Общероссийский математический портал

И. Ю. Фёдоров, Дивизориальные стягивания в трехмерные cDV точки, *Матем. сб.*, 2002, том 193, номер 7, 149–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm671>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 14:40:05

УДК 513.7

И. Ю. Фёдоров

Дивизориальные стягивания в трехмерные cDV точки

Классифицированы дивизориальные стягивания в особенности вида $xy + z^n + u^n = 0$ при $n \geq 3$ и $xy + z^3 + u^4 = 0$ в категории Мори.

Библиография: 20 названий.

Проблема классификации алгебраических многообразий тесно связана с задачей описания особенностей многообразий. Одним из основных классов трехмерных особенностей является класс терминальных особенностей, возникающих в процессе использования программы Мори (см., например, [1]). Хотя эти особенности и были классифицированы в [2]–[6] с точностью до аналитического изоморфизма, этого описания не всегда достаточно для решения задач, возникающих при изучении трехмерных многообразий. В частности, весьма актуальными являются задача описания разрешений терминальных особенностей и смежная с ней задача описания морфизмов многообразий с терминальными особенностями. Стягивания в циклические факторособенности классифицированы Каваматай в [7], описания стягиваний с многообразия, имеющего не хуже чем терминальные горенштейновы особенности, приведены в [8] и [9]. Лу в [10] описал стягивания в случае, когда индекс многообразия не понижается, Корти в [11], [12] описал все дивизориальные стягивания в особенности вида $xy + z^n + u^n = 0$ для $n = 2, 3$, Кавакита в [13] и [14] описал стягивания в гладкую точку и в особенность типа cA_1 .

Одновременно с настоящей работой Кавакита выпустил препринт [15], в котором описал дивизориальные стягивания во все cA точки. Однако он использует иные методы, которые, по видимому, не обобщаются на другие терминальные особенности.

В данной работе мы классифицируем дивизориальные стягивания в трехмерные терминальные особенности вида $xy + z^n + u^n = 0$ для $n \geq 3$ в категории Мори.

Автор выражает глубокую благодарность В. А. Исковских и Ю. Г. Прохорову за плодотворные беседы и внимание к работе.

§ 1. Основные определения и предварительные результаты

Все многообразия определены над $\mathbb{C}$. Все основные определения приведены в [16], [17].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Многообразие X называется $\mathbb{Q}$ -факториальным, если некоторая кратность (рациональная) любого дивизора Вейля есть дивизор Картье.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00441), Программы поддержки ведущих научных школ (грант № 00-15-96085) и INTAS-OPEN 2000 (грант № 269).

Многообразие X называется $\mathbb{Q}$ -горенштейновым, если некоторая кратность K_X – дивизор Картье.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Нормальное $\mathbb{Q}$ -горенштейново многообразие X имеет не хуже чем терминальные (канонические, лог терминальные, лог канонические) особенности, если для любого разрешения $f: Y \rightarrow X$ такого, что $K_Y = f^*K_X + \sum a_i E_i$, все $a_i > 0$ (соответственно, $a_i \geq 0$, $a_i > -1$, $a_i \geq -1$).

ТЕОРЕМА 1.3 [2]–[6] (Классификация терминальных особенностей). Пусть (X, P) – росток трехмерной терминальной особенности.

(1) Тогда если индекс (X, P) равен 1, то (X, P) формально эквивалентно гиперповерхностной особенности $(\{\varphi = 0\}, 0)$, где φ принадлежит одной из серий:

- (a) $\varphi = xy + f(z, u)$;
- (b) $\varphi = x^2 + f(y, z, u)$, где $j_2 g = 0$ и $g_3(y, z, u)$ не делится на квадрат линейной формы;
- (c) $\varphi = x^2 + y^2 z + f(y, z, u)$, где $j_3 g = 0$;
- (d) $\varphi = x^2 + y^3 + f(y, z, u)$, где $j_3 g = 0$ и $j_5 g = g_4 + g_5$ содержит один из мономов

$$y^4, \quad zu^3, \quad z^2 u^2, \quad u^5, \quad zu^4, \quad z^2 u^3, \quad yu^3, \quad yzu^2$$

с ненулевым коэффициентом.

(2) Если индекс $(X, P) \geq 2$, то (X, P) допускает одно из нижеперечисленных вложений:

- (a) $X \simeq \{xy + f(z, u) = 0\}/\mathbb{Z}_m(\alpha, -\alpha, 1, 0)$, где $f(z, u)$ – $\mathbb{Z}_m$ -инвариант;
- (b) $X \simeq \{x^2 + y^2 + f(z, u) = 0\}/\mathbb{Z}_4(1, 3, 1, 2)$, где $f(z, u)$ не содержит u и является $\mathbb{Z}_4$ -инвариантом;
- (c) $X \simeq \{x^2 + y^2 + f(z, u) = 0\}/\mathbb{Z}(0, 1, 1, 1)$, где $f(z, u)$ – $\mathbb{Z}_2$ -инвариант;
- (d) $X \simeq \{\varphi(x, y, z, u) = 0\}/\mathbb{Z}_3(1, 2, 2, 0)$, где φ имеет вид
 - (i) $\varphi = u^2 + x^3 + yz(y + z)$;
 - (ii) $\varphi = u^2 + x^3 + yz^2 + xy^4\lambda(y^3) + y^6\mu(y^3)$, где $4\lambda^3 + 27\mu^2 \neq 0$;
 - (iii) $\varphi = u^2 + x^3 + y^3 + xyz^3\alpha(z^3) + xz^4\beta(z^3) + yz^5\gamma(z^3) + z^6\delta(z^3)$;
- (e) $X \simeq \{\varphi(x, y, z, u) = 0\}/\mathbb{Z}_2(1, 1, 0, 1)$, где φ имеет вид
 - (i) $\varphi = u^2 + xyz + x^{2a} + y^{2b} + z^c$, где $a, b \geq 2, c \geq 3$;
 - (ii) $\varphi = u^2 + y^2 z + \lambda y x^{2a+1} + g(x, z)$, где $a \geq 1, \lambda \in \mathbb{C}$,
 $g(x, z) \in (x^4, x^2 z^2, z^3)\mathbb{C}\{x, z\}$;
- (f) $X \simeq \{u^2 + x^3 + g(y, z)x + h(y, z) = 0\}/\mathbb{Z}_2(0, 1, 1, 1)$, где $g(y, z) \in (y, z)^4\mathbb{C}\{y, z\}$,
 $h(y, z) \in (y, z)^4\mathbb{C}\{y, z\}/(y, z)^5\mathbb{C}\{y, z\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. Категорией Мори мы будем называть категорию многообразий, имеющих не хуже чем терминальные особенности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5. Рассмотрим циклическую факторособенность

$$Y := \mathbb{C}^n / \mathbb{Z}_m(a_1, \dots, a_n),$$

где $a_i \in \mathbb{N}$ и $(a_1, \dots, a_n) = 1$ (случай $m = 1$, т.е. $Y \simeq \mathbb{C}^n$, также возможен). Пусть $x_1, \dots, x_n$ — координаты в $\mathbb{C}^n$, собственные для $\mathbb{Z}_m$. *Взвешенным раздутием Y с весом $\sigma = a_1, \dots, a_n$* называется проективный бирациональный морфизм $f: \bar{Y} \rightarrow Y$ такой, что $\bar{Y}$ покрывается аффинными картами $U_1, \dots, U_n$, где

$$U_i = \mathbb{C}_{\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n}^n / \mathbb{Z}_{a_i}(-a_1, \dots, m, \dots, -a_n),$$

m стоит на i -м месте. Координаты в Y и в U_i связаны соотношениями

$$y_i = \bar{y}_i^{a_i/m}, \quad y_j = \bar{y}_j \bar{y}_i^{a_j/m}, \quad j \neq i.$$

Исключительное множество E морфизма f является неприводимым дивизором, $E \simeq \mathbb{P}(a_1, \dots, a_n)$.

Рассмотрим гиперповерхностную особенность

$$X := \{\varphi(x_1, \dots, x_n) = 0\} \subset \mathbb{C}_{y_1, \dots, y_n}^n.$$

Пусть $\bar{X} = \bar{\pi}^{-1}X$ — собственный прообраз X при отображении $\bar{\pi}$, $\pi = \bar{\pi}|_{\bar{X}}$ — ограничение $\bar{\pi}$. Тогда $\pi: \bar{X} \rightarrow X$ тоже называется *взвешенным раздутием с весом σ или σ -раздутием*.

Через $\sigma wt(x)$ (соответственно, $\sigma wt(y)$, $\sigma wt(z)$, $\sigma wt(u)$) мы будем обозначать вес x (соответственно, y , z , u) при взвешенном раздутии σ (см. [18]). Вес монома $f(x, y, z, u) = x^{\alpha_1} y^{\alpha_2} z^{\alpha_3} u^{\alpha_4}$ при взвешенном раздутии σ будет

$$\sigma wt(f) = \alpha_1(\sigma wt x) + \alpha_2(\sigma wt y) + \alpha_3(\sigma wt z) + \alpha_4(\sigma wt u).$$

Для любого многочлена $f \in \mathbb{C}(x, y, z, u)$ $\sigma wt(f)$ — минимальный из σ -весов мономов, входящих в f .

§ 2. Сягивания в $xy + z^n + u^n = 0$

В этом параграфе будет доказана следующая

ТЕОРЕМА 2.1. *Пусть есть некоторое дивизориальное стягивание $f: Y \rightarrow X$, где Y имеет лишь терминальные особенности, S — исключительный дивизор, X — росток особенности $xy + z^n + u^n = 0$, где $n \geq 3$. Тогда f изоморфно взвешенному раздутию X с весами $(k, n - k, 1, 1)$ для некоторого $1 \leq k \leq n - 1$.*

Классификацию мы будем проводить по следующей схеме. Пусть есть некоторое дивизориальное стягивание $f: Y \rightarrow X$, где Y имеет лишь терминальные особенности, S — исключительный дивизор, X — росток особенности $xy + z^n + u^n = 0$, где $n \geq 3$. Пусть $f_1: Y_1 \rightarrow X$ — взвешенное раздутие с весами $(1, n - 1, 1, 1)$. Легко видеть (см. [19]) что f_1 -исключительный дивизор E_1 имеет дискрепантность 1.

Рис. 1.

Тогда E_1 рациональная поверхность с одной особой точкой вида $\frac{1}{n-1}(1, 1)$, с числом Пикара n , конфигурация (-1) -кривых $\bar{l}_i$, $i = 1, \dots, n$, на минимальном разрешении E_1 показана на рис. 1.

Мы будем рассматривать следующие варианты.

(1) Дискрепантность $a(S)$ (над X) равна 1. Все такие морфизмы (в категории Мори) классифицированы в [19].

(2) Дискрепантность $a(S) = k \geq 2$:

- (a) центр S на E_1 – точка и не попадает на l_i , $i = 1, \dots, n$;
- (b) центр S на E_1 – кривая и не совпадает ни с одной из l_i , $i = 1, \dots, n$;
- (c) центр S на E_1 – точка и попадает на l_i для некоторого i ;
- (d) центр S на E_1 – кривая и совпадает с некоторой l_i .

Далее мы рассмотрим все эти случаи и покажем, что наши стягивания совпадают с описанными в [19] и являются взвешенными раздутиями с весами $(k, n-k, 1, 1)$.

Рассмотрим геометрию поверхности E_1 .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. *Для поверхности E_1 справедливо следующее:*

- (1) E_1 – рациональная поверхность с одной особой точкой вида $\frac{1}{n-1}(1, 1)$;
- (2) число Пикара $\rho(E_1) = n$;
- (3) конфигурация кривых l_i , $i = 1, \dots, n$, собственные прообразы которых на минимальном разрешении $\bar{E}_1 \rightarrow E_1$ являются (-1) -кривыми, имеют вид

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Так как все терминальные особенности рациональны, то E_1 – рациональная поверхность. Многообразие Y_1 покрывается четырьмя аффинными картами U_1, U_2, U_3, U_4 :

$$\begin{aligned} U_1 &= \{\bar{y} + \bar{z}^n + \bar{u}^n = 0\} \subseteq \mathbb{C}^4, \\ U_2 &= \{\bar{x} + \bar{z}^n + \bar{u}^n = 0\} / \mathbb{Z}_{n-1}(-1, 1, -1, -1), \\ U_3 &= \{\bar{x}\bar{y} + 1 + \bar{u}^n = 0\} \subseteq \mathbb{C}^4, \\ U_4 &= \{\bar{x}\bar{y} + \bar{z}^n + 1 = 0\} \subseteq \mathbb{C}^4. \end{aligned}$$

При этом дивизор E_1 задается следующим образом:

$$E_1 \cong \{\bar{x}\bar{y} + \bar{z}^n + \bar{u}^n = 0\} \subseteq \mathbb{P}(1, n-1, 1, 1).$$

Рис. 2.

Нетрудно заметить, что на Y_1 есть только одна особенность типа $\frac{1}{n-1}(-1, 1, 1)$ в карте U_2 .

(2) Имеем $K_{E_1}^2 = (n - n + 2)^2 n / (n - 1) = 4n / (n - 1)$. Минимальное разрешение E_1 состоит из одного раздутия, при котором вклеится $-(n - 1)$ -кривая с дискрепантностью $(3 - n) / (n - 1)$. Поэтому

$$\begin{aligned} K_{\overline{E}_1}^2 &= K_{E_1}^2 + \left(\frac{3 - n}{n - 1} \right) (-2 + n - 1) \\ &= \frac{4n}{n - 1} - \frac{9 + n^2 - 6n}{n - 1} = \frac{10n - 9 - n^2}{n - 1} = 9 - n. \end{aligned}$$

Из формулы Нётера следует, что $\chi(\overline{E}_1) = n + 3$. А так как при минимальном разрешении вклеилась только одна кривая, то $\rho(E_1) = n$.

(3) Рассмотрим дивизор $(x = 0)$ на E_1 . Он состоит из n кривых $l_1, \dots, l_n$ (см. рис. 2).

Докажем что на $\overline{E}_1$ $(\overline{l}_i)^2 = -1$.

Итак, $(x = 0)|_{E_1} = l_1 + \dots + l_n$. Из симметрии индексы самопересечения l_i одинаковы. Имеем

$$\frac{n}{n - 1} = (x = 0)^2|_{E_1} = \left(\sum l_i \right)^2 = nl_i^2 + \sum_{i < j} 2l_i l_j = nl_i^2 + n.$$

Отсюда

$$l_i^2 = \frac{1}{n - 1} - 1 = -\left(\frac{n - 2}{n - 1} \right).$$

А так как особенность E_1 разрешается за одно раздутие и вклеивается $-(n - 1)$ -кривая, получаем

$$\overline{l}_i^2 = l_i^2 - \frac{1}{n - 1} = -1.$$

ЛЕММА 2.3. *Не существует взвешенных раздутий особенности*

$$xy + z^n + u^n = 0,$$

реализующих дивизор с дискрепантностью $k \geq 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим раздутие $h: Y \rightarrow X$ с весами (a, b, c, d) . Без ограничения общности можно считать, что $a + b = nc$ (если $a + b \neq nc$ и $a + b \neq nd$, тогда на Y заведомо хуже чем терминальные особенности). Рассмотрим два случая:

- (1) $a + b = nc = nd$;
- (2) $a + b = nc < nd$.

(1) Проверим, что многообразие Y имеет только терминальные особенности. Действительно, оно покрывается четырьмя аффинными картами U_1, U_2, U_3, U_4 :

$$\begin{aligned} U_1 &= \{\bar{y} + \bar{z}^n + \bar{u}^n = 0\} / \mathbb{Z}_a(1, -b, -c, -c), \\ U_2 &= \{\bar{x} + \bar{z}^n + \bar{u}^n = 0\} / \mathbb{Z}_b(-a, 1, -c, -c), \\ U_3 &= \{\bar{x}\bar{y} + \bar{u}^n + 1 = 0\} / \mathbb{Z}_c(-a, -b, 1, 0), \\ U_4 &= \{\bar{x}\bar{y} + \bar{z}^n + 1 = 0\} / \mathbb{Z}_c(-a, -b, 0, 1). \end{aligned}$$

Из классификации терминальных особенностей (см., например, [1]) получаем, что особенности в картах U_1 и U_2 не хуже чем терминальные тогда и только тогда, когда

$$c \equiv 1 \pmod{a}, \quad c \equiv 1 \pmod{b}.$$

Тогда либо $c = 1$, либо $c > a$ и $c > b$. Последнее невозможно, так как $a + b = nc$.

(2) В этом случае $d > c$. Опять проверим, что многообразие Y имеет только терминальные особенности. Действительно, оно покрывается четырьмя аффинными картами U_1, U_2, U_3, U_4 :

$$\begin{aligned} U_1 &= \{\bar{y} + \bar{z}^n + \bar{x}^{n(d-c)}\bar{u}^n = 0\} / \mathbb{Z}_a(1, -b, -c, -d), \\ U_2 &= \{\bar{x} + \bar{z}^n + \bar{y}^{n(d-c)}\bar{u}^n = 0\} / \mathbb{Z}_b(-a, 1, -c, -d), \\ U_3 &= \{\bar{x}\bar{y} + \bar{z}^{n(d-c)}\bar{u}^n + 1 = 0\} / \mathbb{Z}_c(-a, -b, 1, -d), \\ U_4 &= \{\bar{x}\bar{y} + \bar{z}^n + \bar{u}^{n(d-c)} = 0\} / \mathbb{Z}_d(-a, -b, -c, 1). \end{aligned}$$

Из классификации терминальных особенностей (см., например, [1]) получаем, что особенности в карте U_4 хуже чем терминальные, когда $d > c$.

Приведем некоторые результаты работы [19].

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть X — росток трехмерной терминальной сА точки $xu + f(z, u) = 0$, n — количество дивизоров с дискрепантностью 1 над X . Тогда $n = \deg_{\min}(f) - 1$, где $\deg_{\min}(f)$ — минимальная из степеней мономов, входящих в f .

Более того, показано, что если мы раздуем X с весами $(a, b, 1, 1)$, то остальные дивизоры с дискрепантностью 1 лежат в точности над негоренштейновыми точками полученного многообразия и указано их расположение (см. рис. 3).

Теперь проведем разбор случаев.

Случаи 2(а) и 2(б). Рассмотрим следующую диаграмму (см. рис. 4).

Рассматривая подходящую модель (мы можем ограничиться Y_1 и Y_{n-1}), можно добиться, что центр S попадает в особенность на этой модели, поэтому, как следует из работы [7], S можно реализовать как взвешенное раздутие $\bar{Y} \rightarrow X$. Легко

Рис. 3.

Рис. 4.

заметить, что тогда $\overline{Y} \simeq Y$. И по лемме 2.3 получаем противоречие с терминальностью Y .

Случаи 2(с) и 2(d). Как видно из работы [19], все многообразия с терминальными особенностями, реализующие над X все дивизоры с дискрепантностью 1, отличаются друг от друга перестройками в кривых $\bar{l}_i$. Действительно, из точной последовательности

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{P^1}(-1) \rightarrow \mathcal{N}_{X|l_i} \rightarrow \mathcal{O}_{P^1}(-1) \rightarrow 0$$

следует, что мы можем раздуть $\bar{l}_i$, а получившуюся поверхность стянуть на другую образующую (см. [20]). Поэтому мы можем считать, что центр дивизора S на некоторой модели (например, рассмотрим любую реализацию всех дивизоров с дискрепантностью 1 и стянем все перестраиваемые кривые) попадает в особенность $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 0$. Из работы [11] следует, что S получается как обычное раздутие этой точки, и, как следствие, на нашей модели S реализуется как раздутие кривой l_i . Поэтому случай 2(с) не реализуется.

Так как кривые l_i проходят через циклическую факторособенность F , то дивизор, стягиваемый в l_i , — это взвешенное раздутие F (см. [7]). Противоречие с леммой 2.3 доказывает теорему 2.1.

§3. Стягивания в $xy + z^3 + u^4 = 0$

В этом параграфе будет доказана следующая

ТЕОРЕМА 3.1. *Пусть есть некоторое дивизориальное стягивание $f: Y \rightarrow X$, где Y имеет лишь терминальные особенности, S — исключительный дивизор, X — росток особенности $xy + z^3 + u^4 = 0$. Тогда f изоморфно взвешенному раздутию X с весами $(k, 3 - k, 1, 1)$ для некоторого $k = 1, 2$.*

Классификацию мы будем проводить по следующей схеме. Пусть есть некоторое дивизориальное стягивание $f: Y \rightarrow X$, где Y имеет лишь терминальные особенности, S — исключительный дивизор, X — росток особенности $xy + z^3 + u^4 = 0$. Пусть $f_1: Y_1 \rightarrow X$ — взвешенное раздутие с весами $(1, 2, 1, 1)$. Легко видеть (см. [19]), что f_1 -исключительный дивизор E_1 имеет дискрепантность 1.

Тогда E_1 — рациональная поверхность с двумя особыми точками A_1 и A_2 , с числом Пикара 1. Кривая l , собственный прообраз которой на минимальном раздутии $\bar{E}_1 \rightarrow E_1$ является (-1) -кривой, расположена следующим образом:

Рис. 5.

Мы будем рассматривать следующие варианты.

(1) Дискрепантность $a(S)$ (над X) равна 1. Все такие морфизмы (в категории Мори) классифицированы в [19].

(2) Дискрепантность $a(S) = k \geq 2$:

- (а) центр S на E_1 — точка и не попадает на l_i , $i = 1, \dots, n$;
- (б) центр S на E_1 — кривая и не совпадает ни с одной из l_i , $i = 1, \dots, n$;
- (с) центр S на E_1 — точка и попадает на l_i для некоторого i ;
- (д) центр S на E_1 — кривая и совпадает с некоторой l_i .

Далее мы рассмотрим все эти случаи и покажем, что наши стягивания совпадают с описанными в [19] и являются взвешенными раздутиями с весами $(k, 3 - k, 1, 1)$, где $k = 1, 2$.

Рассмотрим геометрию поверхности E_1 .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Для поверхности E_1 справедливо следующее:

- (1) E_1 – рациональная поверхность с двумя особыми точками A_1, A_2 ;
- (2) число Пикара $\rho(E_1) = 1$;
- (3) расположение кривой l , собственный прообраз которой на минимальном разрешении $\bar{E}_1 \rightarrow E_1$ является (-1) -кривой, имеет вид

Рис. 6.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Так как все терминальные особенности рациональны, то E_1 – рациональная поверхность. Многообразие Y_1 покрывается четырьмя аффинными картами U_1, U_2, U_3, U_4 :

$$\begin{aligned} U_1 &= \{\bar{y} + \bar{z}^3 + \bar{u}^4 = 0\} \subseteq \mathbb{C}^4, \\ U_2 &= \{\bar{x} + \bar{z}^3 + \bar{u}^4 = 0\} / \mathbb{Z}_2(-1, 1, -1, -1), \\ U_3 &= \{\bar{x}\bar{y} + 1 + \bar{u}^4 = 0\} \subseteq \mathbb{C}^4, \\ U_4 &= \{\bar{x}\bar{y} + \bar{z}^3 + \bar{u} = 0\} \subseteq \mathbb{C}^4. \end{aligned}$$

При этом дивизор E_1 задается следующим образом:

$$E_1 \cong \{\bar{x}\bar{y} + \bar{z}^3 = 0\} \subseteq \mathbb{P}(1, 2, 1, 1).$$

Нетрудно заметить, что на Y_1 есть только одна особенность типа $\frac{1}{2}(-1, 1, 1)$ в карте U_2 , а в карте U_4 на E_1 особенность A_2 .

(2) Имеем $K_{E_1}^2 = (3 - 3 + 2)^2/2 = 6$. Минимальное разрешение E_1 состоит из трех раздутий, при которых вклеятся три -2 -кривых с дискрепантностью 0 (особенности канонические). Поэтому $K_{\bar{E}_1}^2 = K_{E_1}^2 = 6$.

Из формулы Нётера следует, что $\chi(\bar{E}_1) = 4$. А так как при минимальном разрешении вклеились три кривые, то $\rho(E_1) = 1$.

(3) Так как E_1 может быть перестроена в $\mathbb{P}^2$, то E_1 – это по сути $\mathbb{P}(1, 2, 3)$, а (-1) -кривая проходит через обе особенности.

ЛЕММА 3.3. Не существует взвешенных раздутий особенности

$$xy + z^3 + u^4 = 0,$$

реализующих дивизор с дискрепантностью $k \geq 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Раздуем $h: Y \rightarrow X$ с весами (a, b, c, d) . Рассмотрим три случая:

- (1) $a + b = 3c = 4d$;
- (2) $a + b = 3c < 4d$;
- (3) $a + b = 4d < 3c$.

(1) Проверим, что многообразие Y имеет только терминальные особенности. Действительно, оно покрывается четырьмя аффинными картами U_1, U_2, U_3, U_4 :

$$\begin{aligned} U_1 &= \{\bar{y} + \bar{z}^3 + \bar{u}^4 = 0\} / \mathbb{Z}_a(1, -b, -c, -d), \\ U_2 &= \{\bar{x} + \bar{z}^3 + \bar{u}^4 = 0\} / \mathbb{Z}_b(-a, 1, -c, -d), \\ U_3 &= \{\bar{x}\bar{y} + \bar{u}^4 + 1 = 0\} / \mathbb{Z}_c(-a, -b, 1, -d), \\ U_4 &= \{\bar{x}\bar{y} + \bar{z}^3 + 1 = 0\} / \mathbb{Z}_d(-a, -b, -c, 1). \end{aligned}$$

Из классификации терминальных особенностей (см., например, [1]) получаем, что особенности в картах U_1 и U_2 не хуже чем терминальные тогда и только тогда, когда выполняется один из следующих случаев.

- (а) Случай $c + d \equiv 0 \pmod{a}$ и $c + d \equiv 0 \pmod{b}$. Покажем, что этот случай невозможен. Существуют $k, t \in \mathbb{Z}_+$ такие, что $c + d = ak, c + d = bt$. Имеем $b = (12/7)(k - 7/12)a, k = 7t/(12t - 7) < 0$ — противоречие.
- (б) Случай $c + d \equiv 0 \pmod{a}$ и $c \equiv 1 \pmod{b}$. Покажем, что этот случай невозможен. Существуют $k, t \in \mathbb{Z}_+$ такие, что $c + d = ak, c = bt + 1$. Имеем либо $t = 1$ — противоречие с $a + b = 3c = 4d$, либо $t > 1$. Получаем $3tb + 3 = 4ka - 4tb - 4$, т.е. $a = (7tb + 7)/(4k)$. Отсюда $b(4k(3t - 1) - 7t) = 7 - 12k$. Получаем $b < 0$ — противоречие.
- (в) Случай $c \equiv 1 \pmod{a}$ и $c \equiv 1 \pmod{b}$. В этом случае либо $c = 1$ — противоречие с $a + b = 3c = 4d$, либо $3c > a + b$ — опять противоречие.
- (г) Случай $c \equiv 1 \pmod{a}$ и $d \equiv 1 \pmod{b}$. В этом случае опять противоречие с $a + b = 3c = 4d$.

(2) Проверим, что многообразие Y имеет только терминальные особенности. Действительно, оно покрывается четырьмя аффинными картами U_1, U_2, U_3, U_4 :

$$\begin{aligned} U_1 &= \{\bar{y} + \bar{z}^3 + \bar{x}^{4d-a-b}\bar{u}^4 = 0\} / \mathbb{Z}_a(1, -b, -c, -d), \\ U_2 &= \{\bar{x} + \bar{z}^3 + \bar{y}^{4d-a-b}\bar{u}^4 = 0\} / \mathbb{Z}_b(-a, 1, -c, -d), \\ U_3 &= \{\bar{x}\bar{y} + \bar{z}^{4d-a-b}\bar{u}^4 + 1 = 0\} / \mathbb{Z}_c(-a, -b, 1, -d), \\ U_4 &= \{\bar{x}\bar{y} + \bar{z}^3 + \bar{u}^{4d-a-b} = 0\} / \mathbb{Z}_d(-a, -b, -c, 1). \end{aligned}$$

Из классификации терминальных особенностей (см., например, [1]) получаем, что особенности в карте U_4 не хуже чем терминальная, если $4d - a - b = 1$, а особенности в картах U_1 и U_2 не хуже чем терминальные тогда и только тогда, когда выполняется один из следующих случаев.

- (а) Случай $c + d \equiv 0 \pmod{a}$ и $c + d \equiv 0 \pmod{b}$. Покажем, что этот случай невозможен. Существуют $k, t \in \mathbb{Z}_+$ такие, что $c + d = ak, c + d = bt$. Имеем $d = (3ka + 1)/7, (4a)/t = b = (4ka - 1)/(7t)$. Получаем, что либо $r < 0$, либо $a < 0$ — противоречие.

- (b) Случай $c + d \equiv 0 \pmod{a}$ и $c \equiv 1 \pmod{b}$. Покажем, что этот случай невозможен. Существуют $k, t \in \mathbb{Z}_+$ такие, что $c + d = ak$, $c = bt + 1$. Имеем либо $t = 1$ — противоречие с $a + b = 3c = 4d$, либо $t > 1$. Получаем $a = (7bt + 8)/(4k)$. Отсюда $b(4k(3t - 1) - 7t) = 8 - 12k$. Получаем $b < 0$ — противоречие.
- (c) Случай $c + d \equiv 0 \pmod{a}$ и $d \equiv 1 \pmod{b}$. Покажем, что этот случай невозможен. Существуют $k, t \in \mathbb{Z}_+$ такие, что $c + d = ak$, $c = bt + 1$. Имеем либо $t = 1$ — противоречие с $a + b = 3c = 4d$, либо $t > 1$. Получаем $a = (7bt + 6)/(3k)$. Отсюда $b(3k(4t - 1) - 7t) = 6 - 9k$. Получаем $b < 0$ — противоречие.
- (d) Случай $c \equiv 1 \pmod{a}$ и $c \equiv 1 \pmod{b}$. В этом случае либо $c = 1$ — противоречие с $a + b = 3c = 4d$, либо $3c > a + b$ — опять противоречие.
- (e) Случай $c \equiv 1 \pmod{a}$ и $d \equiv 1 \pmod{b}$. В этом случае опять противоречие с $a + b = 3c = 4d$.
- (3) Аналогичные вычисления показывают невозможность и последнего случая.

Проведем разбор случаев.

Случаи 2(a) и 2(b). Рассмотрим следующую диаграмму:

Рис. 7.

Рассматривая подходящую модель, можно добиться, что центр S попадает в особенность на этой модели, поэтому, как следует из работы [7], S можно реализовать как взвешенное раздутие $\bar{Y} \rightarrow X$. Легко заметить, что тогда $\bar{Y} \simeq Y$. И по лемме 3.3 получаем противоречие с терминальностью Y .

Случаи 2(c) и 2(d). Как видно из работы [19], все многообразия с терминальными особенностями, реализующие над X все дивизоры с дискрепантностью 1, отличаются друг от друга перестройками в кривых $\bar{l}_i$. Действительно, из точной последовательности

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{P^1}(-1) \rightarrow \mathcal{N}_{X|l_i} \rightarrow \mathcal{O}_{P^1}(-1) \rightarrow 0$$

следует, что мы можем раздуть $\bar{l}_i$, а получившуюся поверхность стянуть на другую образующую (см. [20]). Поэтому мы можем считать, что центр дивизора S на некоторой модели (например, рассмотрим любую реализацию всех дивизоров с дискрепантностью 1 и стянем все перестраиваемые кривые) попадает в особенность $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 0$. Из работы [11] следует, что S получается как обычное

раздутие этой точки, и, как следствие, на нашей модели S реализуется как раздутие кривой l_i . Поэтому случай 2(с) не реализуется.

Так как кривая l проходит через циклическую факторособенность F , то дивизор, стягиваемый в l , — это взвешенное раздутие F (см. [7]). Противоречие с леммой 3.3.

Список литературы

1. Reid M. Young person's guide to canonical singularities // Proc. Sympos. Pure Math. 1987. V. 46. P. 343–416.
2. Данилов В. И. Бирациональная геометрия торических многообразий // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1982. Т. 46. № 5. С. 971–982.
3. Маркушевич Д. Г. Канонические особенности трехмерных гиперповерхностей // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1985. Т. 49. № 2. С. 334–368.
4. Reid M. Minimal models of canonical threefolds // Adv. Stud. Pure Math. 1983. V. 1. P. 131–180.
5. Morrison D., Stevens G. Terminal quotient singularities in dimension three and four // Proc. Amer. Math. Soc. 1984. V. 90. P. 15–20.
6. Mori S. On 3-dimensional terminal singularities // Nagoya Math. J. 1985. V. 98. P. 43–66.
7. Kawamata Y. Divisorial contractions to 3-dimensional terminal quotient singularities // Higher-dimensional complex varieties (Trento, 1994). Berlin: de Gruyter, 1996. P. 241–246.
8. Mori S. Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective // Ann. of Math. (2). 1982. V. 116. P. 133–176.
9. Cutkosky S. Elementary contractions of Gorenstein threefolds // Math. Ann. 1988. V. 280. P. 521–525.
10. Luo T. Divisorial contractions of threefolds: divisor to point // Amer. J. Math. 1998. V. 120. P. 441–451.
11. Corti A. Singularities of linear systems and 3-fold birational geometry. Explicit Birational Geometry of 3-folds // London Math. Soc. Lecture Note Ser. 2000. V. 281. P. 259–312.
12. Corti A., Mella M. Birational geometry of terminal quartic 3-folds. I // Preprint, math AG/0102096.
13. Kawakita M. Divisorial contractions in dimension three which contract divisor to smooth points // Preprint, math. AG/0005207.
14. Kawakita M. Divisorial contractions in dimension three which contract divisors to compound A_1 points // Preprint, math. AG/0010207.
15. Kawakita M. General elements in anticanonical systems of threefolds with divisorial contractions and applications to classification // Preprint, math. AG/0010207.
16. Kawamata Y., Matsuda K., Matsuki K. Introduction to the minimal model program // Algebraic Geometry (Sendai, 1985). Amsterdam: North-Holland, 1987. P. 283–360. (Adv. Stud. Pure Math. V. 10).
17. Шокуров В. В. Трехмерные логперестройки // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1992. Т. 56. С. 105–203.
18. Hayakawa T. Blowing ups of 3-dimensional terminal singularities // Publ. Res. Inst. Math. Sci. 1999. V. 35. № 3. P. 515–570.
19. Федоров И. Ю. Раздутия трехмерных терминальных особенностей: cA случай // Матем. заметки. 2002. Т. 71. № 3. С. 440–447.
20. Куликов Вик. С. Вырождения K3 поверхностей и поверхностей Энрикеса // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1977. Т. 11. С. 957–989.

Математический институт
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: ifedorov@mi.ras.ru

Поступила в редакцию
09.10.2001