Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Богачев, М. Рёкнер, В. Штанныт, Единственность решений эллиптических уравнений и единственность инвариантных мер диффузий, *Матем. сб.*, 2002, том 193, номер 7, 3–36

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm665>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 13:40:57

УДК 517.956+517.98+519.2

В. И. Богачёв, М. Рёкнер, В. Штаннат

Единственность решений эллиптических уравнений и единственность инвариантных мер диффузий

Пусть M – полное связное риманово многообразие размерности d и L – эллиптический дифференциальный оператор второго порядка на M , который имеет следующее представление в локальных координатах: $L = a^{ij} \partial_{x_i} \partial_{x_j} + b^i \partial_{x_i}$, где $a^{ij} \in H_{\text{loc}}^{p,1}$, $b^i \in L_{\text{loc}}^p$ для некоторого $p > d$, а матрица (a^{ij}) не вырождена. Цель работы состоит в изучении проблемы единственности решения для эллиптического уравнения $L^* \mu = 0$ для вероятностных мер μ , которое понимается в слабом смысле: $\int L\varphi f d\mu = 0$ для всех $\varphi \in C_0^\infty(M)$. Кроме того, исследуется единственность инвариантных вероятностных мер для соответствующих полугрупп $(T_t^\mu)_{t \geq 0}$, порождаемых оператором L . Доказано, что если вероятностная мера μ на M удовлетворяет уравнению $L^* \mu = 0$ и $(L - I)(C_0^\infty(M))$ плотно в $L^1(M, \mu)$, то μ – единственное решение этого уравнения в классе вероятностных мер. В работе построены примеры (даже с $a^{ij} = \delta^{ij}$ и гладкими b^i), когда уравнение $L^* \mu = 0$ имеет более одного решения в классе вероятностных мер. Наконец, показано, что если $p > d + 2$, то полугруппа $(T_t)_{t \geq 0}$, порожденная L , имеет не более одной инвариантной вероятностной меры.

Библиография: 46 названий.

§ 1. Введение

Пусть Ω – открытое множество в $\mathbb{R}^d$, $A = (a^{ij})$ – борелевское отображение на Ω со значениями в пространстве положительных матриц на $\mathbb{R}^d$ и $b = (b^i)$ – борелевское векторное поле на Ω . Положим

$$L_{A,b}\varphi = a^{ij} \partial_i \partial_j \varphi + b^i \partial_i \varphi, \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \quad (1.1)$$

где мы используем стандартное правило суммирования по повторяющимся индексам и обозначение $\partial_i := \partial_{x_i}$. Предположим, что μ – локально конечная (возможно, знакопеременная) борелевская мера на Ω такая, что

$$L_{A,b}^* \mu = 0 \quad (1.2)$$

в следующем смысле: $a^{ij}, b^i \in L_{\text{loc}}^1(\Omega, \mu)$ и

$$\int_{\Omega} L_{A,b}\varphi d\mu = 0 \quad \text{для всех } \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \quad (1.3)$$

Работа выполнена при частичной поддержке Немецкого научного общества (DFG) (грант № 436 RUS 113/343/0(R)), фонда INTAS (гранты № № 99-559, 99-01317), EU-TMR Project (грант № ERB-FMRX-CT96-0075), а также Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № № 00-15-99267 и 01-01-00858).

Меры μ , удовлетворяющие (1.2), называются *инфинитезимально инвариантными*. Интерес к этому классу слабых эллиптических уравнений объясняется, в частности, тем, что всякая инвариантная мера диффузионного процесса с генератором $L_{A,b}$ удовлетворяет уравнению (1.3). Такие уравнения при широких предположениях относительно A и b (в частности, без предположения об ограниченности) были недавно исследованы в работах [1]–[14]. В случае $b = 0$ единственность решений таких уравнений исследовалась в работах [15], [16] в связи с задачами усреднения и стабилизации для эллиптических и параболических операторов.

Аналогичные объекты можно рассматривать и в случае, когда Ω — открытое множество в полном римановом многообразии M размерности d . Например, можно изучать операторы $L_{A,b}\varphi = \text{trase}(D^2 \circ A) + \langle b, \nabla \varphi \rangle$ (см. [17]). Однако в этом случае удобнее рассматривать эллиптические операторы второго порядка в дивергентной форме

$$\mathcal{L}_{A,b}\varphi = \text{div}(A\nabla\varphi) + \langle b, \nabla\varphi \rangle, \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \quad (1.4)$$

где b — борелевское векторное поле на M , $A(x)$ — неотрицательный оператор на $T_x M$, борелевский по x , $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает скалярное произведение в $T_x M$ и div обозначает дивергенцию относительно римановского объема dx , т.е. для всякой функции $\varphi \in C_0^\infty(M)$ выполняется равенство

$$\int_M \varphi \text{div } v \, dx = - \int_M \langle \nabla \varphi, v \rangle \, dx.$$

Такие операторы в дивергентной форме будут использоваться также и в случае $\mathbb{R}^d$. Уравнение

$$\mathcal{L}_{A,b}^* \mu = 0$$

определяется для локально ограниченных борелевских мер μ на Ω аналогично (1.2). Если оператор $L_{A,b}$ в форме (1.1) имеет коэффициенты a^{ij} из соболевского класса $H_{\text{loc}}^{p,1}(\Omega)$ и $b^i \in L_{\text{loc}}^p(\Omega, dx)$, что всегда будет иметь место ниже, то

$$L_{A,b} = \mathcal{L}_{A,b_0}, \quad \text{где } b_0^i = b^i - \partial_j a^{ij}. \quad (1.5)$$

Обратно,

$$\mathcal{L}_{A,b} = L_{A,b_1}, \quad \text{где } b_1^i = b^i + \partial_j a^{ij}, \quad (1.6)$$

т.е. оба представления эквивалентны (и коэффициенты удовлетворяют одинаковым локальным условиям). Однако в общем случае каждая из двух форм может иметь некоторые преимущества в различных задачах. Например, решения эллиптических уравнений в недивергентной форме обладают лучшими свойствами дифференцируемости. Стохастические дифференциальные уравнения в форме Ито приводят к этой форме. С другой стороны, стохастические дифференциальные уравнения в форме Стратоновича ведут к эллиптическим операторам дивергентного вида (см. [18]).

Пусть $\mathcal{P}(\Omega)$ — множество всех борелевских вероятностных мер на Ω . Для заданных, как и выше, A и b на Ω положим

$$\mathcal{M}_{\text{ell}}^{A,b} := \{ \mu \in \mathcal{P}(\Omega) \mid L_{A,b}^* \mu = 0 \}. \quad (1.7)$$

Такое же обозначение используется и в случае оператора $\mathcal{L}_{A,b}$.

Как будет объяснено ниже, при широких предположениях для каждой меры $\mu \in \mathcal{M}_{\text{ell}}^{A,b}$ существует сильно непрерывная полугруппа $(T_t^\mu)_{t \geq 0}$ на $L^1(\Omega, \mu)$ такая, что ее генератор совпадает с $L_{A,b}$ на $C_0^\infty(\Omega)$ и μ является суб-инвариантной для $(T_t^\mu)_{t \geq 0}$, т.е.

$$\int T_t^\mu f d\mu \leq \int f d\mu \quad \forall f \in L^\infty(\Omega, \mu), \quad f \geq 0, \quad \forall t \geq 0.$$

Если данное неравенство на самом деле есть равенство, то μ называется *инвариантной* для $(T_t^\mu)_{t \geq 0}$. Понятие инвариантности естественным образом распространяется и на знакопеременные меры. Более того, такая полугруппа $(T_t^\mu)_{t \geq 0}$ существует также и в случае, когда μ – положительная локально конечная мера на Ω , удовлетворяющая (1.2).

Цель этой работы состоит в изучении следующих проблем: выяснить, когда $\mathcal{M}_{\text{ell}}^{A,b}$ содержит не более одного элемента и когда ассоциированная полугруппа $(T_t^\mu)_{t \geq 0}$ имеет не более одной инвариантной вероятностной меры. Оказывается, что обе проблемы тесно связаны между собой (но не равносильны) и связаны также с вопросом о том, является ли оператор $(L_{A,b}, C_0^\infty(\Omega))$ L^1 -единственным в $L^1(\Omega, \mu)$ для $\mu \in \mathcal{M}_{\text{ell}}^{A,b}$, т.е. плотно ли множество $(L_{A,b} - I)(C_0^\infty(\Omega))$ в $L^1(\Omega, \mu)$. Один из наших основных результатов утверждает, что если существует мера $\mu \in \mathcal{M}_{\text{ell}}^{A,b}$ такая, что $(L_{A,b}, C_0^\infty(\mathbb{R}^d))$ является L^1 -единственным в $L^1(\mathbb{R}^d, \mu)$, то при весьма широких предположениях относительно A и b эта мера μ – единственный элемент в $\mathcal{M}_{\text{ell}}^{A,b}$ (см. теорему 4.1 ниже). Кроме того, в этом случае мера μ инвариантна для ассоциированной полугруппы $(T_t^\mu)_{t \geq 0}$ (которая также единственна), и при немного более сильных предположениях относительно b феллеровская версия этой полугруппы не имеет других инвариантных вероятностных мер. С другой стороны, мы доказываем, что если $\mathcal{M}_{\text{ell}}^{A,b}$ содержит более одного элемента, то никакая мера $\mu \in \mathcal{M}_{\text{ell}}^{A,b}$ не инвариантна для $(T_t^\mu)_{t \geq 0}$. Более того, для каждой меры $\mu \in \mathcal{M}_{\text{ell}}^{A,b}$ существуют различные сильно непрерывные полугруппы $(T_t)_{t \geq 0}$ на $L^1(\Omega, \mu)$, генераторы которых продолжают $L_{A,b}$. Мы также приводим целый класс примеров на $\mathbb{R}^d$ с $d > 1$, в которых $\#\mathcal{M}_{\text{ell}}^{A,b} > 1$ даже в случае, когда $A = \text{Id}$ и b бесконечно дифференцируемо (см. предложение 4.8). Наконец, мы даем конструктивные условия в терминах A и b , когда $\mathcal{M}_{\text{ell}}^{A,b}$ содержит в точности один элемент μ .

Таким образом, основным результатом этой работы является альтернатива: в случае, когда (1.2) имеет решение μ в классе вероятностных мер, либо μ – единственная вероятностная мера, удовлетворяющая (1.2), и тогда она также оказывается единственной инвариантной вероятностной мерой ассоциированной полугруппы $(T_t^\mu)_{t \geq 0}$ (которая, в свою очередь, единственна), либо никакая вероятностная мера μ , удовлетворяющая (1.2), не инвариантна для своей полугруппы $(T_t^\mu)_{t \geq 0}$. Наши примеры показывают, что обе возможности осуществляются (что было совсем не ясно заранее), и даются достаточные условия для исключения второй возможности. Важное качественное заключение из наших результатов состоит в том, что при разумных локальных предположениях о A и b имеется единственность инвариантной вероятностной меры для ассоциированных полугрупп, но нет единственности для эллиптического уравнения и что лучшая гладкость коэффициентов не помогает получить единственность решения эллиптического уравнения. В специальном

случае $M = \mathbb{R}^d$ некоторые из результатов этой работы были представлены на конференции “Бесконечномерный стохастический анализ” в Амстердаме в 1999 г. и в нашей статье [10] в трудах конференции. Здесь мы применяем и развиваем методы из [10], но приводимые доказательства автономны и не зависят от результатов в случае $\mathbb{R}^d$, полученных в [10]. В §§ 2, 3 доказываются или формулируются вспомогательные результаты. Помимо того, что эти вспомогательные результаты представляют и самостоятельный интерес, они позволяют изложить доказательства основных теорем в довольно компактной форме. Важным результатом является доказываемая в § 2 теорема 2.8 об области определения генератора $(T_t^\mu)_{t \geq 0}$. В § 3 изложены вспомогательные результаты об L^1 -единственности. В § 4 содержатся наши основные результаты о единственности для эллиптических уравнений и полугрупп вместе с интересным примером неединственности. Отметим, что в §§ 2–4 предполагается существование решений рассматриваемых эллиптических уравнений, но накладываемые на коэффициенты условия сами по себе не обеспечивают существования решений. В § 5 мы даем конструктивные условия единственности, выраженные в терминах коэффициентов A и b . Вопросы существования рассмотрены в работах [7], [8], [11]–[13], один типичный результат которых, дополняющий наше изложение, сформулирован в § 5. Заключительный § 6 посвящен одномерному случаю.

Наконец, следует отметить, что близкие задачи изучались в работах [19]–[22], где рассматривались полугруппы на $L^1(\mathbb{R}^d, dx)$ (или $L^1(M, dx)$), порожденные эллиптическими операторами второго порядка. Несмотря на некоторые похожие локальные аналитические проблемы эта ситуация принципиально отличается от обсуждаемой в нашей работе, где операторы рассматриваются на весовом пространстве $L^1(M, \mu)$. Важной особенностью обсуждаемых здесь задач является не только присутствие весового пространства, но и то, что сам вес μ задан лишь неявно (как решение эллиптического уравнения) и на него не накладываются никакие условия типа поведения на бесконечности. При этом коэффициент b не предполагается даже локально ограниченным. Ограничение же вероятностными решениями эллиптического уравнения, может быть, не вполне традиционное для теории уравнений с частными производными, мотивируется как вероятностным происхождением наших задач, так, возможно, и их аналитической природой. В этой связи отметим, что в работах [23]–[25] рассматривались неотрицательные интегрируемые гармонические функции на многообразиях, что соответствует случаю $A = \text{Id}$, $b = 0$ в наших обозначениях.

Введем некоторые обозначения. Если μ – локально конечная (возможно, знакопеременная) борелевская мера на борелевской σ -алгебре $\mathcal{B}(\Omega)$ на открытом множестве Ω (в $\mathbb{R}^d$ или в римановом многообразии), то обозначим через $L_{\text{loc}}^1(\Omega, \mu)$ класс всех функций f таких, что $\chi f \in L^1(\Omega, \mu)$ для всех $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$, где $C_0^\infty(\Omega)$ – класс всех бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем в Ω и $L^p(\Omega, \mu) = L^p(\Omega, |\mu|)$, $|\mu|$ – вариация μ . В случае компактного многообразия M полагаем $C_0^\infty(M) := C^\infty(M)$. Мера Лебега обозначается через dx и, как обычно, $L_{\text{loc}}^p(\Omega) := L_{\text{loc}}^p(\Omega, dx)$. То же самое обозначение используется для пространств векторнозначных отображений на Ω . Для каждого $p \in [1, \infty)$ положим $p' := p/(p-1)$.

Положим $\partial_i \varphi = \partial \varphi / \partial x_i$.

Непрерывный линейный оператор T на $L^r(\Omega, \mu)$, где μ – неотрицательная мера на Ω и $r \in [1, +\infty]$, называется *суб-марковским*, если для каждой функции $f \in L^\infty(\Omega, \mu) \cap L^r(\Omega, \mu)$ такой, что $0 \leq f \leq 1$ μ -п.в., имеем $0 \leq Tf \leq 1$ μ -п.в. Всякий суб-марковский оператор T на $L^p(\Omega, \mu)$ имеет единственное суб-марковское продолжение на всякое $L^r(\Omega, \mu)$, $r \in [p, \infty)$ (см., например, [26; гл. 1, прил. В, лемма 1.1]). Если T – суб-марковский оператор на $L^\infty(\Omega, \mu)$ и мера μ суб-инвариантна для T , т.е.

$$\int Tf d\mu \leq \int f d\mu \quad \forall f \in L^\infty(\Omega, \mu) \cap L^1(\Omega, \mu), \quad f \geq 0,$$

то T имеет единственное суб-марковское продолжение на $L^1(\Omega, \mu)$. Следовательно, в случае, когда мера μ конечна и суб-инвариантна для T и T является суб-марковским на некотором из пространств $L^r(\Omega, \mu)$, $r \in [1, \infty]$, то это же верно для всех этих пространств. Кроме того, сопряженный оператор T' к T на $L^1(\Omega, \mu)$ является суб-марковским на $L^\infty(\Omega, \mu)$ и μ суб-инвариантна для T' , значит, T' определен и является суб-марковским также на всех $L^r(\Omega, \mu)$.

Полугруппа непрерывных операторов $(T_t)_{t \geq 0}$ на $L^1(\Omega, \mu)$, состоящая из суб-марковских операторов, называется *суб-марковской*. Если T – суб-марковский оператор на $L^1(\Omega, \mu)$, где мера μ конечна и $T1 = 1$, то T называется *марковским*. Оператор с нормой, не превосходящей 1, называется *сжимающим*.

Напомним, что оператор L на плотной области $\mathcal{D}$ в банаховом пространстве X называется *диссипативным*, если для каждого $u \in \mathcal{D}$ существует элемент $l_u \in X^*$ такой, что $\|l_u\|_{X^*} = \|u\|_X$, $l_u(u) = \|u\|_X^2$ и $l_u(Lu) \leq 0$. Диссипативный оператор L называется *существенно m -диссипативным*, если он удовлетворяет следующему дополнительному условию:

$$\overline{(L - \lambda I)(\mathcal{D})} = X \quad \forall \lambda > 0, \quad (1.8)$$

где $\overline{E}$ обозначает замыкание E . Фактически достаточно, чтобы условие выше было выполнено для некоторого $\lambda > 0$ (см. [27; предложение 3.10]).

Пусть множество Ω открыто в $\mathbb{R}^d$ или в римановом многообразии M . Пусть $H^{p,r}(\Omega)$, $p \geq 1$, $r \geq 0$, – стандартное соболевское пространство функций на Ω , у которых обобщенные производные до порядка r входят в $L^p(\Omega)$, наделенное его естественной нормой (см., например, [28], [29])

$$\|f\|_{p,1} = \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla^r f\|_{L^p(\Omega)},$$

где в случае многообразия используется риманова связность. Пусть $H_{\text{loc}}^{p,r}(\Omega)$ – класс всех функций f на Ω таких, что $\chi f \in H^{p,r}(\Omega)$ для всех $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$. Наконец, $H_0^{p,r}(\Omega)$ обозначает замыкание $C_0^\infty(\Omega)$ в $H^{p,r}(\Omega)$.

§ 2. Свойства слабых решений и ассоциированных полугрупп

В общем случае слабые решения наших эллиптических уравнений не могут быть определены как слабые решения в классическом смысле (определяемые посредством интегрирования по частям (см. [30], [31])), поскольку они могут не быть слабо

дифференцируемы. Например, для всякой положительной вероятностной плотности f на $\mathbb{R}^d$ мера $\mu = f dx$ удовлетворяет уравнению $\left(\frac{1}{f}\Delta\right)^* \mu = 0$. Если $\det A > 0$, то всякое решение (1.2) имеет плотность относительно меры Лебега (см. [4]). Мы будем использовать следующий результат о регулярности мер, удовлетворяющих (1.2), который был недавно доказан в [4], [5].

ТЕОРЕМА 2.1. *Пусть μ – локально конечная (не обязательно неотрицательная) борелевская мера на открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, удовлетворяющая (1.2). Предположим, что для некоторого $p > d$*

- (A1) $a^{ij} \in H_{\text{loc}}^{p,1}(\Omega)$, отображение $A = (a^{ij})$ непрерывно и невырождено в Ω ,
 (A2) $b^i \in L_{\text{loc}}^p(\Omega, dx)$.

Тогда $\mu = \varrho dx$ с $\varrho \in H_{\text{loc}}^{p,1}(\Omega)$. В частности, ϱ имеет модификацию, которая локально непрерывна по Гёльдеру порядка $1 - d/p$. Кроме того, если Ω связно и $\mu \geq 0$, то для каждого компактного множества $K \subset \Omega$ существует такое $c_K > 0$, что

$$\sup_K \varrho \leq c_K \inf_K \varrho. \quad (2.1)$$

То же самое верно для оператора $\mathcal{L}_{A,b}$, если Ω – открытое подмножество риманова многообразия M , а A и b удовлетворяют условиям (A1) и (A2) в локальных координатах.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. (i) Предположим, что μ в теореме 2.1 – положительная мера. Отображение

$$\beta_\mu := \frac{\nabla \varrho}{\varrho}$$

называется *логарифмическим градиентом* μ . Оно играет важную роль в исследовании уравнения (1.2). Положим

$$\beta_{\mu,A} := (\beta_{\mu,A}^i), \quad \beta_{\mu,A}^i := \partial_j a^{ij} + a^{ij} \frac{\partial_j \varrho}{\varrho}. \quad (2.2)$$

Тогда $\beta_{\mu,A}^i \in L_{\text{loc}}^p(\Omega)$. Можно записать

$$L_{A,b}\varphi = L_{A,\beta_{\mu,A}} + \langle b - \beta_{\mu,A}, \nabla \varphi \rangle, \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

В случае дивергентной формы вместо $\beta_{\mu,A}$ будет использоваться отображение $A\beta_\mu$. Оператор $L_{A,\beta_{\mu,A}}$ симметричен на $L^2(\Omega, \mu)$, т.е.

$$\int L_{A,\beta_{\mu,A}} \varphi \psi d\mu = \int \varphi L_{A,\beta_{\mu,A}} \psi d\mu \quad \forall \varphi, \psi \in C_0^\infty(\Omega). \quad (2.3)$$

Действительно, по формуле интегрирования по частям обе части (2.3) равны

$$- \int \langle A \nabla \varphi, \nabla \psi \rangle d\mu.$$

Аналогичным образом, для операторов в дивергентной форме имеем

$$\int \psi \mathcal{L}_{A, A\beta_\mu} \varphi d\mu = \int \varphi \mathcal{L}_{A, A\beta_\mu} \psi d\mu.$$

Заметим, что если $A = \text{Id}$, то $b_{\mu, \text{Id}} = \beta_\mu$ и

$$L_{\text{Id}, b} \varphi = \mathcal{L}_{\text{Id}, b} \varphi = \Delta \varphi + \langle b, \nabla \varphi \rangle,$$

где Δ – оператор Лапласа–Бельтрами.

(ii) Если μ – неотрицательная мера на Ω с плотностью $\varrho \in H_{\text{loc}}^{1,1}(\Omega)$, A и b удовлетворяют предположениям теоремы 2.1, а β_μ и $\beta_{\mu, A}$ определены, как указано выше, то равенство $L_{A, b}^* \mu = 0$ равносильно тождеству

$$\int \langle b - \beta_{\mu, A}, \nabla \varphi \rangle d\mu = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \quad (2.4)$$

или в краткой форме

$$\text{div}_\mu (b - \beta_{\mu, A}) = 0. \quad (2.5)$$

Действительно, достаточно заметить, что по формуле интегрирования по частям имеем

$$\int (\partial_j a^{ij} \partial_i \varphi \varrho + a^{ij} \partial_i \varphi \partial_j \varrho) dx = - \int a^{ij} \partial_j \partial_i \varphi \varrho dx.$$

Аналог (2.4) для дивергентной формы имеет вид

$$\int \langle b - A\beta_\mu, \nabla \varphi \rangle d\mu = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \quad (2.6)$$

Векторное поле

$$\widehat{b} := 2\beta_{\mu, A} - b$$

называется *дуальным сносом* (в теории диффузионных процессов это есть снос процесса с обращенным временем). В случае дивергентной формы дуальный снос определен равенством

$$\widetilde{b} := 2A\beta_\mu - b.$$

Ясно, что

$$L_{A, \widehat{b}} = L_{A, \beta_{\mu, A}} - (b^i - \beta_{\mu, A}^i) \partial_i \quad \text{на } C_0^\infty(\Omega)$$

и очевидным образом $L_{A, \widehat{b}}$ является формальным сопряженным к $L_{A, b}$, т.е. имеем

$$\int L_{A, b} \varphi \psi d\mu = \int \varphi L_{A, \widehat{b}} \psi d\mu \quad \forall \varphi, \psi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Аналогичным образом,

$$\int \mathcal{L}_{A, b} \varphi \psi d\mu = \int \varphi \mathcal{L}_{A, \widetilde{b}} \psi d\mu \quad \forall \varphi, \psi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Заметим, что согласно (2.3) и (2.5)

$$\mu \in \mathcal{M}_{\text{ell}}^{A, \beta_{\mu, A}} \cap \mathcal{M}_{\text{ell}}^{A, \widehat{b}}.$$

Утверждения (i) и (ii) следующей теоремы вытекают непосредственно из более общего результата из [14] (см. ниже некоторые детали), а утверждение (iii) было доказано в [4] в случае $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, но его доказательство остается в силе также и в случае многообразия (см. [4; предложение 4.4]).

ТЕОРЕМА 2.3. (i) Пусть Ω – открытое подмножество $\mathbb{R}^d$. Предположим, что выполнены условия (A1) и (A2) теоремы 2.1. Пусть $\mu \in \mathcal{M}_{\text{ell}}^{A,b}$. Тогда существует замкнутое продолжение $(L_{A,b}^\mu, D(L_{A,b}^\mu))$ оператора $(L_{A,b}, C_0^\infty(\Omega))$, которое порождает суб-марковскую сжимающую C_0 -полугруппу $(T_t^\mu)_{t \geq 0}$ на $L^1(\Omega, \mu)$ со следующими свойствами:

- (a) указанное выше естественное продолжение сопряженной полугруппы на $L^1(\Omega, \mu)$ имеет генератор $L_{A,\widehat{b}}^\mu$, совпадающий с $L_{A,\widehat{b}}$ на $C_0^\infty(\Omega)$;
- (b) для всякой ограниченной измеримой функции f с компактным носителем функция $(I - L_{A,b}^\mu)^{-1}f$ есть предел в $L^1(\Omega, \mu)$ функций u_n , являющихся решениями задач Дирихле $(I - L_{A,b})u_n = f$ с нулевыми граничными условиями на областях B_n с компактными замыканиями $\overline{B_n} \subset B_{n+1}$ и гладкими границами ∂B_n такими, что $\Omega = \bigcup_{n=1}^\infty B_n$. Более того, μ суб-инвариантна для $(T_t^\mu)_{t \geq 0}$.
- (ii) То же самое верно, если Ω – открытое подмножество полного риманова многообразия M и оператор $L_{A,b}$ заменяется оператором $\mathcal{L}_{A,b}$ в форме (1.4), где b – векторное поле на M и $A(x)$ – положительный оператор на $T_x M$ такие, что предположения в (i) выполнены в локальных координатах.
- (iii) В предположениях (i) или (ii) полугруппа $(T_t^\mu)_{t \geq 0}$ обладает следующим свойством: для каждого $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ и каждого $t \geq 0$ функция $T_t^\mu \psi$ имеет непрерывную модификацию $\widehat{T_t^\mu \psi}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как упомянуто выше, мы приведем лишь некоторые детали, относящиеся к выводу (i) и (ii) из [14]. Утверждение (i) вытекает непосредственно из теоремы 1.5 в [14], предположения которой выполнены в силу теоремы 2.1. Уже было объяснено, что оператор $L_{A,b}$ в (i) может быть записан в форме (1.4), т.е.

$$L_{A,b}\varphi = \mathcal{L}_{A,b_0}\varphi = \operatorname{div}(A\nabla\varphi) + \langle b_0, \nabla\varphi \rangle$$

с $b_0^j = -\partial_i a^{ij} + b^j$, что вытекает из нашего предположения $\partial_i a^{ij} \in L_{\text{loc}}^p(\Omega, dx)$. Следует подчеркнуть, что доказательство теоремы 1.5 в [14] равным образом применимо к случаю многообразия при условии, что оператор записан в форме (1.4) и мера μ имеет положительную плотность ϱ такую, что $\sqrt{\varrho} \in H_{\text{loc}}^{2,1}(\Omega)$. Остается заметить, что последнее условие выполнено согласно теореме 2.1. Следовательно, верно и (ii).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. В утверждении (i) теоремы выше ввиду включения $\mu \in \mathcal{M}_{\text{ell}}^{A,\widehat{b}}$ также и “формально сопряженный” $(L_{A,\widehat{b}}, C_0^\infty(\Omega))$ к оператору $(L_{A,b}, C_0^\infty(\Omega))$ имеет замкнутое продолжение $(L_{A,\widehat{b}}^\mu, D(L_{A,\widehat{b}}^\mu))$, порождающее суб-марковскую C_0 -полугруппу $(\widehat{T}_t^\mu)_{t \geq 0}$ на $L^1(\Omega, \mu)$. Согласно [14; замечание 1.7 (ii)] имеем

$$\int T_t^\mu f g d\mu = \int f \widehat{T}_t^\mu g d\mu \quad \forall f, g \in L^\infty(\Omega, \mu). \quad (2.7)$$

То же самое соотношение выполняется для соответствующих резольвент $(G_\alpha^\mu)_{\alpha > 0}$ и $(\widehat{G}_\alpha^\mu)_{\alpha > 0}$. Равенство (2.7), в частности, сразу показывает, что μ $(T_t^\mu)_{t \geq 0}$ -инвариантна, если и только если для каждого $t \geq 0$ имеем $\widehat{T}_t^\mu 1 = 1$. Значит, поскольку

обе полугруппы являются суб-марковскими, это имеет место, если и только если $T_t^\mu 1 = 1$ для всех $t \geq 0$, что, в свою очередь, равносильно инвариантности μ для $(\hat{T}_t^\mu)_{t \geq 0}$.

Стоит заметить, что для симметричного оператора $L_{A,b}$ (или $\mathcal{L}_{A,b}$) указанное в теореме замкнутое расширение есть расширение по Фридрихсу.

Нам неизвестно, единственна ли суб-марковская сильно непрерывная полугруппа, генератор которой продолжает $L_{A,b}$ (т.е. выполняется ли автоматически свойство (b) в (i)). Как мы увидим ниже, это верно при некоторых дополнительных предположениях.

ЛЕММА 2.5. *Оператор $L_{A,b}$ с коэффициентами, удовлетворяющими предположениям теоремы 2.1, где $\mu \geq 0$, диссипативен на области $C_0^\infty(\Omega)$ в пространстве $L^1(\Omega, \mu)$. В частности, он замыкаем. То же самое верно для оператора $\mathcal{L}_{A,b}$ в дивергентной форме в случае многообразия.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение легко проверяется с помощью формулы интегрирования по частям (см., например, [26; гл. 1, прил. В, лемма 1.8] или [14; предложение 1.1]). Последнее утверждение вытекает из первого (см. [32; § X.8]).

Таким образом, $L_{A,b}$ существенно m -диссипативен на области $C_0^\infty(\Omega)$ в $L^1(\Omega, \mu)$, если и только если множество $(L_{A,b} - \lambda I)(C_0^\infty(\Omega))$ плотно в $L^1(\Omega, \mu)$ для некоторого (а тогда и для всех) $\lambda > 0$, т.е. в соответствии с введенной выше терминологией $(L_{A,b}, C_0^\infty(\Omega))$ является $L^1(\Omega, \mu)$ -единственным.

Пусть $(\bar{L}_{A,b}^\mu, D(\bar{L}_{A,b}^\mu))$ обозначает замыкание $(L_{A,b}, C_0^\infty(\Omega))$ в $L^1(\Omega, \mu)$. Аналогично вводится замыкание $(\bar{\mathcal{L}}_{A,b}^\mu, D(\bar{\mathcal{L}}_{A,b}^\mu))$ оператора $\mathcal{L}_{A,b}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6. *Пусть $\mu \in \mathcal{M}_{\text{ell}}^{A,b}$, где A и b удовлетворяют предположениям теоремы 2.1. Тогда следующие утверждения равносильны:*

- (i) $(\bar{L}_{A,b}^\mu, D(\bar{L}_{A,b}^\mu))$ порождает C_0 -полугруппу $(T_t)_{t \geq 0}$, т.е. сильно непрерывную полугруппу ограниченных операторов T_t на $L^1(\Omega, \mu)$;
- (ii) для некоторого (тогда и для всех) $\lambda > 0$ множество $(L_{A,b} - \lambda I)(C_0^\infty(\Omega))$ плотно в $L^1(\Omega, \mu)$ (что равносильно тому, что $(L_{A,b}, C_0^\infty(\Omega))$ существенно m -диссипативен в $L^1(\Omega, \mu)$);
- (iii) существует ровно одна C_0 -полугруппа в $L^1(\Omega, \mu)$, которая обладает генератором, продолжающим $(L_{A,b}, C_0^\infty(\Omega))$.

Если какое-либо (а значит, всякое) из утверждений (i)–(iii) верно, то полугруппы $(T_t^\mu)_{t \geq 0}$ и $(\hat{T}_t^\mu)_{t \geq 0}$ являются марковскими и μ инвариантна для них. Наконец, то же самое верно для оператора $\mathcal{L}_{A,b}$ в дивергентной форме.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равносильность (i) и (ii) следует из леммы 2.5 и хорошо известной теоремы Люмера–Филлипса (см. [33; гл. I, теорема 4.3]). Импликация “(i) $\Rightarrow$ (iii)” тривиальна, а импликация “(iii) $\Rightarrow$ (i)” установлена В. Арендтом в [34; А–II, теорема 1.33].

Инвариантность μ относительно $(T_t^\mu)_{t \geq 0}$ легко вытекает из (i)–(iii), поскольку равенство

$$\int L_{A,b} \varphi d\mu = 0$$

для всех $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ влечет в случае (i)

$$\int \bar{L}_{A,b}^\mu \varphi d\mu = 0$$

для всех $\varphi \in D(\bar{L}_{A,b}^\mu)$. Отсюда получаем, что

$$\int \bar{L}_{A,b}^\mu T_t^\mu \varphi d\mu = 0$$

для всех $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, т.е. что $\int T_t^\mu \varphi d\mu$ является константой. Остаточные утверждения следуют из замечания 2.4.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.7. Для ограниченной области Ω (с гладкой границей) утверждение (iii) (значит, также (i) и (ii)) в предложении 2.6 неверно, даже если $A = \text{Id}$, $b \equiv 0$. Поэтому ниже мы будем интересоваться в основном случаем, когда $\Omega = M$. Как будет доказано, утверждения (i)–(iii) равносильны инвариантности μ относительно $(T_t^\mu)_{t \geq 0}$.

Мы увидим ниже, что оператор $L_{A,b}$ на $C_0^\infty(\Omega)$ может иметь различные замкнутые расширения (даже порождающие сильно непрерывные полугруппы). Значит, его замыкание может не порождать никакой сильно непрерывной полугруппы. Такое случается, даже если $A = \text{Id}$ и b бесконечно дифференцируемо.

Следующая теорема дает полезную информацию об области определения генератора $(T_t^\mu)_{t \geq 0}$ на $L^p(\Omega, \mu)$. Известно, что для каждого $r \in [1, \infty)$ ограничение $(T_t^\mu)_{t \geq 0}$ на $L^r(\Omega, \mu)$ является сильно непрерывной полугруппой на $L^r(\Omega, \mu)$. Ее генератор будет обозначаться через $(L_{A,b}^{\mu,r}, D(L_{A,b}^{\mu,r}))$. Отметим, что

$$D(L_{A,b}^{\mu,r}) = \{f \in D(L_{A,b}^\mu) \cap L^r(\Omega, \mu) : L_{A,b}^\mu f \in L^r(\Omega, \mu)\}.$$

ТЕОРЕМА 2.8. (i) В ситуации теоремы 2.3 имеем

$$(L_{A,b}^{\mu,p}, D(L_{A,b}^{\mu,p})) \subset \{f \in L^p(\Omega, \mu) \cap H_{\text{loc}}^{p,2}(\Omega) : L_{A,b}^\mu f \in L^p(\Omega, \mu)\} \quad (2.8)$$

и $L_{A,b}^{\mu,p} f = L_{A,b}^\mu f$ для всех $f \in D(L_{A,b}^{\mu,p})$. То же самое верно для всякого расширения $(L, D(L))$ оператора $(L_{A,b}, C_0^\infty(\Omega))$ со следующим свойством: оно является генератором сильно непрерывной суб-марковской полугруппы $(T_t)_{t \geq 0}$ на $L^1(\Omega, \mu)$ такой, что сопряженная полугруппа $(T_t')_{t \geq 0}$ на $L^{p'}(\Omega, \mu)$ (которая определена после продолжения $(T_t)_{t \geq 0}$ на $L^p(\Omega, \mu)$, как объяснено выше) имеет генератор Λ , который совпадает с $L_{A,\hat{b}}^\mu$ на $C_0^\infty(\Omega)$. Если в (2.8) имеет место равенство, то μ инвариантна для $(T_t^\mu)_{t \geq 0}$ (что равносильно тому, что $T_t^\mu 1 = 1$).

(ii) Если оператор $(L_{A,\hat{b}}, C_0^\infty(\Omega))$ является существенно m -диссипативным на $L^{p'}(\Omega, \mu)$, т.е. множество $(L_{A,\hat{b}} - \lambda I)(C_0^\infty(\Omega))$ плотно в $L^{p'}(\Omega, \mu)$ для некоторого $\lambda > 0$, то в (2.8) имеет место равенство. Наконец, те же самые утверждения верны для $\mathcal{L}_{A,b}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Мы будем иметь дело с оператором $\mathcal{L}_{A,b}$ в дивергентной форме. Пусть $(S_t)_{t \geq 0}$ обозначает суб-марковскую полугруппу на $L^p(\Omega, \mu)$, которая сопряжена полугруппе $(T_t^\mu)_{t \geq 0}$ на $L^{p'}(\Omega, \mu)$. Пусть $f \in (\mathcal{L}_{A,b}^{\mu,p}, D(\mathcal{L}_{A,b}^{\mu,p}))$. Тогда $g := \mathcal{L}_{A,b}^{\mu,p} f \in L^p(\Omega, \mu)$. Для всякого $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ имеем

$$\int \varphi \mathcal{L}_{A,b}^{\mu,p} f d\mu = \frac{d}{dt} \int \varphi T_t^\mu f d\mu|_{t=0} = \frac{d}{dt} \int S_t \varphi f d\mu|_{t=0} = \int \mathcal{L}_{A,\tilde{b}} \varphi f d\mu,$$

поскольку $\frac{d}{dt} S_t \varphi = S_t \mathcal{L}_{A,\tilde{b}} \varphi$ в $L^{p'}(\Omega, \mu)$. В самом деле, достаточно заметить, что отображение $t \mapsto S_t \mathcal{L}_{A,\tilde{b}} \varphi$ непрерывно в $L^{p'}(\Omega, \mu)$ и что для каждого $\psi \in C_0^\infty(\Omega, \mu)$ имеем

$$\frac{d}{dt} \int \psi S_t \varphi d\mu = \int \psi S_t \mathcal{L}_{A,\tilde{b}} \varphi d\mu,$$

поскольку генератор $(S_t)_{t \geq 0}$ на $L^{p'}(\Omega, \mu)$ продолжает $(\mathcal{L}_{A,\tilde{b}}, C_0^\infty(\Omega))$. Итак, доказано, что $(\mathcal{L}_{A,\tilde{b}})^*(f \cdot \mu) = g \cdot \mu$. Ясно, что

$$|\hat{b}| \in L_{\text{loc}}^1(\Omega, |f| \cdot \mu), \quad g \cdot \mu = g_0 dx, \quad \text{где } g_0 \in L_{\text{loc}}^p(\Omega, dx).$$

Согласно [4; следствие 2.13] получаем, что мера $f \cdot \mu$ имеет плотность $\zeta \in H_{\text{loc}}^{p,1}(\Omega)$. Значит, $f \in H_{\text{loc}}^{p,1}(\Omega)$. Далее мы докажем, что f удовлетворяет эллиптическому уравнению $\mathcal{L}_{A,b} f = g$ в смысле классических слабых решений, т.е. для каждого $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ имеем

$$\int (-\langle A \nabla \varphi, \nabla f \rangle + \varphi \langle b, \nabla f \rangle - \varphi g) dx = 0. \quad (2.9)$$

Теперь получаем, что $f \in H_{\text{loc}}^{p,2}(\Omega)$ (см. [31; гл. III, §§ 10, 11] и [35]). Нужное нам равенство (2.9) запишем в виде

$$\int \varphi \mathcal{L}_{A,b}^\mu f dx = \int (-\langle A \nabla f, \nabla \varphi \rangle + \varphi \langle b, \nabla f \rangle) dx. \quad (2.10)$$

Представим φ в виде $\varphi = \psi \varrho$, $\psi \in H_0^{p,1}(\Omega)$. Тогда (2.10) превращается в

$$\int \psi \mathcal{L}_{A,b}^\mu f \varrho dx = \int \left(-\langle A \nabla f, \nabla \psi \rangle - \left\langle A \nabla f, \frac{\nabla \varrho}{\varrho} \right\rangle \psi + \psi \langle b, \nabla f \rangle \right) \varrho dx. \quad (2.11)$$

Достаточно проверить (2.11) для всех $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$. Тогда наше утверждение сводится к равенству

$$\int \mathcal{L}_{A,\tilde{b}} \psi f \varrho dx = \int \left(-\langle A \nabla f, \nabla \psi \rangle - \left\langle A \nabla f, \frac{\nabla \varrho}{\varrho} \right\rangle \psi + \psi \langle b, \nabla f \rangle \right) \varrho dx. \quad (2.12)$$

По формуле интегрирования по частям левая часть (2.12) равна

$$\int \left(-\left\langle A \nabla \psi, \nabla f + f \frac{\nabla \varrho}{\varrho} \right\rangle - \langle \tilde{b}, \nabla \psi \rangle f \right) \varrho dx.$$

Следовательно, (2.12) равносильно равенству

$$\int \left(- \left\langle A \nabla \psi, f \frac{\nabla \varrho}{\varrho} \right\rangle - \langle \tilde{b}, \nabla \psi \rangle f \right) \varrho dx = \int \left(- \left\langle A \nabla f, \frac{\nabla \varrho}{\varrho} \right\rangle \psi + \psi \langle b, \nabla f \rangle \right) \varrho dx.$$

Подставляя $\tilde{b} = 2A \nabla \varrho / \varrho - b$, приходим к проверке равенства

$$\int \left(\left\langle A \nabla \psi, \frac{\nabla \varrho}{\varrho} \right\rangle f + \left\langle A \nabla f, \frac{\nabla \varrho}{\varrho} \right\rangle \psi - \langle b, \nabla \psi \rangle f - \langle b, \nabla f \rangle \psi \right) \varrho dx = 0,$$

которое может быть записано как

$$\int \left\langle A \frac{\nabla \varrho}{\varrho} - b, \nabla(\psi f) \right\rangle \varrho dx = 0$$

и потому верно согласно (2.6) (ясно, что (2.6) остается в силе и для $\varphi \in C_0^1(\Omega)$). Заметим, что мы использовали лишь те свойства $\mathcal{L}_{A,b}^\mu$, которые были упомянуты во втором утверждении в (i).

Если мы имеем равенство в (2.8) для $\mathcal{L}_{A,b}$, то $1 \in D(\mathcal{L}_{A,b}^{\mu,p})$. Тогда по уже доказанному $\mathcal{L}_{A,b}^{\mu,p} 1 = \mathcal{L}_{A,b} 1 = 0$. Значит, $T_t^\mu 1 = 1$, что, как мы знаем, равносильно инвариантности μ .

(ii) Предположим, что оператор $(L_{A,\hat{b}}, C_0^\infty(\Omega))$ существенно m -диссипативен на $L^{p'}(\Omega, \mu)$. Пусть функция $f \in H_{\text{loc}}^{p,2}(\Omega)$ такова, что $f, L_{A,b} f \in L^p(\Omega, \mu)$. Для всякого $\psi \in D(L_{A,\hat{b}}^{\mu,p'})$ имеем

$$\int L_{A,\hat{b}}^\mu \psi f d\mu = \int \psi L_{A,b} f d\mu.$$

Действительно, для $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ это вытекает из формулы интегрирования по частям. В общем случае, согласно нашему предположению существуют функции $\psi_k \in C_0^\infty(\Omega)$ такие, что $\psi_k \rightarrow \psi$ и $L_{A,\hat{b}} \psi_k \rightarrow L_{A,\hat{b}} \psi$ в $L^{p'}(\Omega, \mu)$. Следовательно, поскольку $S_t \varphi \in D(L_{A,\hat{b}}^{\mu,p'})$ для всякого $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, получаем

$$\frac{d}{dt} \int \varphi T_t^\mu f d\mu = \int L_{A,\hat{b}} S_t \varphi f d\mu = \int S_t \varphi L_{A,b} f d\mu = \int \varphi T_t^\mu L_{A,b} f d\mu.$$

Поскольку отображение $t \mapsto T_t^\mu L_{A,b} f$ в $L^p(\Omega, \mu)$ непрерывно, заключаем, что оно является производной $T_t^\mu f$. В частности, f входит в область определения $L_{A,b}^{\mu,p}$ и $L_{A,b}^{\mu,p} f = L_{A,b} f$ μ -п.в.

Ниже мы докажем, что при условиях предложения 2.6 мера μ инвариантна для $(T_t^\mu)_{t \geq 0}$ в точности тогда, когда множество $(L_{A,\hat{b}} - \lambda I)(C_0^\infty(\Omega))$ плотно в $L^1(\Omega, \mu)$, значит, равенство в (2.8) влечет L^1 -единственность и не всегда выполняется.

§3. Связи с L^1 -единственностью

В этом параграфе фиксировано открытое подмножество Ω риманова многообразия M размерности d .

Следует предупредить читателя, что теорема 2.3 не утверждает, что суб-марковская полугруппа, генератор которой продолжает $L_{A,b}$, единственна: нам неизвестно, верно ли это при указанных предположениях, а без требования суб-марковости (т.е. лишь при одной сильной непрерывности) это, вообще говоря, даже и не верно. Поэтому мы всегда выделяем полугруппу $(T_t^\mu)_{t \geq 0}$ (в частности, в утверждении (i) этой теоремы). Кроме того, мера μ может быть лишь суб-инвариантной для полугруппы и не инвариантной. Мы уже знаем, что эти два явления тесно связаны: предложение 2.6 показывает, что единственность порожденной сильно непрерывной полугруппы равносильна существенной m -диссипативности $L_{A,b}$.

Введем следующие подмножества $\mathcal{M}_{\text{ell}}^{A,b}$:

$$\mathcal{M}_{\text{ell,md}}^{A,b} := \{ \mu \in \mathcal{M}_{\text{ell}}^{A,b} : \overline{(L_{A,b} - I)(C_0^\infty(\Omega))} = L^1(\Omega, \mu) \}. \quad (3.1)$$

Для оператора $\mathcal{L}_{A,b}$ используется то же самое обозначение.

Следующий результат дает удобную техническую характеристику существенной m -диссипативности $L_{A,b}$ и показывает, что она равносильна инвариантности μ относительно ассоциированной полугруппы $(T_t^\mu)_{t \geq 0}$. В случае $\Omega = \mathbb{R}^d$ этот результат был доказан в [14; предложение 1.9] при более общих предположениях относительно A , b и μ (выполнение этих предположений в нашем случае следует из теоремы 2.1). Можно проверить, что, по существу, те же самые рассуждения применимы в рассматриваемой ситуации в случае многообразия. Однако благодаря нашим более сильным предположениям относительно A , b и μ имеется следующее упрощенное доказательство, которое мы включили для полноты изложения и удобства читателя.

ТЕОРЕМА 3.1. *Предположим, что выполнены условия (A1) и (A2) теоремы 2.1. Пусть $\mu \in \mathcal{M}_{\text{ell}}^{A,b}$. Тогда следующие утверждения равносильны:*

- (i) $\mu \in \mathcal{M}_{\text{ell,md}}^{A,b}$;
- (ii) μ инвариантна для $(T_t^\mu)_{t \geq 0}$;
- (iii) существуют функции $\chi_n \in H_{\text{loc}}^{2,1}(\Omega, \mu)$ и $\alpha > 0$ такие, что $(1 - \chi_n)^+ \in L^\infty(\Omega, \mu)$ и $(1 - \chi_n)^+ = 0$ вне некоторых компактных множеств, $\lim_{n \rightarrow \infty} \chi_n(x) = 0$ μ -п.в., а для $\eta = 1$ или $\eta = -1$ имеем

$$\int \langle A \nabla \chi_n, \nabla \varphi \rangle d\mu + \alpha \int \chi_n \varphi d\mu + \eta \int \langle b - \beta_{\mu,A}, \nabla \chi_n \rangle \varphi d\mu \geq 0 \quad (3.2)$$

для всех неотрицательных $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ и всех $n \in \mathbb{N}$; соответствующее условие в случае оператора $\mathcal{L}_{A,b}$ имеет вид

$$\int \langle A \nabla \chi_n, \nabla \varphi \rangle d\mu + \alpha \int \chi_n \varphi d\mu + \eta \int \langle b - A\beta_\mu, \nabla \chi_n \rangle \varphi d\mu \geq 0; \quad (3.3)$$

- (iv) $\mu \in \mathcal{M}_{\text{ell,md}}^{A,\hat{b}}$ (соответственно, $\mu \in \mathcal{M}_{\text{ell,md}}^{A,\tilde{b}}$ в случае оператора $\mathcal{L}_{A,b}$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ϱ – плотность μ . Предположим, что верно (i). Тогда в силу предложения 2.6 мера μ инвариантна относительно $(T_t^\mu)_{t \geq 0}$, т.е. имеем (ii). Пусть выполнено (ii). Предположим для простоты, что $\alpha = 1$. Пусть B_n – возрастающие области с компактными замыканиями и гладкими границами, покрывающие M (например, центрированные шары радиусов n в случае $\mathbb{R}^d$). Известно (см., например, [35], где рассматриваются области в $\mathbb{R}^d$, но тот же самый метод применим к областям с компактными замыканиями в римановых многообразиях), что существуют непрерывные функции $u_n \in H^{p,2}(B_n) \cap H_0^{p,1}(B_n)$ такие, что

$$(I - \mathcal{L}_{A,b})u_n = 1 \quad \text{в } B_n.$$

Продолжим u_n нулем вне B_n . Ясно, что продолжение, обозначаемое опять через u_n , входит в $H_0^{p,1}(M)$. Заметим, что по теореме вложения Соболева u_n и ∇u_n непрерывны по Гёльдеру на B_n и допускают непрерывные продолжения на замыкание B_n . Пусть $e(x)$ – единичный внешний нормальный вектор в точке $x \in \partial B_n$. Поскольку $u_n \geq 0$ в B_n в силу принципа максимума (см. [31; гл. III]) и $u_n = 0$ на ∂B_n , имеем

$$\langle \nabla u_n(x), \eta \rangle \leq 0 \quad \text{при } x \in \partial B_n \text{ для всякого вектора } \eta \text{ с } \langle \eta, e(x) \rangle \geq 0, \quad (3.4)$$

где $\nabla u_n(x)$ на ∂B_n определяется как результат продолжения ∇u_n по непрерывности изнутри. Пусть π_{B_n} обозначает обычную поверхностную меру на ∂B_n . Для каждого $\varphi \in C_0^\infty(M)$ получаем

$$\begin{aligned} & \int_{B_n} \langle A \nabla u_n, \nabla \varphi \rangle d\mu + \int_{B_n} u_n \varphi d\mu + \int_{B_n} \langle A \beta_\mu - b, \nabla u_n \rangle \varphi d\mu \\ &= - \int_{B_n} \mathcal{L}_{A,b} u_n \varphi d\mu + \int_{B_n} u_n \varphi d\mu + \int_{\partial B_n} \langle A \nabla u_n, e \rangle \varphi \varrho d\pi_{B_n} \\ &= \int_{B_n} \varphi d\mu + \int_{\partial B_n} \langle A \nabla u_n, e \rangle \varphi \varrho d\pi_{B_n}. \end{aligned}$$

Теперь положим $\chi_n = 1 - u_n$. Тогда $\nabla \chi_n = -\nabla u_n$ и $\nabla \chi_n = 0$ вне B_n . Следовательно,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \langle A \nabla \chi_n, \nabla \varphi \rangle d\mu + \int_{\Omega} \chi_n \varphi d\mu + \int_{\Omega} \langle A \beta_\mu - b, \nabla \chi_n \rangle \varphi d\mu \\ &= \int_{\Omega \setminus B_n} \varphi d\mu - \int_{\partial B_n} \langle A \nabla u_n, e \rangle \varphi \varrho d\pi_{B_n}. \end{aligned}$$

Правая часть неотрицательна для неотрицательных φ согласно (3.4), поскольку $\langle A(x)e(x), e(x) \rangle > 0$. Покажем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \chi_n(x) = 0$ μ -п.в. Мы докажем, что μ -п.в. верно равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = 1$. По построению полугруппы $(T_t^\mu)_{t \geq 0}$ в работе [14] имеем $u_n \rightarrow (I - \mathcal{L}_{A,b}^\mu)^{-1} 1$ в $L^1(\Omega, \mu)$. Переходя к подпоследовательности, можно считать, что имеется также сходимость п.в. (на самом деле можно показать, что вся последовательность $\{u_n\}$ возрастает, значит, п.в. сходится). Поскольку μ инвариантна, имеем $1 \in D(\mathcal{L}_{A,b}^{\mu,r})$ для всех $r \in [1, \infty)$ и $(I - \mathcal{L}_{A,b}^{\mu,r})1 = 1$. Значит, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = 1$ μ -п.в.

Пусть теперь выполнено условие (iii) с $\eta = -1$. Покажем, что выполнено условие (i). Предположим, что функция $h \in L^\infty(\Omega, \mu)$ такова, что

$$\int_{\Omega} (I - \mathcal{L}_{A,b}) \varphi h d\mu = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(U).$$

Покажем, что $h = 0$. Если это неверно, можно считать, что $\|h\|_\infty = 1$. Приведенное выше равенство означает, что мера $\nu := h \cdot \mu$ удовлетворяет уравнению $\mathcal{L}_{A,b}^* \nu - \nu = 0$. Согласно [4; следствие 2.10] мера ν имеет плотность $f \in H_{\text{loc}}^{p,1}(\Omega)$. Значит, $h \in H_{\text{loc}}^{p,1}(\Omega)$. Из формулы интегрирования по частям вытекает, что для всякого $\varphi \in H_0^{2,1}(\Omega)$ верно равенство

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \langle A \nabla \varphi, \nabla h \rangle d\mu + \int_{\Omega} \varphi h d\mu - \int_{\Omega} \langle b - A\beta_\mu, \nabla \varphi \rangle h d\mu \\ &= \int_{\Omega} (I - \mathcal{L}_{A,b}) \varphi h d\mu = 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Пусть $v_n = \chi_n - h$. Тогда $v_n \in H_{\text{loc}}^{2,1}(\Omega)$. Кроме того, $v_n^- := \min\{v_n, 0\} \in H_0^{2,1}(\Omega)$, поскольку $(\chi_n - 1)^- \in H_0^{2,1}(\Omega)$ и $\|h\|_\infty = 1$. Полагая $\varphi = v_n^-$ в (3.5) и принимая во внимание, что $v_n v_n^- = -|v_n^-|^2$ и $\langle A \nabla v_n, v_n^- \rangle = -\langle A \nabla v_n^-, v_n^- \rangle$ п.в., получаем в силу нашего предположения

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\Omega} \langle A \nabla \chi_n, \nabla v_n^- \rangle d\mu + \int_{\Omega} \chi_n v_n^- d\mu - \int_{\Omega} \langle b - A\beta_\mu, \nabla v_n^- \rangle \chi_n d\mu \\ &= \int_{\Omega} \langle A \nabla v_n, \nabla v_n^- \rangle d\mu + \int_{\Omega} v_n v_n^- d\mu - \int_{\Omega} \langle b - A\beta_\mu, \nabla v_n^- \rangle v_n d\mu \\ &= - \int_{\Omega} \langle A \nabla v_n^-, \nabla v_n^- \rangle d\mu - \int_{\Omega} |v_n^-|^2 d\mu. \end{aligned}$$

Следовательно, $v_n^- = 0$ п.в., т.е. $h \leq \chi_n$ п.в. То же самое рассуждение применимо к $-h$, значит, $|h| \leq \chi_n$ п.в., откуда $h = 0$ п.в. Итак, приходим к условию (i).

Если условие (iii) выполнено с $\eta = 1$, то это же условие выполнено с $\eta = -1$ для дуального сноса $\tilde{b}$. Следовательно, согласно уже доказанному мера μ инвариантна для полугруппы $(S_t^\mu)_{t \geq 0}$, ассоциированной с $\mathcal{L}_{A,\tilde{b}}$. Как объяснено в замечании 2.4, полугруппа $(S_t^\mu)_{t \geq 0}$ совпадает с продолжением на $L^1(\Omega, \mu)$ сопряженной полугруппы для $(T_t^\mu)_{t \geq 0}$ (сопряженная полугруппа изначально определена на $L^\infty(\Omega, \mu)$, а затем продолжается на $L^1(\Omega, \mu)$, как было объяснено выше), причем мера μ инвариантна для $(T_t^\mu)_{t \geq 0}$. Как мы видели, это влечет условие (ii) для $\eta = -1$. Из этого рассуждения вытекает, что (iv) равносильно (i)–(iii).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Оператор $L_{A,b}$ не является существенно m -диссипативным на области $C_0^\infty(\Omega)$ в $L^p(\Omega, \mu)$ для некоторого $p \in [1, \infty)$ в точности тогда, когда существует нетривиальная функция $h \in L^{p'}(\Omega, \mu)$ с $p' = p/(p-1)$ такая, что мера $h \cdot \mu$ удовлетворяет уравнению $(L_{A,b} - 1)^*(h \cdot \mu) = 0$. Из доказательства теоремы 2.8 вытекает, что (при наших предположениях относительно A и b , разумеется) это равносильно следующему: существует функция $h \in L^{p'}(\Omega, \mu) \cap H_{\text{loc}}^{p,2}(\Omega)$ такая, что $L_{A,\tilde{b}} h = h$ п.в.

Наша следующая цель – изучение связей между инфинитезимальной инвариантностью и инвариантностью. Как мы увидим, эти два понятия различны, но при некоторых дополнительных предположениях они совпадают. Сначала мы докажем полезный технический результат, который показывает, что всякая разумная инвариантная мера ν полугруппы $(T_t^\mu)_{t \geq 0}$ на $L^1(\Omega, \mu)$, ассоциированной, как объяснено выше, с вероятностной мерой μ , удовлетворяющей уравнению $L_{A,b}^* \mu = 0$, также удовлетворяет этому уравнению. Следующий результат обобщает предложение 2.6(i) из [1].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. Пусть Ω – открытое множество в M , выполнены предположения теоремы 2.1 и $\mu \in \mathcal{M}_{\text{ell}}^{A,b}$. Пусть $(T_t^\mu)_{t \geq 0}$ – ассоциированная полугруппа, описанная в теореме 2.3. Предположим, что ν – вероятностная мера на Ω такая, что $\nu \ll \mu$ и

$$\int T_t^\mu f d\nu = \int f d\nu \quad \forall f \in C_0^\infty(\Omega), \quad \forall t > 0.$$

Кроме того, предположим, что $b^i \in L_{\text{loc}}^q(\Omega, \nu)$ для некоторого $q > 1$. Тогда $\nu \in \mathcal{M}_{\text{ell}}^{A,b}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in L^\infty(\Omega, \mu)$. Заметим, что $T_t^\mu f \in L^\infty(\nu)$, поскольку $\nu \ll \mu$. Используя, что T_t^μ является суб-марковским, легко проверить с помощью теоремы о монотонной сходимости, что

$$\int T_t^\mu f d\nu = \int f d\nu$$

для всех неотрицательных ν -интегрируемых f , значит, для всех ν -интегрируемых f . Теперь, опять используя суб-марковость $(T_t^\mu)_{t \geq 0}$, для всех $t > 0$ получаем

$$\int |T_t^\mu f|^q d\nu \leq \int T_t^\mu |f|^q d\nu = \int |f|^q d\nu$$

для всех $f \in L^q(\Omega, \nu)$. Значит, для всех $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ предположение, что $b^i \in L_{\text{loc}}^q(\Omega, \nu)$, дает

$$\int |T_t^\mu \mathcal{L}_{A,b} \varphi|^q d\nu \leq \int |\mathcal{L}_{A,b} \varphi|^q d\nu < \infty.$$

Тем самым, имеем равномерную ν -интегрируемость семейства $\{T_t^\mu \mathcal{L}_{A,b} \varphi \mid t \geq 0\}$. Тогда отображение $t \mapsto T_t^\mu \mathcal{L}_{A,b} \varphi$ непрерывно как отображение в $L^1(\Omega, \nu)$ по теореме Лебега–Витали, поскольку оно таково как отображение в $L^1(\Omega, \mu)$. Значит, $L^1(\Omega, \nu)$ -значные римановские интегралы

$$\int_0^t T_s^\mu \mathcal{L}_{A,b} \varphi ds, \quad t > 0, \tag{3.6}$$

существуют, и получаем, что в пространстве $L^1(\Omega, \nu)$ имеет место равенство

$$\frac{d}{dt} \int_0^t T_s^\mu \mathcal{L}_{A,b} \varphi ds = T_t^\mu \mathcal{L}_{A,b} \varphi, \quad t > 0.$$

С другой стороны, поскольку $\nu \ll \mu$, интеграл в (3.6) равен соответствующему $L^1(\Omega, \mu)$ -интегралу, следовательно, он совпадает с $T_t^\mu \varphi - \varphi$. Значит,

$$\frac{d}{dt} T_t^\mu \varphi = T_t^\mu \mathcal{L}_{A,b} \varphi \quad \text{в } L^1(\Omega, \nu)$$

и, таким образом, ввиду инвариантности ν относительно T_t^μ имеем

$$\begin{aligned} \int \mathcal{L}_{A,b} \varphi \, d\nu &= \int \frac{d}{dt} (T_t^\mu \mathcal{L}_{A,b} \varphi) \Big|_{t=0} d\nu \\ &= \frac{d}{dt} \left(\int T_t^\mu \mathcal{L}_{A,b} \varphi \, d\nu \right) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \left(\int \mathcal{L}_{A,b} \varphi \, d\nu \right) \Big|_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

Следует заметить, что это предложение неверно без предположения, что $\nu \ll \mu$. В самом деле, пусть $x_0 \in \Omega$ – фиксированная точка. Рассмотрим версии функций $T_t^\mu f$, $f \in C_0^\infty(\Omega)$, такие, что $T_t^\mu f(x_0) = f(x_0)$. Тогда дираковская мера в x_0 инвариантна для T_t^μ . Мы не знаем, однако, насколько существенно предположение, что $b^i \in L^q(\Omega, \nu)$. Ниже будет показано, что в случае, когда $p > d + 2$, существуют такие однозначно определенные суб-вероятностные ядра $K_t(\cdot, \cdot)$, что $K_t f$ является версией $T_t^\mu f$ для каждого $f \in L^1(\Omega, \mu)$, и утверждение этого предложения верно для всякой инвариантной меры ν полугруппы $(K_t)_{t \geq 0}$.

Следующий результат, несколько обобщающий предложение 2.6(ii) из [1], дает достаточное условие того, что решение эллиптического уравнения является инвариантной мерой для ассоциированной полугруппы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. Пусть $\mu \in \mathcal{M}_{\text{ell,md}}^{A,b}$ и пусть $(T_t^\mu)_{t \geq 0}$ – ассоциированная полугруппа, описанная в теореме 2.3. Предположим, что ν – ограниченная борелевская мера на Ω такая, что $\mathcal{L}_{A,b}^* \nu = 0$ и функция $\varrho := d\nu/d\mu$ ограничена. Тогда ν является $(T_t^\mu)_{t \geq 0}$ -инвариантной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Поскольку функция ϱ ограничена и по нашему предположению оператор $(\overline{\mathcal{L}}_{A,b}^\mu, D(\overline{\mathcal{L}}_{A,b}^\mu))$ является генератором полугруппы $(T_t^\mu)_{t \geq 0}$ на $L^1(\mu)$, мы имеем

$$\int (T_t^\mu \varphi - \varphi) \, d\nu = \int_0^t \int \overline{\mathcal{L}}_{A,b}^\mu (T_s^\mu \varphi) \, d\nu \, ds \quad \forall t > 0. \quad (3.7)$$

Чтобы заключить, что правая часть этого равенства равна нулю, достаточно проверить, что для каждого фиксированного $s \geq 0$ верно равенство

$$\int \overline{\mathcal{L}}_{A,b}^\mu (T_s^\mu \varphi) \, d\nu = 0. \quad (3.8)$$

Действительно, поскольку $T_s^\mu \varphi$ входит в область определения $\overline{\mathcal{L}}_{A,b}^\mu$, то по определению замыкания существуют функции $\varphi_k \in C_0^\infty(\Omega)$ такие, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{L}_{A,b} \varphi_k = \overline{\mathcal{L}}_{A,b}^\mu T_s^\mu \varphi$$

в $L^1(\Omega, \mu)$, значит, и в $L^1(\Omega, \nu)$. Поскольку мы имеем $\int \mathcal{L}_{A,b} \varphi_k \, d\nu = 0$ по предположению, то получаем (3.8). Итак, ν инвариантна для $(T_t^\mu)_{t \geq 0}$.

Следующая лемма показывает, что полугруппа $(T_t^\mu)_{t \geq 0}$ не может иметь инвариантных мер с положительными плотностями, если μ сама не является инвариантной.

ЛЕММА 3.5. *Предположим, что T – суб-марковский оператор на $L^1(\Omega, \mu)$, где μ – вероятностная мера на пространстве Ω , суб-инвариантная относительно T . Пусть ν – вероятностная мера на Ω , эквивалентная μ . Если ν инвариантна для T , то μ также инвариантна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varrho := d\nu/d\mu$ и пусть T^* – сопряженный к T . Тогда имеем $T^*1 \leq 1$ μ -п.в., поскольку

$$\int f T^*1 \, d\mu \leq \int f \, d\mu \quad \forall f \in L^\infty(\Omega, \mu), \quad f \geq 0.$$

Используя, что $T1 \leq 1$ μ -п.в. и $\varrho > 0$ μ -п.в., из равенства $\int T1 \, \varrho \, d\mu = \int \varrho \, d\mu$ получаем, что $T1 = 1$ μ -п.в. Из этого вытекает, что $T^*1 = 1$ μ -п.в., поскольку $\int T^*1 \, d\mu = \int T1 \, d\mu = 1$. Значит, μ также инвариантна.

§ 4. Единственность решений эллиптических уравнений и единственность инвариантных мер ассоциированных полугрупп

Следующее утверждение является одним из основных результатов этой работы. Оно устанавливает очень интересную связь между L^1 -единственностью (существенной m -диссипативностью) и единственностью инфинитезимально инвариантных мер. В доказательстве существенно используется проделанная выше подготовительная работа.

ТЕОРЕМА 4.1. *Допустим, что выполнены предположения теоремы 2.1 и что Ω связно. Тогда*

$$\mathcal{M}_{\text{ell,md}}^{A,b} \neq \emptyset \implies \#\mathcal{M}_{\text{ell}}^{A,b} = 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Шаг 1.* Пусть $\mu = \varrho_\mu \, dx \in \mathcal{M}_{\text{ell,md}}^{A,b}$ и $\nu = \varrho_\nu \, dx \in \mathcal{M}_{\text{ell}}^{A,b}$, где ϱ_μ и ϱ_ν строго положительные, непрерывные версии соответствующих производных Радона–Никодима $d\mu/dx, d\nu/dx \in H_{\text{loc}}^{p,1}(\Omega)$, которые существуют по теореме 2.1. Применим теорему 3.1 к μ . Тогда найдутся функции χ_n , $n \in \mathbb{N}$, со свойствами, указанными в утверждении (iii) цитированной теоремы.

Шаг 2. Теперь покажем, что утверждение (ii) теоремы 3.1 верно также для ν вместо μ с теми же самыми функциями χ_n . Поскольку обе плотности строго положительны и непрерывны, имеем $\varrho_\nu/\varrho_\mu \in H_{\text{loc}}^{p,1}(M)$. Предположим сначала, что $M = \mathbb{R}^d$. Тогда $\varphi \varrho_\nu/\varrho_\mu \in H_0^{2,1}(\Omega)$ для каждого $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Следовательно, если $\varphi \geq 0$, то согласно (3.2) получаем

$$\begin{aligned} & \int a^{ij} \partial_i \chi_n \partial_j \varphi \, d\nu + \alpha \int \chi_n \varphi \, d\nu + \int (\beta_{\nu,A}^i - b^i) \partial_i \chi_n \varphi \, d\nu \\ &= \int a^{ij} \partial_i \chi_n \partial_j \left(\varphi \frac{\varrho_\nu}{\varrho_\mu} \right) d\mu + \alpha \int \chi_n \varphi \frac{\varrho_\nu}{\varrho_\mu} d\mu - \int a^{ij} \partial_i \chi_n \partial_j \left(\frac{\varrho_\nu}{\varrho_\mu} \right) \varphi \, d\mu \\ & \quad + \int (\beta_{\mu,A}^i - b^i) \partial_i \chi_n \left(\varphi \frac{\varrho_\nu}{\varrho_\mu} \right) d\mu + \int a^{ij} \left(\frac{\partial_j \varrho_\nu}{\varrho_\nu} - \frac{\partial_j \varrho_\mu}{\varrho_\mu} \right) \frac{\varrho_\nu}{\varrho_\mu} \partial_i \chi_n \varphi \, d\mu \geq 0, \end{aligned}$$

так как последнее слагаемое в правой части взаимно сокращается с третьим слагаемым ввиду равенства

$$\partial_j \left(\frac{\varrho_\nu}{\varrho_\mu} \right) = \left(\frac{\partial_j \varrho_\nu}{\varrho_\nu} - \frac{\partial_j \varrho_\mu}{\varrho_\mu} \right) \frac{\varrho_\nu}{\varrho_\mu}.$$

В случае многообразия рассуждения аналогичны. А именно, имеем

$$\begin{aligned} & \int \langle A \nabla \chi_n, \nabla \varphi \rangle d\nu + \alpha \int \chi_n \varphi d\nu + \int \langle A \beta_\nu - b, \nabla \chi_n \rangle \varphi d\nu \\ &= \int \left\langle A \nabla \chi_n, \nabla \left(\varphi \frac{\varrho_\nu}{\varrho_\mu} \right) \right\rangle d\mu + \alpha \int \chi_n \varphi \frac{\varrho_\nu}{\varrho_\mu} d\mu - \int \left\langle A \nabla \chi_n, \nabla \left(\frac{\varrho_\nu}{\varrho_\mu} \right) \right\rangle \varphi d\mu \\ & \quad + \int \langle A \beta_\mu - b, \nabla \chi_n \rangle \varphi \frac{\varrho_\nu}{\varrho_\mu} d\mu + \int \left\langle A \left(\frac{\nabla \varrho_\nu}{\varrho_\nu} - \frac{\nabla \varrho_\mu}{\varrho_\mu} \right) \frac{\varrho_\nu}{\varrho_\mu}, \nabla \chi_n \right\rangle \varphi d\mu \\ &= \int \left\langle A \nabla \chi_n, \nabla \left(\varphi \frac{\varrho_\nu}{\varrho_\mu} \right) \right\rangle d\mu + \alpha \int \chi_n \varphi \frac{\varrho_\nu}{\varrho_\mu} d\mu + \int \langle A \beta_\mu - b, \nabla \chi_n \rangle \varphi \frac{\varrho_\nu}{\varrho_\mu} d\mu \geq 0. \end{aligned}$$

Шаг 3. Согласно теореме 3.1 имеем $\nu \in \mathcal{M}_{\text{ell,md}}^{A,b}$. Тогда то же самое верно для меры $\mu_0 := (\mu + \nu)/2$, которая также удовлетворяет эллиптическому уравнению. В силу предложения 3.4 обе меры μ и ν (которые имеют ограниченные плотности относительно μ_0) инвариантны для полугруппы $(T_t^{\mu_0})_{t \geq 0}$, ассоциированной с μ_0 . Значит, мера $|\mu - \nu|$ также инвариантна для $(T_t^{\mu_0})_{t \geq 0}$ (см., например, [1; предложение 2.2]). Поскольку эта мера имеет плотность $|\varrho_\mu - \varrho_\nu|$, которая непрерывна, предложение 3.3 показывает, что $L_{A,b}^* |\mu - \nu| = 0$. Значит, $|\varrho_\mu - \varrho_\nu| > 0$ (если только не выполнено равенство $\mu = \nu$), что невозможно, поскольку непрерывная функция $\varrho_\mu - \varrho_\nu$ имеет нулевой интеграл и должна где-то обращаться в нуль.

Отметим, что обратное утверждение неверно, по крайней мере, для $d = 1$ (см. замечание 6.4).

СЛЕДСТВИЕ 4.2. Рассмотрим ситуацию теоремы 2.1 и предположим, что Ω связно. Если существует какая-то мера $\mu \in \mathcal{M}_{\text{ell}}^{A,b}$, которая инвариантна относительно своей ассоциированной полугруппы $(T_t^\mu)_{t \geq 0}$, то $\# \mathcal{M}_{\text{ell}}^{A,b} = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение вытекает из теоремы 3.1 и теоремы 4.1.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.3. Предположим, что Ω связно. Тогда $\# \mathcal{M}_{\text{ell}}^{A,b} \leq 1$, если и только если для всяких $\mu, \nu \in \mathcal{M}_{\text{ell}}^{A,b}$ имеем $|\mu - \nu| \in \mathcal{M}_{\text{ell}}^{A,b}$. В самом деле, указанное выше условие влечет, что $\mu = \nu$, поскольку в противном случае мера $|\mu - \nu|$ должна иметь строго положительную непрерывную плотность. Обратное тривиально.

Предыдущие общие результаты оставляют открытыми следующие важные вопросы.

- 1) Может ли действительно случиться для $\Omega = \mathbb{R}^d$, что $\# \mathcal{M}_{\text{ell}}^{A,b} > 1$?
- 2) При каких условиях на A и b будем иметь $\# \mathcal{M}_{\text{ell}}^{A,b} = 1$?
- 3) Может ли полугруппа $(T_t^\mu)_{t \geq 0}$ иметь инвариантные меры, если μ не инвариантна, или может ли она иметь инвариантные меры, отличные от μ , в случае, когда μ инвариантна?

Ответы на вопросы 1) и 2) будут даны в следующем параграфе. Следующий результат из [4] отвечает на вопрос 3) в случае $p > d + 2$ (этот результат дополняет более ранний результат из [1] и лишь при локальных предположениях дает положительное решение задачи Варадана, поставленной в [36]). Вероятно, что то же самое верно и при нашем стандартном предположении $p > d$.

ТЕОРЕМА 4.4. *Предположим, что $\mu \in \mathcal{M}_{\text{ell}}^{A,b}$ и что выполнены условия (A1) и (A2) из теоремы 2.1. Кроме того, предположим, что $p > d + 2$. Тогда существуют такие суб-вероятностные ядра $K_t(\cdot, dy)$, $t > 0$, на Ω , что*

$$K_t(x, dy) = p(t, x, y) dy,$$

где $p(t, x, y)$ — локально непрерывная по Гёльдеру неотрицательная функция на множестве $(0, +\infty) \times \Omega \times \Omega$, причем для каждой функции $f \in L^1(\Omega, \mu)$ функция

$$x \mapsto K_t f(x) := \int_{\Omega} f(y) p(t, x, y) dy$$

является μ -версией $T_t^\mu f$ такой, что функция $(t, x) \mapsto K_t f(x)$ непрерывна на множестве $(0, +\infty) \times \Omega$. Кроме того, если ν — ограниченная борелевская мера на Ω , инвариантная для $(K_t)_{t \geq 0}$, т.е.

$$\nu = K_t^* \nu(dy) := \int_{\Omega} K_t(x, dy) \nu(dx) \quad \forall t \geq 0,$$

то $\nu = c\mu$ для некоторой константы c . В частности, если $\nu \neq 0$, то μ также инвариантна. Значит, $(K_t)_{t \geq 0}$ не может иметь инвариантных вероятностных мер, отличных от μ .

Ниже мы увидим, что утверждение о единственности из этой теоремы не влечет единственность для эллиптического уравнения.

Сделаем простое наблюдение о крайних точках выпуклого множества $\mathcal{M}_{\text{ell}}^{A,b}$. Определим $\text{ext } \mathcal{M}_{\text{ell}}^{A,b}$ как множество всех мер $\mu \in \mathcal{M}_{\text{ell}}^{A,b}$, которые не могут быть записаны в виде нетривиальной выпуклой комбинации двух других элементов $\mathcal{M}_{\text{ell}}^{A,b}$.

ЛЕММА 4.5. *Пусть $\mu \in \mathcal{M}_{\text{ell}}^{A,b}$. Тогда следующие условия равносильны:*

- (i) $\mu \in \text{ext } \mathcal{M}_{\text{ell}}^{A,b}$;
- (ii) если $\varrho \in L^\infty(\Omega, \mu)$ и $\varrho \cdot \mu \in \mathcal{M}_{\text{ell}}^{A,b}$, то $\varrho = 1$ μ -п.в.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что выполнено (i) и пусть функция $\varrho \in L^\infty(\Omega, \mu)$ такова, что $\varrho \cdot \mu \in \mathcal{M}_{\text{ell}}^{A,b}$. Тогда для $M := \|\varrho\|_\infty + 1$ имеем $\mu_1 := \frac{M - \varrho}{M - 1} \cdot \mu \in \mathcal{M}_{\text{ell}}^{A,b}$ и $\mu = \frac{M - 1}{M} \mu_1 + \frac{1}{M} (\varrho \cdot \mu)$. Значит, $\varrho = 1$ μ -п.в.

Пусть теперь выполнено (ii), а меры $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_{\text{ell}}^{A,b}$ и число $\alpha \in (0, 1)$ таковы, что $\mu = \alpha \mu_1 + (1 - \alpha) \mu_2$. Тогда обе меры μ_1 и μ_2 абсолютно непрерывны относительно μ и имеют ограниченные плотности Радона–Никодима. Значит, $\mu_1 = \mu = \mu_2$.

СЛЕДСТВИЕ 4.6. *Предположим, что выполнены условия (A1) и (A2) теоремы 2.1. Пусть $\mu \in \text{ext } \mathcal{M}_{\text{ell}}^{A,b}$. Тогда для всех $\nu \in \mathcal{M}_{\text{ell}}^{A,b} \setminus \{\mu\}$ функция $d\nu/d\mu$ неограниченна.*

ЗАМЕЧАНИЕ 4.7. Сделаем комментарий о так называемом симметричном случае, т.е. случае $b = \beta_{A,\mu}$ (или $b = A\beta_\mu$ для операторов в дивергентной форме). Если $A = \text{Id}$, то b — это просто $\nabla \varrho / \varrho$. Этот случай привлек особое внимание в литературе, поскольку оператор становится симметричным неположительным. Помимо L^1 -единственности этого оператора интенсивно изучалась также его существенная самосопряженность на $C_0^\infty(\Omega)$. Различные связанные с этим результаты можно найти в [3], [14], [26], [37]–[39], а также в приведенных там ссылках. Мы лишь отметим, что согласно доказанному в [3], если $\Omega = \mathbb{R}^d$ и $A = \text{Id}$, то наше обычное предположение, что $|b| \in L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}^d, dx)$ с $p > d$, достаточно для существенной самосопряженности (если $d > 3$, то достаточно несколько более слабое локальное условие, как показано в [38]; например, в терминах L_{loc}^p достаточно иметь $p = d$). В работе [9] недавно было показано, что в симметричном случае условия (A1) и (A2) достаточны для существенной самосопряженности $L_{A,b}$ на $C_0^\infty(M)$ при условии, что M полно относительно метрики, порожденной A^{-1} . В [9] при тех же условиях доказано более сильное утверждение об L^p -единственности симметричного оператора $L_{A,b}$.

Ясно, что может случиться, что $\mathcal{M}_{\text{ell}}^{A,b} = \emptyset$ (например, если $\Omega = \mathbb{R}^d$, $A = \text{Id}$, $b \equiv 0$). Но даже в случае, когда $\Omega = \mathbb{R}^d$, $A = \text{Id}$ и b бесконечно дифференцируемо, может быть и так, что $\#\mathcal{M}_{\text{ell}}^{A,b} > 1$, значит, $\mathcal{M}_{\text{ell},\text{md}}^{A,b}$ пусто. В следующем предложении изложен целый класс примеров.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.8. Пусть $\Omega = \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, $A = \text{Id}$.

(i) Пусть функция $f \in C^2(\mathbb{R})$ ограничена, причем $f, f' > 0$ и $f', f'' \in L^1(\mathbb{R}, dx)$, и пусть $\sigma: \{1, \dots, d\} \rightarrow \{1, \dots, d\}$ — такое взаимно однозначное отображение, что $\sigma(i) \neq i$ для всех $i \in \{1, \dots, d\}$. Зададим $b = (b^i): \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ посредством

$$b^i(x) := \frac{f''(x_i)}{f'(x_i)} + 2 \frac{f''(x_{\sigma(i)})}{f'(x_i)}, \quad x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d, \quad (4.1)$$

и положим

$$\mu(dx) := c_1 \prod_{i=1}^d f'(x_i) dx, \quad \nu(dx) := c_2 \sum_{i=1}^d f(x_i) \mu(dx), \quad (4.2)$$

где $c_1, c_2 > 0$ — нормирующие константы. Тогда μ и ν — два разных элемента в $\mathcal{M}_{\text{ell}}^{\text{Id},b}$.

(ii) Пусть

$$f(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-s^2/2} ds, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Тогда f удовлетворяет предположениям в (i). В этом случае

$$b^i(x) = -x_i - 2x_{\sigma(i)} e^{(x_i^2 - x_{\sigma(i)}^2)/2}, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad (4.3)$$

и μ — стандартная гауссовская мера на $\mathbb{R}^d$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (ii) проверяется непосредственно, поэтому мы докажем лишь (i). Очевидным образом имеем

$$\beta_\mu^i(x) = \frac{f''(x_i)}{f'(x_i)}. \quad (4.4)$$

Значит, ввиду замечания 2.2, чтобы доказать, что $\mu \in \mathcal{M}_{\text{ell}}^{A,b}$, следует показать, что в обозначениях (2.5) верно равенство

$$\operatorname{div}_\mu \left(2 \frac{f''(x_{\sigma(i)})}{f'(x_i)} \right)_{1 \leq i \leq d} = 0. \quad (4.5)$$

Поскольку $\sigma(i) \neq i$, получаем по формуле интегрирования по частям, что для всякого $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^d \int \frac{f''(x_{\sigma(i)})}{f'(x_i)} \partial_i \varphi(x) \mu(dx) &= c_1 \sum_{i=1}^d \int \cdots \int \left(\int \varphi(x) dx_i \right) f''(x_{\sigma(i)}) \\ &\quad \times f'(x_1) \cdots \widehat{f'(x_i)} \cdots f'(x_d) dx_1 \cdots \widehat{dx_i} \cdots dx_d = 0, \end{aligned}$$

где символ “ $\widehat{}$ ” указывает, что соответствующий член отсутствует. Теперь получаем (4.5). Чтобы показать, что также $\nu \in \mathcal{M}_{\text{ell}}^{A,b}$, заметим сначала, что

$$\beta_\nu^i(x) = \frac{f'(x_i)}{\sum_{j=1}^d f(x_j)} + \frac{f''(x_i)}{f'(x_i)}.$$

Значит, следует показать, что

$$\operatorname{div}_\nu \left(2 \frac{f''(x_{\sigma(i)})}{f'(x_i)} - \frac{f'(x_i)}{\sum_{j=1}^d f(x_j)} \right)_{1 \leq i \leq d} = 0. \quad (4.6)$$

Для $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, интегрируя по частям и используя равенство

$$\partial_i \left(\sum_{j=1}^d f(x_j) f''(x_{\sigma(i)}) \right) = f'(x_i) f''(x_{\sigma(i)}),$$

получаем

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^d \int \left(2 \frac{f''(x_{\sigma(i)})}{f'(x_i)} - \frac{f'(x_i)}{\sum_{j=1}^d f(x_j)} \right) \partial_i \varphi(x) \nu(dx) \\ &= c_2 \sum_{i=1}^d \int \left(2 \sum_{j=1}^d f(x_j) \frac{f''(x_{\sigma(i)})}{f'(x_i)} - f'(x_i) \right) \partial_i \varphi(x) \mu(dx) \\ &= -c_1 c_2 \sum_{i=1}^d \int \cdots \int \left(\int 2 f'(x_i) f''(x_{\sigma(i)}) \varphi(x) - 2 f'(x_i) f''(x_i) \varphi(x) dx \right) \\ &\quad \times f'(x_1) \cdots \widehat{f'(x_i)} \cdots f'(x_d) dx_1 \cdots \widehat{dx_i} \cdots dx_d \\ &= -2c_1 c_2 \sum_{i=1}^d \left(\int f''(x_{\sigma(i)}) \varphi(x) \mu(dx) - \int f''(x_i) \varphi(x) \mu(dx) \right) = 0, \end{aligned}$$

что дает (4.6).

Таким образом, никакая локальная гладкость не гарантирует единственность для эллиптического уравнения. Достаточные условия единственности, выраженные в терминах A и b , будут рассмотрены в следующем параграфе.

§ 5. Достаточные условия единственности

Теперь мы приведем некоторые глобальные условия на $L_{A,b}$, которые достаточны для единственности.

Напомним, что функция V на M называется *компактной*, если множества $\{V \leq c\}$, $c \geq 0$, компактны. Ясно, что если $M = \mathbb{R}^d$, то непрерывная функция V компактна, если и только если

$$V(x) \rightarrow +\infty \text{ при } |x| \rightarrow +\infty.$$

То же самое верно, если M — некомпактное многообразие и $|x| := \text{dist}(x, o)$, где $o \in M$ — фиксированная точка.

ПРИМЕР 5.1. Пусть выполнены условия (A1) и (A2) из теоремы 2.1, причем Ω связно. Предположим, что найдутся неограниченная компактная функция $V \in C^2(\Omega)$, число $\alpha > 0$ и компактное множество K такие, что

$$\mathcal{L}_{A,b}V(x) \leq \alpha V(x) \text{ для п.в. } x \in \Omega \setminus K. \quad (5.1)$$

Тогда $\#\mathcal{M}_{\text{ell}}^{A,b} \leq 1$. Аналогичный результат верен для оператора $L_{A,b}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим сначала, что можно считать, что $V \geq 0$ и

$$\mathcal{L}_{A,b}V \leq \alpha V \text{ п.в.} \quad (5.2)$$

Действительно, найдется такое компактное множество D , что $V(x) \geq 0$, если $x \notin D$ и $\mathcal{L}_{A,b}V(x) \leq \alpha V(x)$ п.в. вне D . Пусть $z = \max_D V$. Ясно, что $z \geq 0$. Пусть $D^* := \{V \leq z + 1\}$. Можно найти такую C^2 -функцию θ на $\mathbb{R}$, что $\theta(s) = z + 1/2$, если $s \leq z$, $\theta(s) = s$, если $s \geq z + 1$, $0 \leq \theta' \leq 1$ и $\theta'' \geq 0$. Положим

$$N := \alpha(z + 1) + \sup_{x \in D^*} \theta''(s) \sup \langle A(x) \nabla V(x), \nabla V(x) \rangle.$$

Рассмотрим функцию

$$W := \theta \circ V + N.$$

Тогда $W \in C^2$, $W \geq 0$ и функция W компактна и неограничена (т.е. $W(x) \rightarrow +\infty$ при $|x| \rightarrow +\infty$ в случае $\Omega = \mathbb{R}^d$). Кроме того, имеем

$$\mathcal{L}_{A,b}W = \theta'(V)\mathcal{L}_{A,b}V + \theta''(V)\langle A \nabla V, \nabla V \rangle.$$

Если $x \in D$, то $\theta(V(x)) = z + 1/2$ и $\mathcal{L}_{A,b}W(x) = 0$. Если $x \notin D^*$, то $V(x) > z + 1$, значит, $W(x) = V(x) + N$. Следовательно,

$$\mathcal{L}_{A,b}W(x) = \mathcal{L}_{A,b}V(x) \leq \alpha V(x) \leq \alpha W(x) \text{ п.в. вне } D^*.$$

Наконец,

$$\mathcal{L}_{A,b}W(x) = \theta'(V(x))\mathcal{L}_{A,b}V(x) + \theta''(V(x))\langle A(x) \nabla V(x), \nabla V(x) \rangle \leq N \text{ п.в. в } D^* \setminus D,$$

поскольку $0 \leq \theta' \leq 1$ и $\mathcal{L}_{A,b}V(x) \leq \alpha V(x) \leq \alpha(z + 1)$ при $x \in D^* \setminus D$.

Теперь положим $\chi_n := n^{-1}V$. Ясно, что функция $(\chi_n - 1)^-$ входит в $H_0^{2,1}(\Omega)$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \chi_n(x) = 0$. Наконец, если $\mu \in \mathcal{M}_{\text{ell}}^{A,b}$, то для всякой неотрицательной функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ имеем в силу формулы интегрирования по частям

$$\begin{aligned} & \int \langle A \nabla \chi_n, \nabla \varphi \rangle d\mu + \alpha \int \chi_n \varphi d\mu - \int \langle b - A\beta_\mu, \nabla \chi_n \rangle \varphi d\mu \\ &= \int (\alpha \chi_n - \mathcal{L}_{A,b} \chi_n) \varphi d\mu = n^{-1} \int (\alpha V - \mathcal{L}_{A,b} V) \varphi d\mu \geq 0, \end{aligned}$$

что завершает доказательство ввиду теоремы 4.1. Для оператора $L_{A,b}$ применимы эти же рассуждения.

Например, рассматривая функцию $V(x) = \log(|x|^2 + 1)$ на $\mathbb{R}^d$ и замечая, что

$$L_{A,b}V(x) = \frac{2 \operatorname{trace} A(x)}{|x|^2 + 1} - \frac{4 \langle A(x)x, x \rangle}{(|x|^2 + 1)^2} + \frac{2 \langle b(x), x \rangle}{|x|^2 + 1},$$

приходим к следующему результату.

ПРИМЕР 5.2. Пусть выполнены условия (A1) и (A2) из теоремы 2.1. Предположим, что $\Omega = \mathbb{R}^d$ и существует такое число $C > 0$, что п.в. вне некоторого шара

$$-\frac{2}{1 + |x|^2} \langle A(x)x, x \rangle + \operatorname{trace} A(x) + \langle b(x), x \rangle \leq C|x|^2 \log |x|.$$

Тогда $\#\mathcal{M}_{\text{ell}}^{A,b} \leq 1$. В частности, если A равномерно ограничено, то достаточно иметь оценку $\langle b(x), x \rangle \leq C|x|^2 \log |x|$ п.в. вне некоторого шара.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.3. (i) То же самое рассуждение, что и в [14; замечание 1.11 (ii)], показывает, что если существуют ограниченная функция $u \in C^2(\mathbb{R}^d)$ и число $\alpha > 0$ такие, что $u > 0$ и $L_{A,b}u \geq \alpha u$, то μ не является инвариантной для $(T_t^\mu)_{t \geq 0}$.

(ii) Пусть A удовлетворяют условию (A1), и пусть $b^i \in H_{\text{loc}}^{p,1}(\Omega)$. Предположим, что существует неограниченная компактная функция $V \in C^3(\Omega)$. Пусть $\theta(x) = |L_{A,b}V(x)| + 1$. Тогда оператор $L_{A/\theta, b/\theta} = \theta^{-1}L_{A,b}$ удовлетворяет условиям (A1) и (A2) и условию (5.1), поскольку $\theta^{-1}L_{A,b}V \leq 1$. Это показывает, что условие (5.1) всегда может быть получено с помощью подходящего масштабирования данного оператора (с разумными коэффициентами). Кроме того, мы видим, что существует не более чем одна вероятностная плотность $f \in L^1(\Omega, \mu)$ такая, что $f \cdot \mu \in \mathcal{M}_{\text{ell}}^{A,b}$ и $\theta f \in L^1(\Omega, \mu)$. Действительно, $(\theta^{-1}L_{A,b})^*(\theta f \cdot \mu) = 0$.

В следующем примере для заключения о том, что мера μ является единственным элементом в $\mathcal{M}_{\text{ell}}^{A,b}$, привлекается некоторая информация о самой μ . Этот результат дает более слабые достаточные условия, чем [14; предложение 1.10 (a)] (где доказательство требует некоторых исправлений).

ПРИМЕР 5.4. Пусть выполнены условия (A1) и (A2) из теоремы 2.1. Предположим, что $\Omega = \mathbb{R}^d$, $\mu \in \mathcal{M}_{\text{ell}}^{A,b}$ и

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{j \leq |x| \leq j+1} (|a^{ik}| + |b - \beta_{\mu,A}|) d\mu = 0$$

для всех i, k . Тогда $\#\mathcal{M}_{\text{ell}}^{A,b} = 1$. В частности, достаточно иметь интегрируемость a^{ik} и $|b - \beta_{\mu,A}|$ относительно μ .

В случае оператора $\mathcal{L}_{A,b}$ на связном полном римановом многообразии M достаточным условием для того, чтобы μ была единственной мерой в $\mathcal{M}_{\text{ell}}^{A,b}$, является соотношение

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{B_{j+1} \setminus B_j} (\|A\| + |b - A\beta_{\mu}|) d\mu = 0,$$

где B_j — геодезический шар радиуса j с центром в фиксированной точке $o \in M$. В частности, достаточно иметь интегрируемость $\|A\|$ и $|b - A\beta_{\mu}|$ относительно μ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим лишь второе утверждение, поскольку первое совершенно аналогично. По теореме 4.1 достаточно показать, что множество $(\mathcal{L}_{A,b} - I)(C_0^\infty(M))$ плотно в $L^1(M, \mu)$. Пусть g — измеримая функция с $|g| \leq 1$ и

$$\int_M (\mathcal{L}_{A,b}\varphi - \varphi)g d\mu = 0$$

для всех $\varphi \in C_0^\infty(M)$. Согласно [4] функция g входит в $H_{\text{loc}}^{p,1}(M)$. Мера μ задается непрерывной строго положительной плотностью класса $H_{\text{loc}}^{p,1}(M)$. Следовательно, предыдущее равенство можно записать в виде

$$\int_M \langle A\nabla\varphi, \nabla g \rangle d\mu + \int_M \langle A\nabla\varphi, \beta_{\mu} \rangle g d\mu + \int_M \varphi g d\mu = \int_M \langle b, \nabla\varphi \rangle g d\mu. \quad (5.3)$$

Ясно, что равенство (5.3) остается верным и для всех $\varphi \in H_0^{p,1}(M)$. Пусть M не компактно. В силу полноты M существует последовательность липшицевых функций ψ_j на M со следующими свойствами: $0 \leq \psi_j \leq 1$, $\psi_j = 1$ на B_j , $\psi_j = 0$ вне B_{j+1} , $|\nabla\psi_j| \leq C$ для всех j и некоторого числа C . В силу равенства (5.3), применяемого к $\varphi = \psi_j^2 g$, с помощью очевидных преобразований получаем

$$\begin{aligned} & \int_M \psi_j^2 g^2 d\mu + \int_M \langle A\nabla(\psi_j g), \nabla(\psi_j g) \rangle d\mu \\ &= \int_M \psi_j^2 g^2 d\mu + \int_M \langle A\nabla(\psi_j^2 g), \nabla g \rangle d\mu + \int_M \langle A\nabla\psi_j, \nabla\psi_j \rangle g^2 d\mu \\ &= \int_M \langle A\nabla\psi_j, \nabla\psi_j \rangle g^2 d\mu + \int_M \langle b, \nabla(\psi_j^2 g) \rangle g d\mu - \int_M \langle A\nabla(\psi_j^2 g), \beta_{\mu} \rangle g d\mu \\ &= \int_M \langle A\nabla\psi_j, \nabla\psi_j \rangle g^2 d\mu + \int_M \langle b - A\beta_{\mu}, \nabla\psi_j \rangle \psi_j g^2 d\mu \\ &\quad + \int_M \langle b - A\beta_{\mu}, \nabla(\psi_j g) \rangle \psi_j g d\mu \\ &= \int_M \langle A\nabla\psi_j, \nabla\psi_j \rangle g^2 d\mu + \int_M \langle b - A\beta_{\mu}, \nabla\psi_j \rangle \psi_j g^2 d\mu \\ &\leq \int_{B_{j+1} \setminus B_j} (C^2\|A\| + C|b - A\beta_{\mu}|) d\mu, \end{aligned}$$

так как

$$\int_M \langle b - A\beta_{\mu}, \nabla(\psi_j g) \rangle \psi_j g d\mu = \frac{1}{2} \int_M \langle b - A\beta_{\mu}, \nabla(\psi_j g)^2 \rangle d\mu = 0$$

в силу (2.6). Следовательно, интегралы от $\psi_j^2 g^2$ стремятся к нулю и $g = 0$. Для компактного многообразия рассуждение проще, поскольку можно сразу брать $\varphi = g$.

Наконец, выделим специальный случай предыдущего примера, который, однако, не требует знания β_μ .

ПРИМЕР 5.5. Пусть $\Omega = \mathbb{R}^d$ и $\mu \in \mathcal{M}_{\text{ell}}^{A,b}$. Предположим, что A равномерно ограничено, равномерно невырожденно и глобально липшицево и $|b| \in L_{\text{loc}}^p(\Omega, dx)$, где $p > d$. Пусть $|b| \in L^2(\mathbb{R}^d, \mu)$. Тогда $\#\mathcal{M}_{\text{ell}}^{A,b} = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно [3; теорема 1.1] имеем $|\beta_\mu| \in L^2(\mathbb{R}^d, \mu)$, поэтому мы находимся в ситуации предыдущего примера.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.6. В последнем примере нельзя опустить предположение, что $|b| \in L_{\text{loc}}^p(\Omega, dx)$, $p > d$. Действительно, пусть $d = 1$ и пусть $\mu = f dx$, $f(x) = Cx^2 \exp(-x^2)$, где C – нормирующая постоянная. Тогда μ удовлетворяет уравнению $L_{1,b}^* \mu = 0$ с $b(x) = 2x^{-1} - 2x$, что очевидно из формулы интегрирования по частям. Однако имеются другие вероятностные меры, удовлетворяющие этому же уравнению, например, мера с плотностью g такой, что $g(x) = f(x)/2$ при $x < 0$ и $g(x) = 3f(x)/2$ при $x \geq 0$. Отметим, что для обоих решений оператор $L_{1,b}$ даже симметричен и коэффициент b квадратично интегрируем по обоим мерам. Наконец, можно проверить, что указанные меры не только являются решениями одного и того же эллиптического уравнения, но и инвариантны для одной и той же марковской полугруппы, порожденной оператором $L_{1,b}$ (в данном случае такая полугруппа единственна).

Представленные выше результаты имеют следующий характер: либо утверждается, что $\#\mathcal{M}_{\text{ell}}^{A,b} \leq 1$, либо утверждается, что $\#\mathcal{M}_{\text{ell}}^{A,b} = 1$, но существование некоторого решения является частью предположений. Естественно спросить, при каких условиях на A и b есть существование. Такие условия были получены в [7], [11], где хорошо известный результат Хасьминского [40], [41] (установленный для локально липшицевых коэффициентов) был усилен следующим образом.

ТЕОРЕМА 5.7. Пусть выполнены условия (A1) и (A2) теоремы 2.1. Предположим, что существует такая неотрицательная компактная функция $V \in C^2(M)$ (“функция Ляпунова”), что

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \mathcal{L}_{A,b} V(x) = -\infty \quad (5.4)$$

в следующем смысле: для каждого $R > 0$ найдется такой компакт K_R , что $\mathcal{L}_{A,b} V(x) \leq -R$ при $x \notin K_R$. Тогда множество $\mathcal{M}_{\text{ell}}^{A,b}$ непусто.

Ясно, что (5.4) влечет (5.1), значит, на самом деле имеем $\#\mathcal{M}_{\text{ell}}^{A,b} = 1$. Разумеется, (5.1) не влечет существование решения: например, возьмем $A = \text{Id}$ и $b = 0$ на $\mathbb{R}^d$.

Некоторые другие результаты о существовании были получены в [7] при более слабых предположениях относительно A и b . Сформулируем один из них.

СЛЕДСТВИЕ 5.8. Пусть A – измеримое отображение на $\mathbb{R}^d$ со значениями в пространстве неотрицательных операторов на $\mathbb{R}^d$, и пусть b – измеримое векторное поле на $\mathbb{R}^d$.

(i) Предположим, что существует такая функция $V \in C^2(\mathbb{R}^d)$, что

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = +\infty, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} L_{A,b}V(x) = -\infty.$$

Предположим, что либо A и b непрерывны, либо A непрерывно и невырождено, а b локально ограничено. Тогда $\mathcal{M}_{\text{ell}}^{A,b}$ непусто.

(ii) Предположим, что A равномерно ограничено и

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \langle b(x), x \rangle = -\infty.$$

Предположим, что либо A и b непрерывны, либо A локально равномерно невырождено и b локально ограничено. Тогда $\mathcal{M}_{\text{ell}}^{A,b}$ непусто.

ПРИМЕР 5.9. Пусть $\Omega = \mathbb{R}^d$, $A = \text{Id}$, $b^i \in L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}^d, dx)$ и

$$\limsup_{|x| \rightarrow \infty} |x|^{\gamma-1} (2(\gamma-1) + d + \langle b(x), x \rangle) = -\infty$$

для некоторого $\gamma \geq 1$. Тогда $\#\mathcal{M}_{\text{ell}}^{A,b} = 1$.

Следующий пример обоснован в [11; замечание 3.5].

ПРИМЕР 5.10. Предположим, что M связно, кривизна Риччи M ограничена снизу и что функция $W \in C^2(M)$ такова, что $\nabla W(o) = 0$, где $o \in M$ – фиксированная точка. Предположим также, что вторая производная W в каждой точке $x \neq o$ является положительным оператором на $T_x M$. Тогда для всякого достаточно большого $\alpha > 0$ уравнение $\mathcal{L}_{\text{Id}, \alpha \nabla W}^* \mu = 0$ имеет единственное решение в классе всех вероятностных мер на M , и это решение имеет вид $C \exp(\alpha W) \cdot \lambda_M$, где λ_M – римановский объем на M и C – постоянная. В частности, это показывает, что функция $\exp(\alpha W)$ интегрируема относительно λ_M для достаточно больших $\alpha > 0$.

Ограниченность снизу кривизны Риччи здесь существенна. Имеется пример связного полного риманового многообразия M , на котором существует строго положительная непостоянная интегрируемая гармоническая функция ϱ (см. [23], [25]). Тогда мера $\mu = C \varrho \lambda_M$ удовлетворяет уравнению $\mathcal{L}_{\text{Id}, 0} \mu = 0$ (обратно, всякое решение этого уравнения задается гармонической плотностью). Однако функция $\exp 0 = 1$ не интегрируема. Это следует как из [24; теорема 9.1, теорема 13.2], так и из примера 5.4. Действительно, если M имеет конечный объем, то $\beta_{\lambda_M} = 0$.

Остается много интересных открытых проблем, связанных с уравнением (1.2), даже в случае, когда $A = \text{Id}$ и b гладко. Мотивируясь приложениями в теории диффузионных процессов, мы рассматривали вероятностные плотности, удовлетворяющие таким уравнениям. Однако интересно было бы исследовать не обязательно неотрицательные интегрируемые решения. В частности, не ясно сколько обширно линейное пространство интегрируемых решений, когда оно не является одномерным. Нам неизвестно, существуют ли положительные интегрируемые решения, если имеется некоторое нетривиальное интегрируемое решение. Остается

открытым следующий вопрос, связанный с примером из предложения 4.8: существует ли такая гладкая функция W на $\mathbb{R}^d$, что $\#\mathcal{M}_{\text{ell}}^{\text{Id}, \nabla W} > 1$? В случае, когда $W \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, не известно также, всякое ли решение уравнения $L_{\text{Id}, \nabla W}^* \mu = 0$ должно быть пропорционально $\exp W$, если заранее дано, что $\#\mathcal{M}_{\text{ell}}^{\text{Id}, \nabla W} = 1$. Наконец, мы не знаем, обязана ли функция $\exp W$ быть интегрируемой по $\mathbb{R}^d$, если дано, что $\#\mathcal{M}_{\text{ell}}^{\text{Id}, \nabla W} \geq 1$. Как отмечено выше, есть связные полные римановы многообразия, для которых ответы на эти два вопроса отрицательны. Если $\exp W \in L^1(\mathbb{R}^d)$, то согласно примеру 5.4 мера $\mu = \text{const} \exp W \, dx$ является единственным элементом в $\mathcal{M}_{\text{ell}}^{\text{Id}, \nabla W}$ (тот факт, что эта мера удовлетворяет эллиптическому уравнению с $A = \text{Id}$ и $b = \nabla W$, легко проверяется с помощью формулы интегрирования по частям).

Было бы интересно изучить аналогичные проблемы для параболических операторов (см. [4], [37], [42]). Задачи, изученные в этой работе, рассматривались также в бесконечномерном случае (см., например, [1], [3], [6], [8], [11], [13], [14], [43]–[46]). Однако бесконечномерный случай остается гораздо менее изученным.

§6. Случай $\Omega = \mathbb{R}^1$

Следует отметить, что случай $d = 1$ может быть изучен непосредственно без использования эллиптических уравнений. Действительно, пусть $\Omega = I = (r, R)$ – открытый интервал в $\mathbb{R}$.

ПРИМЕР 6.1. Предположим, что μ – конечная борелевская мера на Ω такая, что $L_{A,b}^* \mu = 0$, где A и b – борелевские функции, интегрируемые относительно μ . Тогда имеем следующее.

(i) Справедливо равенство $A\mu = g \, dx$, где

$$g(x) = C_1 + C_2 x + \int_r^x b(y) \, \mu(dy)$$

и C_1, C_2 – константы. В частности, функция g имеет ограниченную вариацию. Если $A \neq 0$ μ -п.в., то g абсолютно непрерывна.

(ii) Если, кроме того, функция A абсолютно непрерывна и $\inf A > 0$, то мера μ имеет абсолютно непрерывную плотность ϱ . В случае, когда $b \in L^1(I, dx)$, для всякого $t_0 \in I$

$$\begin{aligned} \varrho(t) &= \exp\left(\int_{t_0}^t \frac{b(s) - A'(s)}{A(s)} \, ds\right) \\ &\times \left(C_2 \int_{t_0}^t \frac{1}{A(s)} \exp\left(-\int_{t_0}^s \frac{b(u) - A'(u)}{A(u)} \, du\right) \, ds + C_1\right) \end{aligned} \quad (6.1)$$

для некоторых $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, причем для всякой такой функции ϱ имеем $L_{A,b}^* \mu = 0$. Равенство (6.1) может быть записано как

$$\varrho(t) = \frac{1}{A(t)} \exp\left(\int_{t_0}^t \frac{b(s)}{A(s)} \, ds\right) \left(\tilde{C}_2 \int_{t_0}^t \exp\left(-\int_{t_0}^s \frac{b(u)}{A(u)} \, du\right) \, ds + \tilde{C}_1\right) \quad (6.2)$$

для некоторых $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2 \in \mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Поскольку $A\mu$, $b\mu$ – ограниченные меры, то равенство $L_{A,b}^* \mu = 0$ равносильно равенству $(A\mu)'' - (b\mu)' = 0$ в смысле обобщенных функций, что, в свою очередь, равносильно равенству $(A\mu)' - b\mu = C_2 \in \mathbb{R}$. Следовательно, мера $A\mu$ имеет плотность g относительно меры Лебега и g задается указанным выражением. Если $A \neq 0$ μ -п.в., то μ также имеет плотность, значит, обобщенная производная $A\mu$ принадлежит $L^1(I, dx)$, что означает, что $A\mu$ имеет абсолютно непрерывную плотность.

(ii) В случае, когда функция A абсолютно непрерывна и положительна, заключаем, что μ допускает абсолютно непрерывную плотность и уравнение $(A\mu)' = b\mu + C_2$ может быть записано как

$$\mu' = \frac{b - A'}{A} \mu + \frac{C_2}{A}.$$

В случае, когда функция b интегрируема по Лебегу (что всегда имеет место на каждом отрезке, на котором непрерывная плотность μ не имеет нулей), остается решить последнее линейное уравнение. Ясно, что всякое решение этого уравнения дает меру, удовлетворяющую нашему эллиптическому уравнению.

Явное выражение для решений позволяет полностью исследовать проблему единственности в одномерном случае.

ПРИМЕР 6.2. Предположим, что $\Omega = \mathbb{R}$, функция A локально абсолютно непрерывна и положительна, а функция b локально интегрируема по Лебегу. Если

$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{A(s)}} ds = \infty, \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{A(s)}} ds = \infty, \quad (6.3)$$

то $\#\mathcal{M}_{\text{ell}}^{A,b} \leq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнено (6.3). Предположим, что существуют две различные вероятностные меры, удовлетворяющие нашему эллиптическому уравнению. Из предыдущего примера ясно, что пространство всех решений двумерно. Если положить

$$\Psi(x) = \exp\left(\int_0^x \frac{b(s) - A'(s)}{A(s)} ds\right) = \frac{A(0)}{A(x)} \exp\left(\int_0^x \frac{b(s)}{A(s)} ds\right),$$

то это пространство является линейной оболочкой функций Ψ и

$$\Phi(x) := \Psi(x) \int_0^x A(s)^{-1} \Psi(s)^{-1} ds.$$

Существование двух линейно независимых решений влечет, что Ψ и Φ интегрируемы на $\mathbb{R}$. Заметим, что согласно (6.3) функция $(A\Psi)^{-1}$ не является интегрируемой, поскольку

$$\left(\int \frac{1}{\sqrt{A(s)}} ds\right)^2 \leq \int \Psi(s) ds \int \frac{1}{A(s)\Psi(s)} ds.$$

Согласно (6.1) с $t_0 = 0$, по крайней мере, одна из двух различных мер из $\mathcal{M}_{\text{ell}}^{A,b}$ соответствует $C_1 > 0$ и $C_2 \neq 0$. Это приводит к противоречию, поскольку если $C_2 > 0$, то $C_2 \Phi(x) + C_1 < 0$ для некоторого $x < 0$. Случай $C_2 < 0$ аналогичен.

Легко видеть, что если (6.3) не выполнено, то $\mathcal{M}_{\text{ell}}^{A,b}$ может содержать бесконечно много элементов. Например, пусть

$$A(x) = \exp(2x^2), \quad b(x) = 2x \exp(2x^2).$$

Тогда $(b(s) - A'(s))A(s)^{-1} = -2s$ и $\Psi(x) = \exp(-x^2)$. Значит, один элемент из $\mathcal{M}_{\text{ell}}^{A,b}$ имеет плотность $\sqrt{\pi}^{-1} \exp(-x^2)$, а

$$C \exp(-x^2) \left(\int_0^x \exp(-s^2) ds + 2 \right),$$

где C – нормирующая константа, является плотностью другого элемента.

Более того, верно следующее утверждение.

ПРИМЕР 6.3. Пусть A – положительная локально абсолютно непрерывная функция на $\mathbb{R}$ такая, что (6.3) не выполнено. Тогда существует такая локально интегрируемая функция b , что $\#\mathcal{M}_{\text{ell}}^{A,b} = \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если оба интеграла в (6.3) конечны, то, полагая $b(x) = A'(x)/2$, можно взять $\Psi(x) = A(x)^{-1/2}$, что после умножения на константу дает один элемент из $\mathcal{M}_{\text{ell}}^{A,b}$. Это видно из (6.1), поскольку

$$\exp\left(\int_0^x \frac{b(s) - A'(s)}{A(s)} ds\right) = \frac{\sqrt{A(0)}}{\sqrt{A(x)}} = \sqrt{A(0)} \Psi(x).$$

Взяв константу C , превосходящую интеграл от $A^{-1/2}$, получаем другой элемент из $\mathcal{M}_{\text{ell}}^{A,b}$ вида

$$C_0 \Psi(x) \left(\int_0^x \frac{1}{A(s)\Psi(s)} ds + C \right),$$

где $C_0 > 0$ – нормирующая константа. Выражение в скобках положительно и ограничено, поскольку $A(s)\Psi(s) = \sqrt{A(s)}$. Построение аналогично, если лишь один из интегралов в (6.3) конечен, скажем, интеграл по $(-\infty, 0]$ меньше 1. А именно, предположим для упрощения, что $A(0) = 1$, и положим

$$b(x) = \frac{A'(x)}{2}, \quad \Psi(x) = A(x)^{-1/2} \quad \text{при } x \leq 0.$$

Теперь имеются две возможности: функция A^{-1} может быть интегрируема по $[0, +\infty)$ или нет. В первом случае положим

$$\Psi(x) = e^{-x} A(x)^{-1}, \quad x > 0.$$

Это дает одно положительное интегрируемое решение нашего уравнения с коэффициентом b на $(0, +\infty)$, определенным из уравнения

$$\exp\left(\int_0^x \frac{b(s) - A'(s)}{A(s)} ds\right) = \Psi(x). \quad (6.4)$$

Поскольку функция A положительна и функция A' локально интегрируема, то функция b также локально интегрируема. Линейно независимое положительное интегрируемое решение получается, если положить

$$\begin{aligned}\Psi_1(x) &= \frac{1}{\sqrt{A(x)}} \left(\int_0^x \frac{1}{\sqrt{A(s)}} ds + 1 \right), \quad x \leq 0, \\ \Psi_1(x) &= \frac{1 + e^{-x}}{2A(x)}, \quad x > 0.\end{aligned}\quad (6.5)$$

Если функция A^{-1} не интегрируема по $[0, +\infty)$, то положим

$$\Psi(x) = \exp(-x^2) \exp\left(-\int_0^x \exp(s^2) \frac{1}{A(s)} ds\right), \quad x \geq 0, \quad (6.6)$$

и определим b из (6.4). Опять Ψ является положительным интегрируемым решением. Линейно независимое положительное интегрируемое решение получается посредством (6.5) на $(-\infty, 0]$ и

$$\Psi_1(x) = \Psi(x) \left(\int_0^x \frac{1}{A(s)\Psi(s)} ds + 1 \right), \quad x > 0.$$

Интегрируемость Ψ_1 на $[0, +\infty)$ вытекает из следующего соотношения:

$$\Psi(x) \int_0^x \frac{1}{A(s)\Psi(s)} ds = \exp(-x^2).$$

Чтобы проверить это соотношение (на самом деле мы определяли Ψ из этого уравнения), заметим, что ввиду (6.6) оно равносильно равенству

$$\int_0^x \frac{1}{A(s)\Psi(s)} ds = \exp\left(\int_0^x \exp(s^2) \frac{1}{A(s)} ds\right).$$

Остается заметить, что обе части последнего равенства совпадают при $x = 0$ и дифференцирование обеих частей дает тождество

$$\frac{1}{A(x)\Psi(x)} = \exp(x^2) \frac{1}{A(x)} \exp\left(\int_0^x \exp(s^2) \frac{1}{A(s)} ds\right),$$

которое справедливо согласно (6.6).

Предположим, что функция $\exp \int_0^t \frac{b(s)}{A(s)} ds$ в примере 6.2 интегрируема по $\mathbb{R}$. Тогда, умножая ее на константу, получаем вероятностную меру μ . Поскольку $A^{-1/2}$ имеет бесконечные интегралы по обоим полупрямым, заключаем, что μ — единственная вероятностная мера, удовлетворяющая нашему эллиптическому уравнению. Значит, она является также единственной вероятностной мерой для ассоциированной полугруппы $(T_t^\mu)_{t \geq 0}$. Эта полугруппа является переходной полугруппой диффузионного процесса, порожденного $L_{A,b}$. Существование инвариантной вероятностной меры для этой диффузии согласуется с хорошо известным условием рекуррентности Хасьминского (см. [41; гл. III, § 3]): функция $\exp\left(-\int_0^t \frac{b(s)}{A(s)} ds\right)$ не интегрируема.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.4. Пусть $\Omega = \mathbb{R}$, $A(x) = 1$ и $b(x) = -2x - 6e^{x^2}$. Тогда $\mathcal{M}_{\text{ell}}^{A,b} = \{\mu\}$ с $\mu(dx) = \pi^{-1/2}e^{-x^2}dx$, но согласно [14; пример 1.12] оператор $(L_{A,b}, C_0^\infty(\mathbb{R}))$ не является существенно m -диссипативным на $L^1(\mathbb{R}, \mu)$. Значит, обратное утверждение к теореме 4.1 неверно в случае $d = 1$.

Авторы выражают признательность Дж. Да Прато, В. В. Жикову, Ж. Забчику и Н. В. Крылову за полезные обсуждения.

Список литературы

1. Albeverio S., Bogachev V., Röckner M. On uniqueness of invariant measures for finite- and infinite-dimensional diffusions // Comm. Pure Appl. Math. 1999. V. 52. P. 325–362.
2. Bogachev V. I., Krylov N. V., Röckner M. Regularity of invariant measures: the case of non-constant diffusion part // J. Funct. Anal. 1996. V. 138. № 1. P. 223–242.
3. Bogachev V. I., Krylov N. V., Röckner M. Elliptic regularity and essential self-adjointness of Dirichlet operators // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4). 1997. V. 24. № 3. P. 451–461.
4. Bogachev V. I., Krylov N. V., Röckner M. On regularity of transition probabilities and invariant measures of singular diffusions under minimal conditions // Comm. Partial Differential Equations. 2001. V. 26. № 11–12. P. 2037–2080.
5. Богачев В. И., Крылов Н. В., Рёкнер М. Дифференцируемость инвариантных мер и переходных вероятностей сингулярных диффузий // Докл. РАН. 2001. Т. 376. № 2. С. 151–154.
6. Bogachev V. I., Röckner M. Regularity of invariant measures on finite and infinite dimensional spaces and applications // J. Funct. Anal. 1995. V. 133. P. 168–223.
7. Богачев В. И., Рёкнер М. Обобщение теоремы Хасьминского о существовании инвариантных мер для локально интегрируемых сносов // Теория вероятностей и ее прим. 2000. Т. 45. № 3. С. 417–436.
8. Bogachev V. I., Röckner M. Elliptic equations for measures on infinite-dimensional spaces and applications // Probab. Theory Related Fields. 2001. V. 120. № 4. P. 445–496.
9. Bogachev V. I., Röckner M. On L^p -uniqueness and essential self-adjointness of symmetric diffusion operators on Riemannian manifolds // Preprint BiBoS № 01-06-043. Bielefeld: Univ. Bielefeld, 2001.
10. Bogachev V. I., Röckner M., Stannat W. Uniqueness of invariant measures and essential maximal dissipativity of diffusion operators on L^1 // Proceedings of the Colloquium “Infinite Dimensional Stochastic Analysis” (11–12 February 1999, Amsterdam) / ed. Ph. Clément et al. Amsterdam: Royal Netherlands Academy, 2000. P. 39–54.
11. Bogachev V. I., Röckner M., Wang F.-Y. Elliptic equations for invariant measures on finite and infinite dimensional manifolds // J. Math. Pures Appl. (9). 2001. V. 80. № 2. P. 177–221.
12. Богачев В. И., Ванг Ф.-Ю., Рёкнер М. Эллиптические уравнения, связанные с инвариантными мерами диффузий на конечномерных и бесконечномерных многообразиях // Докл. РАН. 2001. Т. 378. № 4. С. 439–442.
13. Bogachev V. I., Röckner M., Zhang T. S. Existence and uniqueness of invariant measures: an approach via sectorial forms // Appl. Math. Optim. 2000. V. 41. P. 87–109.
14. Stannat W. (Nonsymmetric) Dirichlet operators on L^1 : existence, uniqueness and associated Markov processes // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4). 1999. V. 28. № 1. P. 99–140.
15. Жиков В. В. Об асимптотических задачах, связанных с недивергентным параболическим уравнением второго порядка со случайно-однородными коэффициентами // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. № 5. С. 859–869.
16. Жиков В. В., Сиражудинов М. М. Усреднение недивергентных эллиптических и параболических операторов второго порядка и стабилизация решения задачи Коши // Матем. сб. 1981. Т. 116. № 2. С. 166–186.

17. *Cabré X.* Nondivergent elliptic equations on manifolds with nonnegative curvature // *Comm. Pure Appl. Math.* 1997. V. 50. P. 623–665.
18. *Ватанабэ С., Икэда Н.* Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М.: Мир, 1986.
19. *Azencott R.* Behavior of diffusion semi-groups at infinity // *Bull. Soc. Math. France.* 1974. V. 102. P. 193–240.
20. *Davies E. B.* L^1 -properties of second order elliptic operators // *Bull. London Math. Soc.* 1985. V. 17. P. 417–436.
21. *Коваленко В. Ф., Семенов Ю. А.* C_0 -полугруппы в пространствах $L^p(\mathbb{R}^d)$ и $\widehat{C}(\mathbb{R}^d)$, порождаемые дифференциальным выражением $\Delta + b \cdot \nabla^*$ // *Теория вероятностей и ее прим.* 1990. Т. 35. №3. С. 449–458.
22. *Перельмутер М. А., Семенов Ю. А.* Эллиптические операторы, сохраняющие вероятность // *Теория вероятностей и ее прим.* 1987. Т. 32. №4. С. 786–789.
23. *Chung L. O.* Existence of harmonic L^1 functions in complete Riemannian manifolds // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1983. V. 88. P. 531–532.
24. *Grigor'yan A.* Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds // *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.).* 1999. V. 36. №2. P. 135–249.
25. *Li P., Schoen R.* L^p and mean value properties of subharmonic functions on Riemannian manifolds // *Acta Math.* 1984. V. 153. P. 279–301.
26. *Eberle A.* Uniqueness and non-uniqueness of singular diffusion operators. Berlin: Springer-Verlag, 1999. (Lecture Notes in Math. V. 1718.)
27. *Клемент Ф., Хейманс Х., Ангелент С., ван Дуйн К., де Пахтер Б.* Однопараметрические полугруппы. М.: Мир, 1992.
28. *Adams R. A.* Sobolev spaces. New York: Academic Press, 1975.
29. *Aubin T.* Nonlinear analysis on manifolds. Monge–Ampère equations. New York: Springer-Verlag, 1982.
30. *Гилбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989.
31. *Ладженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазILINEЙНЫЕ уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.
32. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 2. М.: Мир, 1978.
33. *Pazy A.* Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. New York: Springer-Verlag, 1985.
34. *Arendt W.* The abstract Cauchy problem, special semigroups and perturbation. One-parameter semigroups of positive operators. Berlin: Springer-Verlag, 1986.
35. *Chicco M.* Solvability of the Dirichlet problem in $H^{2,p}(\Omega)$ for a class of linear second order elliptic partial differential equations // *Boll. Unione Mat. Ital. (4).* 1971. V. 4. P. 374–387.
36. *Varadhan S. R. S.* Lectures on diffusion problems and partial differential equations. Bombay: Tata Institute of Fundamental Research, 1980.
37. *Cattiaux P., Fradon M.* Entropy, reversible diffusion processes and Markov uniqueness // *J. Funct. Anal.* 1996. V. 138. P. 243–272.
38. *Liskevich V.* On the uniqueness problem for Dirichlet operators // *J. Funct. Anal.* 1999. V. 162. P. 1–13.
39. *Röckner M., Zhang T.-S.* Uniqueness of generalized Schrödinger operators and applications // *J. Funct. Anal.* 1994. V. 119. P. 455–467.
40. *Хасьминский П. З.* Эргодические свойства возвратных диффузионных процессов и стабилизация решений задачи Коши для параболических уравнений // *Теория вероятностей и ее прим.* 1960. Т. 5. №2. С. 196–214.
41. *Хасьминский П. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М.: Наука, 1969.
42. *Stannat W.* Time-dependent diffusion operators on L^1 // Preprint № 00-080 SFB 343. Bielefeld: Univ. Bielefeld, 2000.