Общероссийский математический портал

Д. И. Борисов, О краевой задаче в цилиндре с частой сменой типа граничных условий, *Матем. сб.*, 2002, том 193, номер 7, 37–68

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm666>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 13:09:36

УДК 517.958

Д. И. Борисов

О краевой задаче в цилиндре с частой сменой типа граничных условий

Рассмотрена сингулярно возмущенная краевая задача на собственные значения оператора Лапласа в цилиндре с частой сменой типа граничных условий на боковой поверхности. Изучается случай, когда усредненная задача содержит второе или третье краевое условие на боковой поверхности. Для кругового цилиндра построены полные степенные двупараметрические асимптотические разложения собственных значений и собственных функций возмущенной задачи. В случае, когда сечение цилиндра – произвольная ограниченная односвязная область с гладкой границей, построены первые члены асимптотик собственных значений, сходящихся к простым предельным собственным значениям, и первые члены асимптотик соответствующих собственных функций.

Библиография: 17 названий.

Введение

Эллиптические краевые задачи с частой сменой типа граничных условий исследовались во многих работах (см., например, [1]–[12]). Частая смена типа граничных условий задается следующим образом. На границе области выделяется подмножество, состоящее из большого числа непересекающихся частей. На этом подмножестве задается граничное условие Дирихле, на оставшейся части границы – граничное условие Неймана. Предполагается, что число частей границы с граничным условием Дирихле неограниченно возрастает. Большое количество работ посвящено вопросам усреднения эллиптических краевых задач с частой сменой типа граничных условий (см., например, [1]–[8]). Основной целью этих работ было определение вида предельных (усредненных) задач в зависимости от соотношения мер частей границы с разными типами граничных условий и, по возможности, получение оценок скорости сходимости. В последнее время появились работы, в которых строились асимптотические разложения решений двумерных эллиптических задач с частой сменой типа граничных условий [9]–[12].

В настоящей работе рассматривается сингулярно возмущенная краевая задача на собственные значения оператора Лапласа в цилиндре с частой сменой типа граничных условий на боковой поверхности (см. рис. 1). Боковая поверхность цилиндра разбивается на два подмножества γ_ε и Γ_ε , каждое из которых состоит из большого числа узких полос переменной ширины, причем полосы одного подмножества чередуются с полосами другого подмножества. Оба подмножества зависят

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № № 02-01-00693, 00-15-96038) и программы “Университеты России” Минобразования РФ (грант № УР.04.01.010).

от двух малых параметров, характеризующих ширину полос из разных подмножеств. При стремлении малых параметров к нулю количество полос неограниченно возрастает, а ширина каждой стремится к нулю. На γ_ε задается граничное условие Дирихле, на Γ_ε – граничное условие Неймана. Для уравнения Пуассона в случае кругового цилиндра и полос постоянной ширины в работе [1] было установлено, что в зависимости от соотношения ширины полос с разными типами граничных условий усредненная задача содержит первое, второе или третье граничное условие на боковой поверхности. В настоящей работе для цилиндра произвольного сечения и полос переменной ширины установлены соотношения размеров полос с разными типами граничных условий, при которых в усредненной задаче на боковой поверхности возникает второе или третье краевое условие, и получены первые члены асимптотик собственных значений возмущенной задачи, сходящихся к простым предельным собственным значениям. Также получены первые члены асимптотик соответствующих собственных функций. В случае кругового цилиндра построены и строго обоснованы полные степенные двупараметрические асимптотики собственных значений и собственных функций возмущенной задачи. Основным аппаратом, используемым в настоящей работе для построения асимптотик, являются методы асимптотического анализа, а именно: метод согласования асимптотических разложений [13], метод составных разложений [14] и метод многих масштабов [15].

В [16] были частично анонсированы результаты настоящей работы.

§ 1. Формулировка основных результатов

Пусть $x' = (x_1, x_2)$, $x = (x', x_3)$ – декартовы координаты в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$, соответственно, $\omega \subset \mathbb{R}^2$ – односвязная ограниченная область с бесконечно дифференцируемой границей, $\Omega = \omega \times [0, H]$, D_1, D_2 – соответственно, верхнее и нижнее основания цилиндра Ω , $D_1 = \{x : x' \in \omega, x_3 = H\}$, $D_2 = \{x : x' \in \omega, x_3 = 0\}$, Σ – боковая поверхность Ω , s – натуральный параметр кривой $\partial\omega$. Обозначим $N \gg 1$ – целое число, $\varepsilon = H/(\pi N)$ – малый положительный параметр. Пусть $f = f(s)$ – бесконечно дифференцируемая положительная функция, определенная на границе $\partial\omega$, $\gamma_\varepsilon = \{x : x' \in \partial\omega, |x_3 - \varepsilon(2j+1)\pi/2| < \varepsilon\eta f(s), j = \overline{0, N-1}\}$, $\eta = \eta(\varepsilon)$, $0 < \eta(\varepsilon) < \pi/2$ (см. рис. 1). Рассматривается сингулярно возмущенная краевая задача

$$-\Delta\psi_\varepsilon = \lambda_\varepsilon\psi_\varepsilon, \quad x \in \Omega, \quad (1.1)$$

$$\psi_\varepsilon = 0, \quad x \in D_1 \cup \gamma_\varepsilon, \quad \frac{\partial\psi_\varepsilon}{\partial\nu} = 0, \quad x \in D_2 \cup \Gamma_\varepsilon, \quad (1.2)$$

где $\Gamma_\varepsilon = \Sigma \setminus \overline{\gamma_\varepsilon}$, ν – внешняя нормаль.

В работе [1] была рассмотрена краевая задача для уравнения Пуассона с граничными условиями (1.2) в случае, когда область ω является единичным кругом, а функция $f(s)$ тождественно равна единице. В настоящей работе на основе результатов [1] будет определена предельная задача для (1.1), (1.2). А именно, будет доказана

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon \ln \eta(\varepsilon))^{-1} = -A$, $0 \leq A < \infty$. Тогда собственные значения и соответствующие собственные функции задачи (1.1), (1.2) (последние сильно в $L_2(\Omega)$ и слабо в $H^1(\Omega)$) сходятся при $\varepsilon \rightarrow 0$ к собственным значениям и соответствующим собственным функциям предельной

Рис. 1

задачи

$$\begin{aligned} -\Delta\psi_0 &= \lambda_0\psi_0, \quad x \in \Omega, \quad \psi_0 = 0, \quad x \in D_1, \\ \frac{\partial\psi_0}{\partial\nu} &= 0, \quad x \in D_2, \quad \left(\frac{\partial}{\partial\nu} + A\right)\psi_0 = 0, \quad x \in \Sigma. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Совокупная кратность собственных значений задачи (1.1), (1.2), сходящихся к r -кратному собственному значению задачи (1.3), равна r .

Прежде чем сформулировать основные результаты работы, напомним некоторые известные факты. Задача (1.3) легко решается методом разделения переменных; собственные значения и собственные функции этой задачи имеют вид $\lambda_0 = M^2 + \varkappa$ и $\psi_0(x) = \Phi_0(x') \cos(Mx_3)$, где $\varkappa$ и Φ_0 — собственные значения и собственные функции задачи

$$-\Delta_{x'}\Phi_0 = \varkappa\Phi_0, \quad x' \in \omega, \quad \left(\frac{\partial}{\partial n} + A\right)\Phi_0 = 0, \quad x' \in \partial\omega,$$

n — внешняя нормаль к $\partial\omega$. Если ω — единичный круг с центром в нуле, то формулы для собственных значений и собственных функций можно уточнить. А именно, в этом случае $\varkappa$ является неотрицательным корнем уравнения

$$\sqrt{\varkappa} J'_n(\sqrt{\varkappa}) + A J_n(\sqrt{\varkappa}) = 0, \quad (1.4)$$

где J_n — функция Бесселя целого порядка $n \geq 0$, а соответствующие собственные функции имеют вид $\psi_0 = J_0(\sqrt{\lambda_0 - M^2}r)\phi^+(Mx_3)$ при $n = 0$ и $\psi_0^\pm = J_n(\sqrt{\lambda_0 - M^2}r)\phi^\pm(Mx_3)\phi^\pm(n\theta)$ при $n > 0$, где $\phi^+ = \cos$, $\phi^- = \sin$, (r, θ) — полярные координаты, соответствующие x' . Заметим также, что условие теоремы 1.1 эквивалентно равенству $\eta(\varepsilon) = \exp(-1/(\varepsilon(A + \mu)))$, где $\mu = \mu(\varepsilon)$ — произвольная функция, причем $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu(\varepsilon) = 0$, $A + \mu(\varepsilon) > 0$. Всюду далее предполагается, что функция $\eta(\varepsilon)$ имеет именно такой вид.

Основные результаты работы выглядят следующим образом.

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть ω – единичный круг с центром в нуле, $f \equiv 1$. Тогда асимптотики собственных значений задачи (1.1), (1.2) имеют вид

$$\lambda_\varepsilon = \Lambda_0(\mu) + \sum_{i=2}^{\infty} \varepsilon^i \Lambda_i(\mu), \quad (1.5)$$

где $\Lambda_i(\mu)$ – голоморфные по μ функции, $\Lambda_0(\mu) = \kappa^2(\mu) + M^2$, $\kappa(\mu)$ – корень уравнения

$$\kappa(\mu) J'_n(\kappa(\mu)) + (A + \mu) J_n(\kappa(\mu)) = 0, \quad \kappa(0) = \sqrt{\varkappa}, \quad (1.6)$$

$$\Lambda_2(\mu) = -\frac{\pi^2}{12} \frac{\kappa^2(\mu)(A + \mu)^2}{(\kappa^2(\mu) - n^2 + (A + \mu)^2)}. \quad (1.7)$$

При $A = 0$ для функций $\Lambda_i(\mu)$, $i \geq 2$, справедливы представления

$$\Lambda_i(\mu) = \mu^2 \tilde{\Lambda}_i(\mu), \quad (1.8)$$

где $\tilde{\Lambda}_i(\mu)$ – голоморфные по μ функции.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Известно (см. [17]), что функции $J_n(t)$ и $J'_n(t)$ положительны при $t \in (0, n]$. В силу этого факта все положительные корни уравнения (1.4) больше n^2 , т.е. $\varkappa > n^2$. Тогда для достаточно малых ε то же верно и для $\kappa^2(\mu)$, из чего следует, что знаменатель в (1.7) отличен от нуля. Если $\varkappa = 0$, то $n = A = 0$ и, следовательно, $\mu > 0$. Но и в этом случае знаменатель в (1.7) положителен.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Следует отметить, что задача (1.3) может иметь собственные значения различной кратности, в том числе, и большей двух. Такой случай реализуется, если $\lambda_0 = M_1^2 + \varkappa_1 = \dots = M_k^2 + \varkappa_k$, $\varkappa_i$ – корень уравнения (1.4) для $n = n_i$, $(M_i, \varkappa_i, n_i) \neq (M_j, \varkappa_j, n_j)$ при $i \neq j$. Кроме того подчеркнем, что тройка $(M_i, \varkappa_i, n_i)$ однозначно определяет асимптотику (1.5), (1.7).

ТЕОРЕМА 1.3. Пусть ω – единичный круг с центром в нуле, $f \equiv 1$, $\lambda_\varepsilon^{(i)}$ – собственные значения возмущенной задачи, сходящиеся к собственному значению $\lambda_0 = M_i^2 + \varkappa_i$, $\varkappa_i$ – корень уравнения (1.4) для $n = n_i$, имеющие различные асимптотики (1.5). А именно,

$$|\lambda_\varepsilon^{(i)} - \lambda_\varepsilon^{(j)}| \geq C \varepsilon^a (A + \mu), \quad (M_i, \varkappa_i, n_i) \neq (M_j, \varkappa_j, n_j), \quad (1.9)$$

где C , a – некоторые положительные числа. Тогда $\lambda_\varepsilon^{(i)}$ – простое, если $n_i = 0$, и двукратное, если $n_i > 0$. Асимптотики собственных функций, соответствующих простому собственному значению возмущенной задачи, имеют вид (5.9), а асимптотики собственных функций, соответствующих двукратному собственному значению возмущенной задачи, определяются равенствами (5.10).

В случае ω – произвольная область, f – произвольная функция доказана

ТЕОРЕМА 1.4. Пусть λ_0 – простое собственное значение задачи (1.3). Тогда асимптотика собственного значения λ_ε возмущенной задачи, сходящегося к λ_0 , имеет вид

$$\lambda_\varepsilon = \Lambda_0(\mu) + \varepsilon \Lambda_1(\mu) + \varepsilon^2 \Lambda_2(\mu) + \dots, \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} \Lambda_1(\mu) &= (A + \mu)^2 \int_{\partial\Omega'} \Psi_0^2(x', \mu) \ln f(s) ds, \\ \Lambda_2(\mu) &= (A + \mu)^2 \int_{\partial\Omega'} \left(\Psi_0(x', \mu) \Psi_1(x', \mu) \ln f(s) - \frac{\pi^2}{24} k(s) \Psi_0^2(x', \mu) \right) ds \\ &\quad + (A + \mu)^3 \int_{\partial\Omega'} \Psi_0^2(x', \mu) \ln^2 f(s) ds, \end{aligned} \quad (1.11)$$

где Λ_0 , Ψ_0 – соответственно, собственное значение и собственная функция задачи (6.3), (6.12), $\Lambda_0(0) = \lambda_0$, $\Psi_0|_{\mu=0} = \Phi_0$, Ψ_1 – решение задачи (6.4), (6.13), $k(s) = -(r''(s), n(s))_{\mathbb{R}^2}$, $n = n(s)$, $r(s)$ – двумерная вектор-функция, задающая $\partial\omega$, Λ_i , Ψ_i голоморфны по μ . Первые члены асимптотики соответствующей собственной функции имеют вид (6.14).

§ 2. Сходимость возмущенной задачи по малому параметру

В настоящем параграфе будет доказана теорема 1.1, а также ряд вспомогательных утверждений, которые будут использованы при доказательстве теорем 1.2–1.4.

ЛЕММА 2.1. Пусть Q – произвольный компакт на комплексной плоскости, не содержащий собственных чисел задачи (1.3). Тогда при $\lambda \in Q$ и достаточно малых ε для любой функции $f \in L_2(\Omega)$ краевая задача

$$\begin{aligned} -\Delta u_\varepsilon &= \lambda u_\varepsilon + f, & x \in \Omega, \\ u_\varepsilon &= 0, & x \in D_1 \cup \gamma_\varepsilon, \\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} &= 0, & x \in D_2 \cup \Gamma_\varepsilon, \end{aligned} \quad (2.1)$$

однозначно разрешима, и для ее решения справедлива равномерная по ε , λ и μ оценка

$$\|u_\varepsilon\|_1 \leq C \|f\|, \quad (2.2)$$

где $\|\cdot\|$ – норма в $L_2(\Omega)$, $\|\cdot\|_1$ – норма в $H^1(\Omega)$. При $\varepsilon \rightarrow 0$ функция u_ε равномерно по λ сильно в $L_2(\Omega)$ и слабо в $H^1(\Omega)$ сходится к решению задачи

$$\begin{aligned} -\Delta u_0 &= \lambda u_0 + f, & x \in \Omega, & \quad u_0 = 0, & x \in D_1, \\ \frac{\partial u_0}{\partial \nu} &= 0, & x \in D_2, & \quad \left(\frac{\partial}{\partial \nu} + A \right) u_0 = 0, & x \in \Sigma. \end{aligned} \quad (2.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что для доказательства однозначной разрешимости задачи (2.1) достаточно показать справедливость оценки (2.2). Последнюю докажем от противного. Допустим, что существуют последовательности $\varepsilon_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$, $\lambda = \lambda_k \in Q$, $f = f_k \in L_2(\Omega)$ такие, что для u_{ε_k} выполняется

$$\|u_{\varepsilon_k}\|_1 \geq k \|f_k\|. \quad (2.4)$$

Без ограничения общности будем считать, что функция u_ε нормирована в $L_2(\Omega)$:

$$\|u_\varepsilon\| = 1. \quad (2.5)$$

Умножая обе части уравнения в (2.1) на u_ε и интегрируя по Ω , а также учитывая компактность Q , несложно доказать равномерную априорную оценку

$$\|u_\varepsilon\|_1 \leq C(\|u_\varepsilon\| + \|f\|). \quad (2.6)$$

Подставляя (2.5), (2.4) в (2.6), выводим сходимость

$$\|f_k\| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0. \quad (2.7)$$

Из (2.5)–(2.7) следует равномерная по ε , λ и μ оценка

$$\|u_{\varepsilon_k}\|_1 \leq C. \quad (2.8)$$

В силу компактности Q , компактности вложения $H^1(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$, (2.5), (2.8) заключаем, что существует подпоследовательность индексов k' , на которой $\lambda_{k'} \rightarrow \lambda_* \in Q$ и

$$u_{\varepsilon'} \rightarrow u_* \neq 0 \quad \text{сильно в } L_2(\Omega) \text{ и слабо в } H^1(\Omega), \quad \varepsilon' = \varepsilon_{k'}. \quad (2.9)$$

Пусть $\mathcal{D} = \{w : w \in C_1(\overline{\Omega}), w = 0 \text{ на } D_1\}$, $\mathcal{D}_\varepsilon = \{w : w \in \mathcal{D}, w = 0 \text{ на } \gamma_\varepsilon\}$, $\mathcal{W}_\varepsilon$ – пополнение $\mathcal{D}_\varepsilon$ по норме $H^1(\Omega)$. Можно показать (для случая ω – единичный круг, $f \equiv 1$ см. [1]), что для любой функции $w \in \mathcal{D}$ существует семейство функций $w_\varepsilon \in \mathcal{W}_\varepsilon$ такое, что для любого семейства $U_\varepsilon \in \mathcal{W}_\varepsilon$, $U_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{} U_*$ слабо в $H^1(\Omega)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ выполняется

$$\begin{aligned} w_\varepsilon \rightarrow w \quad \text{сильно в } L_2(\Omega) \text{ и слабо в } H^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} (\nabla U_\varepsilon, \nabla w_\varepsilon) dx \rightarrow \int_{\Omega} (\nabla U_*, \nabla w) dx + A \int_{\Sigma} U_* w d\Sigma. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Полагая $U_\varepsilon = u_\varepsilon$, учитывая (2.7), (2.9) и (2.10) и переходя в очевидном равенстве

$$\int_{\Omega} (\nabla u_{\varepsilon'}, \nabla w_{\varepsilon'}) dx = \int_{\Omega} (\lambda_{k'} u_{\varepsilon'} + f_{k'}) w_{\varepsilon'} dx$$

к пределу при $k' \rightarrow \infty$, получаем, что функция u_* является нетривиальным решением задачи

$$\begin{aligned} -\Delta u_* &= \lambda_* u_*, \quad x \in \Omega, \quad u_* = 0, \quad x \in D_1, \\ \frac{\partial u_*}{\partial \nu} &= 0, \quad x \in D_2, \quad \left(\frac{\partial}{\partial \nu} + A \right) u_* = 0, \quad x \in \Sigma. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Таким образом, λ_* является собственным значением задачи (1.3), что противоречит условию леммы. Оценка (2.2) доказана.

Используя (2.2) вместо (2.8), аналогично легко показать сходимость решения задачи (2.1) к решению задачи (2.3) для произвольных сходящихся последовательностей $\varepsilon_k \rightarrow 0$, $\lambda_k \rightarrow \lambda_*$ при $k \rightarrow \infty$. Учитывая данный факт и непрерывную зависимость решения задачи (2.3) от параметра $\lambda \in Q$, от противного несложно показать равномерную по λ сходимость u_ε к u_0 . Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1. Известно, что решение u_0 задачи (2.3) есть голоморфная по λ функция, имеющая простые полюсы при λ , являющихся собственными значениями задачи (1.3), причем вычеты в этих полюсах являются соответствующими собственными функциями. Аналогично, решение u_ε задачи (2.1) голоморфно по λ и имеет простые полюсы в точках, являющихся собственными значениями задачи (1.1), (1.2), вычеты в которых являются соответствующими собственными функциями.

Пусть $\mathcal{B}_\delta$ – круг радиуса δ с центром в точке λ_0 , не содержащий других собственных значений задачи (1.3). Тогда для достаточно малых ε граница круга $\mathcal{B}_\delta$ не содержит собственных значений возмущенной и предельной задач, а потому u_ε и u_0 голоморфны по $\lambda \in \mathcal{B}_\delta$. Следовательно, в силу леммы 2.1 верна оценка

$$\left\| \int_{\partial \mathcal{B}_\delta} u_\varepsilon d\lambda - \int_{\partial \mathcal{B}_\delta} u_0 d\lambda \right\| \leq \int_{\partial \mathcal{B}_\delta} \|u_\varepsilon - u_0\| d\lambda,$$

из которой вытекает, что для всякой функции f имеет место сходимость в $L_2(\Omega)$

$$\int_{\partial \mathcal{B}_\delta} u_\varepsilon d\lambda \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial \mathcal{B}_\delta} u_0 d\lambda. \quad (2.12)$$

Так как $\mathcal{B}_\delta$ содержит полюс функции u_0 – собственное значение λ_0 , то правая часть в (2.12) отлична от нуля, из чего следует, что для любого $\delta > 0$ при достаточно малых ε левая часть (2.12) также не равна нулю. Следовательно, $\mathcal{B}_\delta$ содержит по крайней мере один полюс функции u_ε (т.е. собственное значение). Отсюда вытекает, что к каждому собственному значению предельной задачи сходится по крайней мере одно собственное значение возмущенной задачи и каждое собственное значение возмущенной задачи сходится к некоторому собственному значению предельной задачи.

Пусть λ_0 – p -кратное собственное значение, $\psi_0^{(j)}$ – соответствующие ортонормированные в $L_2(\Omega)$ собственные функции, $j = \overline{1, p}$, $\lambda_i^{(\varepsilon)}$, $i = \overline{1, q}$, – собственные значения, сходящиеся к λ_0 , взятые с учетом кратности, $\psi_\varepsilon^{(i)}$ – соответствующие ортонормированные в $L_2(\Omega)$ собственные функции. Пусть u_ε и u_0 – решения задач (2.1), (2.3) с $f = \psi_0^{(j)}$, $\lambda \in \partial \mathcal{B}_\delta$. Умножая (2.3) на $\psi_0^{(k)}$ и интегрируя по Ω , несложно показать, что

$$(u_0, \psi_0^{(k)}) = \frac{\delta_k^j}{\lambda_0 - \lambda}, \quad (2.13)$$

где δ_k^j – символ Кронекера, $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение в $L_2(\Omega)$. Как было уже сказано, вычет

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathcal{B}_\delta} u_0 d\lambda$$

есть собственная функция предельной задачи. С другой стороны, интегрируя (2.13) по $\partial \mathcal{B}_\delta$, получаем, что эта собственная функция ортогональна в $L_2(\Omega)$ всем функциям $\psi_0^{(j)}$ при $j \neq k$, а скалярное произведение в $L_2(\Omega)$ этой функции с $\psi_0^{(k)}$ равно единице. Отсюда выводим, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathcal{B}_\delta} u_0 d\lambda = \psi_0^{(j)}.$$

Так как левая часть (2.12) есть линейная комбинация собственных функций $\psi_\varepsilon^{(i)}$, то из последнего равенства и (2.12) следует, что существует линейная комбинация собственных функций $\psi_\varepsilon^{(j)}$, сходящаяся к $\psi_0^{(j)}$. Так как функции $\psi_0^{(j)}$ линейно независимы, то линейные комбинации собственных функций возмущенной задачи, сходящиеся к $\psi_0^{(j)}$ (т.е. левые части (2.12)), также линейно независимы. Поэтому $q \geq p$. В силу нормированности функций $\psi_\varepsilon^{(i)}$, задач для $\psi_\varepsilon^{(i)}$ и сходимости $\lambda_\varepsilon^{(i)}$ следует, что $\psi_\varepsilon^{(i)}$ ограничены в норме $H^1(\Omega)$. Аналогично доказательству леммы 2.1 (см. (2.8)–(2.11)) несложно показать, что на некоторой подпоследовательности $\varepsilon_k \rightarrow 0$ функции $\psi_{\varepsilon_k}^{(i)}$ сходятся к собственным функциям предельной задачи, которые обозначим $\tilde{\psi}_0^{(i)}$. Так как $\psi_\varepsilon^{(i)}$ ортонормированы, то функции $\tilde{\psi}_0^{(i)}$ линейно независимы. Ясно, что $\tilde{\psi}_0^{(i)}$ есть линейные комбинации функций $\psi_0^{(j)}$, а потому $q \leq p$. Теорема доказана.

Далее для доказательства теорем 1.2–1.4 нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

ЛЕММА 2.2. *При λ , близких к p -кратному собственному значению λ_0 задачи (1.3), для решения краевой задачи (2.1) имеет место представление*

$$u_\varepsilon = \sum_{i=1}^p \frac{\psi_\varepsilon^{(i)}}{\lambda_\varepsilon^{(i)} - \lambda} \int_\Omega \psi_\varepsilon^{(i)} f \, dx + \tilde{u}_\varepsilon, \quad (2.14)$$

где $\lambda_\varepsilon^{(i)}$ – собственные значения задачи (1.1), (1.2), взятые с учетом кратности, $\psi_\varepsilon^{(i)}$ – соответствующие ортонормированные в $L_2(\Omega)$ собственные функции, $\tilde{u}_\varepsilon$ – голоморфная по λ функция, ортогональная всем $\psi_\varepsilon^{(i)}$ в $L_2(\Omega)$. Справедлива равномерная по ε , λ и μ оценка

$$\|\tilde{u}_\varepsilon\|_1 \leq C \|f\|. \quad (2.15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При доказательстве теоремы 1.1 было отмечено, что u_ε – голоморфная по λ функция, имеющая простые полюсы в точках $\lambda_\varepsilon^{(i)}$, вычеты в которых суть соответствующие собственные функции. Поэтому справедливо представление

$$u_\varepsilon = \sum_{i=1}^p a_i \frac{\psi_\varepsilon^{(i)}}{\lambda_\varepsilon^{(i)} - \lambda} + \tilde{u}_\varepsilon, \quad (2.16)$$

где $\tilde{u}_\varepsilon$ голоморфна по λ . Умножим (2.1) на $\psi_\varepsilon^{(i)}$ и проинтегрируем по Ω . Тогда получим равенство

$$(\lambda_\varepsilon^{(i)} - \lambda)(\psi_\varepsilon^{(i)}, u_\varepsilon) = (f, \psi_\varepsilon^{(i)}),$$

подставляя в которое (2.16), выводим соотношения

$$a_i = \int_\Omega \psi_\varepsilon^{(i)} f \, dx, \quad (\tilde{u}_\varepsilon, \psi_\varepsilon^{(i)}) = 0,$$

что доказывает (2.14). Докажем неравенство (2.15). Нетрудно видеть, что $\tilde{u}_\varepsilon$ есть решение задачи (2.1) с правой частью $(f - \sum_{i=1}^p \psi_\varepsilon^{(i)}(f, \psi_\varepsilon^{(i)}))$, голоморфное по $\lambda \in \partial \mathcal{B}_\delta$. Поэтому для $\lambda \in \partial \mathcal{B}_\delta$ верна равномерная по ε, μ и λ оценка

$$\|\tilde{u}_\varepsilon\| \leq C \left\| f - \sum_{i=1}^p \psi_\varepsilon^{(i)}(f, \psi_\varepsilon^{(i)}) \right\| \leq C \|f\|,$$

которая в силу принципа максимума для голоморфных функций выполняется и при $\lambda \in \mathcal{B}_\delta$. Лемма доказана.

§ 3. Формальное построение асимптотик в случае, когда ω – единичный круг, $f \equiv 1, n = 0$

В настоящем параграфе мы формально построим асимптотики собственных значений и собственных функций задачи (1.1), (1.2) в случае, когда Ω – круговой цилиндр, $f \equiv 1, n = 0$. Мы также докажем, что построенные асимптотические ряды являются формальным асимптотическим решением возмущенной задачи. Обоснование формальных асимптотик (т.е. доказательство, что они действительно являются асимптотиками собственных значений и функций возмущенной задачи) будет проведено в § 5.

Перейдем к построению асимптотик. Асимптотику собственного значения будем искать в виде ряда (1.5). Для построения асимптотики соответствующей собственной функции мы применяем комбинацию метода согласования асимптотических разложений, метода составных разложений и метода многих масштабов. Использование метода составных разложений позволяет добиться выполнения однородного граничного условия Неймана на Γ_ε , а применение метода согласования асимптотических разложений приводит к требуемому граничному условию на γ_ε . Конкретный вид указанной комбинации будет ясен из приведенного ниже построения.

Далее нашей целью будет определение коэффициентов асимптотик собственного значения и соответствующей собственной функции.

Внешнее разложение для асимптотики собственной функции определим следующим образом:

$$\psi_\varepsilon^{\text{ex}}(x) = J_0(\sqrt{\lambda_\varepsilon - M^2} r) \phi^+(M x_3).$$

Легко видеть, что для любого λ_ε функция $\psi_\varepsilon^{\text{ex}}$ является решением уравнением (1.1) и удовлетворяет граничным условиям на D_1, D_2 из (1.2), но не удовлетворяет требуемым граничным условиям на γ_ε и Γ_ε ни при каком значении λ_ε . Чтобы добиться выполнения однородного граничного условия Неймана на Γ_ε , мы применяем метод составных разложений и строим пограничный слой в окрестности боковой поверхности Σ . Пограничный слой строим в виде функции $\psi_\varepsilon^{\text{bl}}(\xi, x_3)$, имеющей асимптотику

$$\begin{aligned} \psi_\varepsilon^{\text{bl}}(\xi, x_3) &= \phi^+(M x_3) \Psi_\varepsilon^{\text{bl},+}(\xi) + \phi^-(M x_3) \Psi_\varepsilon^{\text{bl},-}(\xi), \\ \Psi_\varepsilon^{\text{bl},+}(\xi) &= \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i v_i^+(\xi, \mu), \quad \Psi_\varepsilon^{\text{bl},-}(\xi) = \varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i v_i^-(\xi, \mu). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь $\xi = (\xi_1, \xi_2) = (x_3 \varepsilon^{-1} - \pi/2, (1-r)\varepsilon^{-1})$ – “растянутые” переменные, $v_i^\pm$ – некоторые функции, которые будут определены в дальнейшем. Согласно методу составных разложений функции $v_i^\pm$ будем искать экспоненциально убывающими при $\xi_2 \rightarrow +\infty$. Конструкция (3.1) также предполагает использование метода многих масштабов: x_3 – аналог медленного времени. Определим теперь функции $v_i^\pm$. Следуя выбранным методам, потребуем, чтобы сумма $\psi_\varepsilon^{\text{ex}}$ и $\psi_\varepsilon^{\text{bl}}$ удовлетворяла однородному граничному условию Неймана на $\Sigma_\varepsilon = \Sigma \setminus \{(r, \theta, x_3) : r = 1, x_3 = \varepsilon\pi/2 + \pi k, k = \overline{0, N-1}\}$:

$$\sqrt{\lambda_\varepsilon - M^2} J'_0(\sqrt{\lambda_\varepsilon - M^2}) \phi^+(Mx_3) - \varepsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \psi_\varepsilon^{\text{bl}}(\xi, x_3) = 0, \quad x \in \Sigma_\varepsilon. \quad (3.2)$$

Подставим (1.5) в (3.2), разложим в ряд по ε и соберем коэффициенты при одинаковых степенях ε отдельно для $\phi^+(Mx_3)$ и $\phi^-(Mx_3)$. Тогда получим граничные условия для функций $v_i^\pm$

$$\frac{\partial v_i^+}{\partial \xi_2} = \alpha_i, \quad \frac{\partial v_i^-}{\partial \xi_2} = 0, \quad \xi \in \Gamma^0, \quad (3.3)$$

$$\alpha_1 = \kappa J'_0(\kappa), \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_i = -\frac{J_0(\kappa)}{2} \Lambda_{i-1} + g_i, \quad i \geq 3, \quad g_3 = 0, \quad (3.4)$$

где $\Gamma^0 = \{\xi : \xi_2 = 0, \xi_1 \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}\}$, $g_i = g_i(\Lambda_0, \dots, \Lambda_{i-3})$ – некоторые явно вычисляемые голоморфные функции, причем $g_i(\Lambda_0, 0, \dots, 0) = 0$, $\kappa = \kappa(\mu) = \sqrt{\Lambda_0(\mu) - M^2}$. Подставляя (1.5) и (3.1) в (1.1), переходя к переменным ξ , разлагая в ряд по степеням ε и собирая коэффициенты при одинаковых степенях ε отдельно для $\phi^+(Mx_3)$ и $\phi^-(Mx_3)$, приходим к уравнениям для $v_i^\pm$

$$\begin{aligned} \Delta_\xi v_i^+ &= \sum_{j=0}^{i-2} \left(\xi_2^j \frac{\partial}{\partial \xi_2} - \Lambda_{j-1} \right) v_{i-j-1}^+ + M^2 v_{i-2}^+ - 2M \frac{\partial v_{i-2}^-}{\partial \xi_1}, \quad \xi_2 > 0, \\ \Delta_\xi v_i^- &= \sum_{j=0}^{i-2} \left(\xi_2^j \frac{\partial}{\partial \xi_2} - \Lambda_{j-1} \right) v_{i-j-1}^- + M^2 v_{i-2}^- + 2M \frac{\partial v_{i-1}^+}{\partial \xi_1}, \quad \xi_2 > 0, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где $\Lambda_{-1} = \Lambda_1 = 0$, $v_{-1}^+ = v_0^+ = v_0^- = 0$. Далее мы получим решения краевых задач (3.3), (3.4) в явном виде. Предварительно докажем ряд вспомогательных утверждений.

Обозначим посредством $\mathcal{V}^+$ пространство π -периодических по ξ_1 функций из $C^\infty(\{\xi : \xi_2 \geq 0\} \setminus \Gamma^0)$, равномерно экспоненциально убывающих вместе со всеми своими производными при $\xi_2 \rightarrow +\infty$. Также введем в рассмотрение подпространства $\mathcal{V}^+$ и $\mathcal{V}^-$ пространства $\mathcal{V}$, состоящие, соответственно, из четных и нечетных по ξ_1 функций.

Пусть функция $u \in \mathcal{V}$. Рассмотрим операторы

$$\mathcal{A}_0[u](\xi) = u(\xi), \quad \mathcal{A}_k[u](\xi) = \int_{\xi_2}^{+\infty} t \mathcal{A}_{k-1}[u](\xi_1, t) dt.$$

Очевидно, что

$$\partial^\beta \int_{\xi_2}^{+\infty} u(\xi_1, t) dt = \int_{\xi_2}^{+\infty} \partial^\beta u(\xi_1, t) dt, \quad (3.6)$$

$\beta \in \mathbb{Z}_+^2$ – произвольный мультииндекс. Ясно, что $\mathcal{A}_k: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$, $\mathcal{A}_k: \mathcal{V}^\pm \rightarrow \mathcal{V}^\pm$.

ЛЕММА 3.1. Для любого $j \geq 0$ выполняются равенства

$$\Delta_\xi \mathcal{A}_j[u] = -2j \mathcal{A}_{j-1}[u] + \mathcal{A}_j[\Delta_\xi u], \quad \xi_2 > 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (3.6) следует, что при $\xi_2 > 0$

$$\Delta_\xi \mathcal{A}_0[u] = \Delta_\xi u, \quad \Delta_\xi \mathcal{A}_j[u] = \int_{\xi_2}^{+\infty} t \Delta_{(\xi_1, t)} \mathcal{A}_{j-1}[u](\xi_1, t) dt - 2 \mathcal{A}_{j-1}[u].$$

Применяя по индукции данные равенства и используя определение операторов $\mathcal{A}_j$, получаем утверждение леммы.

Пусть $\Pi = \{\xi : |\xi_1| < \pi/2, \xi_2 > 0\}$, (ρ, φ) – полярные координаты, соответствующие переменным ξ .

ЛЕММА 3.2. Пусть $F \in \mathcal{V}^+$ имеет дифференцируемую асимптотику

$$F(\xi) = \alpha \rho^{-1} \sin \varphi + O(\ln \rho), \quad \rho \rightarrow 0,$$

и существует натуральное число k такое, что $\Delta_\xi^k F \equiv 0$, $\xi_2 > 0$. Тогда краевая задача

$$\Delta_\xi v = F, \quad \xi_2 > 0, \quad \frac{\partial v}{\partial \xi_2} = 0, \quad \xi \in \Gamma^0, \quad (3.7)$$

разрешима в классе $H^1(\Pi) \cap \mathcal{V}^+$, ее решение представляется в виде

$$v = - \sum_{j=1}^k \frac{1}{2^j j!} \mathcal{A}_j[\Delta_\xi^{j-1} F] \quad (3.8)$$

и имеет дифференцируемую асимптотику

$$v(\xi) = v(0) - \frac{1}{2} \alpha \left(\xi_1 \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) - \xi_2 \right) + O(\rho^2 \ln \rho), \quad \rho \rightarrow 0. \quad (3.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция $F \in \mathcal{V}^+$, а потому $\Delta_\xi^j F \in \mathcal{V}^+$ для всех j , откуда следует, что каждое слагаемое в (3.8) принадлежит $\mathcal{V}^+$, т.е. $v \in \mathcal{V}^+$.

Проверим, что функция v , определенная согласно (3.8), действительно является решением задачи (3.7). Пусть $\xi \in \Gamma^0$. Тогда

$$\frac{\partial v}{\partial \xi_2} = \sum_{j=1}^k \frac{1}{2^j j!} (\xi_2 \mathcal{A}_{j-1}[\Delta_\xi^{j-1} F])|_{\xi \in \Gamma^0} = 0.$$

Пусть теперь $\xi \in \Pi$. Применяя оператор Лапласа к v и учитывая лемму 2.1 и равенство $\Delta_\xi^k F \equiv 0$, выводим

$$\Delta_\xi v = - \sum_{j=1}^k \frac{1}{2^j j!} \mathcal{A}_j[\Delta_\xi^j F] + \sum_{j=1}^k \frac{2j}{2^j j!} \mathcal{A}_{j-1}[\Delta_\xi^{j-1} F] = F.$$

Докажем асимптотику (3.9). Пусть некоторая функция $U(\xi) \in \mathcal{V}^+$ имеет дифференцируемую асимптотику

$$U(\xi) = O(\rho^{-q} \ln^p \rho), \quad \rho \rightarrow 0, \quad q, p \in \mathbb{Z}_+. \quad (3.10)$$

Обозначим $u(\xi) = \mathcal{A}_1[U](\xi)$. В силу принадлежности $U \in \mathcal{V}^+$ верно представление

$$u(\xi) = \int_{\xi_2}^{\delta} t U(\xi_1, t) dt + \tilde{u}(\xi), \quad \tilde{u} \in C^\infty(\{\xi : \xi_2 \geq 0\}) \cap \mathcal{V}^+, \quad (3.11)$$

где δ — фиксированное, достаточно малое число. Заменяя в (3.11) функцию U на ее асимптотику (3.10) и интегрируя, получаем, что при $\rho \rightarrow 0$ справедливы равенства

$$u(\xi) = O(\ln^{p+1} \rho), \quad q = 2, \quad u(\xi) = O(\rho^{-(q-2)} \ln^p \rho), \quad q > 2. \quad (3.12)$$

Легко видеть, что при $\rho \rightarrow 0$ для $q = 0, 1$ имеют место соотношения

$$\begin{aligned} u(\xi) - u(0) &= \int_{\xi_2}^{\delta} t_2 (U(\xi_1, t_2) - U(0, t_2)) dt_2 - \int_0^{\xi_2} t U(0, t) dt + O(\rho^2) \\ &= \int_0^{\xi_1} \int_{\xi_2}^{\delta} t_2 \frac{\partial}{\partial t_1} U(t_1, t_2) dt_2 dt_1 + O(\rho \ln^{-(q-2)} \rho) \\ &= O(\rho \ln^{-(q-2)} \rho). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Непосредственно проверяется, что

$$\Delta_\xi^j F = O(\rho^{-2j} \ln \rho), \quad \rho \rightarrow 0, \quad j \geq 1. \quad (3.14)$$

Из асимптотики функции F , (3.7), (3.10)–(3.14) и определения операторов $\mathcal{A}_j$ вытекает (3.9). Принимая во внимание (3.9) и принадлежность $u \in \mathcal{V}^+$, заключаем, что $u \in H^1(\Pi) \cap \mathcal{V}^+$.

ЛЕММА 3.3. Пусть $F \in \mathcal{V}^-$ имеет дифференцируемую асимптотику

$$F(\xi) = \alpha \rho^{-1} \cos \varphi + O(\ln \rho), \quad \rho \rightarrow 0,$$

и существует натуральное число k такое, что $\Delta_\xi^k F \equiv 0$, $\xi_2 > 0$. Тогда краевая задача (3.7) разрешима в классе $H^1(\Pi) \cap \mathcal{V}^-$, для ее решения справедливо представление (3.8) и имеет место дифференцируемая асимптотика

$$v(\xi) = \frac{1}{2} \alpha \xi_1 \ln \rho + \tilde{\alpha} \xi_1 + O(\rho^2 \ln \rho), \quad \rho \rightarrow 0,$$

где $\tilde{\alpha}$ — некоторая константа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.3 аналогично доказательству леммы 3.2.

Рассмотрим функцию $X(\xi) = \operatorname{Re} \ln \sin z - \xi_2 + \ln 2$, где $z = \xi_1 + i\xi_2$ — комплексная переменная. Несложно проверить, что $X \in \mathcal{V}^+$ — гармоническая в полуплоскости $\xi_2 > 0$ функция, удовлетворяющая граничному условию

$$\frac{\partial X}{\partial \xi_2} = -1, \quad \xi \in \Gamma^0. \quad (3.15)$$

Справедливо представление

$$X(\xi) = \ln \rho + \ln 2 - \xi_2 + \tilde{X}(\xi), \quad \tilde{X}(\xi) = O(\rho^2), \quad \rho \rightarrow 0, \quad (3.16)$$

где $\tilde{X} \in C^\infty(\{\xi : \xi_2 \geq 0\})$. Пусть F_i^+ и F_i^- — правые части уравнений (3.5).

ЛЕММА 3.4. Для любой последовательности $\{\Lambda_i(\mu)\}_{i=0}^\infty$, $\Lambda_1(\mu) \equiv 0$, существуют решения задач (3.3), (3.5), определяемые формулой (3.8) с $F = F_i^\pm$, $k = k_i^\pm$, где $k_i^\pm$ – некоторые натуральные числа. Для функций $v_i^\pm$ верны представления

$$\begin{aligned} v_i^+(\xi, \mu) &= \tilde{v}_i^+(\xi, \mu) - \alpha_i X(\xi), \quad \tilde{v}_i^+(\xi, \mu) = \sum_{j=1}^{M_i^+} a_{ij}^+(\alpha_1, \Lambda_0, \dots, \Lambda_{i-2}) v_{ij}^+(\xi), \\ v_i^-(\xi, \mu) &= \sum_{j=1}^{M_i^-} a_{ij}^-(\alpha_1, \Lambda_0, \dots, \Lambda_{i-1}) v_{ij}^-(\xi), \end{aligned} \quad (3.17)$$

где $v_{ij}^\pm(\xi) \in H^1(\Pi) \cap \mathcal{V}^\pm$, $M_i^\pm$ – некоторые числа, $a_{ij}^\pm$ – голоморфные функции, $a_{ij}^\pm(0, \Lambda_0, 0, \dots, 0) = 0$. Имеют место равенства

$$M_1^+ = 0, \quad M_2^+ = 1, \quad a_{21}^+ = -\alpha_1, \quad v_{21}^+ = -\frac{1}{2} \mathcal{A}_1 \left[\frac{\partial X}{\partial \xi_2} \right]. \quad (3.18)$$

При $\rho \rightarrow 0$ справедливы асимптотики

$$\begin{aligned} v_i^+(\xi, \mu) &= -\alpha_i (\ln \rho + \ln 2 - \xi_2) + \tilde{v}_i^+(0, \mu) \\ &\quad + \frac{1}{2} \alpha_{i-1} \left(\xi_1 \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) - \xi_2 \right) + O(\rho^2 \ln \rho), \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$v_i^-(\xi, \mu) = -\alpha_i M \xi_1 \ln \rho + \tilde{\alpha}_i \xi_1 + O(\rho^2 \ln \rho), \quad (3.20)$$

где $\tilde{\alpha}_i = \tilde{\alpha}_i(\alpha_1, \Lambda_0, \dots, \Lambda_{i-1})$ – голоморфные функции, $\tilde{\alpha}_i(0, \Lambda_0, 0, \dots, 0) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы для функций v_1^+ , v_2^+ проверяется непосредственными вычислениями с учетом свойств функции X . Несложно видеть, что $F_1^-(\xi, \mu) = -\alpha_1 F_{11}^-(\xi)$, где F_{11}^- удовлетворяет всем условиям леммы 3.3, причем верна асимптотика

$$F_{11}^-(\xi) = 2M\rho^{-1} \cos \varphi + O(\ln \rho), \quad \rho \rightarrow 0,$$

откуда следует утверждение леммы для функции v_1^- . Дальнейшее доказательство проведем по индукции. Пусть лемма выполнена при $i < K$. Тогда в силу индукционного предположения и определения функций $F_i^\pm$ выполнены соотношения

$$F_K^\pm(\xi, \mu) = \sum_{j=1}^{M_K^\pm} a_{Kj}^\pm F_{Kj}^\pm(\xi),$$

где F_{Kj}^+ удовлетворяют всем условиям леммы 3.2, F_{Kj}^- удовлетворяют всем условиям леммы 3.3, а функции $a_{Kj}^\pm$ обладают всеми описанными в утверждении леммы свойствами. Определим функции $v_{Kj}^\pm$ по формуле (3.8) с $F = F_{Kj}^\pm$. Тогда в силу лемм 3.2, 3.3 и граничного условия (3.15) функции $v_K^\pm$ являются решениями задач (3.3), (3.5). Чтобы убедиться, что асимптотики (3.19), (3.20) верны, достаточно заметить, что

$$F_K^\pm = -\alpha_{K-1} \rho^{-1} \phi^\mp(\varphi) + O(\ln \rho), \quad \rho \rightarrow 0,$$

и применить леммы 3.2, 3.3 и соотношения (3.16). Лемма доказана.

Из принадлежности $v_i^\pm \in \mathcal{V}^\pm$ следует

ЛЕММА 3.5. Для функций $v_i^\pm$ справедливы граничные условия

$$\frac{\partial v_i^+}{\partial \xi_2} = 0, \quad v_i^- = 0, \quad \xi_1 = \frac{\pi}{2}(2k+1), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Сумма $\psi_\varepsilon^{\text{ex}}$ и $\psi_\varepsilon^{\text{bl}}$ не удовлетворяет однородному граничному условию Дирихле на γ_ε . Более того, функции $v_i^\pm$ имеют логарифмические особенности в точках $\xi_k = (\pi k, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$. Поэтому в окрестности этих точек введем новые переменные $\zeta^k = (\zeta_1^k, \zeta_2^k) = ((\xi_1 - \pi k)\eta^{-1}, \xi_2\eta^{-1})$, а асимптотику собственной функции будем строить в виде ряда

$$\begin{aligned} \psi_\varepsilon^{\text{in}}(\zeta^k, x_3) &= \phi^+(Mx_3)\Psi_\varepsilon^{\text{in},+}(\zeta^k) + \phi^-(Mx_3)\Psi_\varepsilon^{\text{in},-}(\zeta^k), \\ \Psi_\varepsilon^{\text{in},+}(\zeta) &= \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i (w_{i,0}^+(\zeta, \mu) + \varepsilon \eta w_{i,1}^+(\zeta, \mu)), \quad \Psi_\varepsilon^{\text{in},-}(\zeta) = \varepsilon \eta \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i w_{i,1}^-(\zeta, \mu). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Так как функции $v_i^\pm$ периодичны по ξ_1 , то достаточно провести согласование в окрестности точки $\xi_0 = 0$ и перенести затем полученные результаты на остальные точки ξ_k . Следует также отметить, что коэффициенты $\varepsilon^i \eta w_{i,1}^+$ и $\varepsilon^{i+1} \eta w_{i,1}^-$ для формального построения степенной (по ε) асимптотики не требуются, но они необходимы для строго обоснования асимптотик (см. доказательство теоремы 3.1).

Обозначим $\zeta = \zeta^0 = \xi\eta^{-1}$. Подставим (3.21) и (1.5) в (1.1), (1.2), перейдем к переменным ζ , разложим в ряд по ε и η и соберем коэффициенты при одинаковых степенях ε и η отдельно для $\phi^+(Mx_3)$ и $\phi^-(Mx_3)$. Тогда получим следующие краевые задачи:

$$\Delta_\zeta w_{i,0}^+ = 0, \quad \zeta_2 > 0, \quad w_{i,0}^+ = 0, \quad \zeta \in \gamma^1, \quad \frac{\partial}{\partial \zeta_2} w_{i,0}^+ = 0, \quad \zeta \in \Gamma^1, \quad (3.22)$$

$$\Delta_\zeta w_{i,1}^+ = \frac{\partial w_{i,0}^+}{\partial \zeta_2}, \quad \zeta_2 > 0, \quad w_{i,1}^+ = 0, \quad \zeta \in \gamma^1, \quad \frac{\partial}{\partial \zeta_2} w_{i,1}^+ = 0, \quad \zeta \in \Gamma^1, \quad (3.23)$$

$$\Delta_\zeta w_{i,1}^- = 2M \frac{\partial w_{i,0}^+}{\partial \zeta_1}, \quad \zeta_2 > 0, \quad w_{i,1}^- = 0, \quad \zeta \in \gamma^1, \quad \frac{\partial}{\partial \zeta_2} w_{i,1}^- = 0, \quad \zeta \in \Gamma^1, \quad (3.24)$$

где $\gamma^1 = \{\zeta : |\zeta_1| < 1, \zeta_2 = 0\}$, $\Gamma^1 = O\zeta_1 \setminus \bar{\gamma}^1$. Пусть

$$\lambda_{\varepsilon,K} = \Lambda_0(\mu) + \sum_{i=2}^K \varepsilon^i \Lambda_i(\mu), \quad \psi_{\varepsilon,K}^{\text{ex}}(x) = J_0\left(\sqrt{\lambda_{\varepsilon,K} - M^2} r\right) \phi^+(Mx_3),$$

$$\Psi_{\varepsilon,K}(x) = \psi_{\varepsilon,K}^{\text{ex}}(x) + \chi(1-r)\psi_{\varepsilon,K}^{\text{bl}}(\xi, x_3),$$

$$\psi_{\varepsilon,K}^{\text{bl}}(\xi, x_3) = \phi^+(Mx_3) \sum_{i=1}^{K+1} \varepsilon^i v_i^+(\xi, \mu) + \phi^-(Mx_3) \varepsilon \sum_{i=1}^K \varepsilon^i v_i^-(\xi, \mu),$$

где $\chi(t)$ – бесконечно дифференцируемая срезающая функция, равная единице при $t < 1/3$ и нулю при $t > 1/2$. Легко видеть, что при $\xi_2 \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \psi_{\varepsilon,K}^{\text{ex}}(x) &= \phi^+(Mx_3) \left(\sum_{i=0}^K \varepsilon^i f_i(\Lambda_0, \dots, \Lambda_i) + \varepsilon^{K+1} f_\varepsilon^{(K)}(\Lambda_0, \dots, \Lambda_K) \right. \\ &\quad \left. - \varepsilon \xi_2 \sqrt{\lambda_{\varepsilon,K} - M^2} J_0' \left(\sqrt{\lambda_{\varepsilon,K} - M^2} \right) \right) + O(\varepsilon^2 \xi_2^2), \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$f_0 = J_0(\kappa), \quad f_1 = 0, \quad f_i = \frac{J_0'(\kappa)}{2\kappa} \Lambda_i + h_i, \quad i \geq 2, \quad h_2 = 0, \quad (3.26)$$

где $h_i = h_i(\Lambda_0, \dots, \Lambda_{i-2})$ – некоторые, вполне определенные голоморфные функции, $h_i(\Lambda_0, 0, \dots, 0) = 0$, $f_\varepsilon^{(K)}$ – ограниченная, голоморфная по $\Lambda_0, \dots, \Lambda_K$ функция, $f_\varepsilon^{(K)}(\Lambda_0, 0, \dots, 0) = 0$. Пусть (ϱ, ϑ) – полярные координаты, соответствующие переменным ζ . Переписывая асимптотики (3.19), (3.20) в переменных ζ и учитывая равенство $\ln \eta = -1/(\varepsilon(A + \mu))$, при $\eta^{1/2} < \rho < 2\eta^{1/2}$ (т.е. при $\eta^{-1/2} < \varrho < 2\eta^{-1/2}$) имеем равенства

$$\begin{aligned} v_i^+ &= \frac{1}{\varepsilon} \frac{\alpha_i}{A + \mu} - \alpha_i(\ln \varrho + \ln 2) + \alpha_i \xi_2 + \tilde{v}_i^+(0, \mu) \\ &\quad + \frac{1}{2} \eta \alpha_{i-1} (\zeta_1 (\vartheta - \pi/2) - \zeta_2) + O(\eta^2 \varrho^2 \ln \varrho), \\ v_i^- &= \frac{\eta}{\varepsilon} \frac{M \alpha_i}{A + \mu} \zeta_1 - \eta M \alpha_i \zeta_1 \ln \varrho + \eta \tilde{\alpha}_i \zeta_1 + O(\eta^2 \varrho^2 \ln \varrho). \end{aligned}$$

Отсюда и из (3.25), (3.26) следует, что при $\eta^{1/2} < \rho < 2\eta^{1/2}$

$$\begin{aligned} \Psi_{\varepsilon, K}(x) &= \phi^+(Mx_3) \left(\sum_{i=0}^K \varepsilon^i W_{i,0}^+(\zeta, \mu) + \varepsilon \eta \sum_{i=0}^K \varepsilon^i W_{i,1}^+(\zeta, \mu) \right) \\ &\quad + \varepsilon \eta \phi^-(Mx_3) \sum_{i=0}^K \varepsilon^i W_{i,1}^-(\zeta, \mu) + \phi^+(Mx_3) W_\varepsilon^{(K)}(\zeta, \mu) \\ &\quad + \varepsilon^{K+1} \eta \phi^-(Mx_3) W^{(K)}(\zeta, \mu) + O(\eta^2 \varrho^2 \ln \varrho), \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$W_{i,0}^+(\zeta, \mu) = -\alpha_i(\ln \varrho + \ln 2) + \frac{\alpha_{i+1}}{A + \mu} + \tilde{v}_i^+(0, \mu) + f_i, \quad (3.28)$$

$$W_{i,1}^+(\zeta, \mu) = \frac{1}{2} \alpha_i (\zeta_1 (\vartheta - \pi/2) - \zeta_2), \quad (3.29)$$

$$W_{i,1}^-(\zeta, \mu) = -\alpha_i M \zeta_1 \ln \varrho + \left(\frac{M \alpha_{i+1}}{A + \mu} + \tilde{\alpha}_i \right) \zeta_1, \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} W_\varepsilon^{(K)}(\zeta, \mu) &= \varepsilon^{K+1} (-\alpha_{K+1}(\ln \varrho + \ln 2 - \xi_2) + \tilde{v}_{K+1}^+(0, \mu) + f_\varepsilon^{(K)}) \\ &\quad + \varepsilon \mathbf{b}_K(\varepsilon) \xi_2, \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$W^{(K)}(\zeta, \mu) = -\frac{M \alpha_{K+1}}{A + \mu} \zeta_1,$$

$$\mathbf{b}_K(\varepsilon) = \sum_{i=1}^K \varepsilon^{i-1} \alpha_i - \sqrt{\lambda_{\varepsilon, K} - M^2} J'_0 \left(\sqrt{\lambda_{\varepsilon, K} - M^2} \right),$$

где $\tilde{v}_0^+ = 0$, $\alpha_0 = \tilde{\alpha}_0 = 0$. Заметим, что в силу определения функций α_i величина $\mathbf{b}_K(\varepsilon)$ мала, а именно, $\mathbf{b}_K(\varepsilon) = O(\varepsilon^K)$. Следуя методу согласования асимптотических разложений, мы должны построить решения задач (3.22)–(3.24), удовлетворяющие асимптотикам

$$w_{i,j}^\pm = W_{i,j}^\pm + o(\varrho^j), \quad \varrho \rightarrow \infty. \quad (3.32)$$

Положим $Y(\zeta) = \operatorname{Re} \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$, где $y = \zeta_1 + i\zeta_2$ – комплексная переменная. Нетрудно проверить, что $Y(\zeta)$ является решением задачи (3.22), имеющим асимптотику

$$Y(\zeta) = \ln \varrho + \ln 2 + O(\varrho^{-2}), \quad \varrho \rightarrow \infty. \quad (3.33)$$

Тогда из (3.28), (3.32) и (3.33) следует

$$w_{i,0}^+ = -\alpha_i Y. \quad (3.34)$$

Сравнивая асимптотику построенной функции $w_{i,0}^+$, вытекающую из (3.33), (3.34), с равенствами (3.28), (3.32), получаем

$$\frac{\alpha_{i+1}}{A + \mu} + \tilde{v}_i^+(0, \mu) + f_i = 0. \quad (3.35)$$

Полагая $i = 0$ в (3.35) и учитывая (3.4) и (3.26), приходим к уравнению (1.6) для $n = 0$. Условие $\kappa(0) = \sqrt{\varkappa}$ — очевидно, так как $\lambda_\varepsilon \rightarrow \lambda_0$, т.е. $\kappa(\mu) \rightarrow \sqrt{\varkappa}$. Если $\varkappa > 0$, то функция $\kappa(\mu)$ голоморфна по μ в силу теоремы о неявной функции. Если $\varkappa = 0$, то, как нетрудно видеть, $A = 0$, и уравнение $\kappa(\mu)J'_0(\kappa) + \mu J_0(\kappa) = 0$ имеет корень вида $\kappa(\mu) = \mu^{1/2}\kappa_1(\mu)$, где $\kappa_1(\mu)$ — голоморфная функция, $\kappa_1(0) = 1$. Отсюда выводим, что, во-первых, $\kappa^2(\mu)$ — голоморфная функция и, во-вторых, при $\varkappa = 0$ функция $\kappa^2(\mu)$ имеет простой нуль в точке $\mu = 0$. Таким образом, $\Lambda_0(\mu) = \kappa^2(\mu) + M^2$ — голоморфная функция по μ .

Равенство (3.35) выполнено при $i = 1$ в силу формул (3.4), (3.18) и (3.26). Пусть теперь $i \geq 2$. Подставим формулы (3.4) и (3.26) для α_{i+1} и f_i в (3.35) и выразим затем из полученного равенства Λ_i . При этом учтем, что ввиду уравнения (1.6) $\kappa J'_0(\kappa) = -(A + \mu)J_0(\kappa)$. В результате имеем

$$\Lambda_i(\mu) = \frac{2\kappa(\mu)^2}{J_0(\kappa(\mu))} \frac{(\tilde{v}_i^+(0, \mu) + \tilde{h}_i(\mu))(A + \mu) + \tilde{g}_{i+1}(\mu)}{\kappa(\mu)^2 + (A + \mu)^2}, \quad (3.36)$$

$$\tilde{h}_i(\mu) = h_i(\Lambda_0(\mu), \dots, \Lambda_{i-2}(\mu)), \quad \tilde{g}_{i+1}(\mu) = g_{i+1}(\Lambda_0(\mu), \dots, \Lambda_{i-2}(\mu)).$$

Из (3.36) легко получить формулу (1.7). Для этого достаточно положить $i = 2$, подставить в (3.36) формулы для $\tilde{v}_2^+(0, \mu)$, h_2 и g_3 (см. (3.4), (3.17), (3.18), (3.26)) и учесть, что $v_{21}^+(0) = -\pi^2/24$.

В силу упомянутых свойств функции $\kappa(\mu)$ и замечания 1.1 дробь

$$\frac{2\kappa(\mu)^2}{J_0(\kappa(\mu))(\kappa^2(\mu) + (A + \mu)^2)}$$

голоморфна при всех возможных значениях $\varkappa$ и A . Следовательно, функция Λ_2 голоморфна по μ . Очевидно, что $\tilde{v}_i^+(0, \mu)$, $\tilde{h}_i(\mu)$, $\tilde{g}_{i+1}(\mu)$ голоморфны по μ , если голоморфны по μ функции $\Lambda_0, \dots, \Lambda_{i-2}$. Применяя этот факт, по индукции несложно доказать голоморфность по μ функций Λ_i . Докажем теперь представления (1.8). Представление для Λ_2 вытекает непосредственно из (1.7). Так как $a_{ij}^+(0, \Lambda_0, 0, \dots, 0) = g_{i+1}(\Lambda_0, 0, \dots, 0) = h_i(\Lambda_0, 0, \dots, 0) = 0$ и все эти функции голоморфны, то из справедливости представлений (1.8) для функций $\Lambda_2, \dots, \Lambda_{i-2}$ вытекают равенства $\tilde{h}_i(\mu) = \mu^2 \hat{h}_i(\mu)$, $\tilde{g}_{i+1}(\mu) = \mu^2 \hat{g}_{i+1}(\mu)$, $\tilde{v}_i^+(0, \mu) = \mu \hat{v}_i(\mu)$, где $\hat{h}_i$, $\hat{g}_{i+1}$, $\hat{v}_i$ голоморфно зависят от μ . Учитывая этот факт и равенства (3.36), по индукции несложно доказать соотношения (1.8).

Построим функции $w_{i,1}^\pm$. Из задачи (3.24), асимптотики (3.30), (3.32) и определения функции $w_{i,0}^+$ вытекает, что

$$w_{i,1}^-(\zeta, \mu) = -\alpha_i M \zeta_1 Y(\zeta) + \left(\frac{\alpha_{i+1}}{A + \mu} M + \tilde{\alpha}_i + \alpha_i M \ln 2 \right) Y_1(\zeta), \quad (3.37)$$

где $Y_1(\zeta) = \operatorname{Re} \sqrt{y^2 - 1}$ — решение задачи (3.22), имеющее асимптотику

$$Y_1(\zeta) = \zeta_1 + O(\varrho^{-1}), \quad \varrho \rightarrow \infty. \quad (3.38)$$

ЛЕММА 3.6. *Существует решение задачи (3.23), принадлежащее пространству*

$$\mathcal{W} = C^\infty(\{\zeta : \zeta_2 \geq 0\} \setminus \{\zeta : \zeta = (\pm 1, 0)\}) \cap C(\{\zeta : \zeta_2 \geq 0\}) \cap H^1(\{\zeta : \varrho < 2, \zeta_2 > 0\})$$

и имеющее асимптотику

$$w_{i,1}^+ = W_{i,1}^+ + O(1), \quad \varrho \rightarrow \infty. \quad (3.39)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим решение задачи

$$\Delta_\zeta U = \frac{\partial}{\partial \zeta_2} Y, \quad \zeta_2 > 0, \quad U = 0, \quad \zeta \in \gamma^1, \quad \frac{\partial U}{\partial \zeta_2} = 0, \quad \zeta \in \Gamma^1. \quad (3.40)$$

Рассмотрим функцию

$$\tilde{U}(\zeta) = U(\zeta) + \frac{1}{2} \left(\zeta_1 \operatorname{Im} \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}) - \operatorname{Im} \sqrt{y^2 - 1} - \frac{\pi}{2} Y_1(\zeta) \right).$$

Несложно проверить, что $\tilde{U}$ является решением задачи

$$\begin{aligned} \Delta_\zeta \tilde{U} &= 0, \quad \zeta_2 > 0, \quad \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \zeta_2} = 0, \quad \zeta \in \Gamma^1, \\ \tilde{U} &= \frac{1}{2} \left(\operatorname{Im} \ln \left(\zeta_1 + i \sqrt{1 - \zeta_1^2} \right) - \sqrt{1 - \zeta_1^2} \right), \quad \zeta \in \gamma^1. \end{aligned}$$

Теперь сделаем замену комплексной переменной: $\tilde{y} = \sqrt{y^2 - 1} - y$, $y = -(\tilde{y} + \tilde{y}^{-1})/2$, $\tilde{y} = \tilde{y}_1 + i\tilde{y}_2$. В новых переменных задача для $\tilde{U}$ примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \Delta_{(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)} \tilde{U} &= 0, \quad \tilde{y} \in D_+, \\ \tilde{U} &= -\frac{1}{2} ((\pi - \tilde{\vartheta}) \cos \tilde{\vartheta} + \sin \tilde{\vartheta}), \quad \tilde{y} \in \tilde{\gamma}, \quad \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{y}_2} = 0, \quad \tilde{y} \in \tilde{\Gamma}, \end{aligned}$$

где $D_+ = \{(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2) : |\tilde{y}| < 1, \tilde{y}_2 > 0\}$, $\tilde{\vartheta} = \arg \tilde{y}$, $\tilde{\gamma} = \{(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2) : |\tilde{y}| = 1, \tilde{y}_2 > 0\}$, $\tilde{\Gamma} = \{(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2) : |\tilde{y}_1| < 1, \tilde{y}_2 = 0\}$. Разделяя переменные, получаем, что функция $\tilde{U}$ имеет вид

$$\tilde{U}(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2) = -\left(\frac{2}{\pi} + \frac{\pi}{4} \tilde{y}_1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(4j^2 - 1)^2} \operatorname{Re} \tilde{y}^{2j} \right).$$

Очевидно, что $\tilde{U} \in C^\infty(D_+) \cap C^2(\overline{D}_+)$. Возвращаясь к переменным y , заключаем, что $\tilde{U} \in \mathcal{W}$, $\tilde{U} = O(1)$, $\varrho \rightarrow \infty$. Выражая U через $\tilde{U}$, приходим к решению задачи (3.40) с асимптотикой

$$U(\zeta) = -\frac{1}{2} \left(\zeta_1 \left(\vartheta - \frac{\pi}{2} \right) - \zeta_2 \right) + O(1), \quad \varrho \rightarrow \infty,$$

откуда, принимая во внимание (3.23), (3.29), (3.32)–(3.34), имеем $w_{i,1}^+ = -\alpha_i U$. Лемма доказана.

Обозначим

$$\begin{aligned}
\psi_{\varepsilon,K}(x) &= \Psi_{\varepsilon,K}(x)\chi_{\varepsilon}(x) + \sum_{j=0}^{N-1} \chi(|\zeta^j|\eta^{1/2})\psi_{\varepsilon,K}^{\text{in}}(\zeta^j, x_3), \\
\tilde{\psi}_{\varepsilon,K}(x) &= \psi_{\varepsilon,K}(x) - R_{\varepsilon,K}(x), \quad \chi_{\varepsilon}(x) = 1 - \sum_{j=0}^{N-1} \chi(|\zeta^j|\eta^{1/2}), \\
\psi_{\varepsilon,K}^{\text{in}}(\zeta, x_3) &= \phi^+(Mx_3)\Psi_{\varepsilon,K}^{\text{in},+}(\zeta) + \phi^-(Mx_3)\Psi_{\varepsilon,K}^{\text{in},-}(\zeta), \\
\Psi_{\varepsilon,K}^{\text{in},+}(\zeta) &= \sum_{i=1}^K \varepsilon^i (w_{i,0}^+(\zeta, \mu) + \varepsilon \eta w_{i,1}^+(\zeta, \mu)), \quad \Psi_{\varepsilon,K}^{\text{in},-}(\zeta) = \varepsilon \eta \sum_{i=1}^K \varepsilon^i w_{i,1}^-(\zeta, \mu), \\
R_{\varepsilon,K}(x) &= \phi^+(Mx_3)\chi_{\varepsilon}(x) \left(\chi(1-r)(\mathbf{b}_K(\varepsilon)(1-r) - \varepsilon^{K+1}\alpha_{K+1}X(\xi)) \right. \\
&\quad \left. + \varepsilon^K \left(\varepsilon(f_{\varepsilon}^{(K)} + \tilde{v}_{K+1}^+(0, \mu)) - \frac{\alpha_{K+1}}{A+\mu} \right) \right) \\
&\quad + \varepsilon^{K+1} \eta \phi^-(Mx_3) \frac{M\alpha_{K+1}}{A+\mu} \sum_{j=0}^{N-1} \chi(|\zeta^j|\eta^{1/2}) Y_1(\zeta).
\end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 3.1. При $\varepsilon \rightarrow 0$ функции $\psi_{\varepsilon,K}$ и $\tilde{\psi}_{\varepsilon,K} \in H^1(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ сходятся к $J_0(\sqrt{\lambda_0 - M^2}r)\phi^+(Mx_3)$ в $L_2(\Omega)$, $\lambda_{\varepsilon,K}$ сходится к λ_0 , $\|R_{\varepsilon,K}\| = O(\varepsilon^K(A+\mu))$. Функции $\tilde{\psi}_{\varepsilon,K}$ и $\lambda_{\varepsilon,K}$ являются решениями задачи (2.1) с $u_{\varepsilon} = \tilde{\psi}_{\varepsilon,K}$, $\lambda = \lambda_{\varepsilon,K}$, $f = f_{\varepsilon,K}$, где $\|f_{\varepsilon,K}\| = O(\varepsilon^K(A+\mu))$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Выражения вида $O(\varepsilon^p(A+\mu))$ в утверждении теоремы и всюду ниже следует интерпретировать следующим образом. Для $A > 0$ это выражение означает $O(\varepsilon^p)$, для $A = 0$ — $O(\varepsilon^p\mu)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждаемая гладкость функций $\psi_{\varepsilon,K}$ и $\tilde{\psi}_{\varepsilon,K}$ следует непосредственно из определения этих функций. Сходимости $\psi_{\varepsilon,K}$, $\tilde{\psi}_{\varepsilon,K}$, $\lambda_{\varepsilon,K}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ также очевидны. В силу определения и свойств величин α_i , определения $\mathbf{b}_K(\varepsilon)$ и функции $R_{\varepsilon,K}$ имеем $\|R_{\varepsilon,K}\| = O(\varepsilon^K(A+\mu))$.

Функция χ_{ε} обращается в нуль в малой окрестности множества γ_{ε} , а функции $w_{i,j}^{\pm}$, Y , Y_1 равны нулю на γ^1 . Поэтому граничное условие на γ_{ε} для функции $\tilde{\psi}_{\varepsilon,K}$ выполнено. Прямыми вычислениями проверяем, что при $x \in \Gamma_{\varepsilon}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r} \tilde{\psi}_{\varepsilon,K}(x) &= \chi_{\varepsilon}(x) \frac{\partial}{\partial r} \Psi_{\varepsilon,K}(x) - \frac{\partial}{\partial r} R_{\varepsilon,K}(x) \\
&= \phi^+(Mx_3)\chi_{\varepsilon}(x) \left(\sqrt{\lambda_{\varepsilon,K}} J_0'(\sqrt{\lambda_{\varepsilon,K}}) - \sum_{i=1}^{K+1} \varepsilon^{i-1} \frac{\partial v_i}{\partial \xi_2} \Big|_{\xi \in \Gamma^0} \right) \\
&\quad + \phi^+(Mx_3)\chi_{\varepsilon}(x) (\varepsilon^K \alpha_{K+1} + \mathbf{b}_K(\varepsilon)) = 0.
\end{aligned}$$

Граничные условия на D_1 и D_2 для $\tilde{\psi}_{\varepsilon,K}$ вытекают из определения этой функции и леммы 3.5. Подействуем оператором $-(\Delta + \lambda_{\varepsilon,K})$ на $\tilde{\psi}_{\varepsilon,K}$. Тогда получим

$$f_{\varepsilon,K} = - \sum_{i=1}^5 f_{\varepsilon,K}^{(i)},$$

где

$$\begin{aligned}
f_{\varepsilon,K}^{(1)}(x) &= -\chi_\varepsilon(x)(\Delta + \lambda_{\varepsilon,K}) \left(\phi^+(Mx_3) \left(b_K(\varepsilon)(1-r)\chi(1-r) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \varepsilon^K \left(\varepsilon(f_\varepsilon^{(K)} + \tilde{v}_{K+1}^+(0, \mu)) - \frac{\alpha_{K+1}}{A+\mu} \right) \right) \right), \\
f_{\varepsilon,K}^{(2)}(x) &= \chi(1-r)\chi_\varepsilon(x)(\Delta + \lambda_{\varepsilon,K})\tilde{\psi}_{\varepsilon,K}^{\text{bl}}(\xi, x_3), \\
f_{\varepsilon,K}^{(3)}(x) &= \tilde{\psi}_{\varepsilon,K}^{\text{bl}}(\xi, x_3)\Delta\chi(1-r) + 2(\nabla_x\chi(1-r), \nabla_x\tilde{\psi}_{\varepsilon,K}^{\text{bl}}(\xi, x_3)), \\
f_{\varepsilon,K}^{(4)}(x) &= \sum_{j=0}^{N-1} \chi(|\zeta^j|\eta^{1/2})(\Delta + \lambda_{\varepsilon,K})\tilde{\psi}_{\varepsilon,K}^{\text{in}}(\zeta^j, x_3), \\
f_{\varepsilon,K}^{(5)}(x) &= \sum_{j=0}^{N-1} \left(\psi_{\varepsilon,K}^{\text{mat}}(\zeta^j, \xi, x_3)\Delta\chi(|\zeta^j|\eta^{1/2}) \right. \\
&\quad \left. + 2(\nabla_x\chi(|\zeta^j|\eta^{1/2}), \nabla_x\psi_{\varepsilon,K}^{\text{mat}}(\zeta^j, \xi, x_3)) \right), \\
\tilde{\psi}_{\varepsilon,K}^{\text{bl}}(\xi, x_3) &= \psi_{\varepsilon,K}^{\text{bl}}(\xi, x_3) + \varepsilon^{K+1}\alpha_{K+1}X(\xi)\phi^+(Mx_3), \\
\tilde{\psi}_{\varepsilon,K}^{\text{in}}(\zeta, x_3) &= \psi_{\varepsilon,K}^{\text{in}}(\zeta, x_3) - \varepsilon^{K+1}\eta\phi^-(Mx_3)\frac{M\alpha_{K+1}}{A+\mu}Y_1(\zeta), \\
\psi_{\varepsilon,K}^{\text{mat}}(\zeta, \xi, x_3) &= \tilde{\psi}_{\varepsilon,K}^{\text{in}}(\zeta, x) - \psi_{\varepsilon,K}^{\text{ex}}(x) - \tilde{\psi}_{\varepsilon,K}^{\text{bl}}(\xi, x_3) \\
&\quad + \phi^+(Mx_3) \left(\varepsilon b_K(\varepsilon)\xi_2 + \varepsilon^K \left(\varepsilon(f_\varepsilon^{(K)} + \tilde{v}_{K+1}^+(0, \mu)) - \frac{\alpha_{K+1}}{A+\mu} \right) \right).
\end{aligned}$$

Прямыми вычислениями проверяем, что $\|f_{\varepsilon,K}^{(1)}\| = O(\varepsilon^K(A+\mu))$. В силу уравнений (3.5) имеет место оценка $\|f_{\varepsilon,K}^{(2)}\| = O(\varepsilon^{K+1/2}(A+\mu))$. Так как $v_i^\pm \in \mathcal{V}^\pm$, $X \in \mathcal{V}^+$, то, как нетрудно видеть, $\|f_{\varepsilon,K}^{(3)}\| = O(e^{-1/\varepsilon^\delta}(A+\mu))$, где $\delta > 0$ – некоторое число. Из задач (3.22)–(3.24) и определения функции Y_1 следует, что $\|f_{\varepsilon,K}^{(4)}\| = O(\eta^{1/2} \ln \eta)$. Ввиду проведенного согласования, асимптотик (3.19), (3.20), равенств (3.27)–(3.31), (3.33)–(3.35), (3.37)–(3.39) получаем, что $\|f_{\varepsilon,K}^{(5)}\| = O(\eta^{1/5})$. Легко убедиться, что без введения функций $w_{i,1}^\pm$ нельзя добиться последних двух оценок для функций $f_{\varepsilon,K}^{(4)}$ и $f_{\varepsilon,K}^{(5)}$, и это единственная причина появления этих функций. Собирая теперь оценки для $\|f_{\varepsilon,K}^{(i)}\|$, приходим к утверждению теоремы.

§ 4. Формальное построение асимптотик в случае, когда ω – единичный круг, $f \equiv 1$, $n > 0$

В настоящем параграфе будут формально построены асимптотики собственных значений и собственных функций задачи (1.1), (1.2) в случае, когда Ω – круговой цилиндр, $f \equiv 1$, $n > 0$, и будет доказано, что эти асимптотики являются формальным асимптотическим решением. Обоснование построенных формальных асимптотических рядов будет проведено в следующем параграфе.

Схема построения асимптотик в целом повторяет рассуждения предыдущего параграфа. Как и раньше, мы используем метод составных разложений, чтобы до-

биться выполнения однородного граничного условия Неймана на Γ_ε . Метод согласования асимптотических разложений применяется с целью удовлетворения однородному граничному условию Дирихле на γ_ε . Как и в предыдущем параграфе, цель настоящего параграфа – определить коэффициенты асимптотик собственного значения и соответствующих собственных функций.

Перейдем к построению асимптотик. Асимптотику собственного значения будем строить в виде (1.5). Внешнее разложение определим следующим образом:

$$\psi_\varepsilon^{\text{ex},\pm}(x) = J_n(\sqrt{\lambda_\varepsilon - M^2} r) \phi^\pm(Mx_3) \phi^\pm(n\theta).$$

Для любого λ_ε функции $\psi_\varepsilon^{\text{ex},\pm}$ являются решениями уравнения (1.1) и удовлетворяют граничным условиям на D_1 и D_2 , но не удовлетворяют граничным условиям на γ_ε и Γ_ε . Чтобы добиться однородного граничного условия Неймана на Γ_ε , мы применяем метод составных разложений и строим пограничные слои в виде функций $\psi_\varepsilon^{\text{bl},\pm}(\xi, x_3)$ с асимптотиками

$$\begin{aligned} \psi_\varepsilon^{\text{bl},\pm}(\xi, x_3, \theta) &= (\phi^+(Mx_3) \Psi_\varepsilon^{\text{bl},+}(\xi) + \phi^-(Mx_3) \Psi_\varepsilon^{\text{bl},-}(\xi)) \phi^\pm(n\theta), \\ \Psi_\varepsilon^{\text{bl},+}(\xi) &= \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i v_i^+(\xi, \mu), \quad \Psi_\varepsilon^{\text{bl},-}(\xi) = \varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i v_i^-(\xi, \mu). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Функции $v_i^\pm$ будем строить экспоненциально убывающими при $\xi_2 \rightarrow +\infty$. Задачи для функций $v_i^\pm$ выписываем аналогично § 3. Для этого потребуем, чтобы сумма функций $\psi_\varepsilon^{\text{ex},\pm}$ и $\psi_\varepsilon^{\text{bl},\pm}$ удовлетворяла однородному граничному условию Неймана на Σ_ε , откуда получаем граничные условия

$$\frac{\partial v_i^+}{\partial \xi_2} = \alpha_i, \quad \frac{\partial v_i^-}{\partial \xi_2} = 0, \quad \xi \in \Gamma^0, \quad (4.2)$$

$$\alpha_1 = \kappa J'_n(\kappa), \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_i = \frac{n^2 - \kappa^2}{2\kappa^2} J_n(\kappa) \Lambda_{i-1} + g_i, \quad i \geq 3, \quad g_3 = 0, \quad (4.3)$$

где $g_i = g_i(\Lambda_0, \dots, \Lambda_{i-3})$ – некоторые голоморфные функции, $g_i(\Lambda_0, 0, \dots, 0) = 0$. Уравнения для функций $v_i^\pm$ получаются стандартной подстановкой (1.5), (4.1) в (1.1) и выписыванием коэффициентов при степенях ε отдельно для каждой из функций $\phi^\pm(Mx_3) \phi^\pm(n\theta)$

$$\Delta_\xi v_i^+ = \sum_{j=0}^{i-2} \left(\xi_2^j \frac{\partial}{\partial \xi_2} + n^2 j \xi_2^{j-1} - \Lambda_{j-1} \right) v_{i-j-1}^+ + M^2 v_{i-2}^+ - 2M \frac{\partial v_{i-2}^-}{\partial \xi_1}, \quad \xi_2 > 0, \quad (4.4)$$

$$\Delta_\xi v_i^- = \sum_{j=0}^{i-2} \left(\xi_2^j \frac{\partial}{\partial \xi_2} + n^2 j \xi_2^{j-1} - \Lambda_{j-1} \right) v_{i-j-1}^- + M^2 v_{i-2}^- + 2M \frac{\partial v_i^+}{\partial \xi_1}, \quad \xi_2 > 0.$$

Краевые задачи (4.2), (4.4) легко решаются с помощью лемм 3.2, 3.3. Результаты сформулируем в виде следующей леммы.

ЛЕММА 4.1. *Для любой последовательности $\{\Lambda_i(\mu)\}_{i=0}^\infty$, $\Lambda_1(\mu) \equiv 0$, существуют решения задач (4.2), (4.4), определяемые формулой (3.8) с $F = F_i^\pm$,*

$k = k_i^\pm$, где $F_i^\pm$ – правые части уравнений (4.4), $k = k_i^\pm$ – некоторые натуральные числа. Для функций $v_i^\pm$ верны представления (3.17), где $v_{ij}^\pm \in H^1(\Pi) \cap \mathcal{V}^\pm$, $M_i^\pm$ – некоторые числа, α_i – из (4.3), $a_{ij}^\pm$ – голоморфные функции, $a_{ij}^\pm(0, \Lambda_0, 0, \dots, 0) = 0$. Имеют место равенства (3.18), где α_1 из (4.3). При $\rho \rightarrow 0$ справедливы асимптотики (3.19), (3.20), где α_i из (4.3), $\tilde{\alpha}_i = \tilde{\alpha}_i(\alpha_1, \Lambda_0, \dots, \Lambda_{i-1})$ – голоморфные функции, $\tilde{\alpha}_i(0, \Lambda_0, 0, \dots, 0) = 0$. Для функций $v_i^\pm$ справедливо утверждение леммы 3.5.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательствам лемм 3.4, 3.5.

Сумма функций $\psi_{\varepsilon, K}^{\text{ex}, \pm}$ и $\psi_{\varepsilon, K}^{\text{bl}, \pm}$ не удовлетворяет однородному граничному условию Дирихле на γ_ε , а функции $v_i^\pm$ имеют логарифмические особенности в точках ξ_k . Как и в §3, для построения асимптотик собственных функций в окрестностях точек ξ_k мы используем метод согласования асимптотических разложений. Асимптотики собственных функций в окрестностях этих точек строим в виде ряда

$$\begin{aligned} \psi_\varepsilon^{\text{in}, \pm}(\zeta^k, x_3, \theta) &= (\phi^+(Mx_3)\Psi_\varepsilon^{\text{in}, +}(\zeta^k) + \phi^-(Mx_3)\Psi_\varepsilon^{\text{in}, -}(\zeta^k))\phi^\pm(n\theta), \quad (4.5) \\ \Psi_\varepsilon^{\text{in}, +}(\zeta) &= \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i (w_{i,0}^+(\zeta, \mu) + \varepsilon \eta w_{i,1}^+(\zeta, \mu)), \quad \Psi_\varepsilon^{\text{in}, -}(\zeta) = \varepsilon \eta \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i w_{i,1}^-(\zeta, \mu). \end{aligned}$$

Согласование проводим в окрестности точки $\xi_0 = 0$ и переносим затем полученные результаты в остальные точки ξ_k . Подставляя (1.5) и (4.5) в (1.1), (1.2) и собирая коэффициенты при одинаковых степенях ε и η отдельно для каждой из функций $\phi^\pm(Mx_3)\phi^\pm(n\theta)$, получаем краевые задачи (3.22)–(3.24) для $w_{i,j}^\pm$. Обозначим

$$\begin{aligned} \lambda_{\varepsilon, K} &= \Lambda_0(\mu) + \sum_{i=2}^K \varepsilon^i \Lambda_i(\mu), \quad \psi_{\varepsilon, K}^{\text{ex}, \pm}(x) = J_n(\sqrt{\lambda_{\varepsilon, K} - M^2} r) \phi^\pm(Mx_3) \phi^\pm(n\theta), \\ \Psi_{\varepsilon, K}^\pm(x) &= \psi_{\varepsilon, K}^{\text{ex}, \pm}(x) + \chi(1-r) \psi_{\varepsilon, K}^{\text{bl}, \pm}(\xi, x_3), \\ \psi_{\varepsilon, K}^{\text{bl}, \pm}(\xi, x_3, \theta) &= \left(\phi^\pm(Mx_3) \sum_{i=1}^{K+1} \varepsilon^i v_i^\pm(\xi, \mu) + \phi^\mp(Mx_3) \varepsilon \sum_{i=1}^K \varepsilon^i v_i^\mp(\xi, \mu) \right) \phi^\pm(n\theta). \end{aligned}$$

Проверяем, что при $\xi_2 \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \psi_{\varepsilon, K}^{\text{ex}, \pm}(x) &= \phi^\pm(Mx_3) \left(\sum_{i=0}^K \varepsilon^i f_i(\Lambda_0, \dots, \Lambda_i) + \varepsilon^{K+1} f^{(K)}(\varepsilon, \Lambda_0, \dots, \Lambda_K) \right. \\ &\quad \left. - \varepsilon \xi_2 \sqrt{\lambda_{\varepsilon, K} - M^2} J'_n(\sqrt{\lambda_{\varepsilon, K} - M^2}) \right) \phi^\pm(n\theta) + O(\varepsilon^2 \xi_2^2), \quad (4.6) \end{aligned}$$

$$f_0 = J_n(\kappa), \quad f_1 = 0, \quad f_i = \frac{J'_n(\kappa)}{2\kappa} \Lambda_i + h_i, \quad i \geq 2, \quad h_2 = 0, \quad (4.7)$$

где $h_i = h_i(\Lambda_0, \dots, \Lambda_{i-2})$ – некоторые голоморфные функции, $h_i(\Lambda_0, 0, \dots, 0) = 0$, $f_\varepsilon^{(K)}$ – ограниченная, голоморфная функция, $f_\varepsilon^{(K)}(\Lambda_0, 0, \dots, 0) = 0$. В силу асимптотик (3.19), (3.20), (4.6) и равенства $\ln \eta = -1/(\varepsilon(A + \mu))$ аналогично тому, как

было получено (3.27), выводим, что при $\eta^{1/2} < \rho < 2\eta^{1/2}$ (т.е. при $\eta^{-1/2} < \varrho < 2\eta^{-1/2}$)

$$\begin{aligned}\Psi_{\varepsilon,K}^{\pm}(x) &= \phi^{\pm}(n\theta)\phi^{+}(Mx_3)\left(\sum_{i=0}^K \varepsilon^i W_{i,0}^{+}(\zeta, \mu) + \varepsilon\eta \sum_{i=0}^K \varepsilon^i W_{i,1}^{+}(\zeta, \mu)\right) \\ &\quad + \varepsilon\eta\phi^{\pm}(n\theta)\phi^{-}(Mx_3)\sum_{i=0}^K \varepsilon^i W_{i,1}^{-}(\zeta, \mu) + \phi^{\pm}(n\theta)\phi^{+}(Mx_3)W_{\varepsilon}^{(K)}(\zeta, \mu) \\ &\quad + \varepsilon^{K+1}\eta\phi^{\pm}(n\theta)\phi^{-}(Mx_3)W^{(K)}(\zeta, \mu) + O(\eta^2\varrho^2 \ln \varrho),\end{aligned}$$

где $W_{i,j}^{\pm}$, $W_{\varepsilon}^{(K)}$, $W^{(K)}$ определяются формулами (3.28)–(3.31) с α_i из (4.3), f_i из (4.7), $\tilde{v}_0^{+} = 0$, $\alpha_0 = \tilde{\alpha}_0 = 0$,

$$\mathbf{b}_K(\varepsilon) = \sum_{i=1}^K \varepsilon^{i-1} \alpha_i - \sqrt{\lambda_{\varepsilon,K} - M^2} J'_n \left(\sqrt{\lambda_{\varepsilon,K} - M^2} \right).$$

Величина $\mathbf{b}_K(\varepsilon)$, очевидно, удовлетворяет оценке $\mathbf{b}_K(\varepsilon) = O(\varepsilon^K)$. Согласно методу согласования асимптотических разложений мы должны построить решения задач (3.22)–(3.24), имеющие асимптотики (3.32). Функции $w_{i,j}^{\pm}$ определим согласно (3.34), (3.37) и лемме 3.6. Тогда должно выполняться равенство (3.35) с α_i из (4.3), $\tilde{v}_i^{+}(0, \mu)$ из леммы 4.1, f_i из (4.7). Равенство (3.35) при $i = 0$ превращается в уравнение (1.6) с $n > 0$. Так как при $n > 0$ все корни $\varkappa$ уравнения (1.4) положительны, то голоморфность $\kappa(\mu)$ есть прямое следствие из теоремы о неявной функции, а потому $\Lambda_0(\mu) = \kappa^2(\mu) + M^2$ – голоморфная функция и при $n > 0$. Равенство (3.35) при $i = 1$ выполнено в силу формул (4.3), (4.7) и леммы 4.1. Аналогично тому, как были получены соотношения (3.36), из (3.35), (4.3), (4.7) и уравнения (1.6) нетрудно получить следующие формулы:

$$\begin{aligned}\Lambda_i(\mu) &= \frac{2\kappa(\mu)^2}{J_n(\kappa(\mu))} \frac{(\tilde{v}_i^{+}(0, \mu) + \tilde{h}_i(\mu))(A + \mu) + \tilde{g}_{i+1}(\mu)}{\kappa(\mu)^2 - n^2 + (A + \mu)^2}, \\ \tilde{h}_i(\mu) &= h_i(\Lambda_0(\mu), \dots, \Lambda_{i-2}(\mu)), \quad \tilde{g}_{i+1}(\mu) = g_{i+1}(\Lambda_0(\mu), \dots, \Lambda_{i-2}(\mu)).\end{aligned}$$

Выписывая теперь формулу для Λ_2 , приходим к (1.7) для $n > 0$. Голоморфность функций $\Lambda_i(\mu)$ и представления (1.8) доказываются по индукции, аналогично случаю $n = 0$.

Обозначим

$$\begin{aligned}\psi_{\varepsilon,K}^{\pm}(x) &= \Psi_{\varepsilon,K}^{\pm}(x)\chi_{\varepsilon}(x) + \sum_{j=0}^{N-1} \chi(|\zeta^j|\eta^{1/2})\psi_{\varepsilon,K}^{\text{in},\pm}(\zeta^j, x_3), \\ \tilde{\psi}_{\varepsilon,K}^{\pm}(x) &= \psi_{\varepsilon,K}^{\pm}(x) - R_{\varepsilon,K}^{\pm}(x), \\ \psi_{\varepsilon,K}^{\text{in},\pm}(\zeta, x_3, \theta) &= \phi^{\pm}(n\theta)(\phi^{+}(Mx_3)\Psi_{\varepsilon,K}^{\text{in},+}(\zeta) + \phi^{-}(Mx_3)\Psi_{\varepsilon,K}^{\text{in},-}(\zeta)), \\ \Psi_{\varepsilon,K}^{\text{in},+}(\zeta) &= \sum_{i=1}^K \varepsilon^i (w_{i,0}^{+}(\zeta, \mu) + \varepsilon\eta w_{i,1}^{+}(\zeta, \mu)), \quad \Psi_{\varepsilon,K}^{\text{in},-}(\zeta) = \varepsilon\eta \sum_{i=1}^K \varepsilon^i w_{i,1}^{-}(\zeta, \mu),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{\varepsilon,K}^{\pm}(x) &= \phi^{\pm}(n\theta)\phi^{\pm}(Mx_3)\chi_{\varepsilon}(x) \left(\chi(1-r)(b_K(\varepsilon)(1-r) - \varepsilon^{K+1}\alpha_{K+1}X(\xi)) \right. \\
&\quad \left. + \varepsilon^K \left(\varepsilon(f_{\varepsilon}^{(K)} + \tilde{v}_{K+1}^{+}(0,\mu)) - \frac{\alpha_{K+1}}{A+\mu} \right) \right) \phi^{\pm}(n\theta) \\
&\quad + \varepsilon^{K+1}\eta\phi^{\pm}(Mx_3)\phi^{\pm}(n\theta) \frac{M\alpha_{K+1}}{A+\mu} \sum_{j=0}^{N-1} \chi(|\zeta^j|\eta^{1/2})Y_1(\zeta).
\end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 4.1. При $\varepsilon \rightarrow 0$ функции $\psi_{\varepsilon,K}^{\pm}, \tilde{\psi}_{\varepsilon,K}^{\pm} \in H^1(\Omega) \cap C^{\infty}(\Omega)$ сходятся к $J_n(\sqrt{\lambda_0 - M^2}r)\phi^{\pm}(Mx_3)\phi^{\pm}(n\theta)$ в $L_2(\Omega)$, $\lambda_{\varepsilon,K}$ сходится к λ_0 , $\|R_{\varepsilon,K}^{\pm}\| = O(\varepsilon^K(A+\mu))$. Функции $\tilde{\psi}_{\varepsilon,K}^{\pm}$ и $\lambda_{\varepsilon,K}$ являются решениями задачи (2.1) с $u_{\varepsilon} = \tilde{\psi}_{\varepsilon,K}^{\pm}$, $\lambda = \lambda_{\varepsilon,K}$, $f = f_{\varepsilon,K}^{\pm}$, где $\|f_{\varepsilon,K}^{\pm}\| = O(\varepsilon^K(A+\mu))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству теоремы 3.1.

§ 5. Обоснование асимптотик в случае, когда ω — единичный круг, $f \equiv 1$

В настоящем параграфе будут доказаны теоремы 1.2 и 1.3. Введем некоторые обозначения. Всюду далее считаем, что λ_0 — p -кратное собственное значение предельной задачи, $\lambda_0 = M_1^2 + \varkappa_1 = \dots = M_k^2 + \varkappa_k$, где $\varkappa_i, i = \overline{1, k_0}, k_0 \leq k$, — корни уравнения (1.4) с $n = 0$, $\varkappa_i, i = \overline{k_0 + 1, k}$, — корни уравнения (1.4) с $n = n_i > 0$, $p = 2k - k_0$. Соответствующие собственные функции обозначим следующим образом:

$$\begin{aligned}
\psi_0^{(i)}(x) &= J_0(\sqrt{\varkappa_i}r)\phi^+(M_ix_3), \quad i = \overline{1, k_0}, \\
\psi_0^{(2i-k_0-1)}(x) &= J_{n_i}(\sqrt{\varkappa_i}r)\phi^+(M_ix_3)\phi^+(n_i\theta), \quad i = \overline{k_0 + 1, k}, \\
\psi_0^{(2i-k_0)}(x) &= J_{n_i}(\sqrt{\varkappa_i}r)\phi^+(M_ix_3)\phi^-(n_i\theta),
\end{aligned}$$

Через $\lambda_{\varepsilon}^{(i)}, i = \overline{1, p}$, обозначим собственные значения возмущенной задачи, взятые с учетом кратности и сходящиеся к λ_0 , $\psi_{\varepsilon}^{(i)}$ — соответствующие ортонормированные в $L_2(\Omega)$ собственные функции. Пусть $\lambda_{\varepsilon,K}^{(i)}, i = \overline{1, k_0}$, — величины $\lambda_{\varepsilon,K}$ из § 3, соответствующие $\varkappa = \varkappa_i, n = 0, M = M_i$; $\lambda_{\varepsilon,K}^{(2i-k_0-1)} = \lambda_{\varepsilon,K}^{(2i-k_0)}, i = \overline{k_0 + 1, k}$, — величины $\lambda_{\varepsilon,K}$ из § 4, соответствующие $\varkappa = \varkappa_i, n = n_i, M = M_i$. Аналогичным образом посредством $\psi_{\varepsilon,K}^{(i)}, \tilde{\psi}_{\varepsilon,K}^{(i)}, R_{\varepsilon,K}^{(i)}, f_{\varepsilon,K}^{(i)}$ обозначим функции $\psi_{\varepsilon,K}, \tilde{\psi}_{\varepsilon,K}, R_{\varepsilon,K}, f_{\varepsilon,K}, \psi_{\varepsilon,K}^{\pm}, \tilde{\psi}_{\varepsilon,K}^{\pm}, R_{\varepsilon,K}^{\pm}, f_{\varepsilon,K}^{\pm}$ из §§ 3, 4 и соответствующие $\varkappa = \varkappa_j, n = 0, M = M_j$ при $j = \overline{1, k_0}$, и $\varkappa = \varkappa_j, n = n_j, M = M_j$ при $j = \overline{k_0 + 1, k}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.2. Доказательство проведем от противного. Допустим, что утверждение теоремы неверно. А именно, существует подпоследовательность $\{\varepsilon'\} \subseteq \{\varepsilon\}$, на которой выполнены равномерные по ε' и μ оценки

$$|\lambda_{\varepsilon'}^{(j)} - \lambda_{\varepsilon',K}^{(i)}| \geq C\varepsilon'^q(A+\mu), \quad i = \overline{1, p}, \quad j \in \mathbb{I}, \quad (5.1)$$

где I – подмножество индексов $\{1, 2, \dots, p\}$, q – некоторое фиксированное число, не зависящее от i, j, K, ε' и μ . В силу теорем 3.1 и 4.1 к функциям $\tilde{\psi}_{\varepsilon, K}^{(i)}$ можно применить лемму 2.2. Согласно (2.14) справедливы представления

$$\psi_{\varepsilon, K}^{(i)} = \sum_{j=1}^p \frac{\psi_{\varepsilon}^{(j)}}{\lambda_{\varepsilon}^{(j)} - \lambda_{\varepsilon, K}^{(i)}} \int_{\Omega} \psi_{\varepsilon}^{(j)} f_{\varepsilon, K}^{(i)} dx + \tilde{u}_{\varepsilon}^{(i)}, \quad (5.2)$$

причем ввиду (2.15) верны равномерные по ε и μ оценки

$$\|\tilde{u}_{\varepsilon}^{(i)}\| = O(\varepsilon^K (A + \mu)). \quad (5.3)$$

Посредством $a_{ij}(\varepsilon)$ обозначим коэффициенты при $\psi_{\varepsilon}^{(j)}$ в формулах (5.2)

$$a_{ij}(\varepsilon) = \frac{1}{\lambda_{\varepsilon}^{(j)} - \lambda_{\varepsilon, K}^{(i)}} \int_{\Omega} \psi_{\varepsilon}^{(j)} f_{\varepsilon, K}^{(i)} dx.$$

Очевидно, что $a_{ij}(\varepsilon) = (\psi_{\varepsilon, K}^{(i)}, \psi_{\varepsilon}^{(j)})$, и так как $\psi_{\varepsilon, K}^{(i)} \rightarrow \psi_0^{(i)}$, то $a_{ij}(\varepsilon)$ – ограниченные величины. На подпоследовательности ε' для величин $a_{ij}(\varepsilon)$ при $i = \overline{1, p}$, $j \in I$ верны оценки

$$|a_{ij}(\varepsilon')| \leq \frac{\|f_{\varepsilon', K}^{(i)}\|}{|\lambda_{\varepsilon'}^{(j)} - \lambda_{\varepsilon', K}^{(i)}|} \leq C(\varepsilon')^{K-q}.$$

Будем считать, что $K > q$, тогда в силу последних оценок $a_{ij}(\varepsilon') \xrightarrow{\varepsilon' \rightarrow 0} 0$. Выделяя при необходимости подпоследовательность из $\{\varepsilon'\}$, заключаем, что $a_{ij}(\varepsilon') \xrightarrow{\varepsilon' \rightarrow 0} a_{ij}^0$, где a_{ij}^0 – некоторые числа, причем $a_{ij}^0 = 0$ при $i = \overline{1, p}$, $j \in I$. Скалярно умножая в $L_2(\Omega)$ друг на друга представления (5.2) и переходя к пределу при $\varepsilon' \rightarrow 0$, получаем $(a_i^0, a_l^0)_{\mathbb{R}^{\tilde{k}}} = \delta_l^i c_{ii}$, $i, l = \overline{1, p}$, $c_{ii} \neq 0$, где $\tilde{k} = p - |I|$, a_i^0 – $\tilde{k}$ -мерные векторы, составленные из чисел a_{ij}^0 , $i = \overline{1, p}$, $j \notin I$, $c_{ii} = \|\psi_0^{(i)}\|^2$. Таким образом, получили p ортогональных $\tilde{k}$ -мерных векторов, $\tilde{k} < p$, противоречие. Следовательно,

$$|\lambda_{\varepsilon}^{(i)} - \lambda_{\varepsilon, K}^{(i)}| = O(\varepsilon^{K-1} (A + \mu)), \quad i = \overline{1, p}.$$

Теорема 1.2 полностью доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.3. Оценки (1.9) фактически означают, что собственные значения $\lambda_{\varepsilon}^{(i)}$ различны, если они имеют различные асимптотики (1.5), соответствующие разным наборам (M_j, κ_j, n_j) . Кроме того, каждое из собственных значений, имеющее асимптотику (1.5), соответствующую $n = 0$, – простое, так как остальные собственные значения имеют асимптотики, не совпадающие с асимптотикой данного собственного значения. Пусть $\lambda_{\varepsilon}^{(q-1)}$ и $\lambda_{\varepsilon}^{(q)}$ – собственные значения возмущенной задачи, имеющие одинаковые асимптотики. Докажем, что они совпадают. Так как другие собственные значения имеют другие асимптотики, то, доказав совпадение, мы тем самым докажем двукратность собственного значения $\lambda_{\varepsilon}^{(q-1)}$. Допустим, что $\lambda_{\varepsilon}^{(q-1)} \neq \lambda_{\varepsilon}^{(q)}$. Это означает, что $\lambda_{\varepsilon}^{(q-1)}$ и $\lambda_{\varepsilon}^{(q)}$ – простые

собственные значения. Для величин $a_{ij}(\varepsilon)$ при $i = q-1, q, j = \overline{1, q}, j \neq q-1, q$ в силу теоремы 1.2 и неравенств (1.9) верны оценки

$$|a_{ij}(\varepsilon)| \leq \frac{\|f_{\varepsilon, K}^{(j)}\|}{|\lambda_{\varepsilon, K}^{(j)} - \lambda_{\varepsilon}^{(i)}|} \leq C\varepsilon^{K-a}, \quad (5.4)$$

а потому в силу оценок (5.3) для $\tilde{u}_{\varepsilon}^{(i)}$ имеют место сходимости в $L_2(\Omega)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$c_{\varepsilon}^{(1)}\psi_{\varepsilon}^{(q-1)} + c_{\varepsilon}^{(2)}\psi_{\varepsilon}^{(q)} \rightarrow \psi_0^{(q-1)}, \quad c_{\varepsilon}^{(3)}\psi_{\varepsilon}^{(q-1)} + c_{\varepsilon}^{(4)}\psi_{\varepsilon}^{(q)} \rightarrow \psi_0^{(q)}, \quad (5.5)$$

где $c_{\varepsilon}^{(1)} = a_{q-1q-1}(\varepsilon)$, $c_{\varepsilon}^{(2)} = a_{q-1q}(\varepsilon)$, $c_{\varepsilon}^{(3)} = a_{qq-1}(\varepsilon)$, $c_{\varepsilon}^{(4)} = a_{qq}(\varepsilon)$. Пусть собственные значения $\lambda_{\varepsilon}^{(q-1)}$ и $\lambda_{\varepsilon}^{(q)}$ имеют асимптотики, соответствующие $(M_{i_0}, \kappa_{i_0}, n_{i_0})$, $n_{i_0} > 0$. Тогда, очевидно,

$$\tilde{\psi}_{\varepsilon}^{(j)}(r, \theta, x_3) = \psi_{\varepsilon}^{(j)}\left(r, \theta + \frac{\pi}{2n_{i_0}}, x_3\right)$$

– собственные функции возмущенной задачи, соответствующие $\lambda_{\varepsilon}^{(j)}$, $j = q-1, q$. Так как, по предположению, собственные значения $\lambda_{\varepsilon}^{(q-1)}$ и $\lambda_{\varepsilon}^{(q)}$ различные, то $\tilde{\psi}_{\varepsilon}^{(q-1)} = c_{\varepsilon}^{(5)}\psi_{\varepsilon}^{(q-1)}$, $\tilde{\psi}_{\varepsilon}^{(q)} = c_{\varepsilon}^{(6)}\psi_{\varepsilon}^{(q)}$, $|c_{\varepsilon}^{(5)}| = |c_{\varepsilon}^{(6)}| = 1$. В силу (5.5) имеем

$$\begin{aligned} c_{\varepsilon}^{(5)}c_{\varepsilon}^{(1)}\psi_{\varepsilon}^{(q-1)} + c_{\varepsilon}^{(6)}c_{\varepsilon}^{(2)}\psi_{\varepsilon}^{(q)} &\rightarrow -\psi_0^{(q)}, \\ c_{\varepsilon}^{(5)}c_{\varepsilon}^{(3)}\psi_{\varepsilon}^{(q-1)} + c_{\varepsilon}^{(6)}c_{\varepsilon}^{(4)}\psi_{\varepsilon}^{(q)} &\rightarrow \psi_0^{(q-1)}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Умножим теперь скалярно в $L_2(\Omega)$ первое соотношение из (5.5) на второе соотношение из (5.6) и первое соотношение из (5.6) – на второе соотношение из (5.5). В результате получим

$$c_{\varepsilon}^{(1)}c_{\varepsilon}^{(3)}c_{\varepsilon}^{(5)} + c_{\varepsilon}^{(2)}c_{\varepsilon}^{(4)}c_{\varepsilon}^{(6)} \rightarrow -c, \quad c_{\varepsilon}^{(1)}c_{\varepsilon}^{(3)}c_{\varepsilon}^{(5)} + c_{\varepsilon}^{(2)}c_{\varepsilon}^{(4)}c_{\varepsilon}^{(6)} \rightarrow c,$$

$c = \|\psi_0^{(q-1)}\|^2 = \|\psi_0^{(q)}\|^2$, противоречие. Следовательно, собственное значение возмущенной задачи, имеющее асимптотику, соответствующую $n > 0$, – двукратно.

Теперь мы переходим к обоснованию асимптотик собственных функций. Вначале рассмотрим случай двукратного собственного значения $\lambda_{\varepsilon} = \lambda_{\varepsilon}^{(q-1)} = \lambda_{\varepsilon}^{(q)}$. В силу оценок (5.4), оценок для $R_{\varepsilon, K}^{(i)}$ и представлений (5.2) выводим равенства

$$\begin{aligned} \psi_{\varepsilon, K}^{(q-1)} &= \frac{1}{\lambda_{\varepsilon} - \lambda_{\varepsilon, K}} \sum_{j=q-1}^q \psi_{\varepsilon}^{(j)} \int_{\Omega} \psi_{\varepsilon}^{(j)} f_{\varepsilon, K}^{(q-1)} dx + \hat{u}_{\varepsilon}^{(q-1)}, \\ \psi_{\varepsilon, K}^{(q)} &= \frac{1}{\lambda_{\varepsilon} - \lambda_{\varepsilon, K}} \sum_{j=q-1}^q \psi_{\varepsilon}^{(j)} \int_{\Omega} \psi_{\varepsilon}^{(j)} f_{\varepsilon, K}^{(q)} dx + \hat{u}_{\varepsilon}^{(q)}, \\ \|\hat{u}_{\varepsilon}^{(i)}\| &= O(\varepsilon^{K-a}), \quad i = q-1, q, \quad \lambda_{\varepsilon, K} = \lambda_{\varepsilon, K}^{(q-1)} = \lambda_{\varepsilon, K}^{(q)}. \end{aligned}$$

В силу полученных соотношений приходим к равенствам

$$\|\psi_{\varepsilon,K}^{(i)} - \Psi_{\varepsilon}^{(i)}\| = O(\varepsilon^{K-a}), \quad i = q-1, q, \quad (5.7)$$

где

$$\Psi_{\varepsilon}^{(i)} = \frac{1}{\lambda_{\varepsilon} - \lambda_{\varepsilon,K}} \sum_{j=q-1}^q \psi_{\varepsilon}^{(j)} \int_{\Omega} \psi_{\varepsilon}^{(j)} f_{\varepsilon,K}^{(i)} dx$$

— собственные функции, соответствующие λ_{ε} и сходящиеся к $\psi_0^{(i)}$. Аналогично, в случае простого собственного значения нетрудно показать, что

$$\|\psi_{\varepsilon,K}^{(i)} - \Psi_{\varepsilon}^{(i)}\| = O(\varepsilon^{K-a}), \quad (5.8)$$

где

$$\Psi_{\varepsilon}^{(i)} = \frac{1}{\lambda_{\varepsilon} - \lambda_{\varepsilon,K}^{(i)}} \sum_{j=q-1}^q \psi_{\varepsilon}^{(j)} \int_{\Omega} \psi_{\varepsilon}^{(j)} f_{\varepsilon,K}^{(i)} dx$$

— собственная функция, соответствующая λ_{ε} и сходящаяся к $\psi_0^{(i)}$. Оценки (5.7) и (5.8) верны для произвольного K . Это означает, что асимптотики собственных функций, соответствующих простым собственным значениям возмущенной задачи, имеют вид

$$\begin{aligned} \psi_{\varepsilon}(x) &= (\psi_{\varepsilon}^{\text{ex}}(x) + \chi(1-r)\psi_{\varepsilon}^{\text{bl}}(\xi, x_3))\chi_{\varepsilon}(x) \\ &\quad + \sum_{j=0}^{N-1} \chi(|\zeta^j|\eta^{1/2})\psi_{\varepsilon}^{\text{in}}(\zeta^j, x_3), \end{aligned} \quad (5.9)$$

а асимптотики собственных функций, соответствующих двукратному собственному значению возмущенной задачи, определяются равенствами

$$\begin{aligned} \psi_{\varepsilon}^{\pm}(x) &= (\psi_{\varepsilon}^{\text{ex},\pm}(x) + \chi(1-r)\psi_{\varepsilon}^{\text{bl},\pm}(\xi, x_3, \theta))\chi_{\varepsilon}(x) \\ &\quad + \sum_{j=0}^{N-1} \chi(|\zeta^j|\eta^{1/2})\psi_{\varepsilon}^{\text{in},\pm}(\zeta^j, x_3, \theta). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Теорема 1.3 полностью доказана.

§ 6. Доказательство теоремы 1.4

Схема доказательства теоремы 1.4 аналогична доказательству теоремы 1.3. Вначале мы формально построим асимптотики собственного значения λ_{ε} и соответствующей собственной функции ψ_{ε} , а затем проведем строгое обоснование формальных асимптотик.

В малой окрестности $\partial\omega$ введем координаты (s, τ) , где τ — расстояние от точки до $\partial\omega$, измеренное в направлении внутренней нормали. В случае, когда ω является единичным кругом, переменные (s, τ) совпадают с переменными $(\theta, 1-r)$.

Асимпотику собственного значения будем искать в виде (1.10). Как и в § 3, 4, для построения асимптотики собственной функции мы применяем комбинацию метода согласования асимптотических разложений, метода составных разложений и

метода многих масштабов. Использование метода составных разложений позволяет добиться выполнения граничного условия на Γ_ε из (1.2), а применение метода согласования асимптотических разложений приводит к требуемому граничному условию на γ_ε . Внешнее разложение собственной функции ψ_ε будем строить следующим образом:

$$\psi_\varepsilon^{\text{ex}}(x) = \phi^+(Mx_3) \sum_{i=0}^2 \varepsilon^i \Psi_i(x', \mu) + \dots, \quad (6.1)$$

а пограничный слой – в виде

$$\begin{aligned} \psi_\varepsilon^{\text{bl}}(\xi, x_3, s) &= \phi^+(Mx_3) \Psi_\varepsilon^{\text{bl},+}(\xi, s) + \phi^-(Mx_3) \Psi_\varepsilon^{\text{bl},-}(\xi, s), \\ \Psi_\varepsilon^{\text{bl},+}(\xi, s) &= \sum_{i=1}^4 \varepsilon^i v_i^+(\xi, s, \mu) + \dots, \quad \Psi_\varepsilon^{\text{bl},-}(\xi, s) = \varepsilon \sum_{i=1}^3 \varepsilon^i v_i^-(\xi, s, \mu) + \dots. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Здесь $\xi = (\xi_1, \xi_2) = (x_3 \varepsilon^{-1} - \pi/2, \tau \varepsilon^{-1})$. Определим теперь функции Ψ_i и $v_i^\pm$. Вначале подставим (1.10) и (6.1) в (1.1) и соберем коэффициенты при одинаковых степенях ε . Тогда получим уравнения

$$-\Delta_{x'} \Psi_0 = \mathcal{K} \Psi_0, \quad x' \in \omega, \quad (6.3)$$

$$-\Delta_{x'} \Psi_1 = \mathcal{K} \Psi_1 + \Lambda_1 \Psi_0, \quad -\Delta_{x'} \Psi_2 = \mathcal{K} \Psi_2 + \Lambda_1 \Psi_1 + \Lambda_2 \Psi_0, \quad x' \in \omega, \quad (6.4)$$

где $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\mu) = \Lambda_0(\mu) - M^2$. Граничные условия для функций Ψ_i мы выведем ниже. Всюду ниже мы предполагаем, что $\Psi_i \in C^\infty(\bar{\Omega})$. Это свойство функций Ψ_i будет доказано далее, после того как будут получены граничные условия для этих функций. Оператор Лапласа в переменных (s, τ, x_3) выглядит следующим образом:

$$\Delta_x = \frac{1}{\mathbf{H}} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\mathbf{H} \frac{\partial}{\partial \tau} \right) + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{\mathbf{H}} \frac{\partial}{\partial s} \right) \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}, \quad (6.5)$$

где $\mathbf{H} = \mathbf{H}(s, \tau) = 1 - \tau k(s)$, $k \in C^\infty(\partial\omega)$. Подставим теперь выражение для оператора Лапласа (6.5), (1.10) и (6.2) в (1.1), перейдем к переменным ξ и выпишем коэффициенты при одинаковых степенях ε отдельно для $\phi^+(Mx_3)$ и $\phi^-(Mx_3)$. Тогда получим уравнения для функций $v_i^\pm$ при $\xi_2 > 0$

$$\begin{aligned} \Delta_\xi v_1^+ &= 0, \quad \Delta_\xi v_1^- = 2M \frac{\partial v_1^-}{\partial \xi_1}, \\ \Delta_\xi v_2^+ &= k \frac{\partial v_1^+}{\partial \xi_2}, \quad \Delta_\xi v_2^- = k \frac{\partial v_1^-}{\partial \xi_2} + 2M \frac{\partial v_2^-}{\partial \xi_1}, \\ \Delta_\xi v_3^+ &= k \frac{\partial v_2^+}{\partial \xi_2} + k^2 \xi_2 \frac{\partial v_1^+}{\partial \xi_2} - (\Lambda_0 - M^2) v_1^+ - \frac{\partial^2 v_1^+}{\partial s^2} - 2M \frac{\partial v_1^-}{\partial \xi_1}, \\ \Delta_\xi v_3^- &= k \frac{\partial v_2^-}{\partial \xi_2} + k^2 \xi_2 \frac{\partial v_1^-}{\partial \xi_2} - (\Lambda_0 - M^2) v_1^- - \frac{\partial^2 v_1^-}{\partial s^2} + 2M \frac{\partial v_3^+}{\partial \xi_1}, \\ \Delta_\xi v_4^+ &= k \frac{\partial v_3^+}{\partial \xi_2} + k^2 \xi_2 \frac{\partial v_2^+}{\partial \xi_2} + k^3 \xi_2^2 \frac{\partial v_1^+}{\partial \xi_2} - (\Lambda_0 - M^2) v_2^+ - \Lambda_1 v_1^+ \\ &\quad - \frac{\partial^2 v_2^+}{\partial s^2} - \left(2\xi_2 k \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \xi_2 k' \frac{\partial}{\partial s} \right) v_1^+ - 2M \frac{\partial v_2^-}{\partial \xi_1}, \end{aligned} \quad (6.6)$$

где $k = k(s)$. Потребуем, чтобы сумма функций $\psi_\varepsilon^{\text{ex}}$ и $\psi_\varepsilon^{\text{bl}}$ удовлетворяла однородному граничному условию Неймана на Σ_ε . Тогда получим граничные условия для функций $v_i^\pm$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_i^+}{\partial \xi_2} &= \Psi_{i-1}^N, \quad \frac{\partial v_4^+}{\partial \xi_2} = 0, \quad \frac{\partial v_i^-}{\partial \xi_2} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad \xi \in \Gamma^0, \\ \Psi_j^N &= \Psi_j^N(s, \mu) = \frac{\partial}{\partial n} \Psi_j^N(x', \mu), \quad x' \in \partial\omega. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Задачи (6.6), (6.7) легко решаются с помощью лемм 3.2, 3.3. Для их решений справедливы равенства

$$\begin{aligned} v_1^+(\xi, s, \mu) &= -\Psi_0^N(s, \mu)X(\xi), \quad v_1^-(\xi, s, \mu) = b_{11}^-(s, \mu)v_{11}^-(\xi), \\ v_2^+(\xi, s, \mu) &= \frac{1}{2}k(s) \left(\xi_2 v_1^+(\xi, s, \mu) + \int_{\xi_2}^{+\infty} v_1^+(\xi_1, y, s, \mu) dy \right) - \Psi_1^N(s, \mu)X(\xi), \\ v_2^-(\xi, s, \mu) &= \sum_{j=1}^{M_2^-} b_{2j}^-(s, \mu)v_{2j}^-(\xi), \quad v_3^-(\xi, s, \mu) = \sum_{j=1}^{M_3^-} b_{3j}^-(s, \mu)v_{3j}^-(\xi), \\ v_3^+(\xi, s, \mu) &= \sum_{j=1}^{M_3^+} b_{3j}^+(s, \mu)v_{3j}^+(\xi) - \Psi_2^N(s, \mu)X(\xi), \\ v_4^+(\xi, s, \mu) &= \sum_{j=1}^{M_4^+} b_{4j}^+(s, \mu)v_{4j}^+(\xi), \end{aligned}$$

где $b_{ij}^\pm$ — функции, полиномиально зависящие от $\Psi_0^N, \Psi_1^N, \Psi_2^N, k$, производных этих функций по s и от Λ_0, Λ_1 , причем $b_{ij}^\pm$ обращаются в нуль, если равны нулю функции $\Psi_0^N, \Psi_1^N, \Psi_2^N$, их производные по s и коэффициент Λ_1 , $M_i^\pm$ — некоторые числа, $v_{ij}^\pm \in \mathcal{V}^\pm \cap H^1(\Pi)$. Функции $v_{ij}^\pm$ удовлетворяют утверждению леммы 3.5. При $\rho \rightarrow 0$ справедливы асимптотики

$$\begin{aligned} v_i^+(\xi, s, \mu) &= -\Psi_{i-1}^N(s, \mu)(\ln \rho + \ln 2 - \xi_2) + \tilde{v}_i(0, s, \mu) \\ &\quad + \frac{1}{2}k(s)\Psi_{i-2}^N(s, \mu)(\xi_1(\varphi - \pi/2) - \xi_2) + O(\rho^2 \ln \rho), \end{aligned} \quad (6.8)$$

$$\begin{aligned} v_i^-(\xi, s, \mu) &= -\Psi_{i-1}^N(s, \mu)M\xi_1 \ln \rho + b_i(s, \mu)\xi_1 + O(\rho^2 \ln \rho), \\ \tilde{v}_1^+(0, s, \mu) &= 0, \quad \tilde{v}_2^+(0, s, \mu) = \frac{\pi^2}{24}k(s)\Psi_0^N(s, \mu), \\ \tilde{v}_3^+(\xi, s, \mu) &= v_3^+(\xi, s, \mu) + \Psi_2^N(s, \mu)X(\xi), \quad \tilde{v}_4^+(\xi, s, \mu) = v_4^+(\xi, s, \mu), \end{aligned} \quad (6.9)$$

где b_i — функции, полиномиально зависящие от $\Psi_0^N, \Psi_1^N, \Psi_2^N, k$, производных этих функций по s и от Λ_0, Λ_1 , причем b_i обращаются в нуль, если равны нулю функции $\Psi_0^N, \Psi_1^N, \Psi_2^N$, их производные по s и коэффициент Λ_1 , (ρ, φ) — полярные координаты, соответствующие переменным ξ .

Как и ранее, для построения асимптотики собственной функции ψ_ε в окрестностях точек $\xi_k = (\pi k, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$, мы используем комбинацию метода согласования

асимптотических разложений и метода многих масштабов. Внутреннее разложение в окрестностях точек ξ_k строим в виде

$$\begin{aligned}\psi_\varepsilon^{\text{in}}(\zeta^k, x_3, s) &= \phi^+(Mx_3)\Psi_\varepsilon^{\text{in},+}(\zeta^k, s) + \phi^-(Mx_3)\Psi_\varepsilon^{\text{in},-}(\zeta^k, s), \\ \Psi_\varepsilon^{\text{in},+}(\zeta, s) &= \sum_{i=1}^3 \varepsilon^i (w_{i,0}^+(\zeta, s, \mu) + \varepsilon \eta w_{i,1}^+(\zeta, s, \mu)) + \dots, \\ \Psi_\varepsilon^{\text{in},-}(\zeta, s) &= \varepsilon \eta \sum_{i=1}^3 \varepsilon^i w_{i,1}^-(\zeta, s, \mu) + \dots,\end{aligned}\quad (6.10)$$

где $\zeta^k = (\zeta_1^k, \zeta_2^k) = ((\xi_1 - \pi k)\eta^{-1}, \xi_2 \eta^{-1})$. Согласование проведем в точке $\xi_0 = 0$ и распространим затем полученные результаты на остальные точки ξ_k . Обозначим $\zeta = \xi \eta^{-1}$. Определим функции $w_{i,j}^\pm$. Для этого подставим (6.5), (6.10) и (1.10) в (1.1), (1.2), перейдем к переменным ζ и соберем коэффициенты при одинаковых степенях ε и η . В результате получим краевые задачи для функций $w_{i,j}^\pm$

$$\begin{aligned}\Delta_\zeta w_{i,0}^+ &= 0, \quad \Delta_\zeta w_{i,1}^+ = k \frac{\partial}{\partial \zeta_2} w_{i,0}^+, \quad \Delta_\zeta w_{i,1}^- = 2M \frac{\partial}{\partial \zeta_1} w_{i,0}^+, \quad \zeta_2 > 0, \\ w_{i,j}^\pm &= 0, \quad \zeta \in \gamma^f, \quad \frac{\partial}{\partial \zeta_2} w_{i,j}^\pm = 0, \quad \zeta \in \Gamma^f,\end{aligned}\quad (6.11)$$

где $\gamma^f = \{\zeta : |\zeta_1| < f, \zeta_2 = 0\}$, $\Gamma^f = O\zeta_1 \setminus \bar{\gamma}^f$. Теперь выпишем асимптотики для функций $w_{i,j}^\pm$. Пусть (ϱ, ϑ) – полярные координаты, соответствующие переменным ζ . Обозначим

$$\lambda_{\varepsilon,2} = \Lambda_0(\mu) + \varepsilon \Lambda_1(\mu) + \varepsilon^2 \Lambda_2(\mu), \quad \Psi_{\varepsilon,2}(x) = \psi_{\varepsilon,2}^{\text{ex}}(x) + \chi(\tau \delta) \psi_{\varepsilon,2}^{\text{bl}}(\xi, x_3, s),$$

$$\psi_{\varepsilon,2}^{\text{ex}}(x) = \phi^+(Mx_3) (\Psi_0(x', \mu) + \varepsilon \Psi_1(x', \mu) + \varepsilon^2 \Psi_2(x', \mu)),$$

$$\psi_{\varepsilon,2}^{\text{bl}}(\xi, x_3, s) = \phi^+(Mx_3) \sum_{i=1}^4 \varepsilon^i v_i^+(\xi, s, \mu) + \phi^-(Mx_3) \varepsilon \sum_{i=1}^3 \varepsilon^i v_i^-(\xi, s, \mu),$$

где δ – некоторое фиксированное число, введенное ввиду локальности координат (s, τ) . Учитывая асимптотики (6.8) и предполагаемую гладкость функций Ψ_i , нетрудно убедиться, что при $\eta^{1/2} < \rho < 2\eta^{1/2}$ имеет место равенство

$$\begin{aligned}\Psi_{\varepsilon,2}(x) &= \phi^+(Mx_3) \left(\sum_{i=0}^3 \varepsilon^i W_{i,0}^+(\zeta, s, \mu) + \varepsilon \eta \sum_{i=0}^3 \varepsilon^i W_{i,1}^+(\zeta, s, \mu) \right) \\ &\quad + \varepsilon \eta \phi^-(Mx_3) \sum_{i=0}^3 \varepsilon^i W_{i,1}^-(\zeta, s, \mu) + O(\eta^2 \varrho^2 \ln \varrho),\end{aligned}$$

$$W_{i,0}^+(\zeta, s, \mu) = -\Psi_{i-1}^N(s, \mu) (\ln \varrho + \ln 2) + \frac{\Psi_i^N(s, \mu)}{A + \mu} + \Psi_i^D(s, \mu) + \tilde{v}_i^+(0, s, \mu),$$

$$W_{i,1}^+(\zeta, s, \mu) = \frac{1}{2} k(s) \Psi_{i-1}^N(s, \mu) \left(\zeta_1 \left(\vartheta - \frac{\pi}{2} \right) - \zeta_2 \right),$$

$$W_{i,1}^-(\zeta, s, \mu) = -\Psi_{i-1}^N(s, \mu) M \zeta_1 \ln \varrho + \left(\frac{M \Psi_i^N(s, \mu)}{A + \mu} + b_i(s, \mu) \right) \zeta_1,$$

$$\Psi_3^N(s, \mu) = \Psi_3^D(s, \mu) \equiv 0, \quad \Psi_i^D(s, \mu) = \Psi_i(x', \mu), \quad x' \in \partial \omega,$$

где $\tilde{v}_0(0, s, \mu) = 0$. Согласно полученным формулам и методу согласования асимптотических разложений мы должны построить решения задач (6.11) с асимптотиками (3.32). Функции $w_{i,j}^\pm$ определим следующим образом:

$$\begin{aligned} w_{i,0}^+(\zeta, s, \mu) &= -\Psi_{i-1}^N(s, \mu)Y(\zeta f^{-1}(s)), \\ w_{i,1}^+(\zeta, s, \mu) &= -\Psi_{i-1}^N(s, \mu)f(s)k(s)U(\zeta f^{-1}(s)), \\ w_{i,1}^-(\zeta, s, \mu) &= -\Psi_{i-1}^N(s, \mu)M\zeta_1Y(\zeta f^{-1}(s)) + f(s)\left(\frac{M\Psi_i^N(s, \mu)}{A + \mu} + b_i(s, \mu) \right. \\ &\quad \left. + \Psi_{i-1}^N(s, \mu)M(\ln 2 - \ln f(s))\right)Y_1(\zeta f^{-1}(s)), \end{aligned}$$

где U – решение задачи (3.40). Из определения функций $w_{i,0}^+$ и $W_{i,0}^+$ вытекают равенства

$$\frac{\Psi_i^N(s, \mu)}{A + \mu} + \Psi_i^D(s, \mu) + \tilde{v}_i(0, s, \mu) = \Psi_{i-1}^N(s, \mu) \ln f(s),$$

приводящие к граничным условиям для функций Ψ_i

$$\left(\frac{\partial}{\partial n} + A + \mu\right)\Psi_0 = 0, \quad x' \in \partial\omega, \quad (6.12)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial n} + A + \mu\right)\Psi_1 = -(A + \mu)^2\Psi_0 \ln f, \quad x' \in \partial\omega,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial n} + A + \mu\right)\Psi_2 = -(A + \mu)^3\Psi_0 \ln^2 f \quad (6.13)$$

$$+ (A + \mu)^2 \left(\frac{\pi^2}{24} k\Psi_0 - \Psi_1 \ln f \right), \quad x' \in \partial\omega.$$

Нетрудно доказать, что существуют простое собственное значение $\mathcal{K}(\mu)$ и соответствующая собственная функция Ψ_0 задачи (6.3), (6.12), голоморфно зависящие от μ , причем $\mathcal{K}(0) = \varkappa$, $\Psi_0|_{\mu=0} = \Phi_0$, $\Psi_0 \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Следовательно, $\Lambda_0(\mu) = \mathcal{K}(\mu) + M^2$ – голоморфная функция, $\Lambda_0(0) = \lambda_0$. Без ограничения общности считаем, что функция Ψ_0 нормирована в $L_2(\Omega)$. Условия разрешимости задач (6.4), (6.13) получаем стандартным образом: умножаем уравнения в (6.4) на Ψ_0 и интегрируем по частям по области Ω , учитывая граничные условия (6.12), (6.13). Функции Ψ_1 и Ψ_2 определены с точностью до слагаемого $c\Psi_0$; чтобы однозначно определить функции Ψ_1 и Ψ_2 , будем считать их ортогональными Ψ_0 в $L_2(\Omega)$. В результате, в силу условий разрешимости задач (6.4), (6.13) и ортогональности Ψ_1 и Ψ_2 в $L_2(\Omega)$ приходим к формулам (1.11), а также заключаем, что $\Psi_1, \Psi_2 \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Обозначим

$$\psi_{\varepsilon,2}(x) = \Psi_{\varepsilon,2}(x)\chi_\varepsilon(x) + \sum_{j=0}^{N-1} \chi(|\zeta^j|\eta^{1/2})\psi_{\varepsilon,2}^{\text{in}}(\zeta^j, x_3, s), \quad (6.14)$$

$$\begin{aligned} \psi_{\varepsilon,2}^{\text{in}}(\zeta, x_3, s) &= \phi^+(Mx_3) \sum_{i=0}^3 \varepsilon^i (w_{i,0}^+(\zeta, s, \mu) + \varepsilon\eta w_{i,1}^+(\zeta, s, \mu)) \\ &\quad + \varepsilon\eta\phi^-(Mx_3) \sum_{i=0}^3 \varepsilon^i w_{i,1}^-(\zeta, s, \mu). \end{aligned}$$

Аналогично теореме 3.1 нетрудно доказать следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 6.1. *Существует функция $R_{\varepsilon,2} \in H^1(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ такая, что функции $\psi_{\varepsilon,2}, \tilde{\psi}_{\varepsilon,2} = \psi_{\varepsilon,2} - R_{\varepsilon,2} \in H^1(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ сходятся к ψ_0 в $L_2(\Omega)$, $\lambda_{\varepsilon,2}$ сходится к λ_0 , $\|R_{\varepsilon,2}\| = O(\varepsilon^3(A + \mu))$, а функции $\tilde{\psi}_{\varepsilon,2}$ и $\lambda_{\varepsilon,2}$ являются решениями задачи (2.1) с $u_\varepsilon = \tilde{\psi}_{\varepsilon,2}$, $\lambda = \lambda_{\varepsilon,2}$, $f = f_{\varepsilon,2}$, где $\|f_{\varepsilon,2}\| = O(\varepsilon^3(A + \mu))$.*

Теперь мы переходим к обоснованию построенных асимптотик. Применяя к функциям $\tilde{\psi}_{\varepsilon,2}$ и $\lambda_{\varepsilon,2}$ лемму 2.2 и учитывая оценки для функции $f_{\varepsilon,2}$ и (2.15), получаем

$$\tilde{\psi}_{\varepsilon,2}(x) = \frac{\psi_\varepsilon}{\lambda_\varepsilon - \lambda_{\varepsilon,2}} \int_\Omega \psi_\varepsilon f_{\varepsilon,2} dx + \tilde{u}_\varepsilon, \quad (6.15)$$

$$\|\tilde{u}_\varepsilon\| = O(\varepsilon^3(A + \mu)), \quad (6.16)$$

где ψ_ε — нормированная в $L_2(\Omega)$ собственная функция, соответствующая λ_ε . Из (6.15), (6.16) выводим

$$\|\tilde{\psi}_{\varepsilon,2} - \tilde{u}_\varepsilon\| \leq \frac{\|f_{\varepsilon,2}\|}{|\lambda_\varepsilon - \lambda_{\varepsilon,2}|}.$$

Отсюда и из сходимости $\psi_{\varepsilon,2} \rightarrow \psi_0$ следует равномерная по ε и μ оценка

$$|\lambda_\varepsilon - \lambda_{\varepsilon,2}| = O(\varepsilon^3(A + \mu)).$$

В силу (6.15), (6.16) и теоремы 6.1 имеем

$$\|\Psi_\varepsilon - \psi_{\varepsilon,2}\| \leq \|\tilde{u}_\varepsilon\| + \|R_{\varepsilon,2}\| = O(\varepsilon^3(A + \mu)),$$

где

$$\Psi_\varepsilon = \frac{\psi_\varepsilon}{\lambda_\varepsilon - \lambda_{\varepsilon,2}} \int_\Omega \psi_\varepsilon f_{\varepsilon,2} dx$$

— собственная функция, соответствующая λ_ε и сходящаяся к ψ_0 . Полученные оценки величин $(\lambda_\varepsilon - \lambda_{\varepsilon,2})$ и $\|\Psi_\varepsilon - \psi_{\varepsilon,2}\|$ завершают доказательство теоремы 1.4.

Список литературы

1. Lobo M., Pérez E. Boundary homogenization of certain elliptic problems for cylindrical bodies // Bull. Sci. Math. 1992. V. 116. №2. P. 399–426.
2. Lobo M., Pérez E. Asymptotic behaviour of an elastic body with a surface having small stuck regions // RAIRO Model. Math. Anal. Numer. 1988. V. 22. №4. P. 609–624.
3. Friedman A., Huang Ch., Yong J. Effective permeability of the boundary of a domain // Comm. Partial Differential Equations. 1995. V. 20. №1–2. P. 59–102.
4. Олейник О. А., Чечкин Г. А. О краевых задачах для эллиптических уравнений с быстро меняющимся типом граничных условий // УМН. 1993. Т. 48. №6. С. 163–164.
5. Чечкин Г. А. Усреднение краевых задач с сингулярным возмущением граничных условий // Матем. сб. 1993. Т. 79. №6. С. 99–150.
6. Марченко В. А., Хруслов Е. Я. Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей. Киев: Наукова думка, 1974.
7. Damlamian A., Li Ta-Tsien (Li Daqian). Boundary homogenization for elliptic problems // J. Math. Pures Appl. (9). 1987. V. 66. P. 351–361.

8. *Brillard A., Lobo M., Pérez E.* Un probleme d'homogenisation de frontieres en elasticite lineare pour un corps cylindrique // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 1984. V. 299. № 17. P. 859–862.
9. *Гадильшин Р. Р.* Об асимптотике собственных значений для периодически закрепленной мембраны // Алгебра и анализ. 1998. Т. 10. № 1. С. 3–19.
10. *Гадильшин Р. Р.* Асимптотики собственных значений краевой задачи с быстро осциллирующими граничными условиями // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35. № 4. С. 540–551.
11. *Борисов Д. И., Гадильшин Р. Р.* О спектре лапласиана с часто меняющимся типом граничных условий // ТМФ. 1999. Т. 118. № 3. С. 347–353.
12. *Борисов Д. И.* О двухпараметрической асимптотике в одной краевой задаче для лапласиана // Матем. заметки. 2001. Т. 70. № 4. С. 520–534.
13. *Ильин А. М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.
14. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // УМН. 1957. Т. 12. № 5. С. 3–122.
15. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.
16. *Borisov D. I.* The asymptotics for the eigenelements of the Laplacian in a cylinder with frequently alternating boundary conditions // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. IIb. 2001. V. 329. № 10. P. 717–721.
17. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций. Ч. 1. М.: ИЛ, 1949.

Башкирский государственный педагогический университет,
г. Уфа
E-mail: BorisovDI@ic.bashedu.ru, BorisovDI@bspu.ru

Поступила в редакцию
03.12.2001