Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. М. Кобельков, Симметричные аппроксимации уравнений Навье–Стокса, *Матем. сб.*, 2002, том 193, номер 7, 87–108

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm668>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 12:44:03

УДК 517.9

Г. М. Кобельков

Симметричные аппроксимации уравнений Навье–Стокса

Предложен новый симметричный метод аппроксимации нестационарных уравнений Навье–Стокса системой уравнений типа Коши–Ковалевской. Исследуются свойства модифицированной задачи. В частности, доказана сходимость на бесконечном промежутке времени при $\varepsilon \rightarrow 0$ решения модифицированной задачи к решению исходной.

Библиография: 13 названий.

Введение

Поскольку в наших рассуждениях плоский и пространственный случаи не различаются, будем исследовать только случай двух пространственных переменных, делая, где необходимо, оговорки относительно трехмерного случая. Пусть, как обычно, $\mathbf{u} = (u^1, \dots, u^m)^T$ – вектор скоростей, p – функция гидростатического давления, а Ω – ограниченная область с липшицевой границей $\partial\Omega$ в $\mathbb{R}_m$, $m = 2, 3$. Нестационарная задача Стокса имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t - \Delta \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{0}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \\ \mathbf{u}|_{\partial\Omega \times [0, T]} &= \mathbf{0}, \quad \mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x), \quad (p, 1) = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

(здесь $x = (x_1, x_2)$ и $\operatorname{div} \mathbf{u}_0 = 0$). Независимые переменные также будем обозначать (x, y) .

Введем следующие обозначения норм, совпадающие с [1]:

$$\begin{aligned} \|\nabla \mathbf{v}\|^2 &= \|\mathbf{v}_x\|^2 = \|\mathbf{v}\|_1^2 = \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v^i(x, t)}{\partial x_j} \right)^2 dx, \\ \|\mathbf{v}\| &= \|\mathbf{v}(t)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)}, \quad \|\mathbf{v}\|_q = \|\mathbf{v}(t)\|_{\mathbf{L}_q(\Omega)}, \quad q > 1. \end{aligned}$$

Пусть $\mathbf{H}$ – пространство, получающееся в результате замыкания множества гладких соленоидальных (т.е. удовлетворяющих условию $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$) вектор-функций, равных нулю на границе $\partial\Omega$ в норме векторного пространства Соболева $\mathbf{W}_2^1(\Omega)$. Обобщенное решение задачи (1) ведет себя тем же образом [2], что и решение обычного параболического уравнения.

В последнее время [3] появились новые численные методы решения жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений, позволяющие существенно

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 01-01-00263) и программы “Университеты России” Минобразования РФ (грант № УР.04.03.002).

увеличить средний шаг интегрирования, которые особенно эффективны при решении нестационарных задач математической физики методом прямых. Поэтому возникает вопрос о возможности применения этих методов к решению уравнений Навье–Стокса. Однако система уравнений (1) не является системой типа Коши–Ковалевской. В связи с этим многими авторами предлагались и исследовались аппроксимации задачи (1) системой типа Коши–Ковалевской (см. [1], [4]–[7] и цитированную там литературу). В частности, во всех цитировавшихся выше работах в качестве системы, аппроксимирующей исходную, рассматривалась система вида

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_t - \Delta \mathbf{v} + \nabla q &= \mathbf{0}, \quad \varepsilon^2 q_t + \delta q + \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \\ \mathbf{v}|_{\partial\Omega \times [0, T]} &= \mathbf{0}, \quad \mathbf{v}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x). \end{aligned} \quad (2)$$

Если $\varepsilon \neq 0$, то мы также должны задать начальное условие для давления $q(x, 0) = q_0(x)$, $(q_0, 1) = 0$.

Метод аппроксимации (2) при $\delta > 0$, $\varepsilon = 0$ называется *методом со штрафом*, а при $\delta = 0$, $\varepsilon > 0$ – *методом искусственной сжимаемости*.

После замены εq на q оператор в (2) по пространственным переменным в матричной форме может быть записан в виде

$$A = \begin{pmatrix} -\Delta & \frac{1}{\varepsilon} \nabla \\ \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div} & \frac{\delta}{\varepsilon^2} I \end{pmatrix}.$$

Отсюда видно, что этот оператор несимметричен на $\overset{\circ}{\mathbf{W}}_2^1 \times L_2$, в то время как пространственный оператор исходной задачи (1) на $\mathbf{H}$ является симметричным.

Изменение знака в эллиптической части второго уравнения также не улучшает ситуацию, так как оператор A не будет знакоопределенным (хотя и симметричным).

Посмотрим, что дает элементарная симметризация A . Изменим знак перед вторым членом во втором уравнении (2), т. е. заменим его на

$$\varepsilon^2 \frac{\partial q}{\partial t} + \delta q - \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

В этом случае получаем симметричный оператор

$$A_s = \begin{pmatrix} -\Delta & \frac{1}{\varepsilon} \nabla \\ -\frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div} & \frac{\delta}{\varepsilon^2} I \end{pmatrix}.$$

Пусть $\mathbf{w} = (\mathbf{v}, q)^T$. Тогда

$$(A_s \mathbf{w}, \mathbf{w}) = (-\Delta \mathbf{v}, \mathbf{v}) + \frac{\delta}{\varepsilon^2} (q, q) - \frac{2}{\varepsilon} (\operatorname{div} \mathbf{v}, q).$$

Покажем, что оператор A_s не является знакоопределенным. Действительно, зафиксируем $\mathbf{v} \in \overset{\circ}{\mathbf{W}}_2^1$, $\operatorname{div} \mathbf{v} \neq 0$, и положим $q = \alpha \operatorname{div} \mathbf{v}$. Тогда для $\mathbf{w} = (\mathbf{v}, q)^T$ имеем

$$(A_s \mathbf{w}, \mathbf{w}) = \|\mathbf{v}\|_1^2 + \left(\frac{\delta \alpha^2}{\varepsilon^2} - \frac{2\alpha}{\varepsilon} \right) \|\operatorname{div} \mathbf{v}\|^2.$$

Выберем $\delta = \varepsilon/\alpha$. В этом случае

$$(A_s \mathbf{w}, \mathbf{w}) = \|\mathbf{v}\|_1^2 - \frac{\alpha}{\varepsilon} \|\operatorname{div} \mathbf{v}\|^2.$$

Правая часть этого соотношения при достаточно большом α будет отрицательной.

С другой стороны, для $\mathbf{w} = (\mathbf{v}, 0)^T$ имеем $(A_s \mathbf{w}, \mathbf{w}) = \|\mathbf{v}\|_1^2 > 0$, т.е. оператор A_s действительно не является знакоопределенным.

В то же время для оператора A имеем $(A \mathbf{w}, \mathbf{w}) = (-\Delta \mathbf{v}, \mathbf{v}) + \delta(q, q)$, т.е. A является положительно определенным при $\delta > 0$ и неотрицательным при $\delta = 0$. Используя inf-sup условие [5], [8], [9], можно показать, что уравнение $A \mathbf{w} = (\mathbf{g}, 0)^T$ всегда имеет единственное обобщенное решение на $\overset{\circ}{\mathbf{W}}_2^1 \times L_2/\mathbb{R}$ при любом неотрицательном δ .

Таким образом, из сказанного выше следует, что тривиальная симметричная аппроксимация задачи (1) ничего хорошего не дает.

Отметим, что для случая $\delta > 0$, $\varepsilon = 0$ из [2] следует справедливость оценки

$$\max_t \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|^2 + \int_0^\infty \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|_1^2 dt + \delta \int_0^\infty \|q - p\|^2 dt \leq c\delta \|\mathbf{u}_0\|_1^2, \quad (3)$$

где постоянная c зависит только от области. Если $\delta = 0$, $\varepsilon > 0$, то оценку (3) с такой же зависимостью постоянной в правой части неравенства получить не удастся. Это говорит о том, что метод со штрафом в каком-то смысле “лучше” метода искусственной сжимаемости.

Кроме этого, как будет показано далее, решение задачи (2) в силу несимметричности оператора содержит осциллирующие по времени компоненты, отсутствующие в решении исходной задачи.

Таким образом, целью работы является построение параболической системы уравнений, аппроксимирующей уравнения Навье–Стокса, на основе метода искусственной сжимаемости таким образом, чтобы эллиптический оператор был симметричен и для решения аппроксимирующей задачи имела место оценка (3).

§ 1. Модельная задача

Для лучшего понимания дальнейших рассуждений рассмотрим стационарную задачу Стокса

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f}, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0, \quad \mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \mathbf{0}, \quad (p, 1) = 0 \end{aligned}$$

и будем строить для этой задачи итерационный метод. Согласно [10] итерационный метод будем искать в виде полностью неявной двухслойной схемы:

$$B \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\tau} - \Delta \mathbf{u}^{n+1} + \nabla p^{n+1} = \mathbf{f}, \quad (4)$$

$$\beta(p^{n+1} - p^n) + \operatorname{div} \mathbf{u}^{n+1} = 0, \quad \mathbf{u}^{n+1}|_{\partial\Omega} = \mathbf{0}$$

(здесь β и τ – итерационные параметры, B – переобуславливатель, $\mathbf{u}^0$ – произвольная функция из $\overset{\circ}{\mathbf{W}}_2^1$, а $p^0 \in L_2/\mathbb{R}$).

Рассмотрим алгоритм реализации метода (4). Из второго уравнения имеем

$$p^{n+1} = p^n - \frac{1}{\beta} \operatorname{div} \mathbf{u}^{n+1}.$$

Подставляя это выражение в первое уравнение (4), получаем

$$B \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\tau} - \Delta \mathbf{u}^{n+1} - \frac{1}{\beta} \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}^{n+1} + \nabla p^n = \mathbf{f},$$

что с учетом соотношения $\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \tau \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\tau}$ эквивалентно

$$\begin{aligned} \left(B - \tau \Delta - \frac{\tau}{\beta} \nabla \operatorname{div} \right) \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\tau} &= \Delta \mathbf{u}^n + \frac{1}{\beta} \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}^n - \nabla p^n + \mathbf{f}, \\ p^{n+1} &= p^n - \frac{1}{\beta} \operatorname{div} \mathbf{u}^{n+1}, \quad \mathbf{u}^{n+1}|_{\partial\Omega} = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (5)$$

Таким образом, если выбрать $B - \tau \Delta - \frac{\tau}{\beta} \nabla \operatorname{div} = -\Delta$, то для нахождения $\mathbf{u}^{n+1}$ по известным $\mathbf{u}^n, p^n$ необходимо решить уравнение Пуассона, после чего p^{n+1} находится из второго уравнения (5) по явной формуле.

Справедлива [10] следующая

ТЕОРЕМА 1. Пусть оператор B симметричен, неотрицателен и имеет место (в смысле квадратичных форм) неравенство

$$B \leqslant -\kappa \Delta. \quad (6)$$

Тогда итерационный метод (5) сходится со скоростью геометрической прогрессии и имеет место оценка

$$\|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}\|_1^2 + \beta \tau \|p^n - p\|^2 \leqslant (1 + c\tau)^{-1} (\|\mathbf{u}^{n-1} - \mathbf{u}\|_1^2 + \beta \tau \|p^{n-1} - p\|^2).$$

В частности, если в качестве B использовать оператор $B = -\Delta + \tau \Delta + \frac{\tau}{\beta} \nabla \operatorname{div}$, то выполнение условия

$$\tau \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \leqslant 1$$

обеспечивает неотрицательность оператора B и справедливость (6) с постоянной $\varkappa = 1$.

Итерационный метод (5) отличается от известного метода Эрроу–Гурвица [5] наличием в правой части члена $\nabla \operatorname{div} \mathbf{u}^n$, который обращается в нуль на соленоидальных функциях. Численные эксперименты и более детальный анализ [11] показали, что наличие такого члена ускоряет сходимость итерационного процесса примерно в полтора раза в линейном случае и более чем на порядок в нелинейном. Таким образом, есть основание ожидать, что добавление этого члена в аппроксимирующие уравнения в нестационарном случае также будет эффективно.

Выясним, каких результатов можно ожидать на этом пути. Для этого рассмотрим задачу Стокса в квадрате $\Omega = \{x = (x_1, x_2) : 0 < x_i < \pi, i = 1, 2\}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t - \Delta \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{0}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ в } \Omega, \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} &= \frac{\partial(\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau})}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ на } \partial\Omega, \quad \mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x), \quad (p, 1) = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

(здесь $\mathbf{n}$ и $\boldsymbol{\tau}$ – единичные векторы внешней нормали и касательной к $\partial\Omega$). Краевые условия в (7) позволяют продолжить задачу периодически на все пространство $\mathbb{R}^2$, что дает возможность применить для ее исследования метод Фурье [12].

Наряду с (7) рассмотрим также возмущенную задачу

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_t - \Delta \mathbf{v} - \frac{\gamma}{\varepsilon} \nabla \operatorname{div} \mathbf{v} + \nabla q &= \mathbf{0}, \\ \varepsilon^2 q_t + \delta q \pm \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} &= \frac{\partial(\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau})}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ на } \partial\Omega, \quad \mathbf{v}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x) \end{aligned} \quad (8)$$

(здесь ε, γ и δ – параметры).

Заметим, что при $\varepsilon \neq 0$ необходимо задавать также начальное условие для функции давления. Для простоты в этом случае будем считать, что

$$q(x, 0) = 0.$$

Далее мы будем рассматривать случай $\varepsilon > 0$, поскольку случай $\varepsilon = 0$ уже был ранее подробно исследован (см., например, [5], [7]). Знак “+” во втором уравнении соответствует классической аппроксимации, которая является несимметричной, в то время как знак “–” соответствует симметричной аппроксимации. Отметим, что ранее в аппроксимирующих уравнениях рассматривался только знак “+”.

Исследуем сначала спектр оператора задачи Стокса

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{v} + \nabla q &= \lambda \mathbf{v}, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

В данном параграфе через $\mathbf{H}$ обозначим пространство, получающееся в результате замыкания в норме $\mathbf{W}_2^1$ соленоидальных вектор-функций, удовлетворяющих краевым условиям из (7). Непосредственно можно убедиться, что каждому мультииндексу $k = (k_1, k_2)$, $k_i \geq 0$, $i = 1, 2$, соответствует собственное значение задачи (9)

$\lambda_k = |k|^2 = k_1^2 + k_2^2$ и соответствующая ему собственная вектор-функция имеет вид $\mathbf{v}_k = (v^1, v^2)$, где

$$v^1(x, y) = k_2 \sin k_1 x \cos k_2 y, \quad v^2(x, y) = -k_1 \cos k_1 x \sin k_2 y; \quad (10)$$

при этом $q = 0$. Поскольку функции $\mathbf{v}$ вида (10) образуют базис в пространстве $\mathbf{H}$, то мы нашли все собственные значения и соответствующие им собственные функции задачи (9).

Исследуем теперь спектр эллиптического оператора возмущенной задачи (7). Заменяя εq новой функцией (которую будем обозначать той же буквой q), получаем

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{v} - \frac{\gamma}{\varepsilon} \nabla \operatorname{div} \mathbf{v} + \frac{1}{\varepsilon} \nabla q &= \lambda \mathbf{v}, \\ \frac{\delta}{\varepsilon^2} q \pm \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div} \mathbf{v} &= \lambda q. \end{aligned} \quad (11)$$

Будем искать собственные функции (11) в виде

$$v^1 = \alpha \sin k_1 x \cos k_2 y, \quad v^2 = \beta \cos k_1 x \sin k_2 y, \quad q = \vartheta \cos k_1 x \cos k_2 y,$$

где α, β и ϑ — неизвестные коэффициенты. Заметим, что тройка параметров $(\alpha, \beta, \vartheta)$ определяется с точностью до множителя. Подставляя это представление в (11), получаем

$$\begin{aligned} \alpha |k|^2 + \frac{\gamma}{\varepsilon} (k_1^2 \alpha + k_1 k_2 \beta) - \frac{\vartheta}{\varepsilon} k_1 &= \lambda \alpha, \\ \beta |k|^2 + \frac{\gamma}{\varepsilon} (k_1 k_2 \alpha + k_2^2 \beta) - \frac{\vartheta}{\varepsilon} k_2 &= \lambda \beta, \\ \frac{\delta}{\varepsilon^2} \vartheta \pm \frac{1}{\varepsilon} (k_1 \alpha + k_2 \beta) &= \lambda \vartheta. \end{aligned} \quad (12)$$

Если $\vartheta = 0$, то из третьего уравнения (12) имеем $\alpha = k_2, \beta = -k_1$. Таким образом, полученные собственные функции (и соответствующие им собственные значения) являются собственными функциями задачи Стокса (10) (что, собственно, и так было очевидно из вида задачи (11)).

В дальнейшем будем рассматривать случай $\vartheta \neq 0$. Из третьего уравнения (12) имеем

$$\vartheta = \mp \frac{k_1 \alpha + k_2 \beta}{\varepsilon (\delta / \varepsilon^2 - \lambda)}. \quad (13)$$

Случай $\delta / \varepsilon^2 - \lambda = 0$ невозможен, так как при этом $\alpha = k_2, \beta = -k_1$ и из первых двух уравнений (12) следует $\vartheta = 0$ (т.е. мы приходим к противоречию с предположением, что $\vartheta \neq 0$).

Подставляя выражение для ϑ из (13) в первые два уравнения (12), после элементарных преобразований получаем

$$\begin{aligned} \alpha \lambda^2 - \left(\alpha |k|^2 + \frac{\gamma k_1}{\varepsilon} (k_1 \alpha + k_2 \beta) + \frac{\delta \alpha}{\varepsilon^2} \right) \lambda \pm k_1 \frac{k_1 \alpha + k_2 \beta}{\varepsilon^2} \\ + \frac{\delta}{\varepsilon^2} \left(\alpha |k|^2 + \frac{\gamma k_1}{\varepsilon} (k_1 \alpha + k_2 \beta) \right) &= 0, \\ \beta \lambda^2 - \left(\beta |k|^2 + \frac{\gamma k_2}{\varepsilon} (k_1 \alpha + k_2 \beta) + \frac{\delta \beta}{\varepsilon^2} \right) \lambda \pm k_2 \frac{k_1 \alpha + k_2 \beta}{\varepsilon^2} \\ + \frac{\delta}{\varepsilon^2} \left(\beta |k|^2 + \frac{\gamma k_2}{\varepsilon} (k_1 \alpha + k_2 \beta) \right) &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Рассмотрим сначала случай классической аппроксимации $\gamma = 0$. Тогда система (14) принимает вид

$$\begin{aligned} \alpha\lambda^2 - \left(\alpha|k|^2 + \frac{\delta\alpha}{\varepsilon^2}\right)\lambda \pm k_1\frac{k_1\alpha + k_2\beta}{\varepsilon^2} + \frac{\delta\alpha}{\varepsilon^2}|k|^2 &= 0, \\ \beta\lambda^2 - \left(\beta|k|^2 + \frac{\delta\beta}{\varepsilon^2}\right)\lambda \pm k_2\frac{k_1\alpha + k_2\beta}{\varepsilon^2} + \frac{\delta\beta}{\varepsilon^2}|k|^2 &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Умножая первое уравнение (15) на β , а второе – на α , после вычитания полученных равенств имеем

$$(\alpha k_1 + \beta k_2)(\beta k_1 - \alpha k_2) = 0.$$

Это уравнение имеет два решения: $\alpha = k_2, \beta = -k_1$ и $\alpha = k_1, \beta = k_2$. Первый случай уже рассматривался выше. Пусть $\alpha = k_1, \beta = k_2$. Тогда из (15) имеем

$$\lambda^2 - \left(|k|^2 + \frac{\delta}{\varepsilon^2}\right)\lambda + \frac{\delta}{\varepsilon^2}|k|^2 \pm \frac{|k|^2}{\varepsilon^2} = 0. \quad (16)$$

При знаке “+” для любых $\varepsilon, \delta > 0, 0 < \varepsilon < \varepsilon_0, 0 \leq \delta < \delta_0$, существует k , при котором дискриминант этого уравнения отрицателен. Это означает появление осциллирующих составляющих в решении модифицированной задачи (8), которые отсутствовали в исходном решении.

Действительно,

$$D = \left(|k|^2 - \frac{\delta}{\varepsilon^2}\right)^2 - 4\frac{|k|^2}{\varepsilon^2}.$$

При $\delta/\varepsilon^2 \leq 1$ и $\varepsilon < 1$ очевидно, что $D < 0$ для значений k , удовлетворяющих соотношению $|k|^2 \leq 4/\varepsilon^2$.

Пусть теперь $\delta/\varepsilon^2 \geq 1$. Возьмем мультииндекс k такой, что разность $||k|^2 - \delta/\varepsilon^2|$ будет минимальной. Тогда величина $(|k|^2 - \delta/\varepsilon^2)^2$ будет иметь порядок δ/ε^2 , откуда следует, что при малых ε и δ существует k , для которого дискриминант D также меньше нуля.

При знаке “–” дискриминант уравнения (16) всегда положителен, однако корни будут разного знака. Это означает появление растущих компонент решения, в то время как решение исходной задачи стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$.

Таким образом, из вышесказанного следует, что при $\gamma = 0$ (случай классической аппроксимации) недопустимо добавление во второе уравнение члена q_t с малым параметром, так как это приводит к качественно иному поведению решения.

Исследуем теперь случай $\gamma \neq 0$. Обозначим $A = (k_1\alpha + k_2\beta)/\varepsilon$. Тогда система уравнений (14) примет более наглядный вид

$$\begin{aligned} \alpha\lambda^2 - \left(\alpha|k|^2 + \gamma k_1 A + \frac{\delta\alpha}{\varepsilon^2}\right)\lambda \pm \frac{k_1 A}{\varepsilon} + \frac{\delta\alpha}{\varepsilon^2}|k|^2 + \frac{\delta\gamma k_1}{\varepsilon^2} A &= 0, \\ \beta\lambda^2 - \left(\beta|k|^2 + \gamma k_2 A + \frac{\delta\beta}{\varepsilon^2}\right)\lambda \pm \frac{k_2 A}{\varepsilon} + \frac{\delta\beta}{\varepsilon^2}|k|^2 + \frac{\delta\gamma k_2}{\varepsilon^2} A &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Рассмотрим несколько случаев. Пусть $A = 0$. Это означает, что $k_1\alpha + k_2\beta = 0$, т.е. $\alpha = k_2$, $\beta = -k_1$, что уже рассматривалось ранее.

Далее, пусть $A \neq 0$ и $k_2\alpha - k_1\beta \neq 0$. Тогда, умножая первое уравнение (17) на β , а второе – на α , после вычитания получаем

$$\lambda = \frac{1}{\gamma\varepsilon} \left(\frac{\delta\gamma}{\varepsilon} \pm 1 \right),$$

т.е. при этих предположениях может существовать только одно собственное значение. На самом деле этот случай не имеет места. Действительно, умножая первое уравнение (17) на k_2 , а второе – на k_1 , после вычитания соответствующих выражений получаем

$$\lambda^2 - \left(|k|^2 + \frac{\delta}{\varepsilon^2} \right) \lambda + \frac{\delta}{\varepsilon^2} |k|^2 = 0,$$

откуда

$$\lambda_{1,2} = |k|^2, \frac{\delta}{\varepsilon^2},$$

что не совпадает с полученным выше выражением.

Итак, осталось исследовать третий случай $A \neq 0$ и $k_2\alpha - k_1\beta = 0$. Тогда можно положить $\alpha = k_1$, $\beta = k_2$, и система уравнений (17) сводится к одному уравнению

$$\lambda^2 - \left(|k|^2 + \gamma A + \frac{\delta}{\varepsilon^2} \right) \lambda \pm \frac{A}{\varepsilon} + \frac{\delta A}{\varepsilon} + \frac{\delta\gamma A}{\varepsilon^2} = 0. \quad (18)$$

Корни (18) имеют вид

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(|k|^2 + \gamma A + \frac{\delta}{\varepsilon^2} \pm \sqrt{\left(|k|^2 + \gamma A + \frac{\delta}{\varepsilon^2} \right)^2 \mp 4\frac{A}{\varepsilon} - 4\delta\frac{A}{\varepsilon} - 4\delta\gamma\frac{A}{\varepsilon^2}} \right).$$

Из этого представления следует, что корни (18) будут действительны и положительны при выполнении неравенств

$$D \geq 0, \quad \pm 1 + \delta + \delta\frac{\gamma}{\varepsilon} \geq 0,$$

где D – дискриминант квадратного уравнения (18).

Рассмотрим подробно оба случая.

В случае классической аппроксимации (знак “+”) второе неравенство выполнено при любом $\gamma \geq 0$. Вычисляя дискриминант уравнения (18), убеждаемся, что неравенство $D \geq 0$ эквивалентно соотношению

$$A^2\gamma^2 - 2A\left(\frac{\delta}{\varepsilon^2} - |k|^2\right)\gamma + \frac{\delta^2}{\varepsilon^4} + |k|^4 \mp 4\frac{A}{\varepsilon} - 2\frac{A\delta}{\varepsilon} \geq 0. \quad (19)$$

Рассматривая выражение в левой части (19) как квадратный трехчлен относительно γ , заключаем, что неравенство будет выполнено, если дискриминант этого трехчлена меньше нуля, либо γ должно удовлетворять условию $\gamma \geq \gamma_1$, где γ_1 –

больший корень данного квадратного трехчлена. Дискриминант D_0 этого трехчлена при знаке “–” равен $D_0 = 4A^3/\varepsilon > 0$. Отсюда следует, что в случае несимметричной аппроксимации корни будут действительны и неотрицательны, если выполнено условие $\gamma \geq \gamma_1$. Но

$$\gamma_1 = \frac{\delta/\varepsilon - \varepsilon|k|^2 + 2|k|}{|k|^2}.$$

Отсюда видно, что при любых ε и δ можно выбрать γ_2 (например, $\gamma_2 = \delta/\varepsilon + 2$) такое, что больший корень γ_1 квадратного трехчлена (19) при всех k будет удовлетворять неравенству $\gamma_1 \leq \gamma_2$. Отсюда следует, что в случае несимметричной аппроксимации всегда можно выбрать γ , чтобы корни (18) были действительны и положительны при всех $\varepsilon < \varepsilon_0$, $\delta < \delta_0$. Это означает отсутствие осциллирующих по времени решений возмущенной задачи.

В случае симметричной аппроксимации неравенство $D \geq 0$ эквивалентно выполнению соотношения

$$A^2\gamma^2 - 2A\left(\frac{\delta}{\varepsilon^2} - |k|^2\right)\gamma + \frac{\delta^2}{\varepsilon^4} + |k|^4 + 4\frac{A}{\varepsilon} - 2\frac{A\delta}{\varepsilon} \geq 0.$$

Поскольку дискриминант D_0 квадратного трехчлена, стоящего в левой части, равен $D_0 = -4A^3/\varepsilon < 0$, то условие $D \geq 0$ выполняется всегда. Второе соотношение $-1 + \delta + \delta\gamma/\varepsilon \geq 0$ влечет ограничение на γ :

$$\gamma \geq \frac{\varepsilon}{\delta} - \varepsilon.$$

Таким образом, в случае симметричной аппроксимации, выбирая $\gamma \geq \varepsilon/\delta$, получаем систему аппроксимирующих уравнений, в решении которой отсутствуют осциллирующие компоненты.

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что при $\delta = 0$ ни при каком γ нельзя добиться, чтобы корни (19) при любом k были действительны и неотрицательны.

Таким образом, из проведенных выше рассмотрений следует, что *введение в уравнение движения члена $\gamma \nabla \operatorname{div} \mathbf{v}$ позволяет изменить знак в возмущенном уравнении неразрывности перед членом $\operatorname{div} \mathbf{v}$ таким образом, что оператор по пространственным переменным будет симметричным и положительно определенным.*

§ 2. Линейная нестационарная задача

Рассмотрим нестационарную задачу Стокса

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t - \Delta \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{0}, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0, \quad \mathbf{u}|_{\partial\Omega \times [0, T]} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x), \\ \mathbf{u}_0 &\in \overset{\circ}{\mathbf{W}}_2^1, \quad \operatorname{div} \mathbf{u}_0 = 0, \quad (p(t), 1) = 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Пусть $Q_T = \Omega \times (0, T)$. Через $\overset{\circ}{\mathbf{V}}_2^{1,0}(Q_T)$ обозначим банахово пространство, полученное в результате замыкания множества гладких, равных нулю на $\partial\Omega \times [0, T]$ функций по норме

$$\|\mathbf{v}\|_{Q_T} = \max_{0 \leq t \leq T} \|\mathbf{v}(x, t)\|_{L_2(\Omega)} + \|\nabla \mathbf{v}\|_{L_2(Q_T)},$$

а через $\overset{\circ}{\mathbf{W}}_2^{1,1}(Q_T)$ обозначим банахово пространство, получающееся замыканием множества гладких функций, равных нулю на $\partial\Omega \times [0, T]$, в норме пространства $\mathbf{W}_2^1(Q_T)$. *Обобщенным решением* [1] задачи (20) из класса $\overset{\circ}{\mathbf{V}}_2^{1,0}(Q_T)$ назовем функцию $\mathbf{u} \in \overset{\circ}{\mathbf{V}}_2^{1,0}(Q_T)$, $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$, для которой справедливо равенство

$$\int_{Q_T} (-\mathbf{u} \mathbf{w}_t + \nabla \mathbf{u} \nabla \mathbf{w}) \, dx \, d\tau + \int_{\Omega} \mathbf{u}(x, t) \mathbf{w}(x, t) \, dx - \int_{\Omega} \mathbf{u}_0(x) \mathbf{w}(x, 0) \, dx = 0$$

при всех $\mathbf{w} \in \overset{\circ}{\mathbf{W}}_2^{1,1}(Q_T)$, $\operatorname{div} \mathbf{w} = 0$. Обобщенное решение задачи (20) существует и единственно [1]. При этом p лежит в пространстве функций, непрерывных по t и при каждом t принадлежащих пространству $L_2(\Omega)/\mathbb{R}$.

Получим априорные оценки для решения (20). Умножая первое уравнение скалярно на $\mathbf{u}$ и интегрируя по t от 0 до t , с учетом второго уравнения получаем

$$\frac{1}{2} \|\mathbf{u}(t)\|^2 + \int_0^t \|\mathbf{u}(\tau)\|_1^2 \, d\tau = \frac{1}{2} \|\mathbf{u}(0)\|^2. \quad (21)$$

Умножая первое уравнение скалярно на $\mathbf{u}_t$ и интегрируя по t от 0 до t , получаем вторую априорную оценку для решения задачи (20)

$$\int_0^t \|\mathbf{u}_t\|^2 \, d\tau + \frac{1}{2} \|\mathbf{u}(t)\|_1^2 = \frac{1}{2} \|\mathbf{u}(0)\|_1^2. \quad (22)$$

Из первого уравнения (20) можно получить также априорную оценку для p , используя inf-sup неравенство. Действительно, из первого уравнения (20) тривиальным образом следует оценка

$$\|p(t)\| \leq c_0 (\|\mathbf{u}(t)\|_1 + \|\mathbf{u}_t\|_{-1}), \quad \text{где} \quad \|\mathbf{v}\|_{-1} \equiv \sup_{\mathbf{h} \in \overset{\circ}{\mathbf{W}}_2^1} \frac{(\mathbf{v}, \mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|_1}.$$

Возводя обе части в квадрат и оценивая правую часть, получаем

$$\|p(t)\|^2 \leq 2c_0^2 (\|\mathbf{u}(t)\|_1^2 + \|\mathbf{u}_t\|_{-1}^2).$$

Интегрируя обе части последнего соотношения по t от 0 до t и используя (21) и (22), имеем окончательную оценку для функции давления

$$\int_0^t \|p(\tau)\|^2 \, d\tau \leq c \|\mathbf{u}_0\|_1^2, \quad (23)$$

постоянная c в (23) не зависит от t .

Рассмотрим возмущенную симметричным образом задачу, добавляя в первое уравнение член $\nabla \operatorname{div} \mathbf{v}$ с некоторым коэффициентом и изменяя стандартным образом второе уравнение:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_t - \Delta \mathbf{v} - \frac{1+\gamma}{\varepsilon} \nabla \operatorname{div} \mathbf{v} + \nabla q &= \mathbf{0}, \\ \varepsilon^2 q_t + \varepsilon q - \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, \\ \mathbf{v}|_{\partial\Omega \times [0, T]} &= \mathbf{0}, \quad \mathbf{v}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x), \quad q(x, 0) = 0, \quad \gamma > 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Обобщенным решением задачи (24) назовем пару функций $\mathbf{v}, q$, которые при всех t принадлежат пространствам $\mathring{\mathbf{W}}_2^1(\Omega)$ и $L_2(\Omega)/\mathbb{R}$ и которые для всех достаточно гладких функций $\mathbf{w}$ и r таких, что при любом t функция $\mathbf{w}(x, t) = \mathbf{0}$ на $\partial\Omega$, а $r(x, t) \in L_2/\mathbb{R}$, удовлетворяют соотношению

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} \left(-\mathbf{v} \mathbf{w}_t + \nabla \mathbf{v} \nabla \mathbf{w} + \frac{1+\gamma}{\varepsilon} \operatorname{div} \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{w} - q \operatorname{div} \mathbf{w} - r \operatorname{div} \mathbf{v} - \varepsilon^2 q r_t + \varepsilon q r \right) dx d\tau \\ + \int_{\Omega} (\mathbf{v}(x, t) \mathbf{w}(x, t) + \varepsilon^2 q(x, t) r(x, t)) dx - \int_{\Omega} \mathbf{u}_0(x) \mathbf{w}(x, 0) dx = 0. \end{aligned}$$

Получим аналогичные априорные оценки для решения (24). Умножая первое уравнение скалярно на $\mathbf{v}$, а второе – скалярно на q , складывая результаты и интегрируя по t от 0 до t , получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\mathbf{v}(t)\|^2 - \frac{1}{2} \|\mathbf{v}(0)\|^2 + \int_0^t \left(\|\mathbf{v}(\tau)\|_1^2 + \frac{1+\gamma}{\varepsilon} \|\operatorname{div} \mathbf{v}(\tau)\|^2 \right) d\tau \\ + \frac{\varepsilon^2}{2} \|q(t)\|^2 + \varepsilon \int_0^t \|q(\tau)\|^2 d\tau - 2 \int_0^t (q, \operatorname{div} \mathbf{v}) d\tau = 0. \end{aligned}$$

Оценивая последний интеграл при помощи ε -неравенства с весами $\frac{2\varepsilon}{2+\gamma}$ и $\frac{2+\gamma}{2\varepsilon}$, имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\mathbf{v}(t)\|^2 + \int_0^t \left(\|\mathbf{v}(\tau)\|_1^2 + \frac{\gamma}{2\varepsilon} \|\operatorname{div} \mathbf{v}(\tau)\|^2 \right) d\tau \\ + \frac{\varepsilon^2}{2} \|q(t)\|^2 + \frac{\gamma\varepsilon}{2+\gamma} \int_0^t \|q(\tau)\|^2 d\tau \leq \frac{1}{2} \|\mathbf{v}(0)\|^2. \end{aligned} \quad (25)$$

Далее, умножая первое уравнение скалярно на $\mathbf{v}_t$, а второе – скалярно на q_t , складывая результаты и интегрируя по t от 0 до t , получаем

$$\begin{aligned} \int_0^t \|\mathbf{v}_t(\tau)\|^2 d\tau + \frac{1}{2} \|\mathbf{v}(t)\|_1^2 - \frac{1}{2} \|\mathbf{v}(0)\|_1^2 + \frac{1+\gamma}{\varepsilon} \|\operatorname{div} \mathbf{v}(t)\|^2 - \frac{1+\gamma}{\varepsilon} \|\operatorname{div} \mathbf{v}(0)\|^2 \\ + \varepsilon^2 \int_0^t \|q_t(\tau)\|^2 d\tau + \frac{\varepsilon}{2} \|q(t)\|^2 - (q(t), \operatorname{div} \mathbf{v}(t)) = 0. \end{aligned}$$

Здесь мы использовали симметричность оператора, а именно:

$$\begin{aligned} \int_0^t (\mathbf{v}_t, \nabla q) d\tau &= - \int_{\Omega} dx \left(\int_0^t \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{v} \cdot q d\tau \right) \\ &= - \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{v}(x, t) q(x, t) dx + \int_{\Omega} dx \left(\int_0^t q_t \operatorname{div} \mathbf{v} d\tau \right) \\ &= \int_0^t (\operatorname{div} \mathbf{v}, q_t) d\tau - (\operatorname{div} \mathbf{v}(t), q(t)). \end{aligned}$$

Учитывая условие $\mathbf{v}(0) = \mathbf{u}_0$ и тот факт, что $\operatorname{div} \mathbf{u}_0 = 0$, после оценки скалярного произведения при помощи ε -неравенства с весами $\frac{3+2\gamma}{8(1+\gamma)}\varepsilon$ и $\frac{2(1+\gamma)}{\varepsilon(3+2\gamma)}$ имеем

$$\begin{aligned} \int_0^t \|\mathbf{v}_t(\tau)\|^2 d\tau + \frac{1}{2} \|\mathbf{v}(t)\|_1^2 + \frac{(2\gamma+1)(\gamma+1)}{\varepsilon(3+2\gamma)} \|\operatorname{div} \mathbf{v}(t)\|^2 \\ + \varepsilon^2 \int_0^t \|q_t(\tau)\|^2 d\tau + \frac{1+2\gamma}{8(1+\gamma)} \varepsilon \|q(t)\|^2 \leq \frac{1}{2} \|\mathbf{u}_0\|_1^2. \end{aligned} \quad (26)$$

Исследуем близость решений задач (20) и (24). Погрешность $\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$, $r = q - p$ удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_t - \Delta \mathbf{w} - \frac{1+\gamma}{\varepsilon} \nabla \operatorname{div} \mathbf{w} + \nabla r &= \mathbf{0}, \\ \varepsilon^2 q_t + \varepsilon q - \operatorname{div} \mathbf{w} &= 0, \quad \mathbf{w}|_{\partial\Omega \times [0, T]} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{w}(x, 0) = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (27)$$

Умножая обе части первого уравнения (27) скалярно на $\mathbf{w}$, а второе — на r , после сложения результатов получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{w}(t)\|^2 + \|\mathbf{w}(t)\|_1^2 + \frac{1+\gamma}{\varepsilon} \|\operatorname{div} \mathbf{w}(t)\|^2 \\ - 2(r, \operatorname{div} \mathbf{w}) + \varepsilon^2 (q_t, r) + \varepsilon \|r(t)\|^2 + \varepsilon (p, r) = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Оценим скалярные произведения в полученном соотношении. Имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon |(p, r)| &\leq \frac{\gamma\varepsilon}{4(\gamma+1)} \|r\|^2 + \frac{(\gamma+1)\varepsilon}{\gamma} \|p\|^2, \\ 2|(r, \operatorname{div} \mathbf{w})| &\leq \frac{2+\gamma}{2(\gamma+1)} \varepsilon \|r\|^2 + \frac{2(\gamma+1)}{\varepsilon(2+\gamma)} \|\operatorname{div} \mathbf{w}\|^2. \end{aligned}$$

С учетом этих оценок из (28) следует неравенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{w}(t)\|^2 + \|\mathbf{w}(t)\|_1^2 + \frac{\gamma(\gamma+1)}{\varepsilon(2+\gamma)} \|\operatorname{div} \mathbf{w}(t)\|^2 \\ + \frac{\gamma\varepsilon}{4(\gamma+1)} \|r(t)\|^2 + \varepsilon^2 (q_t, r) - \frac{\gamma+1}{\gamma} \varepsilon \|p(t)\|^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Проинтегрируем последнее неравенство по t от 0 до t

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\mathbf{w}(t)\|^2 + \int_0^t \|\mathbf{w}(\tau)\|_1^2 d\tau + \frac{\gamma(\gamma+1)}{\varepsilon(2+\gamma)} \int_0^t \|\operatorname{div} \mathbf{w}(\tau)\|^2 d\tau \\ + \frac{\gamma\varepsilon}{4(\gamma+1)} \int_0^t \|r(\tau)\|^2 d\tau + \varepsilon^2 \int_0^t (q_t, r) d\tau - \frac{\gamma+1}{\gamma} \varepsilon \int_0^t \|p(\tau)\|^2 d\tau \leq 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Оценим два последних члена в (29). Из (23) следует

$$\varepsilon \int_0^t \|p(\tau)\|^2 d\tau \leq c\varepsilon (\|\mathbf{u}(0)\|_1^2 + \|\mathbf{u}(0)\|^2),$$

далее

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \left| \int_0^t (q_t, r) d\tau \right| &\leq \varepsilon^2 \int_0^t \|q_t\| \|r\| d\tau \\ &\leq \frac{2(\gamma+1)}{\gamma} \varepsilon^3 \int_0^t \|q_t(\tau)\|^2 d\tau + \frac{\gamma\varepsilon}{8(\gamma+1)} \int_0^t \|r(\tau)\|^2 d\tau \\ &\leq \frac{\gamma+1}{\gamma} \varepsilon \|\mathbf{u}_0\|_1^2 + \frac{\gamma\varepsilon}{8(\gamma+1)} \int_0^t \|r\|^2 d\tau. \end{aligned}$$

С учетом этих оценок из (29) получаем неравенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\mathbf{w}(t)\|^2 + \int_0^t \|\mathbf{w}(\tau)\|_1^2 d\tau + \frac{\gamma(\gamma+1)}{\varepsilon(2+\gamma)} \int_0^t \|\operatorname{div} \mathbf{w}(\tau)\|^2 d\tau \\ + \frac{\gamma\varepsilon}{8(\gamma+1)} \int_0^t \|r(\tau)\|^2 d\tau \leq c\varepsilon (\|\mathbf{u}_0\|_1^2 + \|\mathbf{u}_0\|^2), \end{aligned}$$

откуда следует окончательная оценка (ср. [2], [13])

$$\begin{aligned} \max_t \|\mathbf{w}(t)\|^2 + \int_0^\infty \|\mathbf{w}(\tau)\|_1^2 d\tau + \frac{\gamma(\gamma+1)}{\varepsilon(2+\gamma)} \int_0^\infty \|\operatorname{div} \mathbf{w}(\tau)\|^2 d\tau \\ + \varepsilon \int_0^\infty \|r(\tau)\|^2 d\tau \leq c\varepsilon \|\mathbf{u}_0\|_1^2 \end{aligned} \quad (30)$$

(здесь постоянная c зависит от γ ; при γ близких к нулю $c = O(\gamma^{-1})$, а при $\gamma \rightarrow \infty$ постоянная c ограничена). Последняя оценка означает, что доказана

ТЕОРЕМА 2. *При любом положительном γ обобщенное решение $\mathbf{v}$ задачи (24) сходится к обобщенному решению $\mathbf{u}$ исходной задачи (20) при $\varepsilon \rightarrow 0$ и имеет место оценка (30).*

Отметим тот факт, что из (30) не следует сходимость q к p , что естественно, поскольку начальное условие для q выбиралось произвольным образом ($q(x, 0) = 0$). Тем не менее, возможно ввести новую функцию, которая в слабом смысле будет

сходиться к p при $\varepsilon \rightarrow 0$. А именно, пусть $q' = -\frac{1+\gamma}{\varepsilon} \operatorname{div} \mathbf{v} + q$. Тогда уравнения (24) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_t - \Delta \mathbf{v} + \nabla q' &= \mathbf{0}, \\ \frac{\varepsilon^2}{\gamma} q_t + \frac{\varepsilon}{\gamma} q' + \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, \\ \mathbf{v}|_{\partial\Omega \times [0, T]} &= \mathbf{0}, \quad \mathbf{v}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x), \quad q(x, 0) = 0, \quad \gamma > 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Для доказательства слабой сходимости q' к p достаточно показать, что норма q' равномерно ограничена по ε (поскольку сильная сходимость $\mathbf{v}$ к $\mathbf{u}$ в норме, определенной в левой части (30), уже доказана). Действительно, из первого уравнения (31), как и ранее, имеем

$$\|q'\| \leq c_0 (\|\mathbf{v}\|_1 + \|\mathbf{v}_t\|_{-1}),$$

откуда, используя неравенства (25), (26), получаем требуемую оценку

$$\int_0^\infty \|q'\|^2 dt \leq c \int_0^\infty (\|\mathbf{v}\|_1^2 + \|\mathbf{v}_t\|^2) dt \leq c \|\mathbf{u}_0\|_1^2,$$

где c не зависит от ε . Таким образом, множество функций q' слабо компактно. Слабая сходимость q' к p следует из обычных рассуждений.

§ 3. Нелинейная нестационарная задача

Перейдем к исследованию нестационарной нелинейной задачи. Она имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t - \nu \Delta \mathbf{u} + u^k \mathbf{u}_{x_k} + \nabla p &= \mathbf{0}, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0, \quad \mathbf{u}|_{\partial\Omega \times [0, T]} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x) \end{aligned} \quad (32)$$

(здесь, как и ранее, $\mathbf{u} = (u^1, u^2)^T$, а по повторяющимся индексам подразумевается суммирование). Обобщенное решение задачи (32) определяется почти таким же образом (см. [1]), как и в линейном случае.

Следуя [1], получаем априорные оценки для решения (32) (большая часть из них, так же как и вывод, содержится в [1]; в настоящей статье они приводятся для полноты изложения). Умножим первое уравнение (32) скалярно в $\mathbf{L}_2$ на $\mathbf{u}$. Учитывая уравнение неразрывности, имеем

$$(\mathbf{u}_t, \mathbf{u}) + \nu \|\mathbf{u}\|_1^2 = 0 \quad (33)$$

или, что то же самое,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}(t)\|^2 + \nu \|\mathbf{u}\|_1^2 = 0. \quad (34)$$

Интегрируя (34) по t от 0 до t , получаем

$$\frac{1}{2} \|\mathbf{u}(t)\|^2 + \nu \int_0^t \|\mathbf{u}\|_1^2 d\tau = \frac{1}{2} \|\mathbf{u}_0\|^2 \equiv \frac{1}{2} C_1. \quad (35)$$

В предположении, что решение задачи (32) существует и имеет достаточную гладкость, продифференцируем первое уравнение (32) по t

$$\mathbf{u}_{tt} - \nu \Delta \mathbf{u}_t + u_t^k \mathbf{u}_{x_k} + u^k \mathbf{u}_{x_k t} + \nabla p_t = \mathbf{0}. \quad (36)$$

Умножим обе части (36) скалярно на $\mathbf{u}_t$. Получим

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}_t\|^2 + \nu \|\mathbf{u}_{tx}\|^2 + (u_t^k \mathbf{u}_t, \mathbf{u}_{x_k}) = 0. \quad (37)$$

Оценим скалярное произведение в (37)

$$|(u_t^k \mathbf{u}_t, \mathbf{u}_{x_k})| \leq \|\mathbf{u}_t\|_4^2 \|\mathbf{u}\|_1 \leq c_1 \|\mathbf{u}_{tx}\|^2 \|\mathbf{u}\|_1, \quad (38)$$

где c_1 — постоянная в неравенстве $\|g\|_4^2 \leq c_1 \|g\|_1^2$.

Из (33) следует элементарная оценка

$$\nu \|\mathbf{u}\|_1^2 \leq \|\mathbf{u}_t\| \|\mathbf{u}\| \leq C_1 \|\mathbf{u}_t\|. \quad (39)$$

Введем обозначения

$$\|\mathbf{u}_t\| = \psi(t), \quad \|\mathbf{u}\|_1 = \varphi(t), \quad \|\mathbf{u}_{tx}\| = F(t).$$

Из (37) и (38) следует неравенство

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \psi^2(t) + (\nu - c_1 \varphi(t)) F^2(t) \leq 0. \quad (40)$$

Из (39) имеем

$$\varphi(t) \leq \sqrt{\frac{C_1}{\nu}} \psi(t). \quad (41)$$

При $t = 0$ из (41) следует

$$\nu - c_1 \varphi(0) \geq \nu - c_1 \sqrt{\frac{C_1}{\nu}} \psi(0) = \nu - c_1 \sqrt{\frac{C_1}{\nu}} \|\mathbf{u}_t(0)\|.$$

Предположим, что начальные данные таковы, что выполняется неравенство

$$\nu - c_1 \sqrt{\frac{C_1}{\nu}} \|\mathbf{u}_t(0)\| \equiv \delta > 0. \quad (42)$$

Покажем справедливость оценки

$$\nu - c_1 \varphi(t) \geq \delta \quad \forall t > 0. \quad (43)$$

Предположим, что оценка (43) неверна, т.е. что существуют $t_0 > 0$ и $\delta_1 < \delta$ такие, что имеют место неравенства

$$\nu - c_1 \varphi(t_0) = \delta_1, \quad \nu - c_1 \varphi(t) > \delta_1 \quad \text{при } t \in (0, t_0). \quad (44)$$

Тогда из (40) следует неравенство на $(0, t_0)$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \psi^2(t) \leq 0,$$

откуда

$$\psi(t) \leq \psi(0) \equiv C_2. \quad (45)$$

Тогда из (41) имеем

$$\varphi(t) \leq \sqrt{\frac{C_1}{\nu}} \psi(0).$$

В силу непрерывности $\varphi(t)$ это неравенство справедливо и при $t = t_0$, т.е.

$$\varphi(t_0) \leq \sqrt{\frac{C_1}{\nu}} \psi(0).$$

Отсюда в силу (42) получаем

$$\nu - c_1 \varphi(t_0) \geq \nu - c_1 \sqrt{\frac{C_1}{\nu}} \psi(0) = \delta.$$

Полученное противоречие доказывает (43).

Из оценок (43) и (40) следует неравенство

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \psi^2(t) + \delta F^2(t) \leq 0. \quad (46)$$

Из (39) и (45) имеем

$$\nu \|\mathbf{u}_x(t)\|^2 \leq \|\mathbf{u}(0)\| \|\mathbf{u}_t(0)\|,$$

откуда

$$\|\mathbf{u}_x(t)\| \leq \sqrt{\frac{C_1 C_2}{\nu}}. \quad (47)$$

Интегрируя (46) по t от 0 до t , получаем

$$\|\mathbf{u}_t(t)\|^2 + 2\delta \int_0^t \|\mathbf{u}_{tx}\|^2 d\tau \leq \|\mathbf{u}_t(0)\|^2. \quad (48)$$

Докажем ограниченность нормы $\|\mathbf{u}_t\|$. Умножая обе части (32) скалярно на $\mathbf{u}_t$, получаем

$$\|\mathbf{u}_t\|^2 + \frac{\nu}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}\|_1^2 + (\mathbf{u}_t u^k, \mathbf{u}_{x_k}) = 0. \quad (49)$$

Оценим скалярное произведение в (49), используя неравенство $\|\mathbf{v}\|_4^4 \leq 2\|\mathbf{v}\|^2 \|\mathbf{v}_x\|^2$ из [1]. Имеем

$$|(\mathbf{u}_t u^k, \mathbf{u}_{x_k})| = |(\mathbf{u}_{tx_k}, u^k \mathbf{u})| \leq \|\mathbf{u}_{tx}\| \|\mathbf{u}\|_4^2 \leq 2\|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{u}_x\|^2 + \|\mathbf{u}_{tx}\|^2.$$

Подставляя полученную оценку в (49) и интегрируя полученное неравенство от 0 до t , получаем

$$\int_0^t \|\mathbf{u}_t\|^2 d\tau + \frac{\nu}{2} \|\mathbf{u}_x(t)\|^2 \leq \frac{\nu}{2} \|\mathbf{u}_x(0)\|^2 + \frac{2}{\nu} \|\mathbf{u}(0)\|^4 + \frac{c}{\delta} \|\mathbf{u}_t(0)\|^2. \quad (50)$$

Получим априорную оценку для функции давления p . Умножим обе части (32) скалярно на $\mathbf{w}/\|\mathbf{w}\|_1$, $\mathbf{w} \in \overset{\circ}{\mathbf{W}}_2^1$. Оценивая тривиальным образом члены, не содержащие $p(t)$, получаем

$$\|p(t)\| \leq c_0 \left(\|\mathbf{u}_t\|_{-1} + \nu \|\mathbf{u}_x\| + \frac{|(u^k \mathbf{u}_{x_k}, \mathbf{w})|}{\|\mathbf{w}\|_1} \right) \quad (51)$$

(здесь, как и ранее, c_0 — постоянная в “inf-sup” неравенстве).

Оценивая скалярное произведение, имеем

$$|(u^k \mathbf{u}_{x_k}, \mathbf{w})| = |(u^k \mathbf{u}, \mathbf{w}_{x_k})| \leq \|\mathbf{u}\|_4^2 \|\mathbf{w}\|_1.$$

Тогда из (51) получаем

$$\|p(t)\|^2 \leq 3c_0^2 (\|\mathbf{u}_t\|_{-1}^2 + \nu^2 \|\mathbf{u}_x\|^2 + \|\mathbf{u}\|_4^4). \quad (52)$$

Поскольку в двумерном случае

$$\|\mathbf{u}\|_4^4 \leq 2\|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{u}\|_1^2,$$

то из (52) с учетом неравенств (35) и (50) следует окончательная априорная оценка для давления

$$\int_0^\infty \|p(t)\|^2 dt \leq c \left(\frac{1}{\delta} \|\mathbf{u}_t(0)\|^2 + \nu \|\mathbf{u}_0\|_1^2 + \frac{1}{\nu} \|\mathbf{u}_0\|^4 \right). \quad (53)$$

Отметим тот факт, что в правую часть ряда полученных неравенств входит величина $\|\mathbf{u}_t(0)\|$, значение которой до сих пор не было оценено через входные данные. Умножим первое уравнение (32) на $\mathbf{u}_t$. Получим

$$\|\mathbf{u}_t\|^2 = \nu(\Delta \mathbf{u}, \mathbf{u}_t) - (u^k \mathbf{u}_{x_k}, \mathbf{u}_t).$$

Оценивая правую часть и сокращая на $\|\mathbf{u}_t\|$, получаем

$$\|\mathbf{u}_t\| \leq \nu \|\Delta \mathbf{u}\| + \|\mathbf{u}\|_4 \|\mathbf{u}_x\|_4 \leq c(\nu + \|\mathbf{u}\|_1) \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{W}_2^2}.$$

Отсюда при $t = 0$ имеем

$$\|\mathbf{u}_t(0)\| \leq c(\nu + \|\mathbf{u}_0\|_1) \|\mathbf{u}_0\|_{\mathbf{W}_2^2}.$$

Таким образом, все полученные выше неравенства содержат в правых частях величины, зависящие от соответствующей нормы начального условия $\mathbf{u}_0$.

Рассмотрим возмущенную задачу для системы (32):

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_t - \nu \Delta \mathbf{v} - \frac{1+\gamma}{\varepsilon} \nabla \operatorname{div} \mathbf{v} + v^k \mathbf{v}_{x_k} + \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \nabla q &= \mathbf{0}, \\ \varepsilon^2 q_t + \varepsilon q - \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, \\ \mathbf{v}|_{\partial\Omega \times [0, T]} &= \mathbf{0}, \quad \mathbf{v}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x), \quad q(x, 0) = 0 \end{aligned} \quad (54)$$

(здесь $\gamma > 0$ и $\varepsilon \rightarrow 0$). Существование обобщенного решения и его единственность исследуются стандартным образом.

Получим априорные оценки для решения (54). Умножая первое уравнение (54) скалярно в $\mathbf{L}_2$ на $\mathbf{v}$, а второе – скалярно в L_2 на q , после сложения полученных равенств получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{v}(t)\|^2 + \nu \|\mathbf{v}\|_1^2 + \frac{1+\gamma}{\varepsilon} \|\operatorname{div} \mathbf{v}\|^2 - 2(q, \operatorname{div} \mathbf{v}) \\ + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{d}{dt} \|q(t)\|^2 + \varepsilon \|q\|^2 = 0. \end{aligned} \quad (55)$$

Поскольку $\gamma > 0$, то

$$2|(q, \operatorname{div} \mathbf{v})| \leq \frac{1+\gamma/2}{\varepsilon} \|\operatorname{div} \mathbf{v}\|^2 + \frac{\varepsilon}{1+\gamma/2} \|q\|^2,$$

и из (55) следует неравенство

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{v}(t)\|^2 + \nu \|\mathbf{v}\|_1^2 + \frac{\gamma}{2\varepsilon} \|\operatorname{div} \mathbf{v}\|^2 + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{d}{dt} \|q(t)\|^2 + \frac{\gamma\varepsilon}{2+\gamma} \|q\|^2 \leq 0. \quad (56)$$

Интегрируя (56) по t от 0 до t , получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\mathbf{v}(t)\|^2 + \nu \int_0^t \|\mathbf{v}\|_1^2 d\tau + \frac{\gamma}{2\varepsilon} \int_0^t \|\operatorname{div} \mathbf{v}\|^2 d\tau \\ + \frac{\varepsilon^2}{2} \|q(t)\|^2 + \frac{\gamma\varepsilon}{2+\gamma} \int_0^t \|q\|^2 d\tau \leq \frac{1}{2} \|\mathbf{v}_0\|^2. \end{aligned} \quad (57)$$

Продифференцируем соотношение (55) по t

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{tt} - \nu \Delta \mathbf{v}_t - \frac{1+\gamma}{\varepsilon} \nabla \operatorname{div} \mathbf{v}_t + v_t^k \mathbf{v}_{x_k} + v^k \mathbf{v}_{tx_k} \\ + \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{v}_t \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_t + \nabla q_t &= \mathbf{0}, \\ \varepsilon^2 q_{tt} + \varepsilon q_t - \operatorname{div} \mathbf{v}_t &= 0. \end{aligned} \quad (58)$$

Умножим первое уравнение (58) скалярно на $\mathbf{v}_t$, а второе – на q_t . Складывая результаты, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{v}_t\|^2 + \nu \|\mathbf{v}_{tx}\|^2 + \frac{1+\gamma}{\varepsilon} \|\operatorname{div} \mathbf{v}_t\|^2 - 2(q_t, \operatorname{div} \mathbf{v}_t) \\ + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{d}{dt} \|q_t\|^2 + \varepsilon \|q_t\|^2 + (v_t^k \mathbf{v}_t, \mathbf{v}_{x_k}) + \frac{1}{2} (\operatorname{div} \mathbf{v}_t \cdot \mathbf{v}, \mathbf{v}_t) = 0. \end{aligned} \quad (59)$$

Оценим скалярные произведения в (59). Имеем

$$\begin{aligned} |(v_t^k \mathbf{v}_t, \mathbf{v}_{x_k})| &\leq \|\mathbf{v}_t\|_4^2 \|\mathbf{v}\|_1 \leq c_1 \|\mathbf{v}_{tx}\|^2 \|\mathbf{v}\|_1, \\ |(\operatorname{div} \mathbf{v}_t \cdot \mathbf{v}, \mathbf{v}_t)| &\leq \|\operatorname{div} \mathbf{v}_t\| \|\mathbf{v}\|_4 \|\mathbf{v}_t\|_4 \leq \|\mathbf{v}\|_4 \left(\frac{1}{\varepsilon} \|\operatorname{div} \mathbf{v}_t\|^2 + \frac{\varepsilon}{4} \|\mathbf{v}_t\|_4^2 \right). \end{aligned}$$

С учетом этих неравенств из (59) следует

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{v}_t\|^2 + \left(\frac{1+\gamma}{\varepsilon} - \frac{\|\mathbf{v}\|_4}{2\varepsilon} \right) \|\operatorname{div} \mathbf{v}_t\|^2 + \left(\nu - c_1 \|\mathbf{v}\|_1 - \frac{c_1^3 \varepsilon}{8} \|\mathbf{v}\|_1 \right) \|\mathbf{v}_{tx}\|^2 \\ - 2(q_t, \operatorname{div} \mathbf{v}_t) + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{d}{dt} \|q_t\|^2 + \varepsilon \|q_t\|^2 \leq 0. \end{aligned} \quad (60)$$

Поскольку $\gamma > 0$, то, оценивая скалярное произведение в (60), как это делалось ранее, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{v}_t\|^2 + \frac{1}{\varepsilon} (c\gamma - \|\mathbf{v}\|_1) \|\operatorname{div} \mathbf{v}_t\|^2 \\ + (\nu - c\|\mathbf{v}\|_1) \|\mathbf{v}_{tx}\|^2 + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{d}{dt} \|q_t\|^2 + c\varepsilon \|q_t\|^2 \leq 0. \end{aligned} \quad (61)$$

Из (56) имеем

$$\begin{aligned} \nu \|\mathbf{v}\|_1^2 + \frac{\gamma}{2\varepsilon} \|\operatorname{div} \mathbf{v}\|^2 + \frac{\gamma\varepsilon}{2+\gamma} \|q\|^2 \\ \leq \|\mathbf{v}_t\| \|\mathbf{v}\| + \varepsilon^2 \|q_t\| \|q\| \leq (\|\mathbf{v}_t\| + \varepsilon \|q_t\|) (\|\mathbf{v}\| + \varepsilon \|q\|) \\ \leq (\|\mathbf{v}_t\| + \varepsilon \|q_t\|) (\|\mathbf{v}(0)\| + \varepsilon \|q(0)\|) \equiv C_1 (\|\mathbf{v}_t\| + \varepsilon \|q_t\|). \end{aligned} \quad (62)$$

Обозначим

$$\|\mathbf{v}_t\|^2 + \varepsilon^2 \|q_t\|^2 = \psi^2(t), \quad \|\mathbf{v}\|_1 = \varphi(t), \quad \|\mathbf{v}_{tx}\| = F(t).$$

Тогда

$$\frac{1}{2} (\|\mathbf{v}_t\| + \varepsilon \|q_t\|)^2 \leq \psi^2(t) \leq (\|\mathbf{v}_t\| + \varepsilon \|q_t\|)^2$$

и из (62) имеем

$$\varphi(t) \leq c \sqrt{\frac{\|\mathbf{v}(0)\|}{\nu}} \psi(t).$$

При $t = 0$ из последнего неравенства следует

$$\nu - \varphi(0) \geq \nu - c \sqrt{\frac{\|\mathbf{v}(0)\|}{\nu}} \psi(0) = \nu - c \sqrt{\frac{\|\mathbf{v}(0)\|}{\nu}} (\|\mathbf{v}_t(0)\| + \varepsilon \|q_t(0)\|).$$

С учетом этого неравенство (61) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \psi^2(t) + \left(\nu - c \sqrt{\frac{\|\mathbf{v}(0)\|}{\nu}} (\|\mathbf{v}_t(0)\| + \varepsilon \|q_t(0)\|) \right) F^2(t) \\ + \frac{1}{\varepsilon} (c\gamma - C_1) \|\operatorname{div} \mathbf{v}_t\|^2 + c\varepsilon \|q_t\|^2 \leq 0. \end{aligned} \quad (63)$$

Поскольку C_1 не зависит от γ , то можно считать, что γ выбрано так, что коэффициент в круглых скобках в (63) перед $\|\operatorname{div} \mathbf{v}_t\|^2$ положителен. Предположим, что норма начального условия мала. А именно, будем считать, что

$$\nu - c\sqrt{\frac{\|\mathbf{v}(0)\|}{\nu}}\|\mathbf{v}_t(0)\| \equiv \delta > 0. \quad (64)$$

Тогда, как и выше, можно показать, что это неравенство будет иметь место для всех значений t .

Из (54) имеем

$$\|\mathbf{v}(0)\| = \|\mathbf{u}_0\|, \quad \|\mathbf{v}_t(0)\| \leq c(\nu\|\Delta\mathbf{u}_0\| + \|\mathbf{u}_0\|_1\|\mathbf{u}_0\|_{\mathbf{W}_2^2}), \quad \|q_t(0)\| = 0.$$

Тогда из (63) следует, что

$$\psi^2(t) + \delta \int_0^t F^2(\tau) d\tau + c\varepsilon \int_0^t \|q_t(\tau)\|^2 d\tau \leq \psi^2(0)$$

или, что то же самое,

$$\|\mathbf{v}_t(t)\|^2 + \varepsilon^2 \|q_t(t)\|^2 + \delta \int_0^t \|\mathbf{v}_{tx}\|^2 d\tau + c\varepsilon \int_0^t \|q_t\|^2 d\tau \leq \|\mathbf{v}_t(0)\|^2. \quad (65)$$

Докажем сходимость решений возмущенной задачи (54) к решению исходной задачи (32). Погрешность $\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$, $r = q - p$ удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_t - \nu\Delta\mathbf{w} - \frac{1+\gamma}{\varepsilon}\nabla\operatorname{div}\mathbf{w} + v^k\mathbf{w}_{x_k} + w^k\mathbf{u}_{x_k} + \frac{1}{2}\operatorname{div}\mathbf{w} \cdot \mathbf{v} + \nabla r &= \mathbf{0}, \\ \varepsilon^2 q_t + \varepsilon r + \varepsilon p - \operatorname{div}\mathbf{v} &= 0, \\ \mathbf{v}|_{\partial\Omega \times [0, T]} &= \mathbf{0}, \quad \mathbf{v}(x, 0) = \mathbf{0}, \quad r(x, 0) = p(x, 0). \end{aligned} \quad (66)$$

Умножим первое уравнение (66) скалярно на $\mathbf{w}$, а второе — на r . После сложения результатов получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{w}(t)\|^2 + \nu \|\mathbf{w}\|_1^2 + \frac{1+\gamma}{\varepsilon} \|\operatorname{div}\mathbf{w}\|^2 + \varepsilon \|r\|^2 - 2(r, \operatorname{div}\mathbf{w}) \\ + \varepsilon^2 (q_t, r) + \varepsilon (p, r) + (v^k \mathbf{w}_{x_k}, \mathbf{w}) + (w^k \mathbf{u}_{x_k}, \mathbf{w}) + \frac{1}{2} (\operatorname{div}\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}, \mathbf{w}) &= 0. \end{aligned} \quad (67)$$

Оценивая скалярные произведения в (67), как это делалось выше, получаем неравенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{w}(t)\|^2 + (\nu - c_2(\|\mathbf{u}\|_1 + \|\mathbf{v}\|_1)) \|\mathbf{w}\|_1^2 + \frac{1+\gamma}{\varepsilon} \|\operatorname{div}\mathbf{w}\|^2 \\ + \varepsilon \|r\|^2 - 2(r, \operatorname{div}\mathbf{w}) + \varepsilon^2 (q_t, r) + \varepsilon (p, r) \leq 0. \end{aligned} \quad (68)$$

В силу предположения о малости начального условия из доказанного выше следует, что коэффициент при $\|\mathbf{w}\|_1^2$ в левой части (68) будет на всем бесконечном

промежутке времени больше некоторой постоянной. Используя полученные ранее оценки (53), (57) и (65), из (68) после интегрирования по t получаем

$$\max_t \|\mathbf{w}(t)\|^2 + c \int_0^\infty \|\mathbf{w}\|_1^2 dt + \frac{c}{\varepsilon} \int_0^\infty \|\operatorname{div} \mathbf{w}\|^2 dt + c\varepsilon \int_0^\infty \|r\|^2 dt \leq c\varepsilon, \quad (69)$$

где постоянная c в правой части неравенства зависит от $\|p(0)\|$. Из первого уравнения (32) тем же способом, что и выше, получаем оценку $\|p(0)\| \leq c\|\mathbf{u}_0\|_{\mathbf{W}_2^2}$. Отсюда следует, что постоянная в правой части (69) зависит от $\|\mathbf{u}_0\|_{\mathbf{W}_2^2}$.

Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 3. Пусть начальное условие $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{W}_2^2 \cap \overset{\circ}{\mathbf{W}}_2^1$, $\operatorname{div} \mathbf{u}_0 = 0$ и норма начального условия в $\mathbf{W}_2^2$ достаточно мала. Тогда решение возмущенной задачи (54) сходится к решению исходной задачи (32) так, что выполнена оценка (69).

Полученные результаты непосредственно обобщаются на случай, когда правая часть (32) является функцией, не зависящей от времени и норма которой достаточно мала.

Список литературы

1. Ладженская О. А. Математические проблемы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970.
2. Ладженская О. А., Серегин Г. А. Об одном способе приближенного решения начально-краевых задач для уравнений Навье–Стокса // Записки науч. сем. ЛОМИ. 1992. Т. 197. С. 87–119.
3. Лебедев В. И. Как решать явными методами жесткие системы дифференциальных уравнений // Вычислительные процессы и системы. Т. 8. М.: Наука, 1991. С. 237–291.
4. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.
5. Temam R. Navier–Stokes equations. Theory and numerical analysis. Amsterdam: North-Holland, 1977.
6. Яценко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967.
7. Prohl A. Projection and quasi-compressibility methods for solving the incompressible Navier–Stokes equations. Stuttgart: Teubner, 1997.
8. Ладженская О. А., Солонников В. А. О некоторых задачах векторного анализа и обобщенных постановках краевых задач для уравнений Навье–Стокса // Записки науч. сем. ЛОМИ. 1976. Т. 59. С. 81–116.
9. Kobelkov G. M., Valedinskii V. D. On the inequality $\|p\|_{L_2} \leq \sup_{\mathbf{v} \in \overset{\circ}{\mathbf{W}}_2^1} (p, \operatorname{div} \mathbf{v}) / \|\mathbf{v}\|_1$ and its finite-dimensional image // Soviet J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1986. V. 1. № 3. P. 189–201.
10. Кобельков Г. М. О численных методах решения уравнений Навье–Стокса в переменных “скорость–давление” // Вычислительные процессы и системы. Т. 8. М.: Наука, 1991. С. 204–236.
11. Бажалов Н. С., Кобельков Г. М., Чижонков Е. В. Эффективные численные методы решения уравнений Навье–Стокса // Современные проблемы математической физики и вычислительной математики. М.: Наука, 1986. С. 37–45.
12. Кобельков Г. М. О теоремах существования для некоторых задач теории упругости // Матем. заметки. 1975. Т. 17. № 4. С. 599–609.

13. *Heywood J. G., Rannacher R.* Finite element approximation and of the nonstationary Navier-Stokes equations. II. Stability of solutions and error estimates uniform in time // SIAM J. Numer. Anal. 1986. V. 23. P. 750–777.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Поступила в редакцию
Институт вычислительной математики РАН 14.06.2001