Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Медведева, Вложения классов непрерывных функций в классы функций ограниченной обобщенной вариации, *Матем. сб.*, 2002, том 193, номер 7, 109–130

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm669>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 12:45:56

УДК 517.518.2

М. В. Медведева

Вложения классов непрерывных функций в классы функций ограниченной обобщенной вариации

В работе исследуются необходимые и достаточные условия вложения классов функций H^ω в классы функций ограниченной обобщенной вариации. Получены теоремы как общего характера, так и теоремы вложения при некоторых дополнительных условиях, наложенных на модуль непрерывности.

Библиография: 15 названий.

Введение

В теории функций действительного переменного встречаются различные обобщения понятия вариации функции. Некоторые из них появились в работах, где обобщалась теорема Жордана о сходимости тригонометрического ряда Фурье [1]. Различные обобщения этой теоремы на классы функций ограниченной Φ -вариации получали Н. Винер [2], Дж. Марцинкевич [3], Л. Юнг, который ввел общее определение Φ -вариации [4], Р. Салем [5]. Функции ограниченной Λ -вариации впервые были рассмотрены Д. Ватерманом в работе [6], где для них было получено обобщение теоремы Жордана о сходимости тригонометрического ряда Фурье. В частности, из результата Ватермана следуют все перечисленные выше теоремы. В дальнейшем исследовались и другие свойства функций ограниченной Λ -вариации.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ — монотонная последовательность положительных чисел такая, что $\lambda_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$ и $\sum_{k=1}^\infty (1/\lambda_k) = \infty$. Функция $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ называется *функцией с ограниченной Λ -вариацией* ($f \in \Lambda BV$), если

$$\sup_G \sum_k \frac{|f(b_k) - f(a_k)|}{\lambda_k} < \infty,$$

где супремум берется по всем конечным системам G попарно непересекающихся интервалов (a_k, b_k) из отрезка $[a, b]$.

Далее для упрощения записи в качестве отрезка $[a, b]$ будем рассматривать отрезок $[0, 1]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Функция ω , определенная на $[0, \infty)$ или на $[0, l]$, $0 < l < \infty$, называется *модулем непрерывности*, если она непрерывна, не убывает, $\omega(0) = 0$ и $\omega(t_1 + t_2) \leq \omega(t_1) + \omega(t_2)$ при t_1 и t_2 , для которых обе части неравенства имеют смысл.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-0062) и Программы поддержки ведущих научных школ (грант № 00-15-96143).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть на отрезке $[0, 1]$ задан модуль непрерывности ω . Через H^ω обозначим множество непрерывных на $[0, 1]$ функций f , для которых $\omega(\delta, f) = O(\omega(\delta))$ при $\delta \rightarrow 0$, где

$$\omega(\delta, f) = \sup_{\substack{0 \leq h \leq \delta \\ 0 \leq x \leq 1-h}} |f(x+h) - f(x)|, \quad 0 \leq \delta \leq 1.$$

В настоящей работе исследуются необходимые и достаточные условия вложения классов функций H^ω в классы функций ΛBV и некоторые смежные вопросы. Получены теоремы как общего характера, так и теоремы вложения при дополнительных условиях, наложенных на модуль непрерывности $\omega(t)$.

В работе [7] доказана

ТЕОРЕМА А. *Для вложения $H^\omega \subset \Lambda BV$ необходимо и достаточно, чтобы для всякой последовательности $\{t_k\}_{k=1}^\infty$ такой, что $t_k \geq 0$, $\sum_{k=1}^\infty t_k \leq 1$, ряд $\sum_{k=1}^\infty (\omega(t_k)/\lambda_k)$ сходиллся.*

При доказательстве теоремы А [7] получено также утверждение, которое мы сформулируем в теореме В и которое понадобится в дальнейшем. Обозначим через T множество всех последовательностей $\{t_k\}_{k=1}^\infty$, $t_k \geq 0$, $\sum_{k=1}^\infty t_k \leq 1$.

ТЕОРЕМА В. *Для вложения $H^\omega \subset \Lambda BV$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $\sup_T \sum_{k=1}^\infty (\omega(t_k)/\lambda_k) < \infty$.*

Теоремы А и В дают полное решение проблемы вложения $H^\omega \subset \Lambda BV$ в том смысле, что они содержат необходимое и достаточное условие вложения без каких-либо дополнительных предположений о модуле непрерывности и последовательности $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$. Столь же полное решение получено А. С. Беловым [8], но его необходимое и достаточное условие вложения сильно отличается от условия в теореме А и в настоящей работе не используется. Вложения классов H^ω в классы функций ограниченной обобщенной вариации изучались также Е. И. Бережным [9] и Л. Лейндлером [10], который обобщил теорему А на некоторые другие классы функций.

Насколько трудно или легко проверять условия вложения в теоремах А и В, можно оценить только при рассмотрении частных случаев. Если H^ω является классом Липшица $\text{Lip } \alpha$, $0 < \alpha < 1$, то, полагая $\omega(t) = t^{1/p}$, $p = 1/\alpha$, и применяя неравенство Гёльдера, из теоремы В получаем, что для вложения $\text{Lip}(1/p) \subset \Lambda BV$ необходимо и достаточно, чтобы $\sum_{k=1}^\infty (1/\lambda_k^q) < \infty$, где $1/p + 1/q = 1$.

В более сложных частных случаях возникают трудности из-за необходимости рассматривать обширное семейство последовательностей $\{t_k\}_{k=1}^\infty$. Доказанная ниже теорема 1 позволяет делать вывод о вложении $H^\omega \subset \Lambda BV$, рассматривая лишь однопараметрическое семейство последовательностей $\{t_k\}_{k=1}^\infty$, для которых условие $\sum_{k=1}^\infty t_k \leq 1$ может не выполняться. На основании теорем 1, А и В нами получен ряд результатов при дополнительных предположениях о модуле непрерывности ω . Эти результаты опубликованы без доказательства в [11]. В работе [11] рассматриваются классы H^ω , в определенном смысле близкие к классам Липшица, и некоторые классы, содержащие объединение всех классов Липшица. Для классов, близких к $\text{Lip}(1/p)$, $p > 1$, вопрос о вложении $H^\omega \subset \Lambda BV$ сводится к

изучению сходимости в точности одного числового ряда. Объем настоящей статьи не позволяет изложить доказательства всех теорем из работы [11]. Мы ограничимся лишь случаем классов H^ω , промежуточных между $\text{Lip } 1$ и всеми другими классами Липшица. Точное определение рассматриваемых классов содержится в § 1. Именно для этого случая доказательства оказались наиболее трудоемкими. При этом условие вложения $H^\omega \subset \Lambda BV$ сводится к изучению сходимости однопараметрического семейства рядов, построение которых проще, чем в случае непосредственного использования теоремы 1.

§ 1. Формулировки теорем

С.Б. Стечкиным доказано [12], что для каждого модуля непрерывности ω существует вогнутый модуль непрерывности ω^* такой, что $\omega(t) \leq \omega^*(t) \leq 2\omega(t)$ при $t \in [0, 1]$. Тогда класс H^ω совпадает с классом H^{ω^*} . Ниже всюду предполагается, что ω – вогнутая функция ($\omega(\alpha t_1 + (1 - \alpha)t_2) \geq \alpha\omega(t_1) + (1 - \alpha)\omega(t_2)$, $0 \leq t_1, t_2 \leq 1$, $0 \leq \alpha \leq 1$). Положив $\omega(t) = \omega(1)$ для $t \in (1, \infty)$, будем считать, что функция ω задана на $[0, \infty)$. Поскольку ω – вогнутая функция на $[0, \infty)$, то у нее всюду на $(0, \infty)$ существуют конечные правая производная $\omega'_+(t)$ и левая производная $\omega'_-(t)$, причем $\omega'_+(t) \leq \omega'_-(t)$ и $\omega'_+(\tau) \geq \omega'_-(t)$ для $\tau < t$. В точке $t = 0$ правая производная $\omega'_+(0)$ конечна или бесконечна. Обе односторонние производные – невозрастающие функции, равные нулю при $t > 1$.

Если $\omega'_+(0) < \infty$, то из определений классов H^ω и ΛBV непосредственно следует, что $H^\omega \subset \Lambda BV$. В случае $\omega'_+(0) = \infty$ введем функцию $t = t(\lambda)$ следующим образом. Для каждого $\lambda > 0$ найдется $t \in (0, \infty)$ такое, что $\omega'_+(t) \leq \lambda \leq \omega'_-(t)$. Если таких значений t больше одного (например, на промежутке, где $\omega'(t) = \text{const}$), то выберем одно из них и обозначим $t(\lambda)$. Таким образом,

$$\omega'_+(t(\lambda)) \leq \lambda \leq \omega'_-(t(\lambda)).$$

Очевидно, что $t(\lambda)$ – невозрастающая функция и $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} t(\lambda) = 0$. Окрестностью нуля будем называть правую окрестность нуля, исключая нуль.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\lim_{t \rightarrow 0} (\omega(t)/t) = \infty$. Тогда для вложения $H^\omega \subset \Lambda BV$ необходимо и достаточно, чтобы существовало число $c > 0$, при котором ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (\omega(t(c\lambda_k))/\lambda_k)$ сходится.

Теоремы 2–4 потребуются при выводе условий вложения $H^\omega \subset \Lambda BV$ для классов, промежуточных между $\text{Lip } 1$ и другими классами Липшица. Правая производная в теореме 3 выбрана для определенности. Теорема остается верной, если $\omega'_+(t)$ заменить на $\omega'_-(t)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Будем говорить, что модуль непрерывности $\omega(t)$ удовлетворяет m -условию, если $\lim_{t \rightarrow 0} (t\omega'_+(t)/\omega(t)) > 0$.

Это условие аналогично Δ_2 -условию для выпуклых функций [13].

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\lim_{t \rightarrow 0} (\omega(t)/t) = \infty$ и $\omega(t)$ удовлетворяет m -условию. Тогда для вложения $H^\omega \subset \Lambda BV$ необходимо и достаточно, чтобы существовало число $c > 0$, при котором ряд $\sum_{k=1}^{\infty} t(c\lambda_k)$ сходится.

ТЕОРЕМА 3. Пусть на $(0, \infty)$ заданы функции $G_1(z)$ и $G_2(z)$, положительные и невозрастающие. Пусть также $\omega(t)$ удовлетворяет m -условию. Тогда

- 1) если в окрестности нуля выполняется неравенство $G_1(\omega'_+(t)) \leq t$, то для вложения $H^\omega \subset \Lambda BV$ необходимо, чтобы при некотором $c > 0$ сходился ряд $\sum_{k=1}^{\infty} G_1(c\lambda_k)$;
- 2) если в окрестности нуля выполняется неравенство $t \leq G_2(\omega'_+(t))$, то для вложения $H^\omega \subset \Lambda BV$ достаточно, чтобы при некотором $c > 0$ сходился ряд $\sum_{k=1}^{\infty} G_2(c\lambda_k)$.

Через $\ln_k(x)$ обозначим k -кратный логарифм $\ln(\ln \dots (\ln x))$, а через $\exp_k(x)$ — k -кратную экспоненту $\exp(\exp \dots (\exp x))$. Положим $\ln_0 x = \exp_0 x = x$.

Пусть $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — неубывающая последовательность положительных чисел, $m \in \mathbb{N}$. Обозначим

$$\mu = \inf \left\{ c : c > 0, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\exp_m(c\xi_k)} < \infty \right\}.$$

Если при всех $c > 0$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (1/\exp_m(c\xi_k))$ расходится, то положим $\mu = \infty$.

ТЕОРЕМА 4. Справедливо равенство $\mu = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} (\ln_m k / \xi_k)$.

Перейдем к описанию тех классов, к которым относятся последующие теоремы. В теории функций действительного переменного встречается класс H^ω , где $\omega(t) \sim t |\ln t|$ при $t \rightarrow 0$ [14]. Это частный случай классов H^ω , для которых в окрестности нуля $\omega(t) = t(\ln_{m-1} |\ln t|)^\beta$, $m \geq 1$, $\beta > 0$. Запишем последнее равенство в виде $\omega(t) = tu(x)$, где $x = \ln_{m-1} |\ln t|$ при малых t , $u(x) = x^\beta$. Заметим, что $xu'(x)/u(x) = \beta$. Будем рассматривать классы H^ω , которые близки к только что описанным в следующем смысле. Пусть $\omega(t) = tu(x)$ в окрестности нуля переменной t , где $x = \ln_{m-1} |\ln t|$, $m \geq 1$. Функция $u(x)$ может отличаться от x^β . Будем предполагать, что

$$\frac{xu'_-(x)}{u(x)} = \beta + o(1) \quad \text{при } x \rightarrow \infty, \quad \beta > 0,$$

где $u'_-(x)$ — левая производная функции $u(x)$ по x . Для такого ω легко проверить, что $\text{Lip } 1 \subset H^\omega \subset \text{Lip } \alpha \quad \forall \alpha \in (0, 1)$.

ТЕОРЕМА 5. 1) Пусть для модуля непрерывности $\omega(t) = tu(x)$, где $x = \ln_{m-1} |\ln t|$ при малых t , $m \geq 1$, выполняется условие

$$\frac{xu'_-(x)}{u(x)} = \beta + O\left(\frac{1}{\ln x}\right) \quad \text{при } x \rightarrow \infty, \quad \beta > 0, \quad \beta \neq 1.$$

Тогда для вложения $H^\omega \subset \Lambda BV$ необходимо и достаточно, чтобы при некотором $c > 0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\exp_m \frac{c\lambda_k^{(1+\beta)/\beta}}{(u(\lambda_k))^{1/\beta}} \right)^{-1} < \infty.$$

2) Если $O(1/\ln x)$ заменить на $O((\ln_r x)^\sigma / \ln x)$ со сколь угодно большим натуральным $r \geq 2$ и сколь угодно малым $\sigma > 0$, то для каждого β , $\beta > 0$, $\beta \neq 1$, указанное условие вложения $H^\omega \subset \Lambda BV$ теряет силу как в части необходимости, так и в части достаточности.

ТЕОРЕМА 6. 1) Пусть для модуля непрерывности $\omega(t) = tu(x)$, где $x = \ln_{m-1} |\ln t|$ при малых t , $m \geq 1$, выполняется условие

$$\frac{xu'_-(x)}{u(x)} = 1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\ln x}}\right) \quad \text{при } x \rightarrow \infty.$$

Тогда для вложения $H^\omega \subset \Lambda BV$ необходимо и достаточно, чтобы при некотором $c > 0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\exp_m \frac{c\lambda_k^2}{u(\lambda_k)} \right)^{-1} < \infty.$$

2) Если $O(1/\sqrt{\ln x})$ заменить на $O((\ln_r x)^\sigma / \sqrt{\ln x})$ со сколь угодно большим натуральным $r \geq 2$ и сколь угодно малым $\sigma > 0$, то указанное условие вложения $H^\omega \subset \Lambda BV$ не будет необходимым.

3) Если

$$\frac{xu'_-(x)}{u(x)} - 1 = o(1) \quad \text{при } x \rightarrow \infty$$

и эта разность не меняет знака при больших x , то указанное условие вложения $H^\omega \subset \Lambda BV$ является достаточным независимо от порядка малости этой разности.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если $\omega(t) \sim t(\ln_{m-1} |\ln t|)^{\beta_m} (\ln_m |\ln t|)^{\beta_{m+1}} \dots (\ln_{n-1} |\ln t|)^{\beta_n}$ при $t \rightarrow 0$, $\beta_m > 0$, $n \geq m \geq 1$, $\beta_i \in \mathbb{R}$, $i = m+1, \dots, n$, то для вложения $H^\omega \subset \Lambda BV$ необходимо и достаточно, чтобы существовало число $c > 0$, при котором сходится ряд

$$\sum_k \left(\exp_m \frac{c\lambda_k^{1/\beta_m}}{(\ln \lambda_k)^{\beta_{m+1}/\beta_m} \dots (\ln_{n-m} \lambda_k)^{\beta_n/\beta_m}} \right)^{-1},$$

где сумма берется по тем k , для которых члены ряда имеют смысл.

Теоремы 5, 6 и следствие 1 в сочетании с теоремой 4 приводят к теоремам 7, 8 и следствию 2.

ТЕОРЕМА 7. 1) Пусть для модуля непрерывности $\omega(t) = tu(x)$, где $x = \ln_{m-1} |\ln t|$ при малых t , $m \geq 1$, выполняется условие

$$\frac{xu'_-(x)}{u(x)} = \beta + O\left(\frac{1}{\ln x}\right) \quad \text{при } x \rightarrow \infty, \quad \beta > 0, \quad \beta \neq 1.$$

Тогда для вложения $H^\omega \subset \Lambda BV$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{(\ln_m k)(u(\lambda_k))^{1/\beta}}{\lambda_k^{(1+\beta)/\beta}} < \infty.$$

2) Если $O(1/\ln x)$ заменить на $O((\ln_r x)^\sigma / \ln x)$ со сколь угодно большим натуральным $r \geq 2$ и сколь угодно малым $\sigma > 0$, то для каждого β , $\beta > 0$, $\beta \neq 1$, указанное условие вложения $H^\omega \subset \Lambda BV$ теряет силу как в части необходимости, так и в части достаточности.

ТЕОРЕМА 8. 1) Пусть для модуля непрерывности $\omega(t) = tu(x)$, где $x = \ln_{m-1} |\ln t|$ при малых t , $m \geq 1$, выполняется условие

$$\frac{xu'_-(x)}{u(x)} = 1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\ln x}}\right) \quad \text{при } x \rightarrow \infty.$$

Тогда для вложения $H^\omega \subset \Lambda BV$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{(\ln_m k)u(\lambda_k)}{\lambda_k^2} < \infty.$$

2) Если $O(1/\sqrt{\ln x})$ заменить на $O((\ln_r x)^\sigma / \sqrt{\ln x})$ со сколь угодно большим натуральным $r \geq 2$ и сколь угодно малым $\sigma > 0$, то указанное условие вложения $H^\omega \subset \Lambda BV$ не будет необходимым.

3) Если функция $xu'_-(x)/u(x) - 1$ есть бесконечно малая при $x \rightarrow \infty$ и не меняет знака при больших x , то указанное условие вложения $H^\omega \subset \Lambda BV$ является достаточным независимо от порядка малости этой функции.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $\omega(t) \sim t(\ln_{m-1} |\ln t|)^{\beta_m} (\ln_m |\ln t|)^{\beta_{m+1}} \dots (\ln_{n-1} |\ln t|)^{\beta_n}$ при $t \rightarrow 0$, $\beta_m > 0$, $n \geq m \geq 1$, $\beta_i \in \mathbb{R}$, $i = m+1, \dots, n$, то для вложения $H^\omega \subset \Lambda BV$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{(\ln_m k)(\ln \lambda_k)^{\beta_{m+1}/\beta_m} \dots (\ln_{n-m} \lambda_k)^{\beta_n/\beta_m}}{\lambda_k^{1/\beta_m}} < \infty.$$

Мы оставляем теоремы 5 и 6 в качестве самостоятельных, так как в некоторых случаях их нетрудно применить, не обращаясь к теореме 4. Например, если $\omega(t) = t|\ln t|$ в окрестности нуля и $\lambda_k = k^\alpha$, $k \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha \leq 1$.

§ 2. Доказательства теорем

ЛЕММА 1. Пусть даны различные положительные числа M_1 и M_2 . Тогда

$$\sup_{\sum_{k=1}^{\infty} \tau_k \leq M_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega(\tau_k)}{\lambda_k}, \quad \sup_{\sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \leq M_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega(\eta_k)}{\lambda_k}$$

либо оба конечны, либо оба равны ∞ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть, например, $M_1 < M_2$. Ясно, что

$$\sup_{\sum_{k=1}^{\infty} \tau_k \leq M_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega(\tau_k)}{\lambda_k} \leq \sup_{\sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \leq M_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega(\eta_k)}{\lambda_k}.$$

В силу вогнутости $\omega(t)$ для $M > 1$ имеем $\omega(Mt) \leq M\omega(t)$. Поэтому

$$\begin{aligned} \sup_{\sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \leq M_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega(\eta_k)}{\lambda_k} &= \sup_{\sum_{k=1}^{\infty} \eta_k = M_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega(\frac{M_2}{M_1} \frac{M_1 \eta_k}{M_2})}{\lambda_k} \\ &\leq \sup_{\sum_{k=1}^{\infty} \eta_k = M_2} \frac{M_2}{M_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega(\frac{M_1}{M_2} \eta_k)}{\lambda_k} = \sup_{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_1}{M_2} \eta_k = M_1} \frac{M_2}{M_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega(\frac{M_1}{M_2} \eta_k)}{\lambda_k} \\ &= \frac{M_2}{M_1} \sup_{\sum_{k=1}^{\infty} \tau_k = M_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega(\tau_k)}{\lambda_k}. \end{aligned}$$

Отсюда следует утверждение леммы.

ЛЕММА 2. Пусть $\lim_{t \rightarrow 0} (\omega(t)/t) = \infty$. Если при некотором $c > 0$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (\omega(t(c\lambda_k))/\lambda_k)$ сходится, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} t(c\lambda_k)$ также сходится.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу вогнутости модуля непрерывности $\omega(t)$ выполняется неравенство $\omega(t)/t \geq \omega'_-(t)$. В частности, $\omega(t(c\lambda_k))/t(c\lambda_k) \geq \omega'_-(t(c\lambda_k))$. С другой стороны, $c\lambda_k \leq \omega'_-(t(c\lambda_k))$ по определению функции $t(\lambda)$. Поэтому $\omega(t(c\lambda_k))/t(c\lambda_k) \geq c\lambda_k$, а значит,

$$t(c\lambda_k) \leq \frac{1}{c} \frac{\omega(t(c\lambda_k))}{\lambda_k}.$$

Отсюда следует утверждение леммы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Для краткости записи обозначим $t_k^c = t(c\lambda_k)$.

ДОСТАТОЧНОСТЬ. Пусть для некоторого $c > 0$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (\omega(t_k^c)/\lambda_k)$ сходится. Тогда по лемме 2 ряд $\sum_{k=1}^{\infty} t_k^c$ также сходится. Обозначим его сумму через A . Докажем, что

$$\sup_{\sum_{k=1}^{\infty} t_k \leq A} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega(t_k)}{\lambda_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega(t_k^c)}{\lambda_k}.$$

В силу вогнутости $\omega(t)$ имеем для $\varepsilon > 0$ и натурального числа k

$$\omega(t_k^c + \varepsilon) - \omega(t_k^c) \leq \omega'_+(t_k^c)\varepsilon \leq c\lambda_k\varepsilon, \quad \omega(t_k^c) - \omega(t_k^c - \varepsilon) \geq \omega'_-(t_k^c)\varepsilon \geq c\lambda_k\varepsilon.$$

Тогда

$$\frac{\omega(t_k^c + \varepsilon) - \omega(t_k^c)}{\lambda_k} \leq c\varepsilon, \quad \frac{\omega(t_k^c) - \omega(t_k^c - \varepsilon)}{\lambda_k} \geq c\varepsilon.$$

Возьмем последовательность $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\sum_{k=1}^{\infty} t_k = A$, отличную от $\{t_k^c\}_{k=1}^{\infty}$, и представим соответствующий ряд в виде

$$\sum \frac{\omega(t_{n_i}^c + \varepsilon_{n_i})}{\lambda_{n_i}} + \sum \frac{\omega(t_{m_i}^c - \varepsilon_{m_i})}{\lambda_{m_i}} + \sum \frac{\omega(t_{p_i}^c)}{\lambda_{p_i}},$$

где все $\varepsilon_{n_i}, \varepsilon_{m_i} > 0$ и $\sum \varepsilon_{n_i} = \sum \varepsilon_{m_i}$. Составим и оценим разность

$$\begin{aligned} & \left(\sum \frac{\omega(t_{n_i}^c + \varepsilon_{n_i})}{\lambda_{n_i}} + \sum \frac{\omega(t_{m_i}^c - \varepsilon_{m_i})}{\lambda_{m_i}} + \sum \frac{\omega(t_{p_i}^c)}{\lambda_{p_i}} \right) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega(t_k^c)}{\lambda_k} \\ &= \sum \frac{\omega(t_{n_i}^c + \varepsilon_{n_i}) - \omega(t_{n_i}^c)}{\lambda_{n_i}} - \sum \frac{\omega(t_{m_i}^c) - \omega(t_{m_i}^c - \varepsilon_{m_i})}{\lambda_{m_i}} \\ &\leq \sum c\varepsilon_{n_i} - \sum c\varepsilon_{m_i} = c \left(\sum \varepsilon_{n_i} - \sum \varepsilon_{m_i} \right) = 0. \end{aligned}$$

Итак,

$$\sup_{\sum_{k=1}^{\infty} t_k \leq A} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega(t_k)}{\lambda_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega(t_k^c)}{\lambda_k}.$$

Следовательно, $H^\omega \subset \Lambda BV$ по лемме 1 и теореме В.

Необходимость. Предположим, что $H^\omega \subset \Lambda BV$, но $\sum_{k=1}^{\infty} (\omega(t_k^c)/\lambda_k) = \infty$ для всех $c > 0$. Рассмотрим два случая.

Случай 1. Существует число $c > 0$ такое, что $\sum_{k=1}^{\infty} t_k^c = A < \infty$. Тогда $\sup_{\sum_{k=1}^{\infty} t_k \leq A} \sum_{k=1}^{\infty} (\omega(t_k)/\lambda_k) = \infty$. В силу леммы 1 и теоремы В это противоречит вложению $H^\omega \subset \Lambda BV$.

Случай 2. Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} t_k^c = \infty$ при всех $c > 0$. В силу вогнутости ω выполняется неравенство $\omega(t)/t \geq \omega'_-(t)$. Поэтому $\omega(t_k^c)/\lambda_k \geq ct_k^c$ при всех $c > 0$ и натуральных k . Поскольку $\omega'(t) = 0$ на $(1, \infty)$, то все $t_k^c \in (0, 1]$. При каждом фиксированном c выберем точки $t_1^c, t_2^c, \dots, t_{N_c}^c$ так, чтобы $1 \leq \sum_{k=1}^{N_c} t_k^c \leq 2$. Тогда $\sum_{k=1}^{N_c} (\omega(t_k^c)/\lambda_k) \geq \sum_{k=1}^{N_c} ct_k^c \geq c$. Следовательно, для всякого $c > 0$ имеем $\sup_{\sum_{k=1}^{\infty} t_k \leq 2} \sum_{k=1}^{\infty} (\omega(t_k)/\lambda_k) \geq c$ и, значит, $\sup_{\sum_{k=1}^{\infty} t_k \leq 2} \sum_{k=1}^{\infty} (\omega(t_k)/\lambda_k) = \infty$. В силу леммы 1 и теоремы В это противоречит вложению $H^\omega \subset \Lambda BV$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Так как $\omega(t)$ удовлетворяет m -условию, то найдется число $A > 0$ такое, что при достаточно малых t верно $t\omega'_+(t)/\omega(t) \geq A$, т.е. $\omega(t)/\omega'_+(t) \leq t/A$. Значит, для фиксированного $c > 0$ и больших λ

$$\frac{\omega(t(c\lambda))}{\lambda} = c \frac{\omega(t(c\lambda))}{c\lambda} \leq c \frac{\omega(t(c\lambda))}{\omega'_+(t(c\lambda))} \leq c \frac{t(c\lambda)}{A}.$$

Следовательно, из сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} t(c\lambda_k)$ получим сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} (\omega(t(c\lambda_k))/\lambda_k)$. По лемме 2 из сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} (\omega(t(c\lambda_k))/\lambda_k)$ следует сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} t(c\lambda_k)$. По теореме 1 получаем утверждение теоремы 2.

Доказательство теоремы 3. 1) Пусть в окрестности нуля $G_1(\omega'_+(t)) \leq t$. Покажем, что $\omega(t)/t \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow 0$. Допустим обратное. Тогда существует $M > 0$ такое, что $\omega(t)/t \leq M$ при всех $t > 0$, поскольку $\omega(t)/t$ – невозрастающая функция в силу вогнутости ω . Так как $\omega'_+(t) \leq \omega(t)/t$, то $\omega'_+(t) \leq M$ при $t > 0$. Поскольку $G_1(z)$ – невозрастающая функция, то $G_1(\omega'_+(t)) \geq G_1(M) > 0$ при всех $t > 0$. Это противоречит предположению $G_1(\omega'_+(t)) \leq t$ для малых t . Значит, $\lim_{t \rightarrow 0} (\omega(t)/t) = \infty$.

По определению $t(\lambda)$ имеем $\omega'_+(t(c\lambda_k)) \leq c\lambda_k$ и, следовательно, $G_1(c\lambda_k) \leq G_1(\omega'_+(t(c\lambda_k)))$. Пусть $H^\omega \subset \Lambda BV$. Тогда по теореме 2 найдется $c > 0$ такое, что сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} t(c\lambda_k)$. Так как $G_1(c\lambda_k) \leq G_1(\omega'_+(t(c\lambda_k))) \leq t(c\lambda_k)$ при больших k , то сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} G_1(c\lambda_k)$.

2) Пусть в окрестности нуля $t \leq G_2(\omega'_+(t))$. Зафиксируем t из этой окрестности. Для $0 < \tau < t$ имеем $\tau \leq G_2(\omega'_+(\tau))$ и $\omega'_+(\tau) \geq \omega'_-(t)$. Поскольку G_2 не возрастает, то $\tau \leq G_2(\omega'_-(t))$. Отсюда $t \leq G_2(\omega'_-(t))$.

По определению $t(\lambda)$ имеем $c\lambda_k \leq \omega'_-(t(c\lambda_k))$. Тогда $G_2(c\lambda_k) \geq G_2(\omega'_-(t(c\lambda_k)))$.

Допустим, что при некотором положительном c ряд $\sum_{k=1}^{\infty} G_2(c\lambda_k)$ сходится. Если справедливо $\lim_{t \rightarrow 0} (\omega(t)/t) < \infty$, то, как было отмечено, $H^\omega \subset \Lambda BV$. Пусть $\lim_{t \rightarrow 0} (\omega(t)/t) = \infty$. Так как $t(c\lambda_k) \leq G_2(\omega'_-(t(c\lambda_k))) \leq G_2(c\lambda_k)$ при больших k , то сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} t(c\lambda_k)$. По теореме 2 получаем $H^\omega \subset \Lambda BV$. Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Обозначим $\tau = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} (\ln_m k / \xi_k)$. Докажем, что $\mu \geq \tau$. Известно [15], что если для невозрастающей последовательности положительных чисел $\{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k$ сходится, то $\lim_{k \rightarrow \infty} k \gamma_k = 0$. Если $\mu = \infty$, то неравенство $\mu \geq \tau$ выполняется. Пусть $\mu < \infty$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (1 / \exp_m((\mu + \varepsilon)\xi_k))$ сходится и, следовательно,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{\exp_m((\mu + \varepsilon)\xi_k)} = 0.$$

Поэтому для достаточно больших k выполняется $\exp_m((\mu + \varepsilon)\xi_k) > k$. Отсюда $(\mu + \varepsilon)\xi_k > \ln_m k$ и, значит, $\mu + \varepsilon \geq \tau$. Поскольку ε произвольно, то $\mu \geq \tau$.

Докажем теперь, что $\mu \leq \tau$. В случае $\tau = \infty$ это неравенство выполняется. Пусть $\tau < \infty$. Будем рассматривать только те значения k , при которых $\ln k \geq 1$, $\dots$, $\ln_m k \geq 1$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Имеем $\ln k^{1+\varepsilon} = (1 + \varepsilon) \ln k$. Так как $\ln(1 + \varepsilon) < \varepsilon$, то

$$\ln_2 k^{1+\varepsilon} = \ln_2 k + \ln(1 + \varepsilon) \leq \ln_2 k + \varepsilon \leq \ln_2 k + \varepsilon \ln_2 k = (1 + \varepsilon) \ln_2 k.$$

Аналогично,

$$\ln_3 k^{1+\varepsilon} \leq \ln_3 k + \ln(1 + \varepsilon) \leq \ln_3 k + \varepsilon \leq \ln_3 k + \varepsilon \ln_3 k = (1 + \varepsilon) \ln_3 k.$$

Продолжая логарифмировать, по индукции получаем $\ln_m k^{1+\varepsilon} \leq (1 + \varepsilon) \ln_m k$.

Далее, по определению τ для достаточно больших k имеем $\ln_m k \leq (\tau + \varepsilon)\xi_k$. Тогда $\ln_m k^{1+\varepsilon} \leq (1 + \varepsilon) \ln_m k \leq (1 + \varepsilon)(\tau + \varepsilon)\xi_k$. Поэтому

$$k^{1+\varepsilon} \leq \exp_m((1 + \varepsilon)(\tau + \varepsilon)\xi_k).$$

Поскольку ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (1/k^{1+\varepsilon})$ сходится, то $\mu \leq (1 + \varepsilon)(\tau + \varepsilon)$. В силу произвольности ε получаем $\mu \leq \tau$. Следовательно, $\mu = \tau$. Теорема доказана.

Для доказательства теорем 5 и 6 нам потребуются леммы 3–8.

ЛЕММА 3. Пусть для модуля непрерывности $\omega(t) = tu(x)$, где $x = \ln_{m-1} |\ln t|$ при малых t , $t \in \mathbb{N}$, выполняется условие

$$\frac{xu'_-(x)}{u(x)} = \beta + \alpha(x), \quad \alpha(x) = o(1) \quad \text{при} \quad x \rightarrow \infty, \quad \beta > 0. \quad (1)$$

Тогда $\ln u(x) - \beta \ln x = o(\ln x)$ при $x \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проинтегрируем равенство $u'_-(x)/u(x) = \beta/x + \alpha(x)/x$ от некоторого фиксированного x_0 до $x > x_0$. Получим

$$\ln u(x) - \ln u(x_0) = \beta \ln x - \beta \ln x_0 + \int_{x_0}^x \frac{\alpha(\tau)}{\tau} d\tau$$

или

$$\ln u(x) - \beta \ln x = \ln u(x_0) - \beta \ln x_0 + \int_{x_0}^x \frac{\alpha(\tau)}{\tau} d\tau.$$

Так как $\alpha(x) = o(1)$ при $x \rightarrow \infty$, то последний интеграл есть $o(\ln x)$ при $x \rightarrow \infty$, что и доказывает лемму.

ЛЕММА 4. Если выполняется условие (1), то модуль непрерывности $\omega(t)$ удовлетворяет m -условию, $\lim_{t \rightarrow 0} (\omega(t)/t) = \infty$, $\ln \omega'_+(t) - \ln u(x) = o(1)$ при $t \rightarrow 0$ и $\lim_{t \rightarrow 0} (\ln \omega'_+(t)/\ln x) = \beta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Продифференцируем равенство $\ln \omega(t) = \ln t + \ln u(x)$ по t . Найдем

$$\frac{\omega'_+(t)}{\omega(t)} = \frac{1}{t} + \frac{u'_-(x)}{u(x)} x'(t).$$

Если $m = 1$, то $x'(t) = -1/t$. Если $m > 1$, то

$$x'(t) = -\frac{1}{t |\ln t| \ln |\ln t| \cdots \ln_{m-2} |\ln t|}$$

в окрестности нуля переменной t . Поэтому произведение $tx'(t)$ ограничено в окрестности нуля. Тогда

$$\frac{t\omega'_+(t)}{\omega(t)} = 1 + \frac{u'_-(x)}{u(x)} tx'(t) = 1 + o(1) \quad \text{при} \quad t \rightarrow 0,$$

так как $u'_-(x)/u(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$ в силу условия (1). Отсюда следует равенство $\lim_{t \rightarrow 0} (t\omega'_+(t)/\omega(t)) = 1$. Поэтому $\omega(t)$ удовлетворяет m -условию.

В силу леммы 3 имеем $u(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$. Следовательно, $\omega(t)/t \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow 0$. Далее, так как

$$\frac{\omega'_+(t)}{u(x)} = \frac{t\omega'_+(t)}{\omega(t)} \rightarrow 1 \quad \text{при} \quad t \rightarrow 0,$$

то $\ln \omega'_+(t) - \ln u(x) = o(1)$ при $t \rightarrow 0$. Тогда $\ln \omega'_+(t)/\ln u(x) \rightarrow 1$ при $t \rightarrow 0$. Отсюда и из леммы 3 следует, что $\lim_{t \rightarrow 0} (\ln \omega'_+(t)/\ln x) = \beta$. Лемма доказана.

ЛЕММА 5. Если выполняется условие (1), то для фиксированного $c > 0$ справедливо $u(cx) \sim c^\beta u(x)$ при $x \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $c > 1$. Проинтегрируем равенство $u'_-(x)/u(x) = \beta/x + \alpha(x)/x$ от $x > 0$ до cx . Получим

$$\ln \frac{u(cx)}{u(x)} = \beta \ln c + \int_x^{cx} \frac{\alpha(\tau)}{\tau} d\tau.$$

Оценим модуль интеграла

$$\left| \int_x^{cx} \frac{\alpha(\tau)}{\tau} d\tau \right| \leq \sup_{\tau \in [x, cx]} |\alpha(\tau)| \int_x^{cx} \frac{d\tau}{\tau} = \sup_{\tau \in [x, cx]} |\alpha(\tau)| \ln c = o(1) \quad \text{при} \quad x \rightarrow \infty.$$

Следовательно, $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(u(cx)/u(x)) = \beta \ln c = \ln c^\beta$. Поэтому справедливо равенство $\lim_{x \rightarrow \infty} (u(cx)/u(x)) = c^\beta$. Для случая $0 < c < 1$ доказательство аналогично, если интегрировать от cx до x . Случай $c = 1$ тривиален. Лемма доказана.

ЛЕММА 6. Если выполняется условие (1), то функция $x^{1+\beta}/u(x)$ возрастает при больших x и

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{1+\beta}}{u(x)} = \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Найдем левую производную:

$$\left(\frac{x^{1+\beta}}{u(x)} \right)'_{-} = \frac{(1+\beta)x^{\beta}u(x) - x^{1+\beta}u'_{-}(x)}{u^2(x)} = \frac{x^{\beta}}{u(x)} \left(1 + \beta - \frac{xu'_{-}(x)}{u(x)} \right) > 0$$

для больших x , поскольку по условию имеем $\beta - xu'_{-}(x)/u(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$.

В силу непрерывности функции $x^{1+\beta}/u(x)$ отсюда получаем, что при больших x эта функция возрастает. По лемме 3 имеем $\ln u(x) - \beta \ln x = o(\ln x)$ при $x \rightarrow \infty$. Поэтому

$$\ln \frac{x^{1+\beta}}{u(x)} = \ln x + \beta \ln x - \ln u(x) = \ln x + o(\ln x) \rightarrow \infty \quad \text{при } x \rightarrow \infty.$$

Значит, $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^{1+\beta}/u(x)) = \infty$. Лемма доказана.

ЛЕММА 7. Если выполняется условие (1), то для функции

$$H(t) = \ln \frac{x^{\beta} u(\omega'_{+}(t))}{(\omega'_{+}(t))^{1+\beta}}$$

при $t \rightarrow 0$ справедливо

$$H(t) = \int_x^{\omega'_{+}(t)} \frac{\alpha(\tau)}{\tau} d\tau + o(1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проинтегрируем равенство $u'_{-}(x)/u(x) = \beta/x + \alpha(x)/x$ от x до $\omega'_{+}(t)$. Получим

$$\ln u(\omega'_{+}(t)) - \ln u(x) = \beta \ln \omega'_{+}(t) - \beta \ln x + \int_x^{\omega'_{+}(t)} \frac{\alpha(\tau)}{\tau} d\tau$$

или

$$\ln u(\omega'_{+}(t)) - \beta \ln \omega'_{+}(t) - \ln u(x) + \beta \ln x = \int_x^{\omega'_{+}(t)} \frac{\alpha(\tau)}{\tau} d\tau.$$

Запишем $H(t)$ в следующем виде

$$\begin{aligned} H(t) &= \beta \ln x + \ln u(\omega'_{+}(t)) - \ln \omega'_{+}(t) - \beta \ln \omega'_{+}(t) \\ &= (\ln u(\omega'_{+}(t)) - \beta \ln \omega'_{+}(t) - \ln u(x) + \beta \ln x) + (\ln u(x) - \ln \omega'_{+}(t)) \\ &= \int_x^{\omega'_{+}(t)} \frac{\alpha(\tau)}{\tau} d\tau - (\ln \omega'_{+}(t) - \ln u(x)). \end{aligned}$$

По лемме 4 имеем $\ln \omega'_{+}(t) - \ln u(x) = o(1)$ при $t \rightarrow 0$. Отсюда следует утверждение леммы 7.

ЛЕММА 8. Если выполняется условие (1) и функция

$$H(t) = \ln \frac{x^\beta u(\omega'_+(t))}{(\omega'_+(t))^{1+\beta}}$$

ограничена в окрестности нуля переменной t , то для вложения $H^\omega \subset \Lambda BV$ необходимо и достаточно, чтобы при некотором $c > 0$ сходился ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\exp_m \frac{c \lambda_k^{(1+\beta)/\beta}}{(u(\lambda_k))^{1/\beta}} \right)^{-1}. \quad (2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия леммы следует, что найдутся положительные числа A и B такие, что в окрестности нуля переменной t верно неравенство

$$B \frac{(\omega'_+(t))^{1+\beta}}{u(\omega'_+(t))} \leq x^\beta \leq A \frac{(\omega'_+(t))^{1+\beta}}{u(\omega'_+(t))}$$

и, следовательно,

$$B^{1/\beta} \frac{(\omega'_+(t))^{(1+\beta)/\beta}}{(u(\omega'_+(t)))^{1/\beta}} \leq x \leq A^{1/\beta} \frac{(\omega'_+(t))^{(1+\beta)/\beta}}{(u(\omega'_+(t)))^{1/\beta}}.$$

Поэтому в окрестности нуля переменной t имеем

$$\left(\exp_m A^{1/\beta} \frac{(\omega'_+(t))^{(1+\beta)/\beta}}{(u(\omega'_+(t)))^{1/\beta}} \right)^{-1} \leq t \leq \left(\exp_m B^{1/\beta} \frac{(\omega'_+(t))^{(1+\beta)/\beta}}{(u(\omega'_+(t)))^{1/\beta}} \right)^{-1}.$$

Если взять достаточно большое z_0 , то при $z \geq z_0$ функции

$$G_1(z) = \left(\exp_m A^{1/\beta} \frac{z^{(1+\beta)/\beta}}{(u(z))^{1/\beta}} \right)^{-1}, \quad G_2(z) = \left(\exp_m B^{1/\beta} \frac{z^{(1+\beta)/\beta}}{(u(z))^{1/\beta}} \right)^{-1}$$

имеют смысл и по лемме 6 убывают. Продолжим их на $(0, \infty)$ так, чтобы они оставались невозрастающими. Мы доказали, что $G_1(\omega'_+(t)) \leq t \leq G_2(\omega'_+(t))$ при малых t .

Пусть ряд (2) сходится при некотором $c_0 > 0$. Будем искать $c > 0$ таким, чтобы при больших k выполнялось неравенство

$$B^{1/\beta} \frac{(c \lambda_k)^{(1+\beta)/\beta}}{(u(c \lambda_k))^{1/\beta}} > \frac{c_0 \lambda_k^{(1+\beta)/\beta}}{(u(\lambda_k))^{1/\beta}},$$

которое равносильно неравенству $(u(c \lambda_k))^{1/\beta} < B^{1/\beta} c^{(1+\beta)/\beta} (u(\lambda_k))^{1/\beta} / c_0$. По лемме 5 для фиксированного $c > 0$ и больших k справедливо $u(c \lambda_k) < (2c)^\beta u(\lambda_k)$, т.е. $(u(c \lambda_k))^{1/\beta} < 2c(u(\lambda_k))^{1/\beta}$. Значит, при c таком, что $2 < B^{1/\beta} c^{1/\beta} / c_0$, будем иметь

$$B^{1/\beta} \frac{(c \lambda_k)^{(1+\beta)/\beta}}{(u(c \lambda_k))^{1/\beta}} > \frac{c_0 \lambda_k^{(1+\beta)/\beta}}{(u(\lambda_k))^{1/\beta}}.$$

Тогда при таком c сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} G_2(c\lambda_k)$. Поскольку $\omega(t)$ удовлетворяет m -условию, то по теореме 3 получаем $H^\omega \subset \Lambda BV$.

Пусть теперь $H^\omega \subset \Lambda BV$. Тогда по теореме 3 при некотором $c_1 > 0$ сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} G_1(c_1\lambda_k)$. При больших k по лемме 5 имеем $u(c_1\lambda_k) > (c_1/2)^\beta u(\lambda_k)$. Поэтому

$$\frac{A^{1/\beta} c_1^{(1+\beta)/\beta} \lambda_k^{(1+\beta)/\beta}}{(u(c_1\lambda_k))^{1/\beta}} < \frac{2A^{1/\beta} c_1^{1/\beta} \lambda_k^{(1+\beta)/\beta}}{(u(\lambda_k))^{1/\beta}}$$

при больших k . Значит, при $c > 2A^{1/\beta} c_1^{1/\beta}$ для больших k выполняется неравенство

$$G_1(c_1\lambda_k) \geq \left(\exp_m \frac{c\lambda_k^{(1+\beta)/\beta}}{(u(\lambda_k))^{1/\beta}} \right)^{-1}.$$

Поэтому сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\exp_m \frac{c\lambda_k^{(1+\beta)/\beta}}{(u(\lambda_k))^{1/\beta}} \right)^{-1}.$$

Лемма 8 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Пусть $xu'_-(x)/u(x) = \beta + \alpha(x)$, где $\alpha(x) = O(1/\ln x)$ при $x \rightarrow \infty$, $\beta > 0$, $\beta \neq 1$. Тогда при больших x и некотором $M > 0$ имеем $|\alpha(x)| \leq M/\ln x$. Так как $\lim_{t \rightarrow 0} (\omega(t)/t) = \infty$, то $\omega'_+(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow 0$. Поэтому при малых t

$$\left| \int_x^{\omega'_+(t)} \frac{\alpha(\tau)}{\tau} d\tau \right| \leq M \left| \int_x^{\omega'_+(t)} \frac{d\tau}{\tau \ln \tau} \right| = M \left| \ln \frac{\ln \omega'_+(t)}{\ln x} \right|.$$

По лемме 4

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left| \ln \frac{\ln \omega'_+(t)}{\ln x} \right| = |\ln \beta|.$$

Поэтому интеграл ограничен в окрестности нуля переменной t .

По лемме 7

$$H(t) = \int_x^{\omega'_+(t)} \frac{\alpha(\tau)}{\tau} d\tau + o(1) \quad \text{при } t \rightarrow 0.$$

Значит, функция

$$H(t) = \ln \frac{x^\beta u(\omega'_+(t))}{(\omega'_+(t))^{1+\beta}}$$

ограничена в окрестности нуля переменной t . Из леммы 8 следует заключение первой части теоремы.

Для доказательства второй части теоремы рассмотрим функции $\omega_1(t) = tu_1(x)$ и $\omega_2(t) = tu_2(x)$, которые определяются следующим образом. Зададим $\sigma > 0$ и натуральное $r \geq 2$. Выберем $t_0 > 0$ так, чтобы для $x_0 = x(t_0)$ выполнялось $\ln_r x_0 > 0$. Для $x \geq x_0$ положим

$$u_1(x) = x^\beta \exp \left(- \int_{x_0}^x \frac{(\ln_r \tau)^\sigma}{\tau \ln \tau} d\tau \right), \quad u_2(x) = x^\beta \exp \left(\int_{x_0}^x \frac{(\ln_r \tau)^\sigma}{\tau \ln \tau} d\tau \right).$$

Мы опускаем длинные, но несложные выкладки, которые доказывают, что $\lim_{t \rightarrow 0} \omega_i(t) = 0$ и что $\omega'_i(t) > 0$, $\omega''_i(t) < 0$, $i = 1, 2$, при $0 < t < t_0$, если t_0 достаточно мало. Кроме того,

$$\frac{xu'_1(x)}{u_1(x)} = \beta - \frac{(\ln_r x)^\sigma}{\ln x}, \quad \frac{xu'_2(x)}{u_2(x)} = \beta + \frac{(\ln_r x)^\sigma}{\ln x}.$$

Выберем положительное $t_0 \leq 1$ так, чтобы кроме $\ln_r x_0 > 0$ выполнялись неравенства $\omega'_i(t) > 0$, $\omega''_i(t) < 0$, $i = 1, 2$, при $0 < t < t_0$. Доопределим функции ω_i , $i = 1, 2$, полагая $\omega_i(0) = 0$ и $\omega_i(t) = \omega_i(t_0)$ для $t > t_0$. Тогда построенные функции являются вогнутыми модулями непрерывности на $[0, \infty)$.

Для модуля непрерывности $\omega_1(t)$ составим функцию

$$H_1(t) = \ln \frac{x^\beta u_1(\omega'_1(t))}{(\omega'_1(t))^{1+\beta}}.$$

По лемме 7 получим

$$H_1(t) = - \int_x^{\omega'_1(t)} \frac{(\ln_r \tau)^\sigma}{\tau \ln \tau} d\tau + o(1) \quad \text{при } t \rightarrow 0. \quad (3)$$

Рассмотрим сначала случай $0 < \beta < 1$. По лемме 4

$$\ln \omega'_1(t) = \beta \ln x (1 + o(1)) \quad \text{при } t \rightarrow 0.$$

Тогда $\ln \omega'_1(t) - \ln x = (\beta - 1) \ln x (1 + o(1)) < 0$ при больших x (малых t). Отсюда $\omega'_1(t) < x$ для больших x (малых t).

Оценим $H_1(t)$ снизу в окрестности нуля, учитывая, что функция $(\ln_r x)^\sigma / \ln x$ убывает при больших x . Из равенства (3) получим

$$\begin{aligned} H_1(t) &= \int_{\omega'_1(t)}^x \frac{(\ln_r \tau)^\sigma}{\tau \ln \tau} d\tau + o(1) \geq \frac{(\ln_r x)^\sigma}{\ln x} \int_{\omega'_1(t)}^x \frac{d\tau}{\tau} + o(1) \\ &= \frac{(\ln_r x)^\sigma}{\ln x} (\ln x - \ln \omega'_1(t)) + o(1) = (\ln_r x)^\sigma \left(1 - \frac{\ln \omega'_1(t)}{\ln x} \right) + o(1). \end{aligned}$$

Так как по лемме 4 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln \omega'_1(t) / \ln x) = \beta$, то

$$(\ln_r x)^\sigma = (\ln_r \omega'_1(t))^\sigma (1 + o(1)) \quad \text{при } x \rightarrow \infty.$$

Тогда

$$H_1(t) \geq \frac{1 - \beta}{2} (\ln_r \omega'_1(t))^\sigma \quad \text{при больших } x \text{ (при малых } t).$$

Из этого неравенства и определения $H_1(t)$ следует, что

$$\frac{x^\beta u_1(\omega'_1(t))}{(\omega'_1(t))^{1+\beta}} \geq \exp \left(\frac{1 - \beta}{2} (\ln_r \omega'_1(t))^\sigma \right).$$

Отсюда

$$x \geq \frac{(\omega'_1(t))^{(1+\beta)/\beta}}{(u_1(\omega'_1(t)))^{1/\beta}} \exp\left(\frac{1-\beta}{2\beta}(\ln_r \omega'_1(t))^\sigma\right). \quad (4)$$

Для достаточно больших k обозначим $\xi_k = \ln_m k / \ln_{m+r} k$. Значение ξ_k при больших k возрастает с возрастанием k и $\xi_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$. Для больших k определим λ_k

$$\frac{\lambda_k^{(1+\beta)/\beta}}{(u_1(\lambda_k))^{1/\beta}} = \xi_k.$$

В силу леммы 6 непрерывная функция $x^{1+\beta}/u_1(x)$ возрастает при больших x и стремится к бесконечности при $x \rightarrow \infty$. Поэтому при больших k значения λ_k определены и возрастают к бесконечности при $k \rightarrow \infty$. Для начальных k положительные λ_k зададим произвольно, сохраняя монотонность последовательности $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$. Имеем $\lim_{k \rightarrow \infty} (\ln_m k / \xi_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \ln_{m+r} k = \infty$. Значит, по теореме 4 при всех $c > 0$ ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\exp_m \frac{c \lambda_k^{(1+\beta)/\beta}}{(u_1(\lambda_k))^{1/\beta}} \right)^{-1}$$

расходится.

Оценим $\ln \lambda_k$. Для этого прологарифмируем равенство, определяющее λ_k . Получим

$$\frac{1+\beta}{\beta} \ln \lambda_k - \frac{1}{\beta} \ln u_1(\lambda_k) = \ln \xi_k.$$

По лемме 3 при $k \rightarrow \infty$ выполняется $\ln u_1(\lambda_k) = \beta \ln \lambda_k (1 + o(1))$. Поэтому

$$\ln \xi_k = \frac{1+\beta}{\beta} \ln \lambda_k - \ln \lambda_k (1 + o(1)).$$

Значит, при $k \rightarrow \infty$

$$\ln \lambda_k = \beta \ln \xi_k (1 + o(1)) = \beta \ln \frac{\ln_m k}{\ln_{m+r} k} (1 + o(1)) = \beta \ln_{m+1} k (1 + o(1)).$$

Отсюда, в частности, следует, что при больших k $\ln \lambda_k < \ln k$, т.е. $\lambda_k < k$. Значит, $\sum_{k=1}^{\infty} (1/\lambda_k) = \infty$.

Далее, $\ln \ln \lambda_k = \ln \beta + \ln_{m+2} k + o(1) = \ln_{m+2} k (1 + o(1))$ при $k \rightarrow \infty$. Отсюда $\ln_r \lambda_k = \ln_{m+r} k (1 + o(1))$, $k \rightarrow \infty$. Из (4), учитывая, что по определению $\omega'_1(t(c\lambda_k)) = c\lambda_k$, при больших k получим

$$\begin{aligned} x(t(\lambda_k)) &\geq \frac{\lambda_k^{(1+\beta)/\beta}}{(u_1(\lambda_k))^{1/\beta}} \exp\left(\frac{1-\beta}{2\beta}(\ln_r \lambda_k)^\sigma\right) \geq \xi_k \exp\left(\frac{1-\beta}{4\beta}(\ln_{m+r} k)^\sigma\right) \\ &= \frac{\ln_m k}{\ln_{m+r} k} \exp\left(\frac{1-\beta}{4\beta}(\ln_{m+r} k)^\sigma\right). \end{aligned}$$

Поскольку

$$\frac{1}{y} \exp\left(\frac{1-\beta}{4\beta} y^\sigma\right) \rightarrow \infty \quad \text{при } y \rightarrow \infty,$$

то при достаточно больших k выполняется неравенство $x(t(\lambda_k)) \geq 2 \ln_m k \geq \ln_m k^2$. Значит, $t(\lambda_k) = 1/\exp_m(x(t(\lambda_k))) \leq 1/k^2$ при больших k . Поэтому ряд $\sum_{k=1}^{\infty} t(\lambda_k)$ сходится. Так как по лемме 4 модуль непрерывности $\omega_1(t)$ удовлетворяет m -условию и $\lim_{t \rightarrow 0} (\omega_1(t)/t) = \infty$, то по теореме 2, выбрав $c = 1$, получим $H^\omega \subset \Lambda BV$.

Пусть теперь $\beta > 1$. По лемме 4 имеем $\ln \omega'_1(t) = \beta \ln x(1 + o(1))$ при $t \rightarrow 0$. Тогда $\ln \omega'_1(t) - \ln x = (\beta - 1) \ln x(1 + o(1)) > 0$ при больших x (малых t). Отсюда $\omega'_1(t) > x$ для больших x (малых t). Оценим в равенстве (3) $H_1(t)$ сверху в окрестности нуля, учитывая, что функция $(\ln_r x)^\sigma / \ln x$ убывает при больших x . Из равенства (3) при больших x (малых t) получим

$$\begin{aligned} H_1(t) &= - \int_x^{\omega'_1(t)} \frac{(\ln_r \tau)^\sigma}{\tau \ln \tau} d\tau + o(1) \leq - \frac{(\ln_r x)^\sigma}{\ln x} \int_x^{\omega'_1(t)} \frac{d\tau}{\tau} + o(1) \\ &= - \frac{(\ln_r x)^\sigma}{\ln x} (\ln \omega'_1(t) - \ln x) + o(1) = - (\ln_r x)^\sigma \left(\frac{\ln \omega'_1(t)}{\ln x} - 1 \right) + o(1). \end{aligned}$$

Рассуждения, аналогичные тем, которые были проведены для случая $0 < \beta < 1$, при малых t приводят к неравенству

$$H_1(t) \leq - \frac{\beta - 1}{2} (\ln_r \omega'_1(t))^\sigma.$$

Тогда

$$x \leq \frac{(\omega'_1(t))^{(1+\beta)/\beta}}{(u_1(\omega'_1(t)))^{1/\beta}} \exp \left(- \frac{\beta - 1}{2\beta} (\ln_r \omega'_1(t))^\sigma \right). \quad (5)$$

Не меняя обозначений, зададим теперь ξ_k по-другому, а именно $\xi_k = \ln_m k$. Как и в случае $0 < \beta < 1$, определим λ_k равенствами

$$\frac{\lambda_k^{(1+\beta)/\beta}}{(u_1(\lambda_k))^{1/\beta}} = \xi_k.$$

Существование λ_k и их возрастание при больших k , неравенство $\lambda_k < k$ и равенство $\ln_r \lambda_k = \ln_{m+r} k (1 + o(1))$ при $k \rightarrow \infty$ доказываются так же, как в случае $0 < \beta < 1$. Поэтому снова ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (1/\lambda_k)$ расходится. Для любого $c > 0$ из последнего равенства следует, что $\ln_r(c\lambda_k) = \ln_{m+r} k (1 + o(1))$ при $k \rightarrow \infty$.

Докажем, что для каждого $c > 0$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} t(c\lambda_k)$ расходится. Зафиксируем c . Подставим $t = t(c\lambda_k)$ в (5), учитывая, что $c\lambda_k = \omega'_1(t(c\lambda_k))$. Получим

$$x(t(c\lambda_k)) \leq \frac{(c\lambda_k)^{(1+\beta)/\beta}}{(u_1(c\lambda_k))^{1/\beta}} \exp \left(- \frac{\beta - 1}{2\beta} (\ln_r(c\lambda_k))^\sigma \right).$$

Если k достаточно большое, то в силу $\ln_r(c\lambda_k) \sim \ln_{m+r} k$ и леммы 5

$$(\ln_r(c\lambda_k))^\sigma \geq \frac{1}{2} (\ln_{m+r} k)^\sigma, \quad (u_1(c\lambda_k))^{1/\beta} \geq \frac{1}{2} c (u_1(\lambda_k))^{1/\beta}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} x(t(c\lambda_k)) &\leq \frac{c^{(1+\beta)/\beta} \lambda_k^{(1+\beta)/\beta}}{(1/2)c(u_1(\lambda_k))^{1/\beta}} \exp\left(-\frac{\beta-1}{4\beta}(\ln_{m+r} k)^\sigma\right) \\ &= 2c^{1/\beta} \xi_k \exp\left(-\frac{\beta-1}{4\beta}(\ln_{m+r} k)^\sigma\right) \\ &= 2c^{1/\beta} \ln_m k \exp\left(-\frac{\beta-1}{4\beta}(\ln_{m+r} k)^\sigma\right). \end{aligned}$$

Поскольку $\exp(-(\beta-1)y/(4\beta)) \rightarrow 0$ при $y \rightarrow \infty$, то $x(t(c\lambda_k)) \leq \ln_m k$ при больших k . Тогда

$$t(c\lambda_k) = \frac{1}{\exp_m(x(t(c\lambda_k)))} \geq \frac{1}{k}.$$

Следовательно, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} t(c\lambda_k)$ расходится. По теореме 2 получим $H^\omega \not\subset \Lambda BV$.

С другой стороны, так как $\lim_{k \rightarrow \infty} (\ln_m k / \xi_k) = 1$, то по теореме 4 существует $c > 0$ такое, что сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\exp_m \frac{c\lambda_k^{(1+\beta)/\beta}}{(u_1(\lambda_k))^{1/\beta}} \right)^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\exp_m(c\xi_k)}.$$

Для модуля непрерывности $\omega_2(t)$ составим функцию

$$H_2(t) = \ln \frac{x^\beta u_2(\omega'_2(t))}{(\omega'_2(t))^{1+\beta}}.$$

По лемме 7 получим

$$H_2(t) = \int_x^{\omega'_2(t)} \frac{(\ln_r \tau)^\sigma}{\tau \ln \tau} d\tau + o(1) \quad \text{при } t \rightarrow 0.$$

Здесь по сравнению со случаем H_1 перед интегралом стоит противоположный знак. Теперь для $H_2(t)$ в случае $0 < \beta < 1$ надо провести рассуждения, аналогичные тем, которые были приведены для $H_1(t)$, но в случае $\beta > 1$ для $H_2(t)$ аналогичен случаю $0 < \beta < 1$ для $H_1(t)$.

Итак, если изменить порядок бесконечно малой, как указано во второй части теоремы, то для каждого $\beta > 0$, $\beta \neq 1$, возможен случай, когда $H^\omega \subset \Lambda BV$, но ряд (2) расходится при всех $c > 0$, и возможен случай, когда этот ряд сходится при некотором $c > 0$, но $H^\omega \not\subset \Lambda BV$. Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6. Докажем первую часть теоремы. Пусть справедливо равенство $xu'_-(x)/u(x) = 1 + \alpha(x)$, где $\alpha(x) = O(1/\sqrt{\ln x})$ при $x \rightarrow \infty$. Здесь $\beta = 1$. Проинтегрируем $u'_-(x)/u(x) = 1/x + \alpha(x)/x$ от x_0 до $x \geq x_0$. Получим

$$\ln u(x) - \ln u(x_0) = \ln x - \ln x_0 + \int_{x_0}^x \frac{\alpha(\tau)}{\tau} d\tau.$$

Поскольку при больших x для некоторого $M > 0$ выполняется $|\alpha(x)| \leq M/\sqrt{\ln x}$, то

$$\begin{aligned} |\ln u(x) - \ln x| &\leq |\ln u(x_0) - \ln x_0| + \left| \int_{x_0}^x \frac{\alpha(\tau)}{\tau} d\tau \right| \\ &\leq |\ln u(x_0) - \ln x_0| + M \int_{x_0}^x \frac{d\tau}{\tau \sqrt{\ln \tau}} = |\ln u(x_0) - \ln x_0| + 2M(\sqrt{\ln x} - \sqrt{\ln x_0}). \end{aligned}$$

Поэтому $\ln u(x) - \ln x = O(\sqrt{\ln x})$ при $x \rightarrow \infty$.

По лемме 4 $\ln \omega'_+(t) - \ln u(x) = o(1)$ при $t \rightarrow 0$. Тогда $\ln \omega'_+(t) - \ln x = O(\sqrt{\ln x})$ при $x \rightarrow \infty$. По лемме 7 при $t \rightarrow 0$

$$H(t) = \ln \frac{x^\beta u(\omega'_+(t))}{(\omega'_+(t))^{1+\beta}} = \int_x^{\omega'_+(t)} \frac{\alpha(\tau)}{\tau} d\tau + o(1).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |H(t)| &\leq \left| \int_x^{\omega'_+(t)} \frac{\alpha(\tau)}{\tau} d\tau \right| + o(1) \leq M \left| \int_x^{\omega'_+(t)} \frac{d\tau}{\tau \sqrt{\ln \tau}} \right| + o(1) \\ &= 2M \left| \sqrt{\ln \omega'_+(t)} - \sqrt{\ln x} \right| + o(1) = 2M \frac{|\ln \omega'_+(t) - \ln x|}{\sqrt{\ln \omega'_+(t)} + \sqrt{\ln x}} + o(1) \\ &\leq 2M \frac{|\ln \omega'_+(t) - \ln x|}{\sqrt{\ln x}} + o(1). \end{aligned}$$

Поскольку $\ln \omega'_+(t) - \ln x = O(\sqrt{\ln x})$ при $x \rightarrow \infty$, то функция $H(t)$ ограничена в окрестности нуля переменной t . Отсюда по лемме 8 получим, что $H^\omega \subset \Lambda BV$ тогда и только тогда, когда при некотором $c > 0$ сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\exp_m \frac{c\lambda_k^2}{u(\lambda_k)} \right)^{-1}.$$

Первая часть теоремы доказана.

Докажем вторую часть теоремы. Зададим $\sigma > 0$ и натуральное $r \geq 2$. Рассмотрим функцию $\omega(t) = tu(x)$, $u(x)$ при больших x (малых t) задается формулой

$$u(x) = x \exp \left(- \int_{x_0}^x \frac{(\ln_r \tau)^\sigma}{\tau \sqrt{\ln \tau}} d\tau \right),$$

где $x \geq x_0 = x(t_0)$, x_0 достаточно большое (t_0 достаточно малое), чтобы выполнялось неравенство $\ln_r x_0 > 0$. Мы не приводим громоздкие, но не вызывающие существенных затруднений выкладки, которые доказывают, что $\lim_{t \rightarrow 0} \omega(t) = 0$ и что $\omega'(t) > 0$, $\omega''(t) < 0$ при $0 < t \leq t_0$, если t_0 достаточно мало. Кроме того,

$$\frac{xu'(x)}{u(x)} = 1 - \frac{(\ln_r x)^\sigma}{\sqrt{\ln x}}.$$

Функция ω на полупрямой $[0, \infty)$ строится так же, как функции ω_1, ω_2 в доказательстве теоремы 5. Тогда ω – вогнутый модуль непрерывности на $[0, \infty)$.

Из определения $u(x)$ получим

$$\ln u(x) = \ln x - \int_{x_0}^x \frac{(\ln_r \tau)^\sigma}{\tau \sqrt{\ln \tau}} d\tau.$$

По лемме 4 имеем $\ln \omega'(t) - \ln u(x) = o(1)$ при $t \rightarrow 0$. Поэтому при $t \rightarrow 0$

$$\ln \omega'(t) = \ln u(x) + o(1) = \ln x - \int_{x_0}^x \frac{(\ln_r \tau)^\sigma}{\tau \sqrt{\ln \tau}} d\tau + o(1).$$

Значит, при $t \rightarrow 0$

$$\ln x - \ln \omega'(t) = \int_{x_0}^x \frac{(\ln_r \tau)^\sigma}{\tau \sqrt{\ln \tau}} d\tau + o(1).$$

Будем считать, что x_0 достаточно большое, чтобы при $\tau \geq x_0$ выполнялось неравенство $(\ln_r \tau)^\sigma \geq 5$.

Так как

$$\int_{x_0}^x \frac{(\ln_r \tau)^\sigma}{\tau \sqrt{\ln \tau}} d\tau \geq 5 \int_{x_0}^x \frac{d\tau}{\tau \sqrt{\ln \tau}} = 10(\sqrt{\ln x} - \sqrt{\ln x_0}),$$

то при больших x справедливо $\ln x - \ln \omega'(t) \geq 5\sqrt{\ln x}$. Отсюда, в частности, следует, что $x > \omega'(t)$. По лемме 7 для $\beta = 1$ получим, что для функции

$$H(t) = \ln \frac{xu(\omega'(t))}{(\omega'(t))^2}$$

выполняется следующее

$$H(t) = - \int_x^{\omega'(t)} \frac{(\ln_r \tau)^\sigma}{\tau \sqrt{\ln \tau}} d\tau + o(1) = \int_{\omega'(t)}^x \frac{(\ln_r \tau)^\sigma}{\tau \sqrt{\ln \tau}} d\tau + o(1) \quad \text{при } t \rightarrow 0.$$

Поскольку при больших x функция $(\ln_r x)^\sigma / \sqrt{\ln x}$ убывает, то в окрестности нуля переменной t получаем

$$\begin{aligned} H(t) &\geq \frac{(\ln_r x)^\sigma}{\sqrt{\ln x}} \int_{\omega'(t)}^x \frac{d\tau}{\tau} + o(1) = \frac{(\ln_r x)^\sigma}{\sqrt{\ln x}} (\ln x - \ln \omega'(t)) + o(1) \\ &\geq \frac{(\ln_r x)^\sigma}{\sqrt{\ln x}} 5\sqrt{\ln x} + o(1) \geq 4(\ln_r x)^\sigma. \end{aligned}$$

По лемме 4 для $\beta = 1$ имеем $\ln \omega'(t) = \ln x (1 + o(1))$ при $t \rightarrow 0$. Отсюда $(\ln_r x)^\sigma = (\ln_r \omega'(t))^\sigma (1 + o(1))$ при $t \rightarrow 0$. Поэтому при малых t получаем, что $H(t) \geq 3(\ln_r \omega'(t))^\sigma$, т.е. $xu(\omega'(t))/(\omega'(t))^2 \geq 3(\ln_r \omega'(t))^\sigma$. Значит,

$$x \geq \frac{3(\ln_r \omega'(t))^\sigma (\omega'(t))^2}{u(\omega'(t))}. \quad (6)$$

Положим $\xi_k = \ln_m k / (\ln_{m+r} k)^\sigma$ при достаточно больших k . Значение ξ_k возрастает к бесконечности с возрастанием k . При больших k определим λ_k равенствами

$$\frac{\lambda_k^2}{u(\lambda_k)} = \xi_k.$$

По лемме 6 для $\beta = 1$ получим, что при достаточно больших k числа λ_k существуют и возрастают к бесконечности с возрастанием k . Для начальных значений k зададим $\lambda_k > 0$ произвольным образом, сохраняя монотонность последовательности $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$.

Так как $\lim_{k \rightarrow \infty} (\ln_m k / \xi_k) = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} (\ln_{m+r} k)^\sigma = \infty$, то из теоремы 4 следует, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\exp_m \frac{c\lambda_k^2}{u(\lambda_k)} \right)^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\exp_m(c\xi_k)}$$

расходится при всех $c > 0$.

Оценим $\ln \lambda_k$. Для этого прологарифмируем равенство, определяющее λ_k . Получим $2 \ln \lambda_k - \ln u(\lambda_k) = \ln \xi_k$. По лемме 3 для $\beta = 1$ при $k \rightarrow \infty$ имеем $\ln u(\lambda_k) = \ln \lambda_k (1 + o(1))$. Поэтому $\ln \xi_k = 2 \ln \lambda_k - \ln \lambda_k (1 + o(1))$. Значит,

$$\ln \lambda_k = \ln \xi_k (1 + o(1)) = \ln \frac{\ln_m k}{(\ln_{m+r} k)^\sigma} (1 + o(1)) = \ln_{m+1} k (1 + o(1)) \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Отсюда имеем $\ln \lambda_k < \ln k$ при больших k , т.е. $\lambda_k < k$. Значит, $\sum_{k=1}^\infty (1/\lambda_k) = \infty$. Кроме того, $(\ln_r \lambda_k)^\sigma = (\ln_{m+r} k)^\sigma (1 + o(1))$ при $k \rightarrow \infty$.

Подставим $t = t(\lambda_k)$ в неравенство (6), учитывая, что $\omega'(t(c\lambda_k)) = c\lambda_k$. При больших k получим

$$x(t(\lambda_k)) \geq \frac{3(\ln_r \lambda_k)^\sigma \lambda_k^2}{u(\lambda_k)} \geq 2(\ln_{m+r} k)^\sigma \xi_k = 2 \ln_m k \geq \ln_m k^2.$$

Значит, $t(\lambda_k) = 1 / \exp_m(x(t(\lambda_k))) \leq 1/k^2$ при больших k . Поэтому ряд $\sum_{k=1}^\infty t(\lambda_k)$ сходится. Так как по лемме 4 модуль непрерывности $\omega(t)$ удовлетворяет m -условию и $\lim_{t \rightarrow 0} (\omega(t)/t) = \infty$, то отсюда по теореме 2 для $c = 1$ получим $H^\omega \subset \Lambda BV$.

Итак, если изменить предположение о порядке бесконечно малой, как указано во второй части теоремы, то возможен случай, когда $H^\omega \subset \Lambda BV$, но ряд, указанный в теореме 6, расходится при всех $c > 0$.

Докажем третью часть теоремы. Пусть $\alpha(x) = xu'_-(x)/u(x) - 1 = o(1)$ при $x \rightarrow \infty$ и $\alpha(x)$ не меняет знака при больших x . Интегрируя равенство $u'_-(x)/u(x) = 1/x + \alpha(x)/x$ от x_0 до $x \geq x_0$, получим

$$\ln u(x) - \ln x = \ln u(x_0) - \ln x_0 + \int_{x_0}^x \frac{\alpha(\tau)}{\tau} d\tau.$$

Если $\alpha(x) = 0$ почти всюду на промежутке $[x_0, \infty)$, то на этом промежутке $u(x) = bx$ для некоторого $b > 0$. Тогда $\alpha(x) = 0$ всюду на $[x_0, \infty)$. Следовательно, из первой части теоремы 6 получим $H^\omega \subset \Lambda BV$.

Пусть теперь для сколь угодно большого x_0 функция $\alpha(x)$ отлична от нуля на множестве положительной меры промежутка $[x_0, \infty)$. Зафиксируем x_0 такое, что $\alpha(x)$ не меняет знак на $[x_0, \infty)$. Если функцию $u(x)$ умножить на положительное число, то класс H^ω не изменится. При этом не изменится и функция $\alpha(x)$. Поэтому можно считать, что $u(x_0) = x_0$. Тогда $\ln u(x) - \ln x = \int_{x_0}^x \alpha(\tau)/\tau d\tau$. Докажем, что функция

$$H(t) = \ln \frac{xu(\omega'_+(t))}{(\omega'_+(t))^2}$$

ограничена снизу в окрестности нуля.

По лемме 4 имеем $\ln \omega'_+(t) - \ln u(x) = o(1)$ при $t \rightarrow 0$. Тогда

$$\ln \omega'_+(t) - \ln x = \int_{x_0}^x \frac{\alpha(\tau)}{\tau} d\tau + o(1) \quad \text{при } t \rightarrow 0.$$

Пусть $\alpha(x) \geq 0$ при $x \geq x_0$. Так как $\alpha(x)$ отлична от нуля на множестве положительной меры, то $\ln \omega'_+(t) - \ln x = \int_{x_0}^x \alpha(\tau)/\tau d\tau + o(1) \geq 0$ при больших x . Поэтому $\omega'_+(t) \geq x$. Аналогично, если $\alpha(x) \leq 0$ при $x \geq x_0$, то $\ln \omega'_+(t) - \ln x \leq 0$ при больших x и, значит, $\omega'_+(t) \leq x$.

По лемме 7 имеем

$$H(t) = \int_x^{\omega'_+(t)} \frac{\alpha(\tau)}{\tau} d\tau + o(1) \quad \text{при } t \rightarrow 0.$$

Следовательно, если $\alpha(x) \geq 0$ при $x \geq x_0$, то $H(t) \geq 0$ в окрестности нуля. Если $\alpha(x) \leq 0$ при $x \geq x_0$, то

$$H(t) = \int_x^{\omega'_+(t)} \frac{\alpha(\tau)}{\tau} d\tau + o(1) = - \int_{\omega'_+(t)}^x \frac{\alpha(\tau)}{\tau} d\tau + o(1) \geq 0$$

в окрестности нуля. Итак, функция $H(t)$ ограничена снизу в окрестности нуля. Из доказательства леммы 8 следует, что в случае $\beta = 1$ для вложения $H^\omega \subset \Lambda BV$ достаточно, чтобы при некотором $c > 0$ сходиллся ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\exp_m \frac{c\lambda_k^2}{u(\lambda_k)} \right)^{-1}.$$

Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1. Класс H^ω не изменится, если будем считать, что в некоторой окрестности нуля переменной t

$$u(x) = x^{\beta_m} (\ln x)^{\beta_{m+1}} \cdots (\ln_{n-m} x)^{\beta_n}, \quad \text{где } x = \ln_{m-1} |\ln t|.$$

Дифференцируя $\ln u(x)$ по x , получаем

$$\frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{\beta_m}{x} + \frac{\beta_{m+1}}{x \ln x} + \cdots + \frac{\beta_n}{x \ln x \cdots \ln_{n-m} x}.$$

Отсюда $xu'(x)/u(x) = \beta_m + O(1/\ln x)$. Для $\beta \neq 1$ выполняется условие теоремы 5, а для $\beta = 1$ выполняется условие теоремы 6. Отсюда следует утверждение следствия.

Используя лемму 6 и теорему 4, из теорем 5, 6 и следствия 1 непосредственно получаем теоремы 7, 8 и следствие 2.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю П. Л. Ульянову за постановку задач и внимание к работе.

Список литературы

1. *Барн* Н. К. Тригонометрические ряды. М.: ГИФМЛ, 1961.
2. *Wiener* N. The quadratic variation of a function and its Fourier coefficients // *Math.* 1924. V. 3. P. 72–94.
3. *Marcinkiewicz* J. On a class of functions and their Fourier series // *C. R. Soc. Sci. Varsovie.* 1934. V. 26. P. 71–77.
4. *Young* L. C. Sur une generalisation de la notion de variation de puissance p -ieme bornee au sens de M. Wiener, et sur la convergence des series de Fourier // *C. R. Acad. Sci. Paris.* 1937. V. 204. P. 470–472.
5. *Salem* R. Essais sur les series trigonometriques. Paris: Hermann, 1940.
6. *Waterman* D. On convergence of Fourier series of functions of generalized bounded variation // *Studia Math.* 1972. V. 44. №2. P. 107–117.
7. *Медведева* М. В. О вложении классов H^ω // *Матем. заметки.* 1998. Т. 64. №5. С. 713–719.
8. *Белов* А. С. Соотношения между различными классами функций обобщенной ограниченной вариации // *Доклады расширенных заседаний семинара Института им. И. Н. Векуа.* Т. 3. №2. Тбилиси, 1988. С. 11–14.
9. *Бережной* Е. И. Пространства функций обобщенной ограниченной вариации. Теоремы вложения. Оценки констант Лебега // *Сиб. матем. журн.* 1999. Т. 40. №5. С. 997–1011.
10. *Leindler* L. A note on embedding of classes H^ω // *Anal. Math.* 2001. V. 27. №1. P. 71–76.
11. *Медведева* М. В. Условия вложений классов функций H^ω в классы функций ограниченной обобщенной вариации // *Вестн. МГУ. Сер.1. Матем., мех.* 2001. №2. С. 60–64.
12. *Ефимов* А. В. Линейные методы приближения непрерывных периодических функций // *Матем. сб.* 1961. Т. 54. №1. С. 51–90.
13. *Красносельский* М. А., *Рутецкий* Я. Б. Выпуклые функции и пространства Орлича. М.: ГИФМЛ, 1958.
14. *Натансон* И. П. Конструктивная теория функций. М.: Гос. изд. тех.-теор. лит., 1949.
15. *Маркушевич* А. И. Теория аналитических функций. Т. 2. М.: Наука, 1968.