbb{R}_+$, $T_0(r)$ определяется по формулам (2)–(4). Тогда следующие утверждения равносильны:

- 1) каждая внешняя функция $f \in H^\infty(\mathbf{D}^n)$ слабо обратима в пространстве $A^p(\varphi)$;
- 2) каждая внутренняя функция $S(z) \neq 0$, $z \in \mathbf{D}^n$, слабо обратима в $A^p(\varphi)$;
- 3) каждая функция $f \in H^\infty(\mathbf{D}^n)$, $f(z) \neq 0$, $z \in \mathbf{D}^n$, слабо обратима в $A^p(\varphi)$;
- 4)

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln T_0(r)}{r^{3/2}} dr = +\infty. \quad (8)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Х. Хелсоном [12] было установлено, что если $f \in H^\infty(\mathbf{D}^n)$ слабо обратима в $H^p(\mathbf{D}^n)$ при некотором $p \in [1, +\infty)$, то f – внешняя функция; им же был поставлен вопрос о справедливости обратного утверждения. У. Рудин в дальнейшем [13] построил внешнюю функцию, не являющуюся слабо обратимой в пространстве $H^p(\mathbf{D}^n)$ при всех $1 \leq p < +\infty$.

В теореме 2 фактически описываются весовые пространства, в которых каждая внешняя (внутренняя) функция слабо обратима.

Доказательство теорем 1 и 2 основано на нескольких вспомогательных утверждениях.

Ясно, что пространство $A^p(\varphi)$ при $1 \leq p < +\infty$ является банаховым. В лемме 1 найдено подходящее представление линейных непрерывных функционалов на $A^p(\varphi)$.

ЛЕММА 1. Пусть $1 \leq p < +\infty$, φ – весовая вектор-функция, Φ – линейный непрерывный функционал на $A^p(\varphi)$,

$$e_z(\zeta) = \prod_{j=1}^n \frac{1}{1 - \zeta_j z_j}, \quad \zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n), \quad z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{D}^n. \quad (9)$$

Тогда функция $g(z) = \Phi(e_z)$, $z \in \mathbf{D}^n$, голоморфна в $\mathbf{D}^n$, при этом справедливо представление

$$\Phi(f) = \lim_{\rho \rightarrow 1-0} \int_{T^n} f(\rho\zeta) g(\rho\bar{\zeta}) dm_n(\zeta), \quad (10)$$

где dm_n – нормированная мера Лебега на T^n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что если $0 < \rho < 1$, $f \in A^p(\varphi)$, $f(z) = \sum_{|k|=0}^{+\infty} c_k z^k$, $z \in \mathbf{D}^n$, и $f_\rho(z) = f(\rho z) = \sum_{|k|=0}^{+\infty} c_k \rho^k z^k$, то последний ряд равномерно сходится в замкнутом поликруге $\overline{\mathbf{D}^n}$, поэтому $\Phi(f_\rho) = \sum_{|k|=0}^{+\infty} c_k \Phi(\delta_k)$, где $\delta_k(z_1, z_2, \dots, z_n) = z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}$, $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{D}^n$.

В то же время, легко видеть, что $\lim_{\rho \rightarrow 1-0} \|f_\rho - f\|_{A^p(\varphi)} = 0$. Поэтому

$$\Phi(f) = \lim_{\rho \rightarrow 1-0} \Phi(f_\rho). \quad (11)$$

Теперь заметим, что $g(z) = \sum_{|k|=0}^{+\infty} \Phi(\delta_k) z^k$, $z \in \mathbf{D}^n$. Следовательно,

$$\Phi(f_{\rho^2}) = \int_{T^n} f(\rho\zeta) g(\rho\bar{\zeta}) dm_n(\zeta).$$

Тогда, если учесть (11), получим утверждение леммы.

ЛЕММА 2. Пусть $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, $f \in H^\infty(\mathbf{D}^n)$, $f(z) \neq 0$, $z \in \mathbf{D}^n$, $D_{z_j} f = z_j \frac{\partial f}{\partial z_j}(z_1, \dots, z_n)$, $D^k f(z) = D_{z_n}^{k_n} D_{z_{n-1}}^{k_{n-1}} \dots D_{z_1}^{k_1} f(z)$, $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{D}^n$. Тогда существует функция $\psi_k \in H(\mathbf{D}^n)$ такая, что

$$D^k f(z) = \psi_k(z) f(z), \quad z \in \mathbf{D}^n, \quad (12)$$

при этом

$$|\psi_k(z_1, \dots, z_n)| \leq \frac{c}{(1 - |z_1|)^{2k_1+1} \dots (1 - |z_n|)^{2k_n+1}}. \quad (13)$$

¹Здесь и далее через c_1, c_2 и т. д. обозначаются абсолютные постоянные.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем лемму при $n = 2$, так как при $n > 2$ рассуждения аналогичны. С этой целью сначала установим следующие оценки:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial z_j}(z_1, z_2) f^{-1}(z_1, z_2) \right| \leq \frac{c_1}{(1 - |z_j|)^2 (1 - |z_m|)}, \quad j, m = 1, 2, \quad j \neq m, \quad (14)$$

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_2}(z_1, z_2) f^{-1}(z_1, z_2) \right| \leq \frac{c_2}{(1 - |z_1|)^2 (1 - |z_2|)^2}, \quad z = (z_1, z_2) \in \mathbf{D}^2. \quad (15)$$

По условию леммы $f(z) \neq 0$, $z \in \mathbf{D}^2$, $f \in H^\infty(\mathbf{D}^2)$, поэтому функция $\ln |f(z)|$ является 2-гармонической в $\mathbf{D}^2$, причем указанная функция ограничена сверху, в силу этого функция $\ln |f(z_1, z_2)|$ внутри бикруга $\mathbf{D}^2$ представима интегралом Пуассона (см. [8]), т.е.

$$\ln |f(z_1, z_2)| = \int_{T^2} P_z(\zeta) d\mu(\zeta), \quad z = (z_1, z_2) \in \mathbf{D}^2, \quad (16)$$

где $d\mu(\zeta)$ – конечная мера на T^2 . Пусть теперь

$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i \frac{\partial}{\partial y_j} \right), \quad z_j = x_j + iy_j, \quad j = 1, 2.$$

Используя представление ядра Пуассона

$$P_z(\zeta) = \operatorname{Re} \left(\frac{\zeta_1 + z_1}{\zeta_1 - z_1} \right) \operatorname{Re} \left(\frac{\zeta_2 + z_2}{\zeta_2 - z_2} \right), \quad \zeta, z \in \mathbf{D}^2,$$

из равенства (16) получаем

$$\frac{\partial f(z_1, z_2)}{\partial z_1} f^{-1}(z_1, z_2) = 2 \int_{T^2} \frac{\zeta_1}{(\zeta_1 - z_1)^2} \operatorname{Re} \left(\frac{\zeta_2 + z_2}{\zeta_2 - z_2} \right) d\mu(\zeta). \quad (17)$$

Отсюда легко следует, что

$$\left| \frac{\partial f}{\partial z_1}(z_1, z_2) f^{-1}(z_1, z_2) \right| \leq \frac{c}{(1 - |z_1|)^2 (1 - |z_2|)}. \quad (18)$$

Оценка (14) установлена при $j = 1, m = 2$. Таким же образом рассматривается случай $j = 2, m = 1$. Теперь перейдем к доказательству оценки (15). Дифференцируя равенство (17) по z_2 , получаем:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_2} f^{-1}(z_1, z_2) - \frac{\partial f}{\partial z_1} \frac{\partial f}{\partial z_2} f^{-2}(z_1, z_2) = 4 \int_{T^2} \frac{\zeta_1 \zeta_2 \ln |f(\zeta_1)|}{(\zeta_1 - z_1)^2 (\zeta_2 - z_2)^2} dm_2(\zeta),$$

т.е.

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_2}(z_1, z_2) f^{-1}(z_1, z_2) \right| \\ & \leq \left| \frac{\partial f}{\partial z_1} \frac{\partial f}{\partial z_2} f^{-2}(z_1, z_2) \right| + \frac{4}{(1 - |z_1|)^2 (1 - |z_2|)^2} \int_{T^2} |d\mu(\zeta)|. \end{aligned}$$

Учитывая (14), получаем оценку (15). Проведем заключительный этап доказательства леммы по индукции. Пусть оценка (13) справедлива при $k = (k_1, k_2)$. Покажем ее при $k + 1 = (k_1 + 1, k_2 + 1)$, используя представление $D^{k_1} D^{k_2} f(z_1, z_2) = \psi_{k_1, k_2}(z_1, z_2) f(z_1, z_2)$. Легко видеть, что

$$\begin{aligned} D^{k_1+1} D^{k_2+1} f(z_1, z_2) &= z_1 z_2 \left(\frac{\partial^2 \psi_{k_1, k_2}}{\partial z_1 \partial z_2} + \frac{\partial \psi_{k_1, k_2}}{\partial z_1} \frac{\partial f}{\partial z_2} f^{-1} + \frac{\partial \psi_{k_1, k_2}}{\partial z_2} \frac{\partial f}{\partial z_1} f^{-1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_2} \psi_{k_1, k_2} f^{-1} \right) (z_1, z_2) f(z_1, z_2) \stackrel{\text{def}}{=} \psi_{k_1+1, k_2+1}(z_1, z_2) f(z_1, z_2). \end{aligned}$$

Оценим функцию ψ_{k_1+1, k_2+1} , учитывая (14) и (15). Имеем

$$\begin{aligned} |\psi_{k_1+1, k_2+1}(z_1, z_2)| &\leq c \left(\left| \frac{\partial^2 \psi_{k_1, k_2}}{\partial z_1 \partial z_2} \right| + \left| \frac{\partial \psi_{k_1, k_2}}{\partial z_1} \right| \frac{c_1}{(1 - |z_1|)(1 - |z_2|)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{c_2}{(1 - |z_1|)^2(1 - |z_2|)} \left| \frac{\partial \psi_{k_1, k_2}}{\partial z_2} \right| + \frac{c_3}{(1 - |z_1|)^2(1 - |z_2|)^2} |\psi_{k_1, k_2}(z_1, z_2)| \right), \\ z = (z_1, z_2) &\in \mathbf{D}^2. \end{aligned} \quad (19)$$

Теперь, записывая интегральную формулу Коши по остову поликруга

$$K(z_1, z_2) = \left\{ \zeta = (\zeta_1, \zeta_2) : |\zeta_1 - z_1| \leq \frac{1}{2}(1 - |z_1|), |\zeta_2 - z_2| \leq \frac{1}{2}(1 - |z_2|) \right\},$$

приходим к оценкам:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^2 \psi_{k_1, k_2}(z_1, z_2)}{\partial z_1 \partial z_2} \right| &\leq \frac{c_4}{(1 - |z_1|)^{2k_1+2} (1 - |z_2|)^{2k_2+2}}, \\ \left| \frac{\partial \psi_{k_1, k_2}(z_1, z_2)}{\partial z_1} \right| &\leq \frac{c_5}{(1 - |z_1|)^{2k_1+2} (1 - |z_2|)^{2k_2+1}}, \\ \left| \frac{\partial \psi_{k_1, k_2}(z_1, z_2)}{\partial z_2} \right| &\leq \frac{c_6}{(1 - |z_1|)^{2k_1+1} (1 - |z_2|)^{2k_2+2}}. \end{aligned}$$

Учитывая эти оценки, из (19) окончательно получаем:

$$|\psi_{k_1+1, k_2+1}(z_1, z_2)| \leq \frac{c_7}{(1 - |z_1|)^{2(k_1+1)+1} (1 - |z_2|)^{2(k_2+1)+1}}, \quad z = (z_1, z_2) \in \mathbf{D}^2.$$

Лемма доказана.

В следующей лемме дается оценка функций $f \in A^p(\varphi)$ на диагонали поликруга.

ЛЕММА 3. Пусть $f \in A^p(\varphi)$, $\mathcal{D}(f)(z) = f(z, z, \dots, z)$, $z \in \mathbf{D}$, тогда справедлива оценка

$$\int_{\mathbf{D}} |\mathcal{D}(f)(z)|^p \exp\left(-\varphi\left(\frac{2}{1 - |z|}\right)\right) (1 - |z|)^{2n-2} dm_2(z) \leq c \|f\|_{A^p(\varphi)}^p.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим метод, разработанный в [14], [15]. Пусть $l = (l_1, \dots, l_n)$, $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, при этом $-2^{k_j} \leq l_j \leq 2^{k_j} - 1$. Положим

$$\begin{aligned} \Delta_{k,l} &= \left\{ \zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) : 1 - \frac{1}{2^{k_j}} \leq |\zeta_j| < 1 - \frac{1}{2^{k_j+1}}, \right. \\ &\quad \left. \frac{\pi l_j}{2^{k_j}} \leq \arg \zeta_j < \frac{\pi(l_j + 1)}{2^{k_j}}, j = \overline{1, n} \right\}, \\ \Delta_{k,l}^* &= \left\{ \zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) : 1 - \frac{1}{2^{k_j-1}} \leq |\zeta_j| < 1 - \frac{1}{2^{k_j+2}}, \right. \\ &\quad \left. \frac{\pi(l_j - 1/2)}{2^{k_j}} \leq \arg \zeta_j < \frac{\pi(l_j + 3/2)}{2^{k_j}}, j = \overline{1, n} \right\}. \end{aligned}$$

Легко заметить, что криволинейные диадические кубы $\Delta_{k,l}^*$ покрывают $\mathbf{D}^n$ конечнократно. Пусть $z \in \Delta_{k,l}$ и $0 < \delta < 1/4$, и пусть $K_\delta(z) = \{\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) : |\zeta_j - z_j| < \delta(1 - |z_j|), j = \overline{1, n}\}$. Используя n -субгармоничность функции $|f(z)|^p$, имеем

$$|f(z)|^p \leq \frac{1}{m_{2n}(K_\delta)} \int_{K_\delta(z)} |f(\zeta)|^p dm_{2n}(\zeta).$$

Заметим также, что если $\zeta \in K_\delta(z)$, то $1 - |\zeta_j| \geq (1 - |z_j|)/2$, $j = \overline{1, n}$. Поэтому $\varphi_j\left(\frac{2}{1 - |z_j|}\right) \geq \varphi_j\left(\frac{1}{1 - |\zeta_j|}\right)$, $j = \overline{1, n}$. Следовательно,

$$\exp\left(-\varphi\left(\frac{2}{1 - |z|}\right)\right) |f(z)|^p \leq \frac{1}{m_{2n}(K_\delta)} \int_{K_\delta} |f|^p \exp\left(-\varphi\left(\frac{1}{1 - |\zeta|}\right)\right) dm_{2n}(\zeta).$$

Учитывая, наконец, оценку $m_{2n}(K_\delta) \geq \tilde{c}_\delta m_{2n}(\Delta_{k,l})$, из последнего неравенства получаем

$$\begin{aligned} &\max_{z \in \Delta_{k,l}} \left\{ |f(z)|^p \exp\left(-\varphi\left(\frac{2}{1 - |z|}\right)\right) m_{2n}(\Delta_{k,l}) \right\} \\ &\leq c_\delta \int_{\Delta_{k,l}^*} |f(\zeta)|^p \exp\left(-\varphi\left(\frac{1}{1 - |\zeta|}\right)\right) dm_{2n}(\zeta). \end{aligned}$$

Суммируя последние неравенства и учитывая конечнократность покрытия системой $\{\Delta_{k,l}^*\}$ поликруга $\mathbf{D}^n$, имеем:

$$\begin{aligned} &\sum_{|k|=0}^{+\infty} \sum_{l_n=-2^{k_n}}^{2^{k_n}-1} \cdots \sum_{l_1=-2^{k_1}}^{2^{k_1}-1} \max_{z \in \Delta_{k,l}} \left\{ |f(z)|^p \exp\left(-\varphi\left(\frac{2}{1 - |z|}\right)\right) m_{2n}(\Delta_{k,l}) \right\} \\ &\leq c_1(\delta) \int_{\mathbf{D}^n} |f(\zeta)|^p \exp\left(-\varphi\left(\frac{1}{1 - |\zeta|}\right)\right) dm_{2n}(\zeta). \end{aligned} \quad (20)$$

Теперь заметим, что если

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_{k,l} &= \left\{ z \in \mathbf{D} : 1 - \frac{1}{2^k} \leq |z| < 1 - \frac{1}{2^{k+1}}, \frac{\pi l}{2^k} \leq \arg z < \frac{\pi(l+1)}{2^k} \right\}, \\ l &= -2^k, \dots, 2^k - 1, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \end{aligned}$$

то

$$m_{2n}(\Delta_{k,\dots,k,l,\dots,l}) = [m_2(\tilde{\Delta}_{k,l})]^n \geq c_0(1-|z|)^{2n-2} m_2(\tilde{\Delta}_{k,l}) \quad \forall z \in \Delta_{k,l}.$$

Учитывая последнюю оценку и суммируя только те члены ряда (20), индексы которых принадлежат диагонали $\mathbb{Z}_+^n$, приходим к неравенству:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=-2^k}^{2^k-1} \max_{z \in \tilde{\Delta}_{k,l}} \left\{ |\mathcal{D}(f)(z)|^p \exp\left(-\varphi\left(\frac{2}{1-|z|}\right)\right) (1-|z|)^{2n-2} \right\} m_2(\tilde{\Delta}_{k,l}) \\ \leq c_1(\delta) \|f\|_{Ap(\varphi)}^p. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\int_{\mathbf{D}} |\mathcal{D}(f)(z)|^p \exp\left(-\varphi\left(\frac{2}{1-|z|}\right)\right) (1-|z|)^{2n-2} dm_2(z) \leq c_2(\delta) \|f\|_{Ap(\varphi)}^p.$$

Лемма доказана.

В дальнейшем нам потребуются следующие утверждения, установленные соответственно в работах [16] и [17].

ЛЕММА 4 (см. [16]). Пусть $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ – произвольная последовательность монотонно растущих положительных чисел, для которой

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln \alpha_k}{k^{3/2}} < +\infty.$$

Тогда можно построить голоморфную в единичном круге $\mathbf{D}$ функцию f ограниченного вида, при этом f разлагается в ряд Фурье: $f(e^{i\theta}) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_{-k} e^{-ik\theta}$, $\theta \in [-\pi, \pi]$, причем ряд абсолютно сходится, $c_{-k} \neq 0$, $k = 1, 2, \dots$,

$$|c_{-k}| \leq \frac{1}{\alpha_k}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (21)$$

Пусть λ – положительная непрерывная и монотонно растущая функция на $\mathbb{R}_+$. Скажем, что λ – *быстро растущая функция* на $\mathbb{R}_+$, если

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{\lambda(x)} = 0, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

ЛЕММА 5 (см. [17]). Пусть $\lambda(x)$ – быстро растущая функция на $\mathbb{R}_+$, причем $\ln \lambda(e^x)$ выпукла на $\mathbb{R}_+$. Тогда функция

$$a(r) = \inf_{x>1} \left\{ \frac{\lambda(x)}{(1-1/x)^r} \right\}, \quad r \in \mathbb{R}_+, \quad (22)$$

тоже быстро растущая, причем $\ln a(e^y)$ выпукла на $\mathbb{R}_+$.

ЛЕММА 6. Пусть $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ – весовая вектор-функция на $\mathbb{R}_+$, при этом функции $\ln \varphi_j(e^y)$ выпуклы на $\mathbb{R}_+$, $T_j(r)$ определяются по формулам (2)–(4). Тогда справедливы оценки

$$a_j(r) \leq T_j(r) \leq a_j(2r), \quad r \in \mathbb{R}_+, \quad j = \overline{1, n}, \quad (23)$$

где

$$a_j(r) = \inf_{x>1} \left\{ \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-r} \exp\left(\frac{1}{p} \varphi_j(x)\right) \right\}, \quad r \in \mathbb{R}_+. \quad (24)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала заметим, что

$$\begin{aligned} m_k^{(j)} &= \sup_{0 \leq r < 1} \left\{ r^k \exp\left(-\frac{1}{p} \varphi_j\left(\frac{1}{1-r}\right)\right) \right\} \\ &= \left(\inf_{0 < r < 1} \left\{ r^{-k} \exp\left(\frac{1}{p} \varphi_j\left(\frac{1}{1-r}\right)\right) \right\} \right)^{-1} \\ &= \left(\inf_{x>1} \left\{ \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-k} \exp\left(\frac{1}{p} \varphi_j(x)\right) \right\} \right)^{-1} = \frac{1}{a_j(k)}, \quad k \in \mathbb{Z}_+. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$M_p^{(j)} = \sup_{k \geq 1} \{m_k^{(j)} k^p\} = \sup_{k \geq 1} \left\{ \frac{k^p}{a_j(k)} \right\}. \quad (25)$$

Положим теперь $\widetilde{M}_p^{(j)} = \sup_{r>0} \{r^p / a_j(r)\}$. Очевидно, что $M_p^{(j)} \leq \widetilde{M}_p^{(j)}$, $p \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1, n}$. Поэтому

$$T_j(r) = \sup_{p \geq 1} \left\{ \frac{r^p}{M_p^{(j)}} \right\} \geq \sup_{p \geq 1} \left\{ \frac{r^p}{\widetilde{M}_p^{(j)}} \right\} = a(r), \quad r \in \mathbb{R}_+.$$

Последнее равенство является следствием выпуклости функции $\ln a(e^y)$ (см. [17], [18]).

Таким образом, левая оценка в (25) получена. Чтобы получить правую оценку, сначала заметим, что если

$$\ln \widetilde{M}_p^{(j)} = \sup_{r>0} \{p \ln r - \ln a(r)\} = p \ln r_p - \ln a_j(r_p),$$

$k_p = [r_p]$, где $[r_p]$ – целая часть r_p , то

$$\begin{aligned} \ln \widetilde{M}_p^{(j)} &= p \ln r_p - \ln a_j(r_p) \leq p \ln(k_p + 1) - \ln a(k_p) \\ &= p \ln k_p - \ln a_j(k_p) + p \ln \left(1 + \frac{1}{k_p}\right) \leq \ln m_p^{(j)} + p \ln 2, \end{aligned}$$

т.е. $\ln(\widetilde{M}_p^{(j)} / 2^p) \leq \ln m_p^{(j)}$. Поэтому

$$a_j(2r) = \sup_{p \geq 1} \left\{ \frac{(2r)^p}{M_p^{(j)}} \right\} \geq \sup_{p \geq 1} \left\{ \frac{r^p}{M_p^{(j)}} \right\} = T_j(r).$$

Оценка (25) установлена. Лемма доказана.

ЛЕММА 7. Пусть $\lambda(x)$ удовлетворяет условиям леммы 6. Тогда функция $\tilde{a}(r) = \inf_{x>1} \left\{ \frac{\lambda(2x)}{(1-1/x)^r} \right\}$ удовлетворяет оценке

$$a(r) \leq \tilde{a}(r) \leq c_0 a(4r), \quad r \geq r_0, \quad (26)$$

где $a(r)$ определяется по (22), c_0 и r_0 – положительные константы, не зависящие от r .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. левой оценки в (26) очевидно. Докажем правую оценку. Прежде всего заметим, что при достаточно большом r

$$\tilde{a}(r) = \inf_{x>c} \left\{ \frac{\lambda(2x)}{(1-1/x)^r} \right\},$$

где c – заранее заданное достаточно большое положительное число. Поэтому

$$\begin{aligned} \tilde{a}(r) &= \inf_{y>2c} \left\{ \frac{\lambda(y)}{(1-2/y)^r} \right\} = \inf_{y>2c} \left\{ \frac{\lambda(y)}{(1-1/y)^{4r}} \frac{(1-1/y)^{4r}}{(1-2/y)^r} \right\} \\ &\leq \inf_{y>2c} \left\{ \frac{\lambda(y)}{(1-1/y)^{4r}} \right\} \sup_{y>2c} \left\{ \frac{(1-1/y)^4}{1-2/y} \right\}^r. \end{aligned} \quad (27)$$

Но очевидно, что

$$\sup_{y>2c} \left\{ \frac{(1-1/y)^4}{1-2/y} \right\} \leq 1 \quad (28)$$

при достаточно больших c . Поэтому из (27) получаем $\tilde{a}(r) \leq c_0 a(4r)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 8. Пусть $f \in A^p(\varphi)$, $1 \leq p < +\infty$, $f(z) = \sum_{|k|=0}^{+\infty} c_k z^k$. Тогда имеет место оценка

$$|c_k| \leq \tilde{c}_0 \|f\|_{A^p(\varphi)} a(k) (k+1)^{1/p}, \quad k = (k_1, \dots, k_n), \quad (29)$$

где $a(k) = \prod_{j=1}^n a_j(k_j)$, $(k+1) = \prod_{j=1}^n (k_j+1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что

$$\begin{aligned} c_k \int_{Q^n} r^{k+1} \exp\left(-\frac{1}{p} \varphi\left(\frac{1}{1-r}\right)\right) dm_n(r) \\ = \int_{\mathbf{D}^n} f(\zeta) \bar{\zeta}^k \exp\left(-\frac{1}{p} \varphi\left(\frac{1}{1-|\zeta|}\right)\right) dm_{2n}(\zeta). \end{aligned}$$

Напомним, что $Q^n = [0, 1]^n$.

Применяя неравенство Гёльдера, получаем

$$\begin{aligned} c_k \int_{Q^n} r^{k+1} \exp\left(-\frac{1}{p} \varphi\left(\frac{1}{1-r}\right)\right) dm_n(r) \\ \leq (k+2)^{-1/q} \left(\int_{\mathbf{D}^n} |f(\zeta)|^p \exp\left(-\varphi\left(\frac{1}{1-|\zeta|}\right)\right) dm_{2n}(\zeta) \right)^{1/p}, \end{aligned}$$

где $q = p/(p-1)$.

Предположим, что

$$\begin{aligned} \sup_{r \in Q^n} \left\{ r^k \exp \left(-\frac{1}{p} \varphi \left(\frac{1}{1-r} \right) \right) \right\} &= \left(\inf_{r \in Q^n} \left\{ r^{-k} \exp \left(\frac{1}{p} \varphi \left(\frac{1}{1-r} \right) \right) \right\} \right)^{-1} \\ &= r_0^k \exp \left(-\frac{1}{p} \varphi \left(\frac{1}{1-r_0} \right) \right). \end{aligned}$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} \int_{Q^n} r^{k+1} \exp \left(-\frac{1}{p} \varphi \left(\frac{1}{1-r} \right) \right) dm_n(r) &> \int_{Q_{r_0}^n} r^{k+1} \exp \left(-\frac{1}{p} \varphi \left(\frac{1}{1-r} \right) \right) dm_n(r) \\ &\geq r_0^k \exp \left(-\frac{1}{p} \varphi \left(\frac{1}{1-r_0} \right) \right) \frac{r_0^2}{(k+2)}, \end{aligned}$$

где $Q_{r_0}^n = \{r = (r_1, \dots, r_n), 0 < r_j < r_j^0, j = \overline{1, n}\}$, т.е.

$$|c_k| \leq \frac{\|f\|_{A^p(\varphi)} a(k)(k+1)^{1/p}}{r_0^2} \leq \tilde{c}_0 \|f\|_{A^p(\varphi)} a(k)(k+1)^{1/p}.$$

Лемма доказана.

§ 2. Доказательство теорем 1 и 2

Доказательство теоремы 1 мы проведем для случая $n = 2$, так как при $n \geq 2$ рассуждения аналогичны. Пусть $f \in H^\infty(\mathbf{D}^2)$, $f(z) \neq 0$, $z \in \mathbf{D}^2$. Обозначим через $E(f)$ замыкание множества $\mathcal{P}f$ в пространстве $A^p(\varphi)$, где $\mathcal{P}$ – множество всех многочленов от z_1, z_2 .

1) Чтобы доказать первую часть теоремы, достаточно установить, что для произвольного линейного непрерывного функционала Φ на $A^p(\varphi)$ такого, что $\Phi(g) = 0 \forall g \in E(f)$, выполняется равенство $\Phi(1) = 0$. С этой целью сначала заметим, что для произвольного $k = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}_+^2$ функция $D^{k_1, k_2} f(z)$ принадлежит $E(f)$. Действительно, по лемме 2 имеем $D^{k_1, k_2} f = \psi_{k_1, k_2} f$. Поэтому для произвольного $P_m \in \mathcal{P}$

$$\|P_m f - D^k f\|_{A^p(\varphi)} = \|P_m f - \psi_k f\| \leq \|f\|_\infty \|P_m - \psi_k\|_{A^p(\varphi)}.$$

Теперь, учитывая, что множество $\mathcal{P}$ всюду плотно в $A^p(\varphi)$, можно построить последовательность $P_m \in \mathcal{P}$ такую, что $\|P_m - \psi_k\| \rightarrow 0$ при $|m| \rightarrow +\infty$, т.е. $D^{k_1, k_2} f \in E(f)$. Следовательно, если $\Phi \perp E(f)$, то $\Phi(D^{k_1, k_2} f) = 0$, $(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}_+^2$. Тогда если

$$f(z_1, z_2) = \sum_{m_1, m_2=0}^{+\infty} a_{m_1, m_2} z_1^{m_1} z_2^{m_2},$$

то

$$D^{k_1, k_2} f(z_1, z_2) = \sum_{m_1, m_2=0}^{+\infty} a_{m_1, m_2} m_1^{k_1} m_2^{k_2} z_1^{m_1} z_2^{m_2}.$$

Учитывая лемму 1, получаем

$$\Phi(D^{k_1, k_2} f) = \lim_{\rho \rightarrow 1-0} \int_{T^2} D^{k_1, k_2} f(\rho \zeta) g(\rho \bar{\zeta}) dm_n(\zeta) = 0,$$

где $g(z) \in \Phi(e_z)$, $e_z(\zeta) = \frac{1}{1 - \zeta z}$, $\zeta, z \in \mathbf{D}^2$, т.е.

$$\Phi(D^{k_1, k_2} f) = \lim_{\rho \rightarrow 1-0} \sum_{m_1, m_2=0}^{+\infty} a_{m_1, m_2} \Phi(\delta_{m_1, m_2}) m_1^{k_1} m_2^{k_2} \rho^{k_1+k_2} = 0. \quad (30)$$

Теперь убедимся, что последний ряд абсолютно сходится при $\rho = 1$. Действительно, имеем

$$\begin{aligned} |\Phi(\delta_{m_1, m_2})| &\leq \|\Phi\| \cdot \|\delta_{m_1, m_2}\|_{A^p(\varphi)} \\ &= \|\Phi\| \left(\int_{\mathbf{D}} |\zeta_1|^{pm_1} |\zeta_2|^{pm_2} \exp\left(-\varphi\left(\frac{1}{1-|\zeta|}\right)\right) dm_n(\zeta_1, \zeta_2) \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Напомним, что, как и прежде,

$$\varphi\left(\frac{1}{1-|\zeta|}\right) = \varphi_1\left(\frac{1}{1-|\zeta_1|}\right) + \varphi_2\left(\frac{1}{1-|\zeta_2|}\right), \quad \zeta = (\zeta_1, \zeta_2) \in \mathbf{D}^2.$$

В силу условия (1) нетрудно видеть, что интеграл не превосходит $c_1/(m_1^q m_2^q)$, где $m_1, m_2 \geq 1$ — натуральные числа, а q — заданное достаточно большое положительное число. Поэтому, учитывая, что $f \in H^\infty(\mathbf{D}^2)$, имеем

$$|a_{m_1, m_2} \Phi(\delta_{m_1, m_2})| \leq \frac{c_2}{m_1^q m_2^q}.$$

В силу этой оценки и (30)

$$\Phi(D^{k_1, k_2} f) = \sum_{m_1, m_2=0}^{+\infty} a_{m_1, m_2} \Phi(\delta_{m_1, m_2}) m_1^{k_1} m_2^{k_2} = 0, \quad (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}_+^2. \quad (31)$$

Теперь введем в рассмотрение голоморфную в полуплоскости $\Pi_+ = \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$ функцию

$$F(z) = \sum_{m_1, m_2=0}^{+\infty} \frac{a_{m_1, m_2} \Phi(\delta_{m_1, m_2})}{(m_1 + z^2)(m_2 + z^2)}, \quad z \in \Pi_+. \quad (32)$$

Докажем, что $F(z) = 0 \quad \forall z \in \Pi_+$. Используя равенства

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_1 + z^2} &= \sum_{p=0}^{n_1} \frac{(-1)^p k_1^p}{z^{2(p+1)}} + \frac{(-1)^{n_1+1} k_1^{n_1+1}}{z^{2(n_1+2)}(k_1 + z^2)}, \\ \frac{1}{k_2 + z^2} &= \sum_{q=0}^{n_2} \frac{(-1)^q k_2^q}{z^{2(q+1)}} + \frac{(-1)^{n_2+1} k_2^{n_2+1}}{z^{2(n_2+2)}(k_2 + z^2)}, \end{aligned}$$

где n_1, n_2 — пока произвольные фиксированные числа, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{(k_1 + z^2)(k_2 + z^2)} &= \sum_{p=0}^{n_1} \sum_{q=0}^{n_2} \frac{(-1)^{p+q} k_1^p k_2^q}{z^{2(p+q+2)}} + \sum_{p=0}^{n_1} \frac{(-1)^{p+n_2+1} k_1^p k_2^{n_2+1}}{z^{2(p+n_2+3)}(k_2 + z^2)} \\ &+ \sum_{q=0}^{n_2} \frac{(-1)^{q+n_1+1} k_2^q k_1^{n_1+1}}{z^{2(q+n_1+3)}(k_1 + z^2)} + \frac{(-1)^{n_2+n_1+2} k_1^{n_1+1} k_2^{n_2+1}}{(k_1 + z^2)(k_2 + z^2)}. \end{aligned}$$

Умножая последнее равенство на $a_{k_1, k_2} \Phi(\delta_{k_1, k_2})$ и суммируя по k_1, k_2 , получаем:

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{k_1, k_2=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{n_1} \sum_{q=0}^{n_2} \frac{(-1)^{p+q} k_1^p k_2^q}{z^{2(p+q+2)}} \right) a_{k_1, k_2} \Phi(\delta_{k_1, k_2}) \\ &+ \sum_{k_1, k_2=0}^{+\infty} \frac{a_{k_1, k_2} \Phi(\delta_{k_1, k_2})}{k_2 + z^2} \left(\sum_{p=0}^{n_1} \frac{(-1)^{p+n_2+1} k_1^p k_2^{n_2+1}}{z^{2(p+n_2+3)}} \right) \\ &+ \sum_{k_1, k_2=0}^{+\infty} \frac{a_{k_1, k_2} \Phi(\delta_{k_1, k_2})}{k_1 + z^2} \left(\sum_{q=0}^{n_2} \frac{(-1)^{q+n_1+1} k_2^q k_1^{n_1+1}}{z^{2(q+n_1+3)}} \right) \\ &+ \sum_{k_1, k_2=0}^{+\infty} \frac{a_{k_1, k_2} \Phi(\delta_{k_1, k_2}) (-1)^{n_2+n_1+2} k_1^{n_1+1} k_2^{n_2+1}}{(k_1 + z^2)(k_2 + z^2) z^{2(n_1+1)+2(n_2+1)}} \end{aligned} \quad (33)$$

(мы считаем, что $k_j^0 = 1$ при $k_j = 0, j = 1, 2$). Очевидно, что первая сумма в правой части (33) равна нулю в силу (31). Остальные слагаемые обозначим соответственно через $I_j, j = 1, 2, 3$, т.е.

$$F(z) = I_1(z) + I_2(z) + I_3(z), \quad z \in \Pi_+. \quad (34)$$

Приступим теперь к оценке этих сумм в полуплоскости $\Pi_1^+ = \{z : \operatorname{Re} z \geq 1\}$ по отдельности.

Оценим I_1 . Очевидно, что

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \frac{1}{|z|^{2(n_2+1)}} \sum_{k_2=0}^{+\infty} \sum_{k_1=0}^{+\infty} \left\{ \frac{|a_{k_1, k_2}| \cdot |\Phi(\delta_{k_1, k_2})|}{|k_2 + z^2|} \left(\sum_{p=0}^{n_1} \frac{k_1^p}{|z|^{2p}} \right) k_2^{n_2+1} \right\} \\ &= \frac{1}{|z|^{2(n_2+1)}} \left(\sum_{k_2=0}^{+\infty} \sum_{k_1=0}^{[|z|^2/2]} \{ \dots \} + \sum_{k_2=0}^{+\infty} \sum_{k_1=[|z|^2/2]+1}^{+\infty} \{ \dots \} \right) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|z|^{2(n_2+1)}} (I_1^1 + I_1^2), \end{aligned} \quad (35)$$

где $[|z|^2/2]$ — целая часть числа $|z|^2/2$, при этом предполагается, что $|z| \neq 0$.

Оценим I_1^1 . Имеем:

$$\begin{aligned} I_1^1 &\leq \sum_{k_2=0}^{+\infty} \sum_{k_1=0}^{[|z|^2/2]} \frac{|a_{k_1, k_2}| \cdot |\Phi(\delta_{k_1, k_2})| k_2^{n_2+1}}{|k_2 + z^2|} \sum_{p=0}^{n_1} \frac{1}{2^p} \\ &\leq 2 \sum_{k_2=0}^{+\infty} \sum_{k_1=0}^{+\infty} \frac{|a_{k_1, k_2}| \cdot |\Phi(\delta_{k_1, k_2})| k_2^{n_2+1} (k_1 + 1)}{|k_2 + z^2| (k_1 + 1)} \\ &\leq 2 \sup_{k_1, k_2 \geq 1} \{ |\Phi(\delta_{k_1, k_2})| k_2^{n_2+1} (k_1 + 1) \} \sum_{k_1, k_2=0}^{+\infty} \frac{|a_{k_1, k_2}|}{(k_1 + 1)(k_2 + 1)} \leq c_0 M_{1, n_2+1}. \end{aligned} \quad (36)$$

Здесь мы использовали неравенство Харди (см. [8; гл. 4]), согласно которому

$$\sum_{k_1, k_2=0}^{+\infty} \frac{|a_{k_1, k_2}|}{(k_1 + 1)(k_2 + 1)} \leq \int_{T^2} |f(\zeta)| dm_2(\zeta).$$

Оценим I_1^2 . Имеем:

$$\begin{aligned} I_1^2 &\leq \sum_{k_2=1}^{+\infty} \sum_{k_1=[|z|^2/2]+1}^{+\infty} \sum_{p=0}^{n_1} \frac{|a_{k_1, k_2}| \cdot |\Phi(\delta_{k_1, k_2})| k_2^{n_2+1}}{|k_2 + z^2|} \frac{k_1^p}{|z|^{2p}} \\ &= \sum_{k_2=1}^{+\infty} \sum_{k_1=[|z|^2/2]+1}^{+\infty} \left\{ \frac{|a_{k_1, k_2}| \cdot |\Phi(\delta_{k_1, k_2})|}{|k_2 + z^2|} \left(\sum_{p=0}^{n_1} \frac{k_1^p}{|z|^{2p}} \right) k_2^{n_2+1} \right\}. \end{aligned}$$

Учитывая, что $2k_1/|z|^2 > 1$ при $k_1 > |z|^2/2$, получаем

$$\begin{aligned} I_1^2 &\leq \sum_{k_2=1}^{+\infty} \sum_{k_1=[|z|^2/2]+1}^{+\infty} \frac{|a_{k_1, k_2}| \cdot |\Phi(\delta_{k_1, k_2})|}{|k_2 + z^2|} \left(\frac{2k_1}{|z|^2} \right)^{n_1} \left(\sum_{p=0}^{n_1} \frac{1}{2^p} \right) k_2^{n_2+1} \\ &\leq \frac{c 2^{n_1+1}}{|z|^{2n_1}} \sum_{k_2=1}^{+\infty} \sum_{k_1=1}^{+\infty} \frac{|a_{k_1, k_2}| \cdot |\Phi(\delta_{k_1, k_2})|}{|k_2 + z^2|} k_2^{n_2+1} k_1^{n_1+1}. \end{aligned}$$

Точно таким же образом получаем

$$I_1^2 \leq \frac{2^{n_1+1}}{|z|^{2n_1}} \sup_{k_1, k_2 \geq 1} \{ |\Phi(\delta_{k_1, k_2})| k_2^{n_2+1} k_1^{n_1+1} \} = c_1 \frac{2^{n_1+1}}{|z|^{2n_1}} M_{n_1+1, n_2+1}. \quad (37)$$

Аналогично оцениваются I_2 и I_3 . В частности, для I_3 получаем

$$\begin{aligned} |I_3| &\leq \sum_{k_1, k_2=0}^{+\infty} \frac{|a_{k_1, k_2}| \cdot |\Phi(\delta_{k_1, k_2})|}{|k_1 + z^2| \cdot |k_2 + z^2| \cdot |z|^{2(n_1+n_2+2)}} k_2^{n_2+1} k_1^{n_1+1} \\ &\leq c_2 \frac{M_{n_1+1, n_2+1}}{|z|^{2(n_1+n_2+2)}}, \quad z \in \Pi_1. \end{aligned}$$

Объединяя оценки (35)–(37), получаем:

$$|F(z)| \leq c \left\{ \frac{2^{n_1} M_{n_1+1, 1}}{|z|^{2(n_1+1)}} + \frac{2^{n_2} M_{1, n_2+1}}{|z|^{2(n_2+1)}} + \frac{M_{n_1+1, n_2+1}}{|z|^{2(n_1+n_2+2)}} \right\}, \quad \operatorname{Re} z \geq 1.$$

Напомним, что

$$\begin{aligned} m_{p, q} &= \sup_{(r_1, r_2) \in Q^2} \left\{ r_1^p r_2^q \exp \left(-\varphi_1 \left(\frac{1}{1-r} \right) - \varphi_2 \left(\frac{1}{1-r} \right) \right) \right\}, \\ M_{p, q} &= \sup_{\substack{k_1 \geq 1 \\ k_2 \geq 1}} \{ m_{k_1, k_2} k_1^p k_2^q \} = \sup_{k_1 \geq 1} \{ m_{k_1}^{(1)} k_1^p \} \sup_{k_1 \geq 1} \{ m_{k_1}^{(2)} k_2^q \}, \\ M_{p, 1} &\leq c_0 M_p^{(1)}, \quad M_{1, q} \leq c_0 M_q^{(2)}. \end{aligned}$$

Таким образом, окончательно получаем

$$|F(2z)| \leq c_2 \left\{ \frac{M_{n_1+1}^{(1)}}{|z|^{2(n_1+1)}} + \frac{M_{n_2+1}^{(2)}}{|z|^{2(n_2+1)}} + \frac{M_{n_1+1}^{(1)}}{|z|^{2(n_1+1)}} \frac{M_{n_2+1}^{(2)}}{|z|^{2(n_2+1)}} \right\}, \quad z \in \Pi_1. \quad (38)$$

Подбирая n_1, n_2 таким образом, чтобы

$$\frac{|z|^{2(n_j+1)}}{M_{n_j+1}^{(j)}} = T_j(|z|^2), \quad j = 1, 2,$$

от неравенства (38) приходим к оценке

$$|F(2z)| \leq c_2 \left\{ \frac{1}{T_1(|z|^2)} + \frac{1}{T_2(|z|^2)} + \frac{1}{T_1(|z|^2)} \frac{1}{T_2(|z|^2)} \right\},$$

т.е.

$$|\psi(z)| = |F(2z)| \leq c_2 \left\{ \frac{1}{T_1(|z|^2)} + \frac{1}{T_2(|z|^2)} \right\} \leq \frac{c}{T_*(|z|^2)}, \quad z \in \Pi_1. \quad (39)$$

Теперь заметим, что из (6), (39) следует, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln |\psi(1+iy)|}{1+y^2} dy = -\infty,$$

поэтому $F(z) \equiv 0, z \in \Pi^+$, т.е.

$$\sum_{k_1, k_2=0}^{+\infty} \frac{a_{k_1, k_2} \Phi(\delta_{k_1, k_2})}{(k_1 + z^2)(k_2 + z^2)} = 0, \quad z \in \Pi^+.$$

Отсюда легко видеть, что $a_{k_1, k_2} \Phi(\delta_{k_1, k_2}) = 0, (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}_+^2$, в частности, $a_{0,0} \Phi(\delta_{0,0}) = 0 = f(0) \Phi(1)$. Но поскольку $f(0) \neq 0$, то $\Phi(1) = 0$. Первая часть теоремы установлена.

2) Докажем теперь вторую часть теоремы. Для этого достаточно доказать, что если выполняется (7), то можно построить функцию $Q \in H^\infty(\mathbf{D}^2)$ такую, что $Q(z) \neq 0, z \in \mathbf{D}^2$, Q слабо не обратима в $A^p(\varphi)$. Пусть f — построенная в лемме 4 функция. Последовательность $\{\alpha_k\}_{k=1}^\infty$ выберем в дальнейшем. Тогда по теореме Неванлинны—Смирнова (см. [19])

$$f(z) = \frac{\psi(z)}{S(z)}, \quad \psi, S \in H^\infty(\mathbf{D}), \quad S(z) \neq 0, \quad z \in \mathbf{D}. \quad (40)$$

Положим

$$Q(z_1, z_2) = S\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right), \quad (z_1, z_2) \in \mathbf{D}^2.$$

Очевидно, что $Q \in H^\infty(\mathbf{D}^2), Q(z) \neq 0, z \in \mathbf{D}^2$. Докажем, что если функция S слабо не обратима в пространстве $A^p(\varphi^*)$, где $\varphi^*(r) = \varphi_1(2r) + \varphi_2(2r) - 2(n-2) \ln r$,

$r \in \mathbb{R}_+$, то функция Q слабо не обратима в пространстве $A^p(\varphi)$. Действительно, если бы существовала последовательность многочленов

$$P_{m_1, m_2}(z_1, z_2) = \sum_{k_2=0}^{m_2} \sum_{k_1=0}^{m_1} c_{k_1, k_2} z_1^{k_1} z_2^{k_2}$$

такая, что $P_{m_1, m_2}Q \rightarrow 1$ в пространстве $A^p(\varphi)$ при $|m| = m_1 + m_2 \rightarrow +\infty$, то из леммы 3 мы имели бы: $\mathcal{D}(P_{m_1, m_2})(z)S(z) \rightarrow 1$ в пространстве $A^p(\varphi^*)$, что равносильно $\tilde{P}_{m_1+m_2}(z)S(z) \rightarrow 1$ в пространстве $A^p(\varphi^*)$, где $\tilde{P}_{m_1+m_2}(z) = \sum_{k_2=0}^{m_2} \sum_{k_1=0}^{m_1} c_{k_1, k_2} z^{k_1+k_2}$, $z \in \mathbf{D}$. Следовательно, остается выбрать $\{\alpha_k\}_1^\infty$ в лемме 4 таким образом, чтобы функция S не была слабо обратимой в пространстве $A^p(\varphi^*)$. С этой целью мы построим линейный непрерывный функционал $\Phi \in (A^p(\varphi^*))^*$ такой, что

$$\Phi(\delta_k S) = 0, \quad \delta_k(z) = z^k, \quad z \in \mathbf{D}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (41)$$

В то же время $\Phi(1) \neq 0$. Тогда доказательство второго пункта теоремы будет следовать из теоремы Хана–Банаха.

Прежде всего, из леммы 6 следует, что при выполнении (7) мы имеем:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln a_j(2r)}{r^{3/2}} dr < +\infty, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Поэтому, учитывая леммы 6, 7 и свойства функции a (см. [5], [17]), получаем

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln a^*(r)}{r^{3/2}} dr < +\infty, \quad (42)$$

где $a^*(r)$ – функция, построенная в лемме 6 по весу $\lambda^*(x) = \exp(\varphi^*(x))$, $x \in \mathbb{R}_+$. Учитывая (42), имеем

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln a^*(k)}{k^{3/2}} < +\infty.$$

Пусть теперь f – построенная в лемме 4 функция, имеющая вид (40), коэффициенты Фурье которой удовлетворяют оценке (21), где

$$\alpha_k = \frac{1}{a^*(k)(k+1)^{2+1/p}}, \quad k \in \mathbb{N},$$

т. е. $f(e^{i\theta}) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_{-k} e^{-ik\theta}$, $|c_{-k}| \leq 1/\alpha_k$, $c_{-k} \neq 0$, $k = 1, 2, \dots$.

Положим

$$g(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_{-k} z^{k-1}, \quad z \in \mathbf{D}.$$

Очевидно, что $g \in H^\infty(\mathbf{D})$. Докажем, что формулой

$$\Phi(F) = \lim_{\rho \rightarrow 1-0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\rho e^{i\theta}) g(e^{-i\theta}) d\theta, \quad F \in A^p(\varphi^*), \quad (43)$$

задается линейный непрерывный функционал на пространстве $A^p(\varphi^*)$. Действительно, если

$$F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k z^k, \quad z \in \mathbf{D}, \quad F \in A^p(\varphi^*),$$

то

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\rho e^{i\theta}) g(e^{-i\theta}) d\theta = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k c_{-k-1} \rho^k.$$

Из лемм 4 и 8 имеем

$$|b_k| \cdot |c_{-k-1}| \leq \frac{c_0 \|F\|_{A^p(\varphi^*)} a^*(k) (1+k)^{1/p}}{a^*(k+1) (k+2)^{2+1/p}} \leq \frac{c_1 \|F\|_{A^p(\varphi^*)}}{(k+2)^2}. \quad (44)$$

Отсюда следует, что предел (43) существует и представляет линейный непрерывный функционал на $A^p(\varphi^*)$.

Докажем, что выполняются равенства (41). Имеем

$$\begin{aligned} \Phi(\delta_k S) &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\theta} S(e^{i\theta}) g(e^{-i\theta}) d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\theta} S(e^{i\theta}) e^{i\theta} f(e^{i\theta}) d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k+1)\theta} \psi(e^{i\theta}) d\theta = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

поскольку $\psi \in H^\infty(\mathbf{D})$. В то же время

$$\Phi(1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(e^{-i\theta}) d\theta = c_{-1} \neq 0.$$

Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Прежде всего заметим, что импликации $4) \Rightarrow 1)$, $4) \Rightarrow 2)$, $4) \Rightarrow 3)$ непосредственно следуют из теоремы 1. Импликации $3) \Rightarrow 1)$, $3) \Rightarrow 2)$ очевидны. Остается доказать импликации $1) \Rightarrow 4)$, $2) \Rightarrow 4)$.

Доказательство $1) \Rightarrow 4)$ следует из второй части теоремы 1. Действительно, пусть f — функция, построенная как в доказательстве п. 2) теоремы 1. Положим снова

$$Q(z_1, z_2) = S\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right), \quad (z_1, z_2) \in \mathbf{D}^2.$$

Тогда, как доказано в [8; гл. 4], функция Q — внешняя, если $S \in H^\infty(\mathbf{D})$, $S(z) \neq 0$, $z \in \mathbf{D}$. Как установлено выше, если (4) не выполнено, то Q слабо не обратима в пространстве $A^p(\varphi_0^*)$, поэтому интеграл (8) расходится.

Докажем теперь $2) \Rightarrow 4)$. Пусть S — указанная выше функция; как хорошо известно (см. [19]),

$$S(z) = \exp\left(-\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\mu(\theta)\right), \quad z \in \mathbf{D},$$

где μ — неотрицательная сингулярная мера на $[-\pi, \pi]$.

Положим

$$Q(z_1, z_2) = [S(z_1)]^{1/2} [S(z_2)]^{1/2}, \quad (z_1, z_2) \in \mathbf{D}^2.$$

Очевидно, что $Q \in H^\infty(\mathbf{D}^2)$, $Q(z) \neq 0$, $z \in \mathbf{D}^2$, при этом $|Q(\xi_1, \xi_2)| = 1$ почти всюду по мере Лебега на T^2 .

Поэтому Q – внутренняя функция в $\mathbf{D}^2$. Повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве второй части теоремы 1, получаем, что Q слабо не обратима в $A^p(\varphi_0^*)$, если 4) не выполнено. Теорема доказана.

Список литературы

1. Келдыш М. В. Sur l'approximation en moyenne par polynomes, des fonctions d'une variable complexe // Матем. сб. 1945. Т. 16(18). С. 1–20.
2. Мергелян С. Н. Весовые приближения многочленами // УМН. 1956. Т. 9. № 5. С. 107–152.
3. Шапиро Г. Некоторые замечания о весовой полиномиальной аппроксимации голоморфных функций // Матем. сб. 1967. Т. 73(115). С. 320–330.
4. Shapiro H. S. Weakly invertible elements in certain function spaces and generators in l^1 // Michigan Math. J. 1964. V. 11. № 2. Р. 161–165.
5. Никольский Н. К. Избранные задачи весовой аппроксимации и спектрального анализа // Труды МИАН. 1974. Т. 120.
6. Шамоян Ф. А. Описание замкнутых идеалов и некоторые вопросы факторизации в алгебрах растущих функций в круге // Изв. АН Арм. ССР. Сер. матем. 1970. Т. 5. С. 419–433.
7. Шамоян Ф. А. О слабой обратимости в весовых пространствах аналитических функций // Изв. РАН. Сер. матем. 1996. Т. 60. № 5. С. 191–212.
8. Рудин У. Теория функций в поликруге. М.: Мир, 1974.
9. Гарнетт Дж. Ограниченные аналитические функции. М.: Мир, 1984.
10. Шамоян Ф. А. О слабой обратимости в весовых анизотропных пространствах голоморфных в поликруге функций // УМН. 2000. Т. 55. № 2. С. 153–154.
11. Beurling A. A critical topology in harmonic analysis on semigroups // Acta Math. 1964. V. 112. № 3–4. Р. 215–228.
12. Helson H. Lectures on invariant subspaces. New York: Academic Press, 1964.
13. Rudin W. Proof of a conjecture of Helson // Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.). 1968. V. 74. Р. 727–729.
14. Шамоян Ф. А. Теоремы вложения и характеристики следов в пространствах $H^p(V^n)$, $0 < p < +\infty$ // Матем. сб. 1978. Т. 107(149). № 3(11). С. 446–462.
15. Шамоян Ф. А. Диагональные отображения и вопросы представления в анизотропных пространствах голоморфных в полидиске функций // Сиб. матем. журн. 1990. Т. 31. № 2. С. 197–215.
16. Шамоян Ф. А. Характеристика скорости убывания коэффициентов Фурье ограниченно-го вида и классы аналитических функций с бесконечно дифференцируемыми граничными значениями // Сиб. матем. журн. 1995. Т. 36. № 4. С. 942–954.
17. Хрущев С. В. Проблема одновременной аппроксимации и стирание особенности интегралов типа Коши // Труды МИАН. 1978. Т. 130. С. 124–304.
18. Мандельброт С. Примающиеся ряды. Регуляризация последовательностей. Применение. М.: ИЛ, 1955.
19. Привалов И. И. Граничные свойства аналитических функций. М.–Л.: ГИТТЛ, 1950.

Брянский государственный
педагогический университет

Поступила в редакцию
15.01.2001