Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. А. Неретин, Бета-интегралы и конечные ортогональные системы многочленов Вильсона, *Матем. сб.*, 2002, том 193, номер 7, 131–148

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm670>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 12:34:58

УДК 517.444+517.588+517.587

Ю. А. Неретин

Бета-интегралы и конечные ортогональные системы многочленов Вильсона

В работе выводится интеграл

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\prod_{k=1}^3 \Gamma(a_k + is)}{\Gamma(2is)\Gamma(b + is)} \right|^2 ds = \frac{\Gamma(b - a_1 - a_2 - a_3) \prod_{1 \leq k < l \leq 3} \Gamma(a_k + a_l)}{\prod_{k=1}^3 \Gamma(b - a_k)}$$

и строится система ортогональных многочленов, весом для которых служит подынтегральное выражение. Вес убывает полиномиально, и поэтому лишь конечное число его моментов сходится. В итоге полученная система ортогональных многочленов оказывается конечной.

Также строится система ортогональных многочленов, связанная с ${}_5H_5$ -формулой Дуголла и интегралом Аски. Все три системы состоят из многочленов Вильсона вне области положительности обычного веса.

Библиография: 34 названия.

§ 0. Введение

В настоящей статье мы выводим бета-интеграл

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\prod_{k=1}^3 \Gamma(a_k + is)}{\Gamma(2is)\Gamma(b + is)} \right|^2 ds = \frac{\Gamma(b - a_1 - a_2 - a_3) \prod_{1 \leq k < l \leq 3} \Gamma(a_k + a_l)}{\prod_{k=1}^3 \Gamma(b - a_k)} \quad (0.1)$$

(в литературе найти этот интеграл не удалось), строим систему ортогональных многочленов, связанных с этим интегралом, а также системы, связанные с интегралом Аски (0.5) и с ${}_5H_5$ -формулой Дуголла (0.6). Все полученные системы оказываются многочленами Вильсона (см. [1]–[3]) вне области положительности классического веса.

0.1. Бета-интегралы. Интеграл (0.1) является представителем большого семейства так называемых *бета-интегралов*. Мы упомянем лишь те из них, которые так или иначе появляются в данной статье: *интеграл де Бранжа–Вильсона* [1], [4] (см. также [2; 3.6])

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\prod_{k=1}^4 \Gamma(a_k + is)}{\Gamma(2is)} \right|^2 ds = \frac{\prod_{1 \leq k < l \leq 4} \Gamma(a_k + a_l)}{\Gamma(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)}, \quad (0.2)$$

вторая лемма Барнса (см. [2; теорема 2.4.3])

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(a_1 - is)\Gamma(a_2 - is)\Gamma(b_1 + is)\Gamma(b_2 + is)\Gamma(b_3 + is)}{\Gamma(a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + b_3 + is)} ds \\ &= \frac{\prod_{k=1}^3 \Gamma(a_1 + b_k)\Gamma(a_2 + b_k)}{\prod_{1 \leq k < l \leq 3} \Gamma(a_1 + a_2 + b_k + b_l)}, \end{aligned} \quad (0.3)$$

Работа выполнена при поддержке NWO (грант № 047-008-009).

интеграл Нассраллаха–Рахмана (см. [5], [6])

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\prod_{j=1}^5 \Gamma(a_j + is)}{\Gamma(2is) \Gamma(\sum_{j=1}^5 a_j + is)} \right|^2 ds = 2 \frac{\prod_{1 \leq k < l \leq 5} \Gamma(a_k + a_l)}{\prod_{k=1}^5 \Gamma(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 - a_k)} \quad (0.4)$$

и интеграл Аски (см. [6])

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(1-2s) \Gamma(1+2s)}{\prod_{k=1}^4 \Gamma(a_k + s) \Gamma(a_k - s)} ds = \frac{\Gamma(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - 3)}{\prod_{1 \leq k < l \leq 4} \Gamma(a_k + a_l - 1)}. \quad (0.5)$$

В последнем случае подынтегральная функция имеет полюсы $s = \pm n/2$, $n = 1, 2, \dots$, на контуре интегрирования.

Интеграл можно понимать двумя способами.

Первый способ. Фиксируем α такое, что $0 < \alpha < 1$. Далее рассмотрим интеграл от $-M - \alpha$ до $N + \alpha$, где M, N — целые положительные числа. Мы будем понимать этот интеграл как интеграл в смысле главного значения вблизи каждого полюса. При $\operatorname{Re} \sum a_j < 3$ существует предел этого интеграла при $M, N \rightarrow +\infty$.

Другой способ — взять интеграл от $-M - \alpha$ до $N + \alpha$ по контуру, обходящему полюсы сверху, и перейти к пределу при $M, N \rightarrow +\infty$. Оба варианта совпадут ввиду четности подынтегральной функции (поправки в парах полюсов $\pm k/2$ сокращаются).

Более полные списки бета-интегралов содержатся в [5], [6], есть также многочисленные q -аналоги (см. [5]–[7]), дискретные аналоги и многомерные (см. [8], [9]) аналоги бета-интегралов. Из дискретных аналогов нам понадобится следующая формула Дуголла

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\alpha + n}{\prod_{j=1}^4 \Gamma(a_j + \alpha + n) \Gamma(a_j - \alpha - n)} = \frac{\sin 2\pi\alpha}{2\pi} \frac{\Gamma(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - 3)}{\prod_{1 \leq j < k \leq 4} \Gamma(a_j + a_k - 1)}. \quad (0.6)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. В формулах (0.1)–(0.4) мы предполагаем, что параметры a_j, b_j вещественны и положительны. Если, например, мы перепишем равенство (0.2) в виде

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\prod_{k=1}^4 \Gamma(a_k + is) \Gamma(a_k - is)}{\Gamma(2is) \Gamma(-2is)} ds = \frac{\prod_{1 \leq k < l \leq 4} \Gamma(a_k + a_l)}{\Gamma(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)},$$

то (в силу аналитического продолжения) полученное равенство будет верно при $\operatorname{Re} a_j > 0$. Это ограничение можно заменить на более слабое $a_k + a_l \neq 0, -1, -2, \dots$ (для всех пар k, l), но тогда придется изменить контур интегрирования (см. п. 0.4) или добавить сумму вычетов в правой части. Так же можно понимать и остальные интегралы (0.1)–(0.4) и (2.2)–(2.5).

0.2. Интеграл Нассраллаха–Рахмана. Наш вывод интеграла (0.1) чрезвычайно прост, но сам этот интеграл может быть получен путем вырождений и гипергеометрических преобразований из следующего замечательного интеграла

Насраллаха–Рахмана

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\Gamma(a+is)\Gamma(b+is)\Gamma(c+is)\Gamma(d+is)\Gamma(f+is)\Gamma(g+is)}{\Gamma(2is)\Gamma(\lambda+is)\Gamma(\mu+is)} \right|^2 ds \\
 &= \frac{4\pi^3 \sin(a+b+c+d)\pi\Gamma(a+b)\Gamma(a+c)\Gamma(a+d)\Gamma(1+2a)}{\sin(b+c)\pi\sin(b+d)\pi\sin(c+d)\pi} \\
 & \times \frac{\Gamma(a+f)\Gamma(f-a)\Gamma(g+a)\Gamma(g-a)}{\Gamma(1+a-b)\Gamma(1+a-c)\Gamma(1+a-d)\Gamma(\lambda+a)\Gamma(\lambda-a)\Gamma(\mu+a)\Gamma(\mu-a)} \\
 & \times {}_9F_8 \left[\begin{matrix} 2a, 1+a, a+b, a+c, a+d, a+f, a+g, 1+a-\lambda, 1+a-\mu \\ a, 1+a-b, 1+a-c, 1+a-d, 1+a-f, 1+a-g, a+\lambda, a+\mu \end{matrix}; 1 \right] \\
 & + \dots, \tag{0.7}
 \end{aligned}$$

где многоточие означает сумму трех аналогичных слагаемых, получаемых при последовательной замене a на b , c и d .

Мы обсуждаем несколько интегралов (2.2)–(2.5), промежуточных между интегралами (0.2) и (0.1) и интегралом Насраллаха–Рахмана. Все они могут быть получены из (0.7) вырождением и гипергеометрическими преобразованиями (я однако нигде не встречал окончательных формул (2.2)–(2.5); они заслуживают того, чтобы быть выписанными (в особенности интегральное представление (2.2) для ${}_3F_2(1)$), к тому же наши вычисления очень просты и идейно, и технически).

0.3. Конечные системы ортогональных многочленов. Мы явно выписываем систему многочленов $p(s^2)$, ортогональных относительно веса

$$w_1(s) = \left| \frac{\prod_{k=1}^3 \Gamma(a_k + is)}{\Gamma(2is)\Gamma(b + is)} \right|^2.$$

Заметим, что этот вес убывает как $s^{-2(b-a_1-a_2-a_3)-1}$, поэтому лишь конечное число моментов $\int_0^\infty s^{2k} w_1(s) ds$ имеет смысл. Поэтому наша система ортогональных многочленов конечна по определению.

Мы также строим систему ортогональных многочленов по дискретному весу

$$w_2(s) = \sum c_n \delta_n,$$

где δ_n – дельта-функция, сосредоточенная в точке n , а c_n – слагаемые формулы Дуголла (0.6).

Этот вес тоже полиномиально убывает. Он иногда положителен, иногда знако-неопределенен, в зависимости от a_j и α . Последнее, с точки зрения игры в формулы, не имеет большого значения.

Наконец мы строим (опять-таки конечную) систему многочленов, которая соответствует весу $w_3(s)$, где $w_3(s)$ – подынтегральное выражение в интеграле Аски (0.5). Этот вес не является положительным, более того, он не является мерой, однако интегрировать по нему можно.

Все три полученные системы оказываются многочленами Вильсона. Причем системы многочленов, связанных с весами $w_2(s)$ и $w_3(s)$, совпадают (с точностью до поправочного множителя в соотношениях ортогональности).

Конечные системы ортогональных многочленов (с непрерывным весом) были впервые обнаружены Романовским [10] в 1929 (он построил аналоги многочленов

Якоби). Аски в [11] получил систему многочленов, связанных с бета-интегралом Рамануджана. Различные конечные семейства ортогональных многочленов рассматривались в серии статей Лески [12]–[15], некоторые приложения таких конструкций можно найти в [16], [17].

0.4. Обозначения. В тексте используются следующие обозначения: $(a)_k := a(a+1)\cdots(a+k-1)$ – символ Похгаммера,

$${}_qF_p \left[\begin{matrix} a_1, \dots, a_q \\ b_1, \dots, b_p \end{matrix} ; z \right] = {}_qF_p(a_1, \dots, a_q; b_1, \dots, b_p; z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k \cdots (a_q)_k}{k! (b_1)_k \cdots (b_p)_k} z^k$$

– обобщенная гипергеометрическая функция,

$$\Gamma \left[\begin{matrix} u_1, \dots, u_l \\ v_1, \dots, v_m \end{matrix} \right] := \frac{\Gamma(u_1) \cdots \Gamma(u_l)}{\Gamma(v_1) \cdots \Gamma(v_m)},$$

интегралы Меллина–Барнса

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \Gamma \left[\begin{matrix} a_1 + s, \dots, a_m + s, b_1 - s, \dots, b_n - s \\ c_1 - s, \dots, c_k - s, d_1 + s, \dots, d_l + s \end{matrix} \right] z^{-s} ds.$$

Предполагается, что интегрирование ведется по контуру, ведущему из $-i\infty$ в $+i\infty$, разделяющему левую серию полюсов $s = -a_1 - j, \dots, -a_m - j$, где $j = 0, 1, 2, \dots, \infty$, и правую серию полюсов $s = b_1 + j, \dots, s = b_n + j$. Мы полагаем, что ни один полюс из левых серий не совпадает ни с одним полюсом из правых серий (и, в частности, желаемый контур существует). Интеграл Меллина–Барнса по стандартным правилам записывается в виде конечной суммы гипергеометрических функций с Γ -множителями. Правила для выписывания при $m + n \geq k + l$ (у нас это всегда выполнено) можно найти в книгах Слейтер [18] и Маричева [19], см. также [20].

Частично работа была выполнена в Институте математических исследований (Беркли) и Институте им. Э. Шрёдингера (Вена). Автор выражает благодарность администрации этих институтов за гостеприимство.

§1. Предварительные сведения и предварительные вычисления

1.1. Идексное гипергеометрическое преобразование. Фиксируем $a, b > 0$. Пусть f – функция на полупрямой $x \geq 0$. *Идексное гипергеометрическое преобразование* $J_{a,b}$ задается формулой

$$J_{a,b}f(s) = \frac{1}{\Gamma(a+b)} \int_0^\infty f(x) {}_2F_1(a+is, a-is; a+b; -x) x^{a+b-1} (1+x)^{a-b} dx. \quad (1.1)$$

Обратное преобразование имеет вид

$$J_{a,b}^{-1}f(x) = \frac{1}{\pi \Gamma(a+b)} \int_0^\infty f(s) {}_2F_1(a+is, a-is; a+b; -x) \left| \frac{\Gamma(a+is)\Gamma(b+is)}{\Gamma(2is)} \right|^2 ds. \quad (1.2)$$

Преобразование J является унитарным преобразованием

$$L^2(\mathbb{R}_+, x^{a+b-1} (1+x)^{a-b}) \rightarrow L^2\left(\mathbb{R}_+, \left| \frac{\Gamma(a+is)\Gamma(b+is)}{\Gamma(2is)} \right|^2\right).$$

Условие унитарности (*формула Планшереля*) в явном виде имеет вид

$$\int_0^\infty f_1(x) \overline{f_2(x)} x^{a+b-1} (1+x)^{a-b} dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty g_1(s) \overline{g_2(s)} \left| \frac{\Gamma(a+is)\Gamma(b+is)}{\Gamma(2is)} \right|^2 ds. \quad (1.3)$$

О свойствах этого преобразования см. [21]–[26]. Преобразование J называется также *преобразованием Олевского*, *преобразованием Якоби*, *преобразованием Фурье–Якоби* и *обобщенным преобразованием Фурье*, обнаружено оно Германом Вейлем в 1910 году.

1.2. Гипергеометрическая функция Гаусса. Мы используем несколько простых фактов о гипергеометрических функциях ${}_2F_1$: в частности, *формулу Гаусса* (см. [2; теорема 2.2.2], [27; (2.1.14)])

$${}_2F_1(a, b; c; 1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, \quad \operatorname{Re}(c-a-b) > 0, \quad (1.4)$$

и *формулу Больца* (см. [27; (2.1.22–23)])

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a, b; c; -x) &= (1+x)^{-a} {}_2F_1\left(a, c-b; c; \frac{x}{x+1}\right) \\ &= (1+x)^{-b} {}_2F_1\left(c-a, b; c; \frac{x}{x+1}\right) \\ &= (1+x)^{c-a-b} {}_2F_1(c-a, c-b; c; -x). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Напомним, что функция ${}_2F_1(a, b; c; x)$ аналитически продолжается на полупрямую $x < 0$. Асимптотика функции ${}_2F_1(a+is, a-is; a+b; -x)$ при $x \rightarrow +\infty$ имеет вид

$${}_2F_1(a+is, a-is; a+b; -x) = \psi(x) x^{-a}, \quad (1.6)$$

где ψ – ограниченная функция при $s \neq 0$ и $\psi(x)/\ln(x)$ – ограниченная функция при $s = 0$ (более точное выражение см. в [27; (2.3.2.9)]).

Асимптотика функции ${}_2F_1(a+is, a-is; a+b; -x)$ при $s \rightarrow +\infty$ имеет вид

$${}_2F_1(a+is, a-is; a+b; -x) = \lambda(s) s^{-a-b+1/2},$$

где $\lambda(s)$ – ограниченная функция (см. формулу Ватсона в [27; (2.3.2.17)]).

Напомним три представления Гауссовой гипергеометрической функции в виде Барнсовских интегралов (везде $x > 0$), (см. [27, (2.1.15)], [19; §2.10, 11(1), 19(1), 22(1)], [2; теоремы 2.4.1, 2.4.2]):

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\Gamma(a-s)\Gamma(b-s)\Gamma(s)}{\Gamma(c-s)} x^{-s} ds = {}_2F_1(a, b; c; -x), \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \int_{-i\infty}^{i\infty} \Gamma(s)\Gamma(s+c-a-b)\Gamma(a-s)\Gamma(b-s) x^{-s} ds \\ = {}_2F_1(a, b; c; 1-x); \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \Gamma(c) \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\Gamma(s)\Gamma(s+c-a-b)}{\Gamma(s+c-a)\Gamma(s+c-b)} x^{-s} ds \\ = \begin{cases} (1-x)^{c-1} {}_2F_1(a, b; c; 1-x), & x > 1; \\ 0, & x < 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.9)$$

1.3. Г-функция. Мы будем использовать следующее интегральное представление бета-функции

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1} dx}{(1+x)^\rho} = B(\alpha, \rho - \alpha),$$

заменой переменной $x/(x+1) = z$ этот интеграл приводится к обычному определению бета-функции.

Асимптотика функции $\Gamma(z)$ задается формулой Стирлинга

$$\Gamma(z) = \sqrt{2\pi} z^{z-1/2} e^{-z} \left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right) \right), \quad z \rightarrow \infty, \quad \arg z < \pi - \varepsilon.$$

В частности (см. [27; (1.18.3), (1.18.6)]),

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(z+a)}{\Gamma(z+b)} &\sim z^{a-b}, \quad z \rightarrow \infty, \quad \arg z < \pi - \varepsilon, \\ |\Gamma(a+is)| &\sim \sqrt{2\pi} |s|^{a-1/2} e^{-|s|\pi/2}, \quad s \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

1.4. Преобразование Меллина. Рассмотрим функцию f на полупрямой $x \geq 0$. Ее преобразование Меллина задается формулой

$$f^*(s) = \int_0^\infty x^s f(x) \frac{dx}{x}.$$

Формула обращения имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} f^*(s) x^{-s} ds.$$

Преобразование Меллина переводит свертку

$$\int_0^\infty f_1\left(\frac{x}{t}\right) f_2(t) \frac{dt}{t}$$

в произведение преобразований Меллина $f_1^*(s) f_2^*(s)$. По поводу точных формулировок см., например, [19].

Функция $f(ax)$ (при $a > 0$), очевидно, переходит в $a^{-s} f^*(s)$, а функция $x^\alpha f(x)$ — в $f^*(s + \alpha)$.

1.5. Нам понадобятся некоторые интегралы вида

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{(x+z)^\rho} {}_2F_1(p, q; r; -x) dx \\ &= \frac{1}{2\pi i} z^{\alpha-\rho} \Gamma\left[\begin{matrix} r \\ p, q, \rho \end{matrix}\right] \int_{-i\infty}^{i\infty} \Gamma\left[\begin{matrix} s + \alpha, \rho - s - \alpha, p + s, q + s, -s \\ r + s \end{matrix}\right] z^s ds. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Интеграл Меллина–Барнса в правой части выражается как линейная комбинация двух ${}_3F_2$.

Мы приведем в качестве образца (вполне стандартное, см. [19]) доказательство тождества (1.10), тоже вполне стандартного (см. [20; (2.21.1.16)]).

Для этого представим $x^\alpha (x+z)^{-\rho}$ в виде обратного преобразования Меллина

$$x^\alpha (x+z)^{-\rho} = \frac{z^{\alpha-\rho}}{2\pi\Gamma(\rho)} \int_{-i\infty}^{i\infty} \Gamma(s+\alpha) \Gamma(\rho-s-\alpha) z^s x^{-s} ds$$

(чтобы убедиться в этом, достаточно вычислить прямое преобразование Меллина). Применяя интеграл Барнса (1.7) и формулу свертки для преобразования Меллина, получаем (1.10).

1.6. Следствия из формулы (1.10).

ЛЕММА 1.1. а) Оператор J переводит функцию

$$(1+x)^{-a-c} \quad \vartheta \quad \frac{\Gamma(c+is)\Gamma(c-is)}{\Gamma(c+a)\Gamma(c+b)}.$$

б) Оператор J переводит функцию

$$\frac{(1+x)^{b-a}}{(x+z)^{c+b}} \quad \vartheta \quad \frac{\Gamma(c+is)\Gamma(c-is)}{\Gamma(c+a)\Gamma(c+b)} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} c+is, c-is \\ c+a \end{matrix}; 1-z \right].$$

с) Оператор J переводит функцию

$$x^{-u-a} \quad \vartheta \quad \frac{\Gamma(-u+b)}{\Gamma(a+u)} \cdot \frac{\Gamma(u+is)\Gamma(u-is)}{\Gamma(b+is)\Gamma(b-is)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нужно подставить соответствующие f в формулу (1.1). Мы можем просто сослаться на (2.21.1.4), (2.21.1.5), (2.21.1.15) Прудникова, Брычкова, Маричева [20], или на [28; 7.512].

Лучше, однако, объяснить, что происходит и почему при одних значениях параметров интеграл (1.10) вычисляется, а при других – нет.

1) При $\alpha = r$ в правой части (1.10) под интегралом два Γ -множителя сокращаются. Остается интеграл Барнса типа (1.8), что доказывает утверждение б).

2) Утверждение а) получается подстановкой $z = 1$ в утверждение б).

3) Подставим $z = 1$ в (1.10). При $r = p + q + \rho$ правая часть вычисляется по второй лемме Барнса (0.3). Это дает с).

1.7. Интегралы с произведениями гипергеометрических функций.

Прямое применение формулы свертки для преобразования Меллина дает

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty x^{\alpha-1} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} p, q \\ r \end{matrix}; -\omega x \right] {}_2F_1 \left[\begin{matrix} u, v \\ w \end{matrix}; -\tilde{\omega} x \right] dx \\ &= \frac{1}{2\pi i} \omega^{-\alpha} \Gamma \left[\begin{matrix} r, w \\ u, v, p, q \end{matrix} \right] \\ & \quad \times \int_{-i\infty}^{i\infty} \Gamma \left[\begin{matrix} \alpha + s, u + s, v + s, p - \alpha - s, q - \alpha - s, -s \\ r - \alpha - s, w + s \end{matrix} \right] \left(\frac{\omega}{\tilde{\omega}} \right)^{-s} ds. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Если в это тождество подставить $\alpha = w = r$, то четыре Γ -множителя под интегралом в правой части сокращаются. Применяя формулу Барнса (1.8), получаем

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty x^{r-1} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} p, q \\ r \end{matrix}; -\omega x \right] {}_2F_1 \left[\begin{matrix} u, v \\ r \end{matrix}; -\tilde{\omega} x \right] dx \\ &= \omega^{-r+u} \tilde{\omega}^{-u} \Gamma \left[\begin{matrix} r, r, p - r + u, q - r + u, p - r + v, q - r + v \\ u, v, p, q, p + q + u + v - 2r \end{matrix} \right] \\ & \quad \times {}_2F_1 \left[\begin{matrix} p - r + u, q - r + u \\ p + q + u + v - 2r \end{matrix}; 1 - \frac{\omega}{\tilde{\omega}} \right]. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Это формула (2.21.9.7) таблиц [20] (там отсутствует штрих во втором индексе гипергеометрической функции в правой части).

Нам также понадобится интеграл

$$\begin{aligned} & \int_0^1 z^{\mu-1} (1-z)^{\nu-1} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} \alpha, \beta \\ \nu \end{matrix}; 1-z \right] {}_2F_1 \left[\begin{matrix} \varphi, \psi \\ \xi \end{matrix}; 1-z \right] dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \Gamma \left[\begin{matrix} \nu, \xi \\ \varphi, \psi, \xi - \varphi, \xi - \psi \end{matrix} \right] \\ & \times \int_{-i\infty}^{i\infty} \Gamma \left[\begin{matrix} \mu + s, \mu + \nu - \alpha - \beta + s, \varphi + s, \psi + s, -s, \xi - \varphi - \psi + s \\ \nu + \mu - \alpha + s, \mu + \nu - \beta + s \end{matrix} \right] ds. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Для вывода этой формулы запишем $(1-z)^{\nu-1} {}_2F_1(\alpha, \beta; \nu; 1-z)$ как интеграл (1.9), а функцию ${}_2F_1(\varphi, \psi; \xi; 1-z)$ как интеграл (1.8). Далее применяем формулу свертки.

1.9. Следствия из формулы (1.11).

ЛЕММА 1.2. а) Преобразование J переводит

$${}_2F_1 \left[\begin{matrix} p+b, q+b \\ a+b \end{matrix}; -\frac{x}{y} \right] (1+x)^{b-a}$$

в

$$\begin{aligned} & \frac{y^{b-q} \Gamma(a+b)}{\Gamma(p+q) \Gamma(p+b) \Gamma(q+b)} \cdot \frac{\Gamma(p+is) \Gamma(p-is) \Gamma(q+is) \Gamma(q-is)}{\Gamma(a+is) \Gamma(a-is)} \\ & \times {}_2F_1 \left[\begin{matrix} p+is, p-is \\ p+q \end{matrix}; 1-y \right]. \end{aligned}$$

б) Преобразование J переводит

$${}_2F_1 \left[\begin{matrix} p+b, q+b \\ a+b \end{matrix}; -x \right] (1+x)^{b-a}$$

в

$$\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(p+q) \Gamma(p+b) \Gamma(q+b)} \cdot \frac{\Gamma(p+is) \Gamma(p-is) \Gamma(q+is) \Gamma(q-is)}{\Gamma(a+is) \Gamma(a-is)}.$$

с) Преобразование J переводит

$${}_2F_1 \left[\begin{matrix} a+c, a+d \\ a+b+c+d \end{matrix}; -x \right]$$

в

$$\frac{\Gamma(a+b+c+d) \cdot \Gamma(c+is) \Gamma(c-is) \Gamma(d+is) \Gamma(d-is)}{\Gamma(a+c) \Gamma(a+d) \Gamma(b+c) \Gamma(b+d) \Gamma(c+d)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение а) получается непосредственным применением формулы (1.12). Утверждение б) получается из а) подстановкой $y = 1$ (разумеется, лучше сразу подставить $\omega = \tilde{\omega}$ в (1.11)).

Выведем с). Подставляя $f = {}_2F_1[\dots]$ в (1.11) и применяя преобразование Больца, получаем

$$\frac{1}{\Gamma(a+b)} \int_0^\infty x^{a+b-1} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} b+d, b+c \\ a+b+c+d \end{matrix}; -x \right] {}_2F_1 \left[\begin{matrix} a+is, a-is \\ a+b \end{matrix}; -x \right] dx.$$

Далее в правой части (1.12) под интегралом два Γ -множителя сокращаются, и мы получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \Gamma \left[\begin{matrix} a+b+c+d \\ a+is, a-is, b+c, b+d \end{matrix} \right] \\ & \times \int_{-i\infty}^{i\infty} \Gamma \left[\begin{matrix} a+is+t, a-is+t, d-a-t, c-a-t, -t \\ c+d-t \end{matrix} \right] dt. \end{aligned}$$

Остается применить вторую лемму Барнса (0.3).

§ 2. Вырожденные случаи интеграла Насраллаха–Рахмана

В этом параграфе мы применяем формулу Планшереля (1.3) для индексного преобразования к различным парам функций из лемм 1.1–1.2.

Параметры a, b, c, d, e, f, u, v для краткости формул предполагаются вещественными положительными.

2.1. Интеграл де Бранжа–Вильсона. Применим формулу Планшереля (1.3) к паре функций $(1+x)^{-a-c}$ и $(1+x)^{-a-d}$. В левой части имеем бета-интеграл

$$\int_0^\infty \frac{x^{a+b-1} dx}{(1+x)^{a+b+c+d}}, \quad (2.1)$$

а в правой части (в силу леммы 1.1.а)) – интеграл де Бранжа–Вильсона (с точностью до Γ -множителей). Вычисляя (2.1), получаем (0.2).

Этот вывод интеграла де Бранжа–Вильсона известен (см. [23]).

2.2. Вывод бета-интеграла (0.1). Достаточно применить формулу Планшереля к паре функций x^{-u-a} и x^{-v-a} (см. лемму 1.1.с)).

2.3. Применим формулу Планшереля (1.3) к паре функций

$$(1+x)^{-a-e} \quad \text{и} \quad {}_2F_1 \left[\begin{matrix} a+c, a+d \\ a+b+c+d \end{matrix}; -x \right].$$

В левой части имеем

$$\int_0^\infty x^{a+b-1} (1+x)^{-b-e} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} a+c, a+d \\ a+b+c+d \end{matrix}; -x \right] dx.$$

Преобразуя это по формуле Больца, получаем

$$\int_0^1 z^{a+b-1} (1-z)^{c+e-1} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} a+c, b+c \\ a+b+c+d \end{matrix}; z \right] dz.$$

Это стандартное интегральное представление для ${}_3F_2$ (см. [2; (2.2.4)]), и, окончательно, левая часть равна

$$\frac{\Gamma(a+b)\Gamma(c+e)}{\Gamma(a+b+c+e)} {}_3F_2 \left[\begin{matrix} a+c, b+c, a+b \\ a+b+c+d, a+b+c+e \end{matrix}; 1 \right].$$

Приравнявая правую часть формулы Планшереля к левой, получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left| \frac{\Gamma(a+is)\Gamma(b+is)\Gamma(c+is)\Gamma(d+is)\Gamma(e+is)}{\Gamma(2is)} \right|^2 ds \\ &= \frac{\Gamma(a+b)\Gamma(a+c)\Gamma(a+d)\Gamma(a+e)\Gamma(b+c)\Gamma(b+d)\Gamma(b+e)\Gamma(c+d)\Gamma(c+e)}{\Gamma(a+b+c+d)\Gamma(a+b+c+e)} \\ & \quad \times {}_3F_2 \left[\begin{matrix} a+c, b+c, a+b \\ a+b+c+d, a+b+c+e \end{matrix}; 1 \right], \end{aligned} \quad (2.2)$$

среди Γ -множителей в числителе отсутствует $\Gamma(e+d)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Очевидно, левая часть равенства симметрична по a, b, c, d, e . Симметричность правой части равносильна формуле Куммера (см. [2; следствие 3.3.5]).

2.4. Теперь применим формулу Планшереля (1.3) к паре функций

$${}_2F_1 \left[\begin{matrix} a+c, a+d \\ a+b+c+d \end{matrix}; -x \right] \quad \text{и} \quad {}_2F_1 \left[\begin{matrix} a+e, a+f \\ a+b+e+f \end{matrix}; -x \right]$$

(см. лемму 1.2.с)). В левой части имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty x^{a+b-1} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} a+c, a+d \\ a+b+c+d \end{matrix}; -x \right] {}_2F_1 \left[\begin{matrix} a+e, a+f \\ a+b+e+f \end{matrix}; -x \right] (1+x)^{a-b} dx \\ &= \int_0^\infty x^{a+b-1} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} b+d, b+c \\ a+b+c+d \end{matrix}; -x \right] {}_2F_1 \left[\begin{matrix} a+e, a+f \\ a+b+e+f \end{matrix}; -x \right] dx. \end{aligned}$$

Применяя формулу (1.11), получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left| \frac{\Gamma(a+is)\Gamma(b+is)\Gamma(c+is)\Gamma(d+is)\Gamma(e+is)\Gamma(f+is)}{\Gamma(2is)} \right|^2 ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \Gamma(a+c)\Gamma(a+d)\Gamma(c+d)\Gamma(b+e)\Gamma(b+f)\Gamma(e+f) \\ & \quad \times \int_{-i\infty}^{i\infty} \Gamma \left[\begin{matrix} a+b+s, a+e+s, a+f+s, d-a-s, c-a-s, -s \\ c+d-s, a+b+e+f+s \end{matrix} \right] ds. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Выражение в правой части расписывается как линейная комбинация трех функций ${}_4F_3(1)$.

2.5. Теперь мы применим формулу Планшереля к паре функций

$${}_2F_1 \left[\begin{matrix} p+b, q+b \\ a+b \end{matrix}; -x \right] (1+x)^{b-a} \quad \text{и} \quad {}_2F_1 \left[\begin{matrix} u+b, v+b \\ a+b \end{matrix}; -x \right] (1+x)^{b-a}$$

(их индексные преобразования вычислены в лемме 1.2.b)).

Мы должны вычислить интеграл

$$\int_0^\infty x^{a+b-1} (1+x)^{b-a} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} p+b, q+b \\ a+b \end{matrix}; -x \right] {}_2F_1 \left[\begin{matrix} u+b, v+b \\ a+b \end{matrix}; -x \right] dx.$$

Применяя формулу Больца, приводим его к виду

$$\begin{aligned} & \int_0^1 y^{a+b-1} (1-y)^{u+p} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} p+b, a-q \\ a+b \end{matrix}; y \right] {}_2F_1 \left[\begin{matrix} u+b, a-v \\ a+b \end{matrix}; y \right] dy \\ &= \int_0^1 (1-z)^{a+b-1} z^{u+p} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} p+b, a-q \\ a+b \end{matrix}; 1-z \right] {}_2F_1 \left[\begin{matrix} u+b, a-v \\ a+b \end{matrix}; 1-z \right] dz. \end{aligned}$$

Остается применить формулу (1.13). В итоге получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left| \frac{\Gamma(b+is)\Gamma(p+is)\Gamma(q+is)\Gamma(u+is)\Gamma(v+is)}{\Gamma(2is)\Gamma(a+is)} \right|^2 ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \Gamma \left[\begin{matrix} u+v, p+q, p+b, q+b \\ a-v, u-v \end{matrix} \right] \\ & \quad \times \int_{-i\infty}^{i\infty} \Gamma \left[\begin{matrix} u+p+s, u+q+s, b+u+s, a-v+s, v-u-s, -s \\ u+a+s, u+b+p+q+s \end{matrix} \right] ds. \end{aligned} \quad (2.4)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Правая часть переписывается в виде

$$\begin{aligned} & \Gamma \left[\begin{matrix} u+v, p+q, p+b, q+b \\ a-v, u-v \end{matrix} \right] \\ & \times \left(\Gamma \left[\begin{matrix} v-u, u+p, u+q, u+b, a-v \\ u+a, u+b+p+q \end{matrix} \right] {}_4F_3 \left[\begin{matrix} u+p, u+q, u+b, a-v \\ 1+u-v, u+a, u+b+p+q \end{matrix}; 1 \right] \right. \\ & \left. + \Gamma \left[\begin{matrix} u-v, p+v, q+v, b+v, a-u \\ v+a, v+b+p+q \end{matrix} \right] {}_4F_3 \left[\begin{matrix} p+v, q+v, b+v, a-u \\ 1-v+u, v+a, v+b+p+q \end{matrix}; 1 \right] \right). \end{aligned}$$

У Рахмана [29] для интеграла (2.4) дается выражение вида ${}_7F_6$ (см. также [30; (6.3.11)]). Оно, впрочем, легко приводится к форме ${}_4F_3$ с помощью “nonterminating” ${}_7F_6$ -преобразования Уиппла, обсуждаемого у Бейли [31; 4.4, 6.3, 7.5].

ЗАМЕЧАНИЕ. Левая часть тождества (2.4) симметрична по b, p, q, u, v . Для правой части очевидна лишь симметричность по u, v и по b, p, q . Перестановка b и u местами ведет к 4-членному ${}_4F_3$ -тождеству. Если мы подставим в него $a = v - t$, где t — целое неотрицательное, то два слагаемых занулятся (из-за $\Gamma(-t)$ в знаменателе) и мы получим ${}_4F_3$ -преобразование Уиппла (см. [2; теорема 3.3.3]; оно упоминается ниже в п. 3.1).

2.6. Интеграл Насраллаха–Рахмана (0.4). Если $a = b + u + v + p + q$, то в правой части (2.4) два Γ -множителя под интегралом сокращаются. Применяя вторую лемму Барнса (0.3), получаем (0.4) (по поводу формулы (0.7) см. [32], [33]).

2.7. Умножая обе части равенства (2.4) на $\Gamma^{-2}(b)$ и переходя к пределу при $b \rightarrow +\infty$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left| \frac{\Gamma(p+is)\Gamma(q+is)\Gamma(u+is)\Gamma(v+is)}{\Gamma(2is)\Gamma(a+is)} \right|^2 ds &= \frac{1}{2\pi i} \Gamma \left[\begin{matrix} u+v, p+q \\ a-v, u-v \end{matrix} \right] \\ &\times \int_{-i\infty}^{i\infty} \Gamma \left[\begin{matrix} u+p+s, u+q+s, a-v+s, v-u-s, -s \\ u+a+s \end{matrix} \right] ds \end{aligned} \quad (2.5)$$

(справа стоит линейная комбинация двух функций ${}_3F_2(1)$).

§ 3. Конечные системы ортогональных многочленов

3.1. Многочлены Вильсона. В знаменитой работе Вильсона [1] были построены многочлены $p(s^2)$, ортогональные по весу

$$w(s) = \frac{1}{\pi} \left| \frac{\Gamma(a+is)\Gamma(b+is)\Gamma(c+is)\Gamma(d+is)}{\Gamma(2is)} \right|^2.$$

Они задаются формулой

$$\begin{aligned} p_n(a, b, c, d; s^2) &= (a+b)_n (a+c)_n (a+d)_n \\ &\times {}_4F_3 \left[\begin{matrix} -n, n+a+b+c+d-1, a+is, a-is \\ a+b, a+c, a+d \end{matrix} ; 1 \right]. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Соотношения ортогональности имеют вид

$$\begin{aligned} \int_0^\infty p_n(a, b, c, d; s^2) p_m(a, b, c, d; s^2) w(s) ds \\ = \frac{n! \Gamma(a+b+n) \Gamma(a+c+n) \Gamma(a+d+n) \Gamma(b+c+n) \Gamma(b+d+n) \Gamma(c+d+n)}{\Gamma(a+b+c+d+n) (\mu + \nu + k + l)} \delta_{m,n}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Очевидно, многочлены $p_n(a, b, c, d; s^2)$ симметричны по b, c, d . То, что они симметричны по всем четырем индексам a, b, c, d , равносильно ${}_4F_3$ -преобразованию Уиппла, упоминавшемуся выше в п. 2.5.

3.2. Доказательство ортогональности. Доказательств ортогональности многочленов Вильсона известно много, наша цель — дать образец рассуждения, которое дословно “проходит” в трех случаях “экзотической” ортогональности, обсуждаемых ниже.

ЛЕММА 3.1. Пусть даны N -мерные линейные пространства V, W с базами e_j, f_j . Зададим на $V \times W$ билинейную форму $\mathcal{B}(\cdot, \cdot)$ так, что

$$\mathcal{B}(e_k, f_l) = \frac{\Gamma(\nu + k + l)}{\Gamma(\mu + \nu + k + l)}, \quad (3.3)$$

где μ, ν фиксированы. Тогда система векторов

$$R_n = \sum_{j=0}^n \frac{(-n)_j (n + \mu + \nu - 1)_j}{(\nu)_j j!} e_j, \quad T_n = \sum_{j=0}^n \frac{(-n)_j (n + \mu + \nu - 1)_j}{(\nu)_j j!} f_j$$

биортогональна, т.е. $\mathcal{B}(R_k, T_l) = 0$ при $k \neq l$. Кроме того,

$$\mathcal{B}(T_n, R_n) = \frac{n! \Gamma(\nu) \Gamma(\mu + n)}{\Gamma(\nu + n) \Gamma(n + \mu + \nu - 1) (\mu + \nu + 2n - 1)}. \quad (3.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эта лемма просто имитирует соотношения ортогональности для многочленов Якоби. Берем в качестве $V = W$ пространство многочленов на отрезке $[0, 1]$ со скалярным произведением

$$\langle p, q \rangle = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^1 p(x) \overline{q(x)} x^{\mu-1} (1-x)^{\mu-1} dx.$$

В качестве $e_n = f_n$ берем функции x^n . Тогда $\langle e_k, f_l \rangle$ задается формулой (3.3). Соответственно, $R_n = T_n$ — это многочлены Якоби $P^{\mu-1, \nu-1}(2x-1)$ в стандартных обозначениях (см. [34; 10.8]).

Теперь возьмем в качестве $V = W$ пространство L^2 по весу Вильсона $w(s)$. Положим

$$e_k(s) = \frac{(a+is)_k (a-is)_k}{\Gamma(a+c+k)\Gamma(a+d+k)}, \quad f_k(s) = \frac{(b+is)_k (b-is)_k}{\Gamma(b+c+k)\Gamma(b+d+k)}. \quad (3.5)$$

Тогда в силу (0.2)

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty e_k(s) f_m(s) w(s) ds \\ &= \frac{1}{\pi \Gamma(a+c+k)\Gamma(a+d+k)\Gamma(b+c+m)\Gamma(b+d+m)} \\ & \quad \times \int_0^\infty \left| \frac{\Gamma(a+k+is)\Gamma(b+m+is)\Gamma(c+is)\Gamma(d+is)}{\Gamma(2is)} \right|^2 ds \\ &= \frac{\Gamma(c+d)\Gamma(a+b+k+m)}{\Gamma(a+b+c+d+k+m)}. \end{aligned}$$

Мы получили соотношения типа (3.3) для скалярных произведений. В обозначениях леммы 3.1 мы получаем

$$R_n = \alpha_n p_n(a, b, c, d; s^2), \quad T_n = \beta_n p_n(b, a, c, d; s^2),$$

где α_n, β_n — нормировочные множители, которые мы для краткости опускаем. Осталось вспомнить, что многочлены Вильсона симметричны по a, b, c, d . Поэтому R_n и T_n совпадают с точностью до множителя (собственно, это место и является удивительным).

Формула (3.2) вытекает из (3.4).

3.3. Соотношения ортогональности, связанные с интегралом (0.1).

Рассмотрим вес

$$w_1(s) = \frac{1}{\pi} \left| \frac{\Gamma(p+is)\Gamma(u+is)\Gamma(v+is)}{\Gamma(2is)\Gamma(q+is)} \right|^2 \quad (3.6)$$

на полупрямой $s \geq 0$.

Положим

$$\begin{aligned} e_n(s) &= \frac{\Gamma(-u-k+q)}{\Gamma(p+u+k)} (u+is)_k (u-is)_k, \\ f_n(s) &= \frac{\Gamma(-v-k+q)}{\Gamma(p+v+k)} (v+is)_k (v-is)_k. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e_k(s) f_l(s) w_1(s) ds &= \frac{\Gamma(u+v+k+l)\Gamma(q-u-v-p-k-l)}{\Gamma(q-p)} \\ &= \frac{(-1)^{k+l}\pi}{\Gamma(q-p) \sin \pi(q-u-v-p)} \frac{\Gamma(u+v+k+l)}{\Gamma(1-q+u+v+p+k+l)}. \end{aligned}$$

Мы видим, что скалярные произведения имеют вид (3.3). Далее наши рассуждения из п. 3.2 можно повторить дословно.

Есть, однако, путь еще более простой.

ЛЕММА 3.2. Пусть ℓ – линейный функционал на пространстве четных многочленов

$$c_0 + c_1 s^2 + \dots + c_N s^{2N},$$

причем для

$$h_k = (a + is)_k (a - is)_k$$

выполнено

$$\ell(h_k) = C \frac{\Gamma(a+b+k)\Gamma(a+c+k)\Gamma(a+d+k)}{\Gamma(a+b+c+d+k)}. \quad (3.7)$$

Тогда при $k+l \leq N$ для многочленов Вильсона p_k, p_l выполнено

$$\ell(p_k(a, b, c, d; \cdot) p_l(a, b, c, d; \cdot)) = \frac{C}{\Gamma(b+c)\Gamma(b+d)\Gamma(c+d)} \sigma_k(a, b, c, d) \delta_{k,l},$$

где $\sigma_n(a, b, c, d)$ – выражение, стоящее в правой части (3.2).

Иными словами, многочлены Вильсона образуют ортогональную систему относительно скалярного произведения

$$\langle f, g \rangle = \ell(f\overline{g})$$

в пространстве многочленов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$\ell(g) = \int_0^\infty g(s) w(s) ds,$$

где $w(s)$ – вес Вильсона. Тогда (3.7) выполнено и наше высказывание превращается в переформулировку соотношений ортогональности Вильсона.

Теперь полагаем

$$\ell(g) = \int_0^\infty g(s) w_1(s) ds$$

и

$$h_k(s) = (p + is)_k (p - is)_k.$$

Получаем

$$\begin{aligned} \ell(h_k) &= \frac{\Gamma(p+v+k)\Gamma(p+u+k)\Gamma(u+v)\Gamma(q-u-v-p-k)}{\Gamma(q-p-k)\Gamma(q-u)\Gamma(p-v)} \\ &= \frac{\Gamma(u+v) \sin \pi(p-q)}{\Gamma(u-q)\Gamma(q-v) \sin \pi(u+v+p-q)} \\ &\quad \times \frac{\Gamma(p+v+k)\Gamma(p+u+k)\Gamma(1-q+p+k)}{\Gamma(1-q+u+v+p+k)}. \end{aligned}$$

Итак, мы получаем, что система многочленов Вильсона

$$p_n(p, u, v, 1-q; s^2), \quad 4n < q-p-u-v-1,$$

ортогональна по весу (3.6).

3.4. Соотношения ортогональности, связанные с формулой Дугола. Рассмотрим вес

$$w_2(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha + t}{\prod_{j=1}^4 \Gamma(a_j + \alpha + t) \Gamma(a_j - \alpha - t)} \delta(t - n),$$

где $\delta(s - n)$ – дельта-функция, сосредоточенная в точке n . Для единообразия подставим $t = is - \alpha$ и преобразуем это выражение к виду

$$w_2(s) := \prod_{j=1}^4 \frac{\sin(\pi(a_j + \alpha))}{\pi} (is) \sum_{-\infty}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^4 \Gamma(1 - a_j - is) \Gamma(1 - a_j + is) \delta(is - \alpha - n) \right). \quad (3.8)$$

Чтобы применить лемму 3.2, положим

$$\ell(g) = \int g(s) w_2(s) ds, \\ h_k(s) = (1 - a_1 + is)_k (1 - a_1 - is)_k.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \ell(h_k) &= \frac{\sin(2\pi\alpha)}{2\pi\Gamma(a_2 + a_3)\Gamma(a_2 + a_4)\Gamma(a_3 + a_4)} \\ &\quad \times \frac{\Gamma(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - k - 3)}{\Gamma(a_1 + a_2 - k - 1)\Gamma(a_1 + a_3 - k - 1)\Gamma(a_1 + a_4 - k - 1)} \\ &= \frac{\sin(2\pi\alpha) \sin \pi(a_1 + a_2) \sin \pi(a_1 + a_3) \sin \pi(a_1 + a_4)}{2\pi\Gamma(a_2 + a_3)\Gamma(a_2 + a_4)\Gamma(a_3 + a_4) \sin \pi(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)} \\ &\quad \times \frac{\Gamma(-a_1 - a_2 + k + 2)\Gamma(-a_1 - a_3 + k + 2)\Gamma(-a_1 - a_4 + k + 2)}{\Gamma(4 - a_1 - a_2 - a_3 - a_4 + k)}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

В итоге мы получаем, что система многочленов Вильсона

$$p_n(1 - a_1, 1 - a_2, 1 - a_3, 1 - a_4; s^2), \quad 4n < a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - 3, \quad (3.10)$$

ортогональна по весу Дуггола (3.8).

3.5. Соотношения ортогональности, связанные с интегралом Аски (0.5). Теперь рассмотрим вес Аски, т.е. вес, задаваемый подынтегральным выражением в (0.5)

$$\frac{\Gamma(1 - 2s)\Gamma(1 + 2s)}{\prod_{j=1}^4 \Gamma(a_j + s)\Gamma(a_j - s)}.$$

Далее в обозначениях леммы 3.2 берем

$$\ell(g) = \int_{-\infty}^{\infty} g(s) w_3(s) ds, \\ h_k(s) = (1 - a_1 + s)_k (1 - a_1 - s)_k.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \ell(h_k) &= \frac{1}{\Gamma(a_2 + a_3)\Gamma(a_2 + a_4)\Gamma(a_3 + a_4)} \\ &\quad \times \frac{\Gamma(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - k - 3)}{\Gamma(a_1 + a_2 - k - 1)\Gamma(a_1 + a_3 - k - 1)\Gamma(a_1 + a_4 - k - 1)} \end{aligned}$$

и мы получили выражение, которое совпадает с (3.9) с точностью до постоянно-го множителя. Поэтому мы получили ту же систему ортогональных многочленов (3.10).

§ 4. Примеры индексных интегралов

Сами по себе индексные интегралы — предмет достаточно известный (см., например, [18]). В этом параграфе мы приводим несколько забавных индексных интегралов, расширяющих интегралы (0.1), (0.2), (2.2)–(2.5).

4.1. Индексное преобразование функции $(1+x)^{b-a}(x+y+1)^{-c-b}$ было вычислено в лемме 1.1. Применяя формулу обращения, получаем

$$\int_0^\infty \left| \frac{\Gamma(a+is)\Gamma(b+is)\Gamma(c+is)}{\Gamma(2is)} \right|^2 {}_2F_1 \left[\begin{matrix} c+is, c-is \\ a+c \end{matrix}; -y \right] \times {}_2F_1 \left[\begin{matrix} b+is, b-is \\ a+b \end{matrix}; -x \right] ds = \frac{\pi\Gamma(a+b)\Gamma(a+c)\Gamma(b+c)}{(1+x+y)^{c+b}}.$$

4.2. Выписывая формулу Планшереля для функций $(1+x)^{b-a}(x+y+1)^{-c-b}$ и $(1+x)^{-a-d}$, получаем (см. [4; теорема 13])

$$\int_0^\infty \left| \frac{\Gamma(a+is)\Gamma(b+is)\Gamma(c+is)\Gamma(d+is)}{\Gamma(2is)} \right|^2 {}_2F_1 \left[\begin{matrix} c+is, c-is \\ a+c \end{matrix}; -y \right] ds = \frac{\pi\Gamma(a+b)\Gamma(a+c)\Gamma(a+d)\Gamma(b+c)\Gamma(b+d)\Gamma(c+d)}{\Gamma(a+b+c+d)} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} b+c, c+d \\ a+b+c+d \end{matrix}; -y \right].$$

Эта формула совпадает (с точностью до перестановки букв) с формулой обращения для ${}_2F_1 \left[\begin{matrix} a+c, a+d \\ a+b+c+d \end{matrix}; -x \right]$ (см. лемму 1.2.с)). Отсюда вытекает вторая лемма Барнса (0.3) (это, конечно, не самое простое ее доказательство).

4.3. Применяя формулу Планшереля к паре функций $(1+x)^{b-a}(1+x+y)^{-b-c}$ и $(1+x)^{b-a}(1+x+z)^{-b-d}$, получаем

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left| \frac{\Gamma(a+is)\Gamma(b+is)\Gamma(c+is)\Gamma(d+is)}{\Gamma(2is)} \right|^2 \times {}_2F_1 \left[\begin{matrix} c-is, c+is \\ a+c \end{matrix}; -y \right] {}_2F_1 \left[\begin{matrix} d-is, d+is \\ a+d \end{matrix}; -z \right] ds = \Gamma(c+a)\Gamma(c+b)\Gamma(d+a)\Gamma(d+b) \int_0^\infty \frac{x^{a+b-1}(1+x)^{b-a} dx}{(x+y+1)^{b+c}(x+z+1)^{b+d}}.$$

В правой части стоит одно из интегральных представлений функции Апшеля F_1 . Подставляя $z = y$, получаем

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left| \frac{\Gamma(a+is)\Gamma(b+is)\Gamma(c+is)\Gamma(d+is)}{\Gamma(2is)} \right|^2 \times {}_2F_1 \left[\begin{matrix} c-is, c+is \\ a+c \end{matrix}; -y \right] {}_2F_1 \left[\begin{matrix} d-is, d+is \\ a+d \end{matrix}; -y \right] ds = \frac{\pi\Gamma(a+b)\Gamma(a+c)\Gamma(a+d)\Gamma(b+c)\Gamma(b+d)\Gamma(c+d)}{\Gamma(a+b+c+d)} \times {}_2F_1 \left[\begin{matrix} 2b+c+d, c+d \\ a+b+c+d \end{matrix}; -y \right].$$

4.4. Применим формулу Планшереля к паре функций $(1+x)^{b-a}(1+x+y)^{-e-b}$ и ${}_2F_1 \left[\begin{matrix} a+c, a+d \\ a+b+c+d \end{matrix}; -x \right]$. Получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left| \frac{\Gamma(a+is)\Gamma(b+is)\Gamma(c+is)\Gamma(d+is)\Gamma(e+is)}{\Gamma(2is)} \right|^2 {}_2F_1 \left[\begin{matrix} a+is, a-is \\ a+c \end{matrix}; -y \right] ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} (1+y)^{a-e} \Gamma(b+c)\Gamma(b+d)\Gamma(c+d) \\ & \quad \times \int_{-i\infty}^{i\infty} \Gamma \left[\begin{matrix} a+b+s, a+c+s, a+d+s, e-a-s, -s \\ a+b+c+d+s \end{matrix} \right] (1+y)^s ds \end{aligned}$$

(это сумма двух функций ${}_3F_2$).

4.5. Этот список легко продолжить, даже наши леммы 1.1–1.2 использованы не полностью.

Список литературы

1. *Wilson J. A.* Some hypergeometric orthogonal polynomials // *SIAM J. Math. Anal.* 1980. V. 11. № 4. P. 690–701.
2. *Andrews G. E., Askey R., Roy R.* Special functions. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.
3. *Koekoek R., Swarttouw R. F.* Askey scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and their q -analogues. Delft University of Technology, 1994; <http://aw.twi.tudelft.nl/~koekoek/askey.html>.
4. *De Branges L.* Tensor product spaces // *J. Math. Anal. Appl.* 1972. V. 38. P. 109–148.
5. *Askey R.* Beta integrals and the associated orthogonal polynomials // *Number theory (Madras, 1987). Lecture Notes in Math.* V. 1395. Berlin: Springer-Verlag, 1989. P. 84–121.
6. *Rahman M., Suslov S. K.* The Pearson equation and the beta integrals // *SIAM J. Math. Anal.* 1994. V. 25. № 2. P. 646–693.
7. *Askey R., Wilson J.* Some basic hypergeometric orthogonal polynomials that generalize Jacobi polynomials // *Mem. Amer. Math. Soc.* 1985. V. 54. № 319.
8. *Gustafson R. A.* Some q -beta and Mellin–Barnes integrals on compact Lie groups and Lie algebras // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1994. V. 341. № 1. P. 69–119.
9. *Gustafson R. A.* Some q -beta integrals on $SU(n)$ and $Sp(n)$ that generalize the Askey–Wilson and Nasrallah–Rahman integrals // *SIAM J. Math. Anal.* 1994. V. 25. № 2. P. 441–449.
10. *Romanovski V. I.* Sur quelques classes nouvelles de polynomes orthogonaux // *Acad. Sci. Paris.* 1929. V. 188. P. 1023–1025.
11. *Askey R.* An integral of Ramanujan and orthogonal polynomials // *J. Indian Math. Soc. (N.S.).* 1987. V. 51. P. 27–36.
12. *Lesky P. A.* Orthogonalität von dualen Hahnpolynomen und continuous dualen Hahnpolynomen // *Österreich. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. Sitzungsber. II.* 1996. V. 204. P. 81–95.
13. *Lesky P. A.* Endliche und unendliche Systeme von kontinuierlichen klassischen Orthogonalpolynomen // *ZAMM Z. Angew. Math. Mech.* 1996. V. 76. № 3. P. 181–184.
14. *Lesky P. A.* Unendliche und endliche Orthogonalsysteme von continuous Hahnpolynomen // *Results Math.* 1997. V. 31. № 1–2. P. 127–135.
15. *Lesky P. A.* Einordnung der Polynome von Romanovski–Bessel in das Askey–Tableau // *ZAMM Z. Angew. Math. Mech.* 1998. V. 78. № 9. P. 646–648.
16. *Peetre J.* Correspondence principle for the quantized annulus, Romanovski polynomials, and Morse potential // *J. Funct. Anal.* 1993. V. 117. № 2. P. 377–400.
17. *Borodin A., Olshanski G. I.* Harmonic analysis on the infinite-dimensional unitary group and determinantal point processes // Preprint, <http://arxiv.math.RT/0109194>.
18. *Slater L. J.* Generalized hypergeometric functions. Cambridge: Cambridge University Press, 1966.
19. *Marichev O. I.* Handbook of integral transforms of higher transcendental functions. Chichester / New York: Ellis Horwood / John Wiley, 1983.

20. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Дополнительные главы. Т. 3. М.: Наука, 1986.
21. Flensted-Jensen M., Koornwinder T. The convolution structure for Jacobi function expansions // Ark. Mat. 1973. V. 11. P. 245–262.
22. Koornwinder T. H. Jacobi functions and analysis on noncompact semisimple Lie groups // Special functions: group theoretical aspects and applications / ed. Askey R., Koornwinder T., Schempp W.. Dordrecht: Reidel, 1984. P. 1–85.
23. Koornwinder T. H. Special orthogonal polynomial systems mapped onto each other by the Fourier–Jacobi transform. Orthogonal polynomials and applications (Bar-le-Duc, 1984) // Lecture Notes in Math. V. 1171. Berlin: Springer-Verlag, 1985. P. 174–183.
24. Koornwinder T. H. Group theoretic interpretations of Askey's scheme of hypergeometric orthogonal polynomials. Orthogonal polynomials and their applications (Segovia, 1986) // Lecture Notes in Math. V. 1329. Berlin: Springer, 1988. P. 46–72.
25. Yakubovich S. B. Index transforms. London: World Scientific, 1996.
26. Неретин Ю. А. Индексное гипергеометрическое преобразование и имитация анализа ядер Березина на гиперболических пространствах // Матем. сб. 2001. Т. 192. № 3. С. 83–114.
27. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. I: Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра. М.: Наука, 1973.
28. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм и произведений. М.: Физматгиз, 1963.
29. Rahman M. An integral representation of a ${}_{10}F_9$ and continuous bi-orthogonal ${}_{10}F_9$ rational functions // Canad. J. Math. 1986. V. 38. P. 605–618.
30. Гаспер Г., Рахман М. Базисные гипергеометрические ряды. М.: Мир, 1993.
31. Bailey W. N. Generalized hypergeometric series. New York: Stechert-Hafner, 1964.
32. Nassrallah B., Rahman M. Projection formulas, a reproducing kernel and a generating function for q -Wilson polynomials // SIAM J. Math. Anal. 1985. V. 16. № 1. P. 186–197.
33. Nassrallah B., Rahman M. A q -analogue of Appell's F_1 function and some quadratic transformation formulas for nonterminating basic hypergeometric series // Rocky Mountain J. Math. 1986. V. 16. P. 63–82.
34. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. II: Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М.: Наука, 1974.

Институт теоретической и экспериментальной физики,
Москва
E-mail: neretin@main.mccme.rssi.ru

Поступила в редакцию
20.11.2001