Общероссийский математический портал

Т. Г. Возмищева, А. А. Ошемков, Топологический анализ задачи двух центров на двумерной сфере, *Матем. сб.*, 2002, том 193, номер 8, 3–38

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm672>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 12:53:38

УДК 515.1+521

Т. Г. Возмищева, А. А. Ошемков

Топологический анализ задачи двух центров на двумерной сфере

В работе исследуется задача двух центров на двумерной сфере (со стандартной метрикой постоянной положительной кривизны) с топологической точки зрения. Построены инварианты Фоменко–Цишанга, которые полностью описывают топологию лиувиллевых слоений на изоэнергетических поверхностях системы. Описаны различные типы движений (регулярные и предельные движения, соответствующие бифуркациям торов Лиувилля) на конфигурационном пространстве. Рассмотрена связь между инвариантами Фоменко–Цишанга (мечеными молекулами) и различными типами движения.

Библиография: 17 названий.

Введение

Впервые вопрос о гравитационных взаимодействиях в пространствах постоянной кривизны был поставлен Н. И. Лобачевским, который изучал обобщения закона притяжения для пространства постоянной отрицательной кривизны.

Лобачевский пишет [1; с. 159]: “. . . в нашем уме не может быть никакого противоречия, когда мы допускаем, что некоторые силы в природе следуют одной, другие своей особой Геометрии. Чтобы пояснить эту мысль, полагаем, как и многие в этом уверены, что силы притягательные слабеют от распространения своего действия по сфере. В употребительной Геометрии величину сферы принимают $4\pi r^2$ для полупоперечника r , от чего сила должна уменьшаться в содержании к квадрату расстояния. В воображаемой Геометрии нашел я поверхность шара

$$\pi(e^r - e^{-r})^2,$$

и такой Геометрии, может быть, следуют молекулярные силы . . . Впрочем, пусть это чистое предположение только, для подтверждения которого надобно поискать других убедительнее доводов . . .”.

Лобачевский рассуждает здесь не о потенциале, а о силе, но первообразная функции $1/(e^r - e^{-r})^2$, выписанной Лобачевским, есть (с точностью до коэффициента) $\operatorname{cth} r$. Именно такой потенциал рассматривается в настоящее время как правильное обобщение ньютоновского потенциала $1/r$ для пространства Лобачевского [2]–[4] (см. также §1).

Дальнейшее развитие эта тема получила в работе Н. Е. Жуковского [5] о движении псевдосферической (“плоской”) пластинки на плоскости Лобачевского.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 01-01-00583).

На трехмерной сфере (постоянной кривизны 1) также рассматривается аналог ньютоновского потенциала, создаваемого гравитационным центром, который в этом случае есть $\text{ctg } \theta$, где угол θ равен расстоянию до центра. Интегрируемость задачи Кеплера на трехмерной сфере $\mathbb{S}^3$ доказана Э. Шрёдингером [6]. Шрёдингер рассматривал движение электрона в потенциальном поле ядра водородоподобного атома с точки зрения квантовой механики.

Как оказалось, три классических закона Кеплера имеют естественные обобщения для пространств постоянной кривизны. Эти обобщения для пространства Лобачевского и для сферы сформулированы А. Н. Черниковым [2] и В. В. Козловым [3]. В частности, любая финитная орбита здесь является эллипсом, в одном из фокусов которого находится гравитационный центр (Солнце). Кроме того, В. В. Козловым и О. А. Хариным доказана интегрируемость задачи о движении материальной частицы по сфере $\mathbb{S}^2$ в поле двух неподвижных ньютоновских центров [4].

В работах [7]–[9] исследована задача двух центров на трехмерной сфере $\mathbb{S}^3$ и в трехмерном пространстве Лобачевского $\mathbb{L}^3$, а также задача Лагранжа (предельный случай задачи двух центров, когда один из центров удаляется на бесконечность) в пространстве Лобачевского $\mathbb{L}^3$. В [7]–[9] показана интегрируемость этих задач, построены бифуркационные диаграммы и проведена классификация областей возможного движения.

В настоящей работе исследуется задача двух центров на двумерной сфере (со стандартной метрикой постоянной положительной кривизны) с топологической точки зрения. В частности, в работе найдены инварианты Фоменко–Цишанга, которые полностью описывают топологию лиувиллевых слоений на изоэнергетических поверхностях системы. Описаны различные типы движений (регулярные и предельные движения, соответствующие бифуркациям торов Лиувилля) на конфигурационном пространстве.

Проведенный в работе топологический анализ задачи двух центров на сфере показывает, что эта задача и задача двух центров на плоскости достаточно похожи с топологической точки зрения. В некотором смысле, плоская задача является пределом задачи двух центров на сфере при стремлении радиуса сферы к бесконечности. Аналогичная ситуация имеет место и для задачи Кеплера. В то же время, отметим, что исследование (в частности компьютерный анализ) задачи двух тел в пространствах постоянной кривизны, проведенное в работе [10], позволяет предположить, что эта задача неинтегрируема.

§ 1. Описание системы

В этом параграфе описана постановка задачи двух центров на сфере, приведены различные формы записи этой системы в лиувиллевом виде, а также дано описание бифуркационной диаграммы для отображения момента, задаваемого гамильтонианом и дополнительным интегралом.

1.1. Постановка задачи. Гамильтониан натуральной механической системы равен сумме кинетической и потенциальной энергий:

$$H = T + V.$$

Мы будем рассматривать задачу о движении материальной точки по стандартной двумерной сфере в поле, создаваемом двумя неподвижными притягивающими центрами. Кинетическая энергия T в этом случае задается метрикой сферы, а потенциальная энергия V равна сумме потенциалов, создаваемых каждым из центров.

В плоском случае (для плоской метрики) в качестве потенциала, создаваемого одним притягивающим центром, рассматривается ньютоновский потенциал $V = -\gamma/r$, где γ — постоянный положительный коэффициент, характеризующий силу притяжения.

Опишем два подхода к обобщению ньютоновского потенциала на случай искривленных пространств на примере пространств постоянной кривизны.

1. Хорошо известно, что для ньютоновского потенциала все финитные орбиты замкнуты (они являются эллипсами). Как доказано Ж. Бертраном (1873 г.), кроме ньютоновского существует еще ровно одно центральное потенциальное поле, для которого все финитные траектории замкнуты. Это поле, создаваемое потенциалом Гука $V = kr^2$, где k — положительная константа. (Доказательство теоремы Бертрانا, а также различные ее обобщения для нецентральных или непотенциальных полей можно найти, например, в книге [11].)

Для сферы и плоскости Лобачевского задача описания потенциалов, для которых все финитные траектории замкнуты, решена в работах [2]–[4], [12]. Оказалось, что для сферы аналогами ньютоновского и гуковского потенциалов $-1/r$ и r^2 являются функции $-\operatorname{ctg} \theta$ и $\operatorname{tg}^2 \theta$, а для плоскости Лобачевского — функции $-\operatorname{cth} \theta$ и $\operatorname{th}^2 \theta$.

2. Еще один подход к определению ньютоновского потенциала V в плоском пространстве заключается в решении уравнения Пуассона, которое для нулевой плотности материи превращается в уравнение Лапласа $\Delta V = 0$. Кроме констант существуют лишь следующие сферически симметричные решения уравнения Лапласа в n -мерном евклидовом пространстве (с точностью до умножения на константу): r^{2-n} при $n \geq 3$ и $\ln r$ при $n = 2$. Таким образом, в трехмерном евклидовом пространстве гармонической является функция $1/r$. Если рассматривать плоское движение под действием гравитационного потенциального поля (например в обычной задаче Кеплера) как редукцию трехмерной задачи, то и в двумерном случае можно определять ньютоновский потенциал как $-1/r$.

Для n -мерной сферы (постоянной кривизны 1) и n -мерного пространства Лобачевского (постоянной кривизны -1) решениями уравнения Лапласа (инвариантными относительно вращений вокруг притягивающего центра) являются соответственно функции $(\operatorname{tg} r)^{2-n}$ и $(\operatorname{th} r)^{2-n}$ при $n \geq 3$ и функции $\ln \operatorname{tg} r$ и $\ln \operatorname{th} r$ при $n = 2$ (здесь r — это расстояние до притягивающего центра). Как и в плоском случае, для двумерной сферы можно считать, что аналог ньютоновского потенциала есть (с точностью до коэффициента) — $\operatorname{ctg} r$, т.е. гармоническая функция на трехмерной сфере.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Кажется маловероятным, что для произвольной метрики существуют (притягивающие) потенциалы, для которых все финитные траектории замкнуты. С геометрической точки зрения интересна обратная задача: описать метрики, для которых существуют такие потенциалы.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Отметим еще одну из возможных интерпретаций выражений для ньютоновских потенциалов в плоском пространстве ($1/r$), на сфере ($\text{ctg } r$) и в пространстве Лобачевского ($\text{cth } r$). Рассмотрим функцию r в каждом из этих пространств, равную расстоянию до притягивающего центра. Легко проверяется, что функция Δr , где Δ – оператор Лапласа, совпадает (с точностью до коэффициента) с $1/r$ в плоском пространстве, с $\text{ctg } r$ на сфере и с $\text{cth } r$ в пространстве Лобачевского, причем для любой размерности.

Итак, мы будем рассматривать в качестве ньютоновского потенциала на двумерной сфере функцию $\text{ctg } \theta$, где θ – угловая величина дуги, соединяющей точку с притягивающим центром.

Пусть $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ – радиус-векторы (с началом в центре сферы) неподвижных притягивающих центров, а $\mathbf{r}$ – радиус-вектор пробной частицы. Тогда потенциал задачи двух центров на сфере имеет вид

$$V = -\frac{\gamma_1}{R} \text{ctg } \theta_1 - \frac{\gamma_2}{R} \text{ctg } \theta_2, \quad (1)$$

где R – радиус сферы, γ_1, γ_2 – положительные константы, характеризующие силу притяжения, а θ_i – угол между векторами $\mathbf{r}_i$ и $\mathbf{r}$.

Обозначим притягивающие центры через P_1, P_2 , а диаметрально противоположные им точки через Q_1, Q_2 . Из формулы для потенциала V видно, что в точках P_1, P_2 этот потенциал имеет особенности типа $-1/r$, а в точках Q_1, Q_2 – особенности типа $1/r$, т.е. для ньютоновского потенциала на сфере наличие притягивающего центра приводит к появлению дополнительного отталкивающего центра (в антиподальной точке).

Отметим, что при $R \rightarrow \infty$ ньютоновский потенциал на сфере радиуса R стремится к ньютоновскому потенциалу на плоскости, если рассматривать эти потенциалы как функции расстояния r до притягивающего центра. Действительно, так как расстояние r на сфере радиуса R равно $R\theta$, то

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \text{ctg } \theta = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \text{ctg } \frac{r}{R} = \frac{1}{r}$$

для любого фиксированного значения r .

1.2. Интегралы системы. Рассмотрим сферу $\{x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$ в $\mathbb{R}^3$ с декартовыми координатами x, y, z . Пусть притягивающие центры P_1 и P_2 имеют координаты $(\alpha, \beta, 0)$ и $(-\alpha, \beta, 0)$, где $\alpha^2 + \beta^2 = R^2$.

Координаты на сфере, в которых гамильтониан задачи двух центров имеет ливиллев вид, указаны в работе [4]. Это сфероконические координаты ξ, η . Они определяются следующим образом. Рассмотрим уравнение (относительно λ)

$$\frac{x^2}{\lambda - \alpha^2} + \frac{y^2}{\lambda + \beta^2} + \frac{z^2}{\lambda} = 0.$$

Легко проверяется, что корни имеют разные знаки. Обозначая их через ξ^2 и $-\eta^2$, получаем координаты (ξ, η) , где $0 \leq \xi \leq \alpha$ и $0 \leq \eta \leq \beta$.

Координатными линиями этой системы координат являются линии пересечения сферы с двумя семействами конфокальных конусов с вершиной в центре сферы.

Геометрические свойства этих линий на сфере во многом аналогичны свойствам обычных эллипсов и гипербол на плоскости. Кроме того, они являются “кеплеровскими” орбитами в задаче о движении точки по сфере в поле, создаваемом одним центром (см. [3]).

Формулы, выражающие декартовы координаты через сфероконические, имеют вид

$$\begin{aligned}x^2 &= \frac{1}{\alpha^2}(\alpha^2 - \xi^2)(\alpha^2 + \eta^2), \\y^2 &= \frac{1}{\beta^2}(\beta^2 + \xi^2)(\beta^2 - \eta^2), \\z^2 &= \frac{R^2}{\alpha^2\beta^2}\xi^2\eta^2.\end{aligned}$$

Кинетическая и потенциальные энергии, входящие в гамильтониан $H = T + V$ задачи двух центров на сфере, записываются в координатах (ξ, η) следующим образом:

$$\begin{aligned}T &= \frac{(\alpha^2 - \xi^2)(\beta^2 + \xi^2)}{2(\xi^2 + \eta^2)}p_\xi^2 + \frac{(\alpha^2 + \eta^2)(\beta^2 - \eta^2)}{2(\xi^2 + \eta^2)}p_\eta^2, \\V &= \frac{-\operatorname{sgn}(y)(\gamma_1 + \gamma_2)\sqrt{(\alpha^2 + \eta^2)(\beta^2 - \eta^2)}}{R(\xi^2 + \eta^2)} \\&\quad + \frac{-\operatorname{sgn}(x)(\gamma_1 - \gamma_2)\sqrt{(\alpha^2 - \xi^2)(\beta^2 + \xi^2)}}{R(\xi^2 + \eta^2)},\end{aligned}$$

где p_ξ, p_η — импульсы, соответствующие координатам ξ и η . Коэффициент γ_1 соответствует притягивающему центру P_1 с координатами $(\alpha, \beta, 0)$, а коэффициент γ_2 — притягивающему центру P_2 с координатами $(-\alpha, \beta, 0)$.

В координатах (ξ, η) система имеет лиувиллев вид, что позволяет найти дополнительный интеграл (см., например, [11]). Этот интеграл можно записать в следующем виде [9]:

$$\begin{aligned}L &= \frac{(\alpha^2 - \xi^2)(\beta^2 + \xi^2)\eta^2}{2(\xi^2 + \eta^2)}p_\xi^2 - \frac{(\alpha^2 + \eta^2)(\beta^2 - \eta^2)\xi^2}{2(\xi^2 + \eta^2)}p_\eta^2 \\&\quad + \frac{\operatorname{sgn}(y)(\gamma_1 + \gamma_2)\sqrt{(\alpha^2 + \eta^2)(\beta^2 - \eta^2)}\xi^2 - \operatorname{sgn}(x)(\gamma_1 - \gamma_2)\sqrt{(\alpha^2 - \xi^2)(\beta^2 + \xi^2)}\eta^2}{R(\xi^2 + \eta^2)}.\end{aligned}$$

Как уже отмечалось, свойства координатных линий системы координат (ξ, η) аналогичны свойствам эллипсов и гипербол на плоскости. Например, для каждой точки координатной линии $\{\eta = \text{const}\}$ сумма расстояний (по сфере) от этой точки до притягивающих центров P_1 и P_2 , а также разность расстояний от этой точки до точек P_1 и Q_2 постоянны. Аналогичное свойство выполнено и для координатных линий $\{\xi = \text{const}\}$. Используя этот факт, можно записать гамильтониан и интеграл рассматриваемой задачи в более наглядных координатах q_1 и q_2 , где

$$q_1 = \theta_2 - \theta_1, \quad q_2 = \theta_2 + \theta_1,$$

а θ_1 и θ_2 — угловые величины дуг, соединяющих рассматриваемую точку с центрами P_1 и P_2 .

Вводя импульсы p_1 и p_2 , соответствующие координатам q_1 и q_2 , гамильтониан и интеграл можно записать в следующем виде:

$$H = \frac{2(\cos q_1 - \cos \delta)}{\cos q_1 - \cos q_2} p_1^2 + \frac{2(\cos \delta - \cos q_2)}{\cos q_1 - \cos q_2} p_2^2 - \frac{(\gamma_1 - \gamma_2) \sin q_1 + (\gamma_1 + \gamma_2) \sin q_2}{R(\cos q_1 - \cos q_2)},$$

$$L = \frac{2 \cos q_2 (\cos \delta - \cos q_1)}{\cos q_1 - \cos q_2} p_1^2 - \frac{2 \cos q_1 (\cos \delta - \cos q_2)}{\cos q_1 - \cos q_2} p_2^2 + \frac{\gamma_1 \sin(q_1 + q_2) + \gamma_2 \sin(q_2 - q_1)}{R(\cos q_1 - \cos q_2)},$$

где через δ обозначена угловая величина дуги между центрами P_1 и P_2 .

Координаты q_1, q_2 (как и координаты ξ, η), естественно, не являются глобальными координатами на сфере (таких координат на сфере не существует). Система координат (q_1, q_2) имеет особенности в точках пересечения сферы с плоскостью, содержащей центры. В частности, точкам сферы, симметричным относительно этой плоскости, соответствуют одинаковые координаты q_1, q_2 .

Однако если переменные разделяются, их координатные линии определены однозначно (если система нерезонансна) самой системой, поскольку они ограничивают проекции торов Лиувилля на конфигурационное пространство. Поэтому для рассматриваемой системы любые другие “хорошие” (т.е. разделяющиеся) переменные должны иметь вид функций $\tilde{q}_1(q_1), \tilde{q}_2(q_2)$.

Опишем координаты u, v на сфере (с теми же координатными линиями), которые более удобны для вычисления топологических инвариантов системы.

Хорошо известно, что двумерную сферу можно двулистно накрыть двумерным тором с четырьмя точками ветвления. Накрытие можно выбрать так, что точками ветвления будут притягивающие центры P_1, P_2 и диаметрально противоположные им точки Q_1, Q_2 , а прообразами “эллипсов” $\{q_1 = \text{const}\}$ и $\{q_2 = \text{const}\}$ будут координатные линии (глобальных) угловых координат u, v на торе.

Это накрытие можно описать при помощи эллиптических функций Якоби (см., например, [13]). Рассмотрим отображение тора $\mathbb{T}^2$ с угловыми координатами u, v в пространство $\mathbb{R}^3$ с декартовыми координатами x, y, z , задаваемое формулами

$$\begin{aligned} x &= R \operatorname{sn}(u, k_1) \operatorname{dn}(v, k_2), \\ y &= R \operatorname{sn}(v, k_2) \operatorname{dn}(u, k_1), \\ z &= R \operatorname{cn}(u, k_1) \operatorname{cn}(v, k_2). \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $\operatorname{sn}(u, k_1), \operatorname{cn}(u, k_1), \operatorname{dn}(u, k_1)$ – функции Якоби с модулем $k_1 = \alpha/R = \sin \delta/2$, а $\operatorname{sn}(v, k_2), \operatorname{cn}(v, k_2), \operatorname{dn}(v, k_2)$ – функции Якоби с модулем $k_2 = \beta/R = \cos \delta/2$ (где, как и выше, δ – угловая величина дуги между центрами P_1 и P_2). В дальнейшем для краткости мы не будем указывать модуль, подразумевая, что для функций Якоби от переменной u модуль равен k_1 , а для функций Якоби от переменной v модуль равен k_2 .

Используя свойства функций Якоби, легко проверить, что при отображении, задаваемом формулами (2), образ любой точки тора (u, v) есть точка на сфере $\{x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$. При этом в каждую точку сферы (кроме точек P_1, P_2, Q_1, Q_2) отображается по две точки тора. Таким образом, отображение (2) есть двулистное накрытие $\mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$, разветвленное в четырех точках.

Это накрытие удобно представлять следующим образом. Первые две из формул (2) задают непрерывное взаимно однозначное отображение прямоугольника $\{|u| \leq K_1, |v| \leq K_2\}$ на круг $\{x^2 + y^2 \leq R^2\}$, где K_1, K_2 – полные эллиптические интегралы первого рода, соответствующие модулям k_1, k_2 . При этом вершины прямоугольника переходят в точки граничной окружности с координатами $(\pm\alpha, \pm\beta)$. Это отображение продолжается на всю плоскость $\mathbb{R}^2(u, v)$ при помощи симметрий относительно сторон прямоугольника. Учитывая третью формулу (2), получаем отображение плоскости $\mathbb{R}^2(u, v)$ на сферу $\{x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$.

Рис. 1. Координаты u, v на сфере

На рис. 1 изображено разбиение плоскости $\mathbb{R}^2(u, v)$ на прямоугольники со сторонами $2K_1, 2K_2$, каждый из которых отображается на полусферу (заштрихованные – на “верхнюю” $\{z \geq 0\}$, незаштрихованные – на “нижнюю” $\{z \leq 0\}$). При этом “черные” вершины прямоугольников отображаются в притягивающие центры P_1, P_2 , а “белые” – в отталкивающие центры Q_1, Q_2 . Поскольку функции $\operatorname{sn} u, \operatorname{cn} u$ имеют период $4K_1$, а функции $\operatorname{sn} v, \operatorname{cn} v$ – период $4K_2$, описанное отображение плоскости $\mathbb{R}^2(u, v)$ на сферу $\mathbb{S}^2$ задает отображение $\mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$, где тор $\mathbb{T}^2$ можно представлять как прямоугольник в плоскости $\mathbb{R}^2(u, v)$ со сторонами $4K_1, 4K_2$ (состоящий из двух заштрихованных и двух незаштрихованных прямоугольников с общей вершиной), у которого пары противоположных сторон отождествлены при помощи сдвигов.

Центральная симметрия плоскости $\mathbb{R}^2(u, v)$ относительно любой из вершин прямоугольников (см. рис. 1) задает инволюцию $\sigma: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ с четырьмя неподвижными точками. Факторпространство $\mathbb{T}^2/\sigma$ есть конфигурационное пространство $\mathbb{S}^2$ рассматриваемой задачи. Поэтому вместо движения точки по сфере $\mathbb{S}^2$ можно рассматривать движение точки по тору $\mathbb{T}^2$, учитывая затем действие инволюции σ . Более точно эта процедура описана в п. 1.3.

Гамильтониан и интеграл в переменных u, v (т.е. описывающие движение точки по тору $\mathbb{T}^2$) имеют вид

$$H = \frac{p_u^2 + p_v^2}{2\left(\sin^2 \frac{\delta}{2} \operatorname{cn}^2 u + \cos^2 \frac{\delta}{2} \operatorname{cn}^2 v\right)} - \frac{(\gamma_1 - \gamma_2) \sin \frac{\delta}{2} \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u + (\gamma_1 + \gamma_2) \cos \frac{\delta}{2} \operatorname{sn} v \operatorname{dn} v}{R\left(\sin^2 \frac{\delta}{2} \operatorname{cn}^2 u + \cos^2 \frac{\delta}{2} \operatorname{cn}^2 v\right)},$$

$$L = \frac{p_u^2 \operatorname{ctg} \frac{\delta}{2} \operatorname{cn}^2 v - p_v^2 \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} \operatorname{cn}^2 u}{2(\operatorname{tg} \frac{\delta}{2} \operatorname{cn}^2 u + \operatorname{ctg} \frac{\delta}{2} \operatorname{cn}^2 v)} - \frac{(\gamma_1 - \gamma_2) \cos \frac{\delta}{2} \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u \operatorname{cn}^2 v - (\gamma_1 + \gamma_2) \sin \frac{\delta}{2} \operatorname{sn} v \operatorname{dn} v \operatorname{cn}^2 u}{R(\operatorname{tg} \frac{\delta}{2} \operatorname{cn}^2 u + \operatorname{ctg} \frac{\delta}{2} \operatorname{cn}^2 v)},$$

где p_u, p_v — импульсы, соответствующие координатам u, v .

1.3. Регуляризация. Потенциал V рассматриваемой задачи имеет особенности в четырех точках на сфере (притягивающие центры P_1, P_2 и отталкивающие центры Q_1, Q_2). При этом в точках P_1, P_2 функция V стремится к $-\infty$, а в точках Q_1, Q_2 — к $+\infty$. Так как кинетическая энергия T всегда положительна, а полная энергия $H = T + V$ постоянна вдоль траекторий системы, отсюда следует, что частица, движущаяся по сфере в поле, создаваемом потенциалом V , никогда не попадет в точки Q_1 и Q_2 . Для точек P_1 и P_2 ситуация противоположная: для любого положения частицы на сфере можно задать такую начальную скорость, что частица за конечное время попадет в притягивающий центр. При этом скорость частицы “в момент попадания в притягивающий центр” станет бесконечно большой (поскольку $T + V = \text{const}$).

Таким образом, задача двух центров на сфере описывается гамильтоновой системой на кокасательном расслоении к двумерной сфере $T^*\mathbb{S}^2$ с гамильтонианом $H = T + V$, где T — квадратичная функция по импульсам (стандартная метрика на сфере), а V — функция на сфере, задаваемая формулой (1). Однако при таком подходе фазовым пространством этой системы будет не все многообразие $T^*\mathbb{S}^2$, поскольку функция V не определена в четырех точках сферы P_1, P_2, Q_1, Q_2 (а значит, функция H не определена на четырех плоскостях, являющихся слоями кокасательного расслоения $T^*\mathbb{S}^2$ над этими четырьмя точками).

Обозначим сферу $\mathbb{S}^2$ с четырьмя выброшенными точками P_1, P_2, Q_1, Q_2 через S_0 . Тогда фазовое пространство системы есть T^*S_0 . Как уже отмечалось выше, гамильтоново векторное поле $w = \operatorname{sgrad} H$ на T^*S_0 , задающее систему, не является полным. Поэтому, хотя система и обладает дополнительным интегралом L (см. п. 1.2), она не является интегрируемой по Лиувиллю. Тем не менее, как будет показано ниже, после некоторой регуляризации качественное поведение системы будет таким же, как и для интегрируемых по Лиувиллю гамильтоновых систем (почти все траектории являются условно-периодическими обмотками торов).

Отметим, что описанный ниже способ регуляризации системы аналогичен регуляризации, предложенной Т. Леви-Чивита для классической задачи Кеплера (см. [14]).

Рассмотрим гамильтониан H как функцию переменных (u, v, p_u, p_v) . Систему с таким гамильтонианом можно рассматривать как гамильтонову систему на кокасательном расслоении к тору $\mathbb{T}^2$. Введем обозначение

$$\lambda(u, v) = \sin^2 \frac{\delta}{2} \operatorname{cn}^2 u + \cos^2 \frac{\delta}{2} \operatorname{cn}^2 v. \quad (3)$$

Тогда гамильтониан имеет вид

$$H = \frac{p_u^2 + p_v^2}{2\lambda(u, v)} - \frac{(\gamma_1 - \gamma_2) \sin \frac{\delta}{2} \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u + (\gamma_1 + \gamma_2) \cos \frac{\delta}{2} \operatorname{sn} v \operatorname{dn} v}{R \cdot \lambda(u, v)},$$

а координаты поля $W = \text{sgrad } H$ на $T^*\mathbb{T}^2$ равны $\left(\frac{\partial H}{\partial p_u}, \frac{\partial H}{\partial p_v}, -\frac{\partial H}{\partial u}, -\frac{\partial H}{\partial v}\right)$.

В фазовом пространстве $T^*\mathbb{T}^2$ векторное поле W имеет особенности в точках, в которых $\lambda(u, v) = 0$, т.е. в точках вида $(\pm K_1, \pm K_2, p_u, p_v)$. Рассмотрим векторное поле $\tilde{W} = \lambda(u, v) \cdot \text{sgrad } H$. В координатах (u, v, p_u, p_v) оно имеет вид

$$\begin{aligned} &\left(p_u, p_v, \sin \frac{\delta}{2} \operatorname{cn} u \left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{R} (2 \operatorname{dn}^2 u - 1) - 2 \sin \frac{\delta}{2} \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u \cdot h \right), \right. \\ &\quad \left. \cos \frac{\delta}{2} \operatorname{cn} v \left(\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{R} (2 \operatorname{dn}^2 v - 1) - 2 \cos \frac{\delta}{2} \operatorname{sn} v \operatorname{dn} v \cdot h \right) \right), \quad (4) \end{aligned}$$

где $h = H(u, v, p_u, p_v)$ — значение гамильтониана в точке (u, v, p_u, p_v) . Векторное поле $\tilde{W}$ также имеет особенности в точках $(\pm K_1, \pm K_2, p_u, p_v)$, поскольку гамильтониан H не определен в точках, в которых $\lambda(u, v) = 0$. Обозначим через W_h ограничение векторного поля $\tilde{W}$ на изоэнергетическую поверхность $Q_h = \{H = h\} \subset T^*\mathbb{T}^2$. Векторное поле W_h уже не имеет особенностей (но определено лишь на трехмерной поверхности Q_h). Оно задается формулой (4) и, в частности, определено в точках вида $(\pm K_1, \pm K_2, p_u, p_v)$, лежащих на поверхности Q_h :

$$W_h(\pm K_1, \pm K_2, p_u, p_v) = (p_u, p_v, 0, 0).$$

Ясно, что интегральные траектории поля W_h совпадают (с точностью до замены параметра) с интегральными траекториями исходного векторного поля $W = \text{sgrad } H$ на $T^*\mathbb{T}^2$, поскольку умножение поля W на функцию $\lambda(u, v)$ можно интерпретировать как замену времени $\frac{dt}{d\tau} = \lambda(u(t), v(t))$, где $(u(t), v(t), p_u(t), p_v(t))$ — траектория поля W .

С другой стороны, векторное поле W_h на поверхности Q_h совпадает с ограничением на эту поверхность некоторого гамильтонова векторного поля, определенного во всем фазовом пространстве $T^*\mathbb{T}^2$. Ясно, что такое продолжение неоднозначно. Например, в качестве такого поля можно взять поле $\text{sgrad } F_h$, где

$$\begin{aligned} F_h = \lambda(H - h) &= \frac{p_u^2 + p_v^2}{2} - h \left(\sin^2 \frac{\delta}{2} \operatorname{cn}^2 u + \cos^2 \frac{\delta}{2} \operatorname{cn}^2 v \right) \\ &\quad - \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{R} \sin \frac{\delta}{2} \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u - \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{R} \cos \frac{\delta}{2} \operatorname{sn} v \operatorname{dn} v. \quad (5) \end{aligned}$$

Тогда $\text{sgrad } F_h = \lambda \text{sgrad } H + (H - h) \text{sgrad } \lambda$. Поскольку $\{F_h = 0\} = \{H = h\}$, векторное поле $\text{sgrad } F_h$ касается поверхности Q_h и совпадает на ней с полем W_h .

Интеграл L исходной системы, очевидно, является интегралом гамильтоновой системы с гамильтонианом F_h на поверхности $\{F_h = 0\}$. Поэтому после описанной регуляризации топологические свойства системы с гамильтонианом H на $T^*\mathbb{T}^2$ на каждой изоэнергетической поверхности Q_h будут такими же, как и для обычных интегрируемых гамильтоновых систем. В частности, неособые инвариантные многообразия системы являются торами Лиувилля, а перестройки этих торов можно описать при помощи инвариантов Фоменко–Цишанга (см. ниже п. 2.1).

До сих пор мы, фактически, говорили о регуляризации системы на $T^*\mathbb{T}^2$, которая возникла из рассмотрения (разветвленного) накрытия сферы $\mathbb{S}^2$ тором $\mathbb{T}^2$.

Это накрытие определяется инволюцией $\sigma: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$, описанной в п. 1.2. Инволюция σ естественным образом продолжается до инволюции $\sigma^*: T^*\mathbb{T}^2 \rightarrow T^*\mathbb{T}^2$. Чтобы вернуться теперь к системе на сфере (а именно эта система является основным объектом нашего изучения), нужно учесть действие инволюции σ^* на $T^*\mathbb{T}^2$.

Поскольку инволюция $\sigma: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ порождается центральной симметрией плоскости $\mathbb{R}^2(u, v)$ относительно точки (K_1, K_2) (или любой другой вершины прямоугольников на рис. 1), в координатах (u, v, p_u, p_v) инволюция σ^* имеет вид

$$\sigma^*: (u, v, p_u, p_v) \mapsto (2K_1 - u, 2K_2 - v, -p_u, -p_v). \quad (6)$$

Поэтому инволюция σ^* имеет ровно 4 неподвижные точки $(\pm K_1, \pm K_2, 0, 0)$. Отметим, что факторпространство $T^*\mathbb{T}^2/\sigma^*$ не является многообразием.

Теперь зафиксируем некоторое значение h и рассмотрим функцию F_h , задаваемую формулой (5). Легко видеть, что поверхность $\{F_h = 0\}$ инвариантна относительно инволюции σ^* и не содержит точек $(\pm K_1, \pm K_2, 0, 0)$ (непосредственным вычислением проверяется, что в этих четырех точках значения функции F_h равны $\pm(\gamma_i/R) \sin \delta$, где $i = 1, 2$). Итак, факторпространства $\{F_h = 0\}/\sigma^*$ можно рассматривать как изоэнергетические поверхности исходной системы на сфере после регуляризации.

Более того, также легко проверяется, что и векторное поле W_h на поверхности $\{F_h = 0\}$ инвариантно относительно инволюции σ^* , что позволяет рассматривать векторное поле $w_h = W_h/\sigma^*$ как результат регуляризации исходного векторного поля $w = \text{sgrad } H$ на изоэнергетической поверхности $Q_h = \{H = h\} \subset T^*\mathbb{S}^2$.

Проведенные рассуждения приводят к следующему утверждению, описывающему регуляризацию задачи двух центров на сфере, т.е. гамильтоновой системы $w = \text{sgrad } H$ на кокасательном расслоении к сфере $T^*\mathbb{S}^2$ с гамильтонианом $H = T + V$, где квадратичная по импульсам функция T определяется стандартной метрикой на сфере радиуса R в $\mathbb{R}^3$, а функция V задана формулой (1).

ТЕОРЕМА 1 (о регуляризации). Пусть h – регулярное значение гамильтониана H , а $Q_h = \{H = h\} \subset T^*\mathbb{S}^2$ – соответствующая изоэнергетическая поверхность. Рассмотрим на поверхности Q_h векторное поле $w_h = \lambda \text{sgrad } H$, где λ – функция (3) на сфере $\mathbb{S}^2$.

Пусть $f: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ – двулистное накрытие (2), $\sigma^*: T^*\mathbb{T}^2 \rightarrow T^*\mathbb{T}^2$ – соответствующая инволюция (6), а F_h – функция, определенная формулой (5), на кокасательном расслоении к тору $T^*\mathbb{T}^2$. Рассмотрим на поверхности $\{F_h = 0\} \subset T^*\mathbb{T}^2$ векторное поле $W_h = \text{sgrad } F_h$.

Тогда

- 1) поверхность $\{F_h = 0\} \subset T^*\mathbb{T}^2$ является замкнутым трехмерным многообразием, на котором инволюция σ^* действует без неподвижных точек,
- 2) векторное поле W_h на поверхности $\{F_h = 0\}$ не имеет особенностей и инвариантно относительно инволюции σ^* ,
- 3) отображение (2) индуцирует диффеоморфизм факторпространства (относительно инволюции σ^*) поверхности $\{F_h = 0\}$ без точек, лежащих в четырех слоях над точками ветвления отображения f , на поверхность $\{H = h\}$, причем этот диффеоморфизм переводит векторное поле W_h в векторное поле w_h .

Отметим, что нерегулярные значения h гамильтониана H явно выписаны при построении бифуркационных диаграмм (см. п. 1.4).

Отметим также, что указанную процедуру регуляризации системы можно описать и без перехода к двулистному накрытию $T^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$. Однако, как оказалось, рассмотрение такой “накрывающей” системы сильно упрощает вычисление инвариантов Фоменко–Цишанга (см. §2).

1.4. Бифуркационные диаграммы. *Отображение момента* для интегрируемой гамильтоновой системы с двумя степенями свободы определяется как отображение $\mathcal{F}: M \rightarrow \mathbb{R}^2$, сопоставляющее точке $x \in M$ фазового пространства системы пару чисел (h, k) , где h – значение гамильтониана H , а k – значение дополнительного интеграла K в точке x .

Точка (h, k) называется *регулярным* значением отображения момента $\mathcal{F}$, если ее прообраз не содержит критических точек отображения $\mathcal{F}$.

Назовем точку $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ *правильной*, если для некоторой окрестности U этой точки в плоскости значений отображения момента $\mathcal{F}$ ее прообраз $\mathcal{F}^{-1}(U)$ гомеоморфен прямому произведению $U \times \mathcal{F}^{-1}(h, k)$, а отображение $\mathcal{F}$ на этом прообразе есть проекция на первый сомножитель.

Отметим, что в общем случае точка (h, k) может быть правильной, но не являться регулярным значением, а также может являться регулярным значением, но не быть правильной (однако в случае, когда фазовое пространство M компактно, из регулярности следует правильность).

Бифуркационной диаграммой отображения момента называется множество точек в образе, для которых нарушается либо условие регулярности, либо условие правильности. (Иногда это множество называют также расширенной бифуркационной диаграммой, а бифуркационной диаграммой – образ множества критических точек; для компактного фазового пространства эти понятия совпадают.)

Для рассматриваемой задачи фазовое пространство не является компактным. Более того, некомпактны даже изоэнергетические поверхности из-за того, что гамильтониан имеет особенности (как функция на $T^*\mathbb{S}^2$). Однако мы будем исследовать топологию “регуляризованной” системы, для которой изоэнергетические поверхности уже компактны. А именно: вместо поверхности $\{H = h\}$ мы будем рассматривать поверхность $\{F_h = 0\}$ и исследовать ее слоение на поверхности уровня дополнительного интеграла. После этого, учитывая действие инволюции, мы получим описание аналогичного слоения для регуляризованной изоэнергетической поверхности исходной системы.

При этом в качестве дополнительного интеграла на поверхности $\{F_h = 0\}$ можно взять вместо функции L (см. п. 1.2), которая имеет особенности, другую функцию, не имеющую особенностей. Например, в качестве такой функции можно взять функцию

$$K_h = 2L + \frac{\sin^2 \frac{\delta}{2} \operatorname{cn}^2 u - \cos^2 \frac{\delta}{2} \operatorname{cn}^2 v}{\sin^2 \frac{\delta}{2} \operatorname{cn}^2 u + \cos^2 \frac{\delta}{2} \operatorname{cn}^2 v} F_h.$$

Вычисляя, получаем

$$K_h = \frac{p_u^2 - p_v^2}{2} + h \left(\cos^2 \frac{\delta}{2} \operatorname{cn}^2 v - \sin^2 \frac{\delta}{2} \operatorname{cn}^2 u \right) - \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{R} \sin \frac{\delta}{2} \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u + \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{R} \cos \frac{\delta}{2} \operatorname{sn} v \operatorname{dn} v. \quad (7)$$

Следующее утверждение легко проверяется прямым вычислением.

ЛЕММА. Пусть F_h и K_h — функции на $T^*\mathbb{T}^2$, заданные соответственно формулами (5) и (7). Тогда

- 1) $\{F_h, K_h\} \equiv 0$,
- 2) множество $\{F_h = 0, K_h = k\}$ задается уравнениями

$$\begin{aligned} p_u^2 &= 2h \sin^2 \frac{\delta}{2} \operatorname{cn}^2 u + \frac{2(\gamma_1 - \gamma_2)}{R} \sin \frac{\delta}{2} \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u + k, \\ p_v^2 &= 2h \cos^2 \frac{\delta}{2} \operatorname{cn}^2 v + \frac{2(\gamma_1 + \gamma_2)}{R} \cos \frac{\delta}{2} \operatorname{sn} v \operatorname{dn} v - k, \end{aligned} \quad (8)$$

- 3) при диффеоморфизме, описанном в п. 3) теоремы 1, точки множества $\{F_h = 0, K_h = 2l\}$ переходят в точки множества $\{H = h, L = l\}$.

Таким образом, построение бифуркационной диаграммы отображения момента для (регуляризованной) задачи двух центров на сфере можно провести следующим образом. Для каждого значения h найти критические точки функции K_h , ограниченной на поверхность $\{F_h = 0\}$, а затем объединить полученные критические значения в кривые с параметром h на плоскости $\mathbb{R}^2(h, k)$.

Второе утверждение леммы, фактически, означает, что эти критические значения соответствуют “кратным корням” функций, стоящих в правых частях уравнений (8). Находя те пары (h, l) (где $k = 2l$), для которых такие корни существуют, получаем ответ.

Бифуркационные диаграммы изображены на рис. 2. Верхняя диаграмма — для случая $0 < \delta < \pi/2$. При $\delta > \pi/2$ качественный вид бифуркационной диаграммы такой же, но особые точки (т.е. точки касания и точки пересечения бифуркационных кривых) могут быть расположены по-разному в зависимости от соотношения величин $\cos \delta$ и γ_1/γ_2 . Два примера бифуркационных диаграмм для случая $\delta > \pi/2$ приведены на рис. 2 внизу. Как будет ясно из дальнейшего, для исследования топологии рассматриваемой системы на некоторой изоэнергетической поверхности $Q_h^3 = \{H = h\}$ существенным является лишь взаимное расположение вертикальной прямой $\{h = \text{const}\}$ и особых точек бифуркационной диаграммы на плоскости $\mathbb{R}^2(h, l)$. Используя приведенные ниже явные формулы, несложно проверить, что всего возможно 12 вариантов такого расположения. Они соответствуют изоэнергетическим поверхностям с различными инвариантами Фоменко–Цишанга (см. §2). Вертикальные прямые h_i ($1 \leq i \leq 12$) указаны на рис. 2. При этом здесь (и всюду в дальнейшем) предполагается, что $\gamma_1 > \gamma_2$.

Рис. 2. Бифуркационные диаграммы

Уравнения бифуркационных кривых:

$$\begin{aligned} \Gamma_1: (2l - h \cos \delta)^2 - h^2 &= \frac{(\gamma_1 - \gamma_2)^2}{R^2}, & \Gamma_2: (2l - h \cos \delta)^2 - h^2 &= \frac{(\gamma_1 + \gamma_2)^2}{R^2}, \\ \Gamma_3: l &= \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2R} \sin \delta, & \Gamma_4: l &= \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2R} \sin \delta, \\ \Gamma_5: l &= -\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2R} \sin \delta, & \Gamma_6: l &= -\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2R} \sin \delta. \end{aligned}$$

Точки касания гиперболы Γ_1 с прямыми Γ_4 и Γ_5 имеют координаты

$$c = \left(-\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{R} \operatorname{ctg} \delta, \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2R} \sin \delta \right), \quad d = \left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{R} \operatorname{ctg} \delta, -\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2R} \sin \delta \right).$$

Точка касания гиперболы Γ_2 с прямой Γ_3 имеет координаты

$$b = \left(-\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{R} \operatorname{ctg} \delta, \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2R} \sin \delta \right).$$

Точки пересечения гиперболы Γ_1 с прямыми Γ_3 и Γ_6 имеют координаты

$$a = \left(-\frac{(\gamma_1 + \gamma_2) \cos \delta + 2\sqrt{\gamma_1 \gamma_2}}{R \sin \delta}, \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2R} \sin \delta \right),$$

$$e = \left(\frac{(\gamma_1 + \gamma_2) \cos \delta + 2\sqrt{\gamma_1 \gamma_2}}{R \sin \delta}, -\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2R} \sin \delta \right).$$

Последним двум точкам соответствуют два нерегулярных значения h гамильтониана. Остальные значения гамильтониана регулярны.

Бифуркационное множество разбивает образ отображения момента на области так, что при движении точки внутри такой области торы Лиувилля в прообразе этой точки не испытывают бифуркаций. Таким образом, каждой области соответствует определенное число торов Лиувилля. Эти числа можно определить, исследуя функции (8) (см. §2). На рис. 2 номера областей отмечены цифрами 1–6; для областей 1, 3, 5 в прообразах точек лежит один тор, а для областей 2, 4, 6 – два тора.

§ 2. Вычисление инвариантов

В этом параграфе мы вычисляем инварианты Фоменко–Цишанга для рассматриваемой интегрируемой гамильтоновой системы.

2.1. Инвариант Фоменко–Цишанга (меченая молекула). Напомним некоторые понятия, на которых основано построение инварианта Фоменко–Цишанга (подробное описание см. в [15]).

Траектории интегрируемой по Лиувиллю гамильтоновой системы с двумя степенями свободы лежат на совместных поверхностях уровня гамильтониана H и дополнительного интеграла K . Каждая неособая компактная связная компонента совместной поверхности уровня функций H и K является двумерным тором. Таким образом, все фазовое пространство системы является объединением этих торов (торов Лиувилля) и некоторых особых слоев (содержащих точки, в которых функции H и K зависимы). Это разбиение фазового пространства интегрируемой системы называется *слоением Лиувилля*. Его слоями являются связные компоненты множеств $\{H(x) = h, K(x) = k\}$.

Можно также рассматривать слоение Лиувилля не во всем (четырёхмерном) фазовом пространстве, а на некотором его инвариантном подмножестве (т.е. являющемся объединением слоев). Про два таких подмножества M_1 и M_2 говорят, что они *лиувиллево эквивалентны*, если существует гомеоморфизм $f: M_1 \rightarrow M_2$, переводящий слой в слой.

Мы будем рассматривать слоение Лиувилля на (трехмерных) изоэнергетических поверхностях $Q_h = \{H = h\}$. Его слоями являются связные компоненты множеств $\{K = k\}$, где K – ограничение интеграла K на Q_h .

Для того чтобы описать топологическую структуру лиувиллева слоения на изоэнергетической поверхности Q_h , достаточно описать это слоение в (малых) инвариантных окрестностях особых слоев и указать, как из этих окрестностей склеено все многообразие Q_h .

Интеграл K называется *боттовским* на поверхности Q_h , если критические точки функции $\tilde{K}$ образуют подмногообразия, а ограничение функции $\tilde{K}$ на малую трансверсальную площадку к этим подмногообразиям является функцией Морса. Для боттовских интегралов имеется классификация инвариантных окрестностей особых слоев с точностью до лиувиллевой эквивалентности. Класс лиувиллевой эквивалентности окрестности особого слоя называется *атомом*.

Рис. 3. Атомы A, B, A^*, C_2

В рассматриваемой задаче встречаются лишь следующие четыре атома (рис. 3):

- 1) атом A – полноторие $(S^1 \times D^2)$, расслоенное на concentric торы (особый слой – окружность, ось полнотория);
- 2) атом B – полноторие $(N^2 \times S^1)$, из которого вырезаны два тонких полнотория (особый слой – прямое произведение “восьмерки” на окружность, N^2 – окрестность “восьмерки”);
- 3) атом A^* – полноторие $(N^2 \tilde{\times} S^1)$, из которого вырезано одно тонкое полноторие, обходящее два раза вдоль оси (особый слой – косое произведение “восьмерки” на окружность);
- 4) атом C_2 – полноторие $(M^2 \times S^1)$, из которого вырезаны три тонких полнотория (особый слой – прямое произведение “двух пересекающихся окружностей” на окружность, M^2 – окрестность “двух пересекающихся окружностей”).

Атомы описывают бифуркации торов Лиувилля при прохождении критического значения функции $\tilde{K}$. Атому A соответствует рождение или исчезновение тора, атому B – распад одного тора на два или слияние двух торов в один, атому A^* – перестройка одного тора в один тор, атому C_2 – перестройка двух торов в два тора.

Границы атомов склеиваются при помощи однопараметрических семейств торов Лиувилля, не содержащих особых слоев. Схему этой склейки можно описать при помощи ориентированного графа, каждой вершине которого сопоставлен некоторый атом, а ребрам – однопараметрические семейства торов. Такой граф называется *молекулой* данной изоэнергетической поверхности.

Молекула описывает структуру слоения Лиувилля с точностью до так называемой грубой лиувиллевой эквивалентности. Это означает, что склейки граничных

торов атомов вдоль ребер неоднозначны. Однако эти склейки можно однозначно охарактеризовать при помощи некоторых числовых меток. В результате получается *меченая молекула* (или *инвариант Фоменко–Цишанга*), которая уже определяет тип лиувиллева слоения однозначно с точностью до лиувиллевой эквивалентности. Определения меток можно найти в книге [15] (см. также описание вычислений в п. 2.4).

2.2. Боттовость интеграла. Как было отмечено выше, инварианты Фоменко–Цишанга определены для изоэнергетических поверхностей, на которых дополнительный интеграл является боттовским. Для произвольных интегрируемых систем проверка боттовости дополнительного интеграла обычно нетривиальна. Однако для систем, в которых переменные разделяются (как в рассматриваемой задаче), вычисления значительно упрощаются.

В рассматриваемой задаче проверка боттовости интеграла, фактически, сводится к проверке невырожденности критических точек функций (от одной переменной), определяемых правыми частями формул (8). Вычисляя, получаем следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Дополнительный интеграл является боттовским на всех изоэнергетических поверхностях $Q_h = \{H = h\}$, кроме тех, для которых h является абсциссой одной из точек касания бифуркационных кривых.*

2.3. Области возможности движения. Исследование топологии натуральных механических систем удобно проводить при помощи проекции на конфигурационное пространство. Каждый тор Лиувилля при этом проектируется в некоторую область, которая называется *областью возможности движения* (для значений h и k гамильтониана H и интеграла K , определяющих данный тор).

Рассмотрим сначала проекции торов Лиувилля на конфигурационное пространство $\mathbb{T}^2$, т.е. для “накрывающей системы”.

Каждый такой тор задается в $T^*\mathbb{T}^2$ уравнениями (8) с некоторыми константами h и k , т.е. уравнениями вида

$$p_u^2 = f(u), \quad p_v^2 = g(v).$$

Так как f и g — функции от разных переменных, проекция тора Лиувилля есть некоторая область на торе $\mathbb{T}^2$, ограниченная линиями вида $\{u = \text{const}\}$ и $\{v = \text{const}\}$. При этом в каждую внутреннюю точку (u, v) этой области проектируется по четыре точки $(u, v, \pm\sqrt{f(u)}, \pm\sqrt{g(v)}) \in T^*\mathbb{T}^2$, а на границе области эти точки попарно склеиваются в две точки или одну точку.

Таким образом, вид проекции тора Лиувилля, задаваемого константами h и k , полностью определяется знаками выражений $f(u)$ и $g(v)$ из формул (8) и одинаков для всех точек (h, k) , лежащих в одной из областей, на которые бифуркационная диаграмма разбивает плоскость $\mathbb{R}^2(h, k)$.

Бифуркационная диаграмма разбивает плоскость $\mathbb{R}^2(h, k)$ на шесть областей, отмеченных цифрами на рис. 2 (здесь $k = 2l$; см. лемму в п. 1.4). Определяя знаки выражений $f(u)$ и $g(v)$ для каждой из этих областей, получаем следующие проекции торов Лиувилля (см. рис. 4).

На рис. 4 тор $\mathbb{T}^2$ изображается в виде прямоугольника, состоящего из четырех прямоугольников плоскости с координатами (u, v) (см. рис. 1). При этом черные

Рис. 4. Проекция торов Лиувилля на $\mathbb{T}^2$

и белые вершины имеют тот же смысл, что и на рис. 1, а заштрихованным прямоугольникам на рис. 1 соответствуют левый нижний и правый верхний прямоугольники на рис. 4. Заштрихованные области на рис. 4 изображают проекции торов Лиувилля.

В некоторые из заштрихованных областей на рис. 4 проектируются сразу несколько торов Лиувилля. В каждом из шести случаев их количество однозначно определяется видом проекции. Действительно, 4 точки $(u, v, \pm\sqrt{f(u)}, \pm\sqrt{g(v)})$, проектирующиеся во внутреннюю точку (u, v) заштрихованной области, при подходе этой точки к границе области склеиваются следующим образом: на горизонтальных отрезках точка $(u, v, \sqrt{f(u)}, \sqrt{g(v)})$ склеивается с $(u, v, \sqrt{f(u)}, -\sqrt{g(v)})$, а точка $(u, v, -\sqrt{f(u)}, \sqrt{g(v)})$ склеивается с $(u, v, -\sqrt{f(u)}, -\sqrt{g(v)})$; на вертикальных отрезках точка $(u, v, \sqrt{f(u)}, \sqrt{g(v)})$ склеивается с $(u, v, -\sqrt{f(u)}, \sqrt{g(v)})$, а точка $(u, v, \sqrt{f(u)}, -\sqrt{g(v)})$ склеивается с $(u, v, -\sqrt{f(u)}, -\sqrt{g(v)})$. Отсюда получаем, что в область на рис. 4 (1) проектируется один тор, в каждую из двух областей на рис. 4 (2) и рис. 4 (5) – тоже по одному тору, в область на рис. 4 (3) – два тора, и в каждую из двух областей на рис. 4 (4) и рис. 4 (6) – по два тора.

Перестройки торов Лиувилля при переходе точки (h, k) через бифуркационные кривые также можно определить, рассматривая перестройки соответствующих областей возможности движения, изображенных на рис. 4. После этого уже легко вычислить инварианты Фоменко–Цишанга, описывающие слоение Лиувилля на поверхностях $\{F_h = 0\}$ при различных значениях h .

Напомним, что наша основная цель – исследование топологии системы на $T^*\mathbb{S}^2$ (а не на $T^*\mathbb{T}^2$), т.е. на поверхностях $\{F_h = 0\}/\sigma^*$. (Вычисления для этого случая более сложные и подробно описаны ниже в пп. 2.4, 2.5.) Поэтому для “системы на торе $\mathbb{T}^2$ ” приведем лишь ответ.

ТЕОРЕМА 2. *Для системы с гамильтонианом F_h на $T^*\mathbb{T}^2$ полный список инвариантов Фоменко–Цишанга, описывающих слоение Лиувилля на поверхностях $\{F_h = 0\}$ (при различных значениях параметров $\gamma_1, \gamma_2, \delta$ и h), состо-*

ит из 12 молекул, перечисленных в таблице 1 (номер i в таблице соответствует прямой h_i на рис. 2).

Области возможности движения для (регуляризованной) задачи двух центров на сфере получаются из областей возможности движения, изображенных на рис. 4, в результате факторизации их по действию инволюции $\sigma: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$. Они приведены в §3 (см. рис. 15). Количество торов Лиувилля для каждого из шести случаев, соответствующих шести областям на плоскости $\mathbb{R}^2(h, k)$, можно установить, учитывая как действует инволюция $\sigma^*: T^*\mathbb{T}^2 \rightarrow T^*\mathbb{T}^2$ (см. формулу (6)). В результате получаем, что в случаях 1, 2, 3, 5 на рис. 15 в каждую из областей (дисков) проектируется по одному тору Лиувилля, а в случаях 4 и 6 в каждую из областей (колец) проектируется по два тора. Отметим, что в случаях 4 и 6 проекции траекторий, лежащих на одном торе, при изменении направления на них переходят в проекции траекторий, лежащих на втором торе, который проектируется в то же кольцо.

2.4. Построение допустимых систем координат. Для того чтобы вычислить инварианты Фоменко–Цишанга (меченые молекулы), описывающие топологию слоения Лиувилля на изоэнергетических поверхностях $Q_h = \{H = h\}$, необходимо сделать следующее:

- 1) определить тип перестроек торов Лиувилля в прообразе точки (h, k) , движущейся вдоль прямой $\{h = \text{const}\}$ на плоскости $\mathbb{R}^2(h, k)$, при пересечении этой точкой бифуркационной диаграммы;
- 2) описать склейки граничных торов Лиувилля для прообразов отрезков вида $\{|k - k_1| \leq \varepsilon\}$, $\{|k - k_2| \leq \varepsilon\}$, лежащих на прямой $\{h = \text{const}\}$, где значения k_1, k_2 соответствуют двум последовательным бифуркациям (т.е. для пары атомов молекулы, соединенных ребром).

Для описания склеек граничных торов Лиувилля нужно специальным образом выбрать на них базисные циклы (построить *допустимые системы координат*) и после этого выписать матрицы склейки в этих базисах. Общее правило для выбора таких циклов описано в [15]. При вычислениях, проводимых ниже, в каждом конкретном случае будет сформулировано нужное условие на эти циклы.

Ясно, что для построения молекул, соответствующих произвольным значениям h , достаточно описать бифуркации и допустимые системы координат для каждой бифуркационной кривой, т.е. для всех возможных переходов $i \rightarrow j$ (из области с номером i в область с номером j) через некоторую бифуркационную кривую. При этом будем считать, что мы всегда переходим из “нижней” области в “верхнюю” (это корректно, так как в рассматриваемом случае бифуркационные кривые не имеют вертикальных касательных; см. рис. 2). Из рис. 2 видно, что всего возникает 12 вариантов:

$$\begin{aligned} 1 \rightarrow 2, \quad 2 \rightarrow 3, \quad 3 \rightarrow 4, \quad 1 \rightarrow 3, \quad 5 \rightarrow 1, \quad 6 \rightarrow 5, \\ \emptyset \rightarrow 1, \quad 2 \rightarrow \emptyset, \quad 3 \rightarrow \emptyset, \quad 4 \rightarrow \emptyset, \quad \emptyset \rightarrow 5, \quad \emptyset \rightarrow 6, \end{aligned}$$

где через $\emptyset$ обозначена область, состоящая из точек с пустым прообразом.

Проекции торов Лиувилля, изображенные на рис. 4, имеют простой вид (грубо говоря, при этих проекциях торы “складываются” по двум или четырем циклам,

Таблица 1. Список инвариантов для системы на торе

№	Молекула (изоэнергетическая)	№	Молекула (изоэнергетическая)
1		5	
2		6	
3			
4			

ТАБЛИЦА 1 (продолжение)

№	Молекула (изоэнергетическая)	№	Молекула (изоэнергетическая)
7		10	
8		11	
9		12	

превращаясь в “прямоугольные” области). Кроме того, их перестройки также хорошо описываются в терминах этих проекций. Однако для того чтобы описать допустимые системы координат на каком-либо торе, его удобно “развернуть”, превратив в плоский прямоугольник (соответственно в два или четыре раза больший, чем проекция). После этого надо еще учесть действие инволюции σ^* на этой “развертке”, чтобы получить уже изображение тора Лиувилля для рассматриваемой системы на сфере.

Рис. 5. “Разворачивание” и факторизация торов Лиувилля

На рис. 5 изображена описанная процедура для случая (1) из рис. 4. Сначала мы “разворачиваем” тор, получая из четырех маленьких прямоугольников, наложенных друг на друга, один прямоугольник, в 4 раза больший. При этом будем считать, что положение одного из маленьких прямоугольников не изменилось (он на рисунке заштрихован), т.е. что для него по-прежнему горизонтальная ось есть ось u , а вертикальная – ось v . Пусть этот прямоугольник состоит из точек, для которых $p_u, p_v \geq 0$. Таким образом, после первого шага тор изображен в виде большого прямоугольника, противоположные стороны которого отождествляются при помощи сдвигов, параллельных осям. На втором шаге мы факторизуем этот тор по инволюции σ^* . Здесь надо учесть, что мы рассматриваем именно инволюцию σ^* , а не σ . Поэтому надо рассмотреть не просто центральную симметрию относительно центра заштрихованного прямоугольника, а ее композицию с центральной симметрией относительно центра большого прямоугольника (которая соответствует замене (p_u, p_v) на $(-p_u, -p_v)$). Получаем, что инволюция σ^* на данном торе есть сдвиг на вектор, совпадающий с диагональю заштрихованного прямоугольника. Таким образом, тор Лиувилля для системы на сфере изображается в виде прямоугольника (состоящего из двух маленьких прямоугольников), стороны которого склеиваются так, как показано на рис. 5 (надо отождествить стороны, отмеченные одинаковыми буквами).

Аналогичным образом (в виде *разверток*) мы будем изображать торы Лиувилля и для остальных случаев (2)–(6) из рис. 4. Здесь нужно отметить, что мы изображаем развертки торов Лиувилля *после* факторизации по инволюции σ^* . При этом в заштрихованную часть на развертке при факторизации попадают те точки, для которых $p_u, p_v > 0$. Единственный случай, где при таком подходе возникает неоднозначность, – это случай (5) на рис. 4. Здесь предполагается, что в заштрихованную часть развертки при факторизации попадают те точки, удовлетворяющие условию $p_u, p_v > 0$, которые проектировались в *левый* (заштрихованный) прямо-

угольник на рис. 4(5). Кроме того, для всех разверток, кроме случаев (1) и (2), стороны прямоугольников отождествляются горизонтальными и вертикальными сдвигами, а для случаев (1) и (2) – так, как показано на рис. 5. Эти соглашения всегда будут использоваться в дальнейшем при изображении допустимых систем координат на развертках торов Лиувилля.

Сделаем еще одно замечание. Для каждого из граничных торов атомов базисные циклы λ, μ допустимой системы координат должны быть подходящим образом ориентированы. Если считать, что ориентация в фазовом пространстве гамильтоновой системы задается формой $\omega \wedge \omega$ (где ω – симплектическая структура), а ориентация на изоэнергетических поверхностях определяется “нормалью” $\text{grad } H$ (относительно какой-нибудь метрики), то на торах Лиувилля возникает естественная ориентация, определяемая “нормалью” $\text{grad } K$.

Оказывается, что при описанном выше способе изображения торов Лиувилля эту ориентацию на развертках можно определить следующим образом: *ориентацию, задаваемую на заштрихованном прямоугольнике развертки тора координатами u, v , будем считать положительной*. Ясно, что тем самым ориентация определена на всех торах.

Далее, на граничных торах атома будем выбирать базисные циклы λ, μ таким образом, чтобы на “верхних” торах они задавали положительную ориентацию, а на “нижних” – отрицательную (напомним, что в данной задаче мы всегда рассматриваем бифуркации при переходе из “нижней” области бифуркационной диаграммы в “верхнюю”). Пару циклов на каждом верхнем торе атома будем обозначать (λ^-, μ^-) , а на каждом нижнем торе – (λ^+, μ^+) .

Теперь перейдем к описанию допустимых систем координат для перечисленных 12 случаев.

Случаи вида $i \rightarrow \emptyset$ или $\emptyset \rightarrow i$. Эти бифуркации соответствуют атому A . У этого атома только один граничный тор, который либо стягивается на осевую окружность, либо, наоборот, рождается из нее в процессе бифуркации. При проекции на конфигурационное пространство эта окружность проектируется в вертикальный или горизонтальный отрезок. Эти две возможности соответствуют тому, что при подходе точки к граничной бифуркационной кривой либо функция $f(u)$, либо функция $g(v)$ стремится к нулю (см. п. 2.3). Определяя, какая из этих двух возможностей реализуется, получаем, что в случаях $\emptyset \rightarrow 1, \emptyset \rightarrow 5, \emptyset \rightarrow 6$ критические окружности проектируются в вертикальные отрезки, а в случаях $2 \rightarrow \emptyset, 3 \rightarrow \emptyset, 4 \rightarrow \emptyset$ – в горизонтальные.

Правило выбора цикла λ для атома A следующее: этот цикл должен стягиваться в точку при стягивании тора на ось полнотория (атома A). Дополнительный цикл μ выбирается так, чтобы при этом стягивании тора его направление стремилось к направлению потока $\text{sgrad } H$ на критической окружности (и чтобы пара λ, μ была правильно ориентирована – см. выше). Отметим, что цикл μ определен неоднозначно.

Отсюда, учитывая правило выбора ориентации и то, что для заштрихованного прямоугольника $p_u, p_v \geq 0$, получаем допустимые системы координат на граничном торе атома A для всех шести случаев. Ответ приведен на рис. 6.

Напомним, что для первых двух перестроек, изображенных на рис. 6, склейки прямоугольников производятся так, как показано на рис. 5. Поэтому, в частности,

 Рис. 6. Допустимые системы координат на атомах A

цикл λ для перестройки $\emptyset \rightarrow 1$ на рис. 6 состоит из двух кусков.

Случай 1 $\rightarrow 2$. В этом случае происходит следующее: один тор (который был в области 1) не изменяется, но появляется второй тор. Это происходит точно так же, как и при перестройке $\emptyset \rightarrow 1$, описанной выше (см. рис. 6).

Случай 2 $\rightarrow 3$. В этом случае два тора перестраиваются в один. Эта бифуркация описывается атомом B .

 Рис. 7. Допустимая система координат на атоме B (случай $2 \rightarrow 3$)

Правило выбора циклов для атома B следующее: если рассматривать атом B как (тривиальное) расслоение на окружности над окрестностью восьмерки N^2 , то циклы λ должны совпадать со слоем этого расслоения и быть сонаправленными потоку на критической окружности, а циклы μ должны ограничивать некоторую двумерную поверхность, являющуюся трансверсальным сечением этого расслоения. Кроме того, как и выше, остается условие правильной ориентации базиса λ, μ .

Аналогично предыдущему устанавливается, что критическая окружность проектируется в вертикальный отрезок. Поэтому в качестве слоев можно взять вертикальные отрезки.

Тогда циклы μ , высекаемые на трех граничных торах атома B глобальным сечением расслоения, можно представить следующим образом. Если рассматривать на торах Лиувилля циклы $a = \{u = \text{const}\}$ и $b = \{v = \text{const}\}$, то циклы μ имеют вид $a + b$ (пока без ориентации). Указанное семейство циклов μ склеивается в глобальное сечение и при этом трансверсально слоям $\{u = \text{const}\}$. Учитывая соглашения об ориентации, получаем допустимые системы координат в рассматриваемом случае (рис. 7).

Случай 3 $\rightarrow$ 4. Эта бифуркация, как и в предыдущем случае, описывается атомом B , но здесь, наоборот, один тор распадается на два тора.

Правило выбора циклов λ, μ в данном случае – такое же, как и для атома B в случае 2 $\rightarrow$ 3.

Критическая окружность, очевидно, проектируется в горизонтальный отрезок. Поэтому циклы λ имеют вид $\{v = \text{const}\}$.

Каждый из заштрихованных прямоугольников на рис. 4 (3), (4) изображает проекции двух торов Лиувилля (для одного $p_u > 0$, для другого $p_u < 0$), но при факторизации эти торы отождествляются. Поэтому можно считать, что для разверток граничных торов Лиувилля (рассматриваемого атома B) заштрихованная часть, как обычно, соответствует точкам, для которых $p_u, p_v > 0$.

Рис. 8. Допустимая система координат на атоме B (случай 3 $\rightarrow$ 4)

В качестве циклов μ , высекаемых глобальным сечением, можно взять циклы $\{u = \text{const}\}$. Учитывая сформулированное выше правило выбора ориентаций на циклах λ, μ , получаем допустимые системы координат на трех граничных торах атома B (см. рис. 8).

Случай 6 $\rightarrow$ 5. Здесь, как и в двух предыдущих случаях, перестройка двух торов в один описывается атомом B . Критическая окружность проектируется в горизонтальный отрезок, поэтому циклы λ задаются условием $\{v = \text{const}\}$. Глобальное сечение можно выбрать так, что высекаемые им циклы на всех торах (циклы μ) будут изображаться вертикальными отрезками.

Рис. 9. Допустимая система координат на атоме B (случай $6 \rightarrow 5$)

Как и выше, учитывая правило ориентации циклов λ , μ , получаем ответ (см. рис. 9).

Случай $1 \rightarrow 3$. В данном случае происходит перестройка одного тора в один тор, описываемая атомом A^* .

На этом атоме определена структура ориентированного слоения Зейферта с одним особым слоем (критическая окружность). Циклы λ в данном случае однозначно определены как слои этого слоения. Очевидно, что при изображении торов в виде разверток в качестве слоев можно рассматривать вертикальные отрезки. При этом циклы λ ориентированы снизу вверх (так как на заштрихованной части развертки $p_u, p_v > 0$).

Один из циклов μ^+ , μ^- можно выбрать произвольно (но, конечно, так, чтобы соответствующая пара циклов λ , μ образовывала базис на торе и была правильно ориентирована). Выберем цикл μ^- на верхнем торе атома A^* в виде горизонтального отрезка (см. рис. 10).

После того как цикл μ^- зафиксирован, правило выбора цикла μ^+ следующее. На границе окрестности критической окружности (особого слоя слоения Зейферта) имеются два однозначно определенных цикла: λ – слой; $\varkappa$ – цикл, который стягивается в этой окрестности в точку. Зададим ориентацию на цикле $\varkappa$ так, чтобы пара циклов λ , $\varkappa$ была положительно ориентирована (напомним, что цикл λ ориентирован, так как на особом слое задано направление потоком $\text{sgrad } H$). Тогда на границе окрестности особого слоя однозначно определяется некоторый цикл μ из условия $\lambda + 2\mu = \varkappa$. Теперь, удалив из 3-атома A^* окрестность особого слоя, нужно построить сечение слоения Зейферта (уже без особых слоев), совпадающее на верхнем торе атома A^* с циклом μ^- , а на границе окрестности особого слоя – с циклом μ . Такое сечение определено однозначно и тем самым высекает некоторый цикл на втором (нижнем) торе атома A^* . Ориентировав этот цикл в соответствии с правилом ориентации, получим цикл μ^+ .

Процесс построения цикла μ^+ изображен на рис. 10(a) в виде разверток, а на рис. 10(b) – в более наглядном виде с использованием “удвоенного” сечения слоения Зейферта (см. [15]). Пунктирные стрелки на рис. 10(a) изображают

Рис. 10. Построение допустимой системы координат для атома A^* Рис. 11. Допустимая система координат на атоме A^* (случай $1 \rightarrow 3$)

сдвиг по направлению, трансверсальному семейству торов Лиувилля (вдоль потока $\pm \text{grad } K$); они соответствуют пунктирным частям цикла $\varkappa$ на рис. 10 (b). Отметим также, что боковые стороны разверток на рис. 10(a) соответствуют циклам, высекаемым сепаратрисами на граничных торах Лиувилля атома A^* . При этом надо учитывать, что для развертки (3) боковые стороны склеиваются, как обычно, горизонтальными сдвигами, а для развертки (1) – так, как показано на рис. 5.

Окончательный ответ – допустимая система координат на атоме A^* в случае $1 \rightarrow 3$ – изображен на рис. 11.

Случай $5 \rightarrow 1$. Здесь, как и в предыдущем случае, происходит перестройка одного тора в один тор, описываемая атомом A^* .

Рис. 12. Допустимая система координат на атоме A^* (случай $5 \rightarrow 1$)

Правило выбора циклов λ, μ и рассуждения аналогичны предыдущему случаю. Поэтому приведем лишь окончательный ответ (см. рис. 12).

2.5. Построение молекул и вычисление меток. Итак, для всех возможных бифуркаций торов Лиувилля мы описали допустимые системы координат на граничных торах соответствующих атомов. Изоэнергетическую поверхность можно представлять как результат склеек граничных торов атомов. Тогда на каждом таком торе возникают две пары базисных циклов λ^-, μ^- и λ^+, μ^+ . Выражая циклы λ^+, μ^+ через циклы λ^-, μ^- , получаем матрицы склейки для каждого ребра молекулы.

Пример построения молекулы изображен на рис. 13. Эта молекула соответствует прямой h_4 на рис. 2. Прямая h_4 пересекает бифуркационную диаграмму в четырех точках, в которых происходят следующие перестройки: $\emptyset \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow \emptyset$. Для каждого из трех однопараметрических семейств торов Лиувилля нужно взять циклы λ^-, μ^- и λ^+, μ^+ , построенные в п. 2.4 (для данного примера см. рис. 6, 8, 11).

Аналогичным образом строятся молекулы для всех прямых h_1-h_{12} , отмеченных на рис. 2.

Молекулы с матрицами склейки полностью описывают топологию слоения Лиувилля на изоэнергетических поверхностях. Однако матрицы склейки определены неоднозначно (в силу неоднозначности выбора допустимых систем координат). Поэтому окончательный ответ удобно привести в виде меченых молекул (инвариантов Фоменко–Цишанга). Метки, кодирующие информацию о матрицах склейки, определены уже однозначно. Определение меток и формулы для их вычисления см. в [15].

ТЕОРЕМА 3. Для задачи двух центров на двумерной сфере полный список инвариантов Фоменко–Цишанга, описывающих слоение Лиувилля на изоэнергетических поверхностях $\{H = h\}$ (при различных значениях параметров $\gamma_1, \gamma_2, \delta$ и h), состоит из 12 молекул, перечисленных в таблице 2 (номер i в таблице соответствует прямой h_i на рис. 2).

Рис. 13. Пример построения молекулы (для прямой h_4)

Рис. 14. Круговые молекулы

Для каждого из 12 случаев в таблице 2 кроме молекул с метками, приведенных во втором столбце, в третьем столбце изображены те же молекулы с матрицами склеек для допустимых систем координат, построенных в п. 2.4.

Отметим, что в случае пространства Лобачевского для ограниченного движения в задаче двух центров ($h < -1$; см. [7]) мы также имеем молекулы 1, 2, 3 из таблицы 2.

Бифуркационная диаграмма для рассматриваемой задачи имеет особые точки (точки трансверсального пересечения и точки касания бифуркационных кривых). Топологию слоения Лиувилля в окрестности таких точек удобно описывать при помощи круговых молекул, которые соответствуют трехмерным поверхностям в фазовом пространстве системы, являющимся прообразами маленьких окружностей с центрами в этих особых точках (см. [15], [16]).

Напомним, что мы исследуем топологию системы, полученной в результате регуляризации задачи двух центров (см. п. 1.3). В частности, топология слоения Лиувилля исследовалась отдельно на каждой изоэнергетической поверхности, а не

ТАБЛИЦА 2. Список инвариантов для задачи двух центров на сфере

№	Молекула (изоэнергетическая)	
1	$ \begin{array}{cc} A & A \\ & \\ r = 1/2 & r = 1/2 \\ \varepsilon = 1 & \varepsilon = 1 \\ & \\ A & A \end{array} $	$ \begin{array}{cc} A & A \\ \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ & \\ A & A \end{array} $
2	$ \begin{array}{c} A \\ \\ r = \infty \\ \varepsilon = 1 \\ B \\ \swarrow \quad \searrow \\ r = 1/2 \quad r = 1/2 \\ \varepsilon = 1 \quad \varepsilon = 1 \\ A \quad A \end{array} $	$ \begin{array}{c} A \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ \\ B \\ \swarrow \quad \searrow \\ \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ A \quad A \end{array} $
3	$ \begin{array}{c} A \quad A \\ \swarrow \quad \searrow \\ r = 0 \quad r = 0 \\ \varepsilon = 1 \quad \varepsilon = 1 \\ \textcircled{B} \quad n = 0 \\ \\ r = 0 \\ \varepsilon = -1 \\ \textcircled{B} \quad n = -1 \\ \swarrow \quad \searrow \\ r = 1/2 \quad r = 1/2 \\ \varepsilon = 1 \quad \varepsilon = 1 \\ A \quad A \end{array} $	$ \begin{array}{c} A \quad A \\ \swarrow \quad \searrow \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \textcircled{B} \\ \\ \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \textcircled{B} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ A \quad A \end{array} $
4	$ \begin{array}{c} A \quad A \\ \swarrow \quad \searrow \\ r = 0 \quad r = 0 \\ \varepsilon = 1 \quad \varepsilon = 1 \\ \textcircled{B} \quad n = 0 \\ \\ r = 0 \\ \varepsilon = -1 \\ \textcircled{A^*} \quad n = -1 \\ \\ r = 1/2 \\ \varepsilon = 1 \\ A \end{array} $	$ \begin{array}{c} A \quad A \\ \swarrow \quad \searrow \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \textcircled{B} \\ \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \textcircled{A^*} \\ \\ \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ A \end{array} $

ТАБЛИЦА 2 (продолжение)

№	Молекула (изоэнергетическая)	
5		
6		
7		
8		

ТАБЛИЦА 2 (продолжение)

№	Молекула (изоэнергетическая)	
9	$ \begin{array}{c} A \\ \begin{array}{l} r = \infty \\ \varepsilon = 1 \end{array} \downarrow \\ A^* \\ \begin{array}{l} r = \infty \\ \varepsilon = 1 \end{array} \downarrow \\ A^* \\ \begin{array}{l} r = 0 \\ \varepsilon = 1 \end{array} \downarrow \\ A \end{array} $	$ \begin{array}{c} A \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \downarrow \\ A^* \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \downarrow \\ A^* \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \downarrow \\ A \end{array} $
10	$ \begin{array}{c} A \quad A \\ \begin{array}{l} r = 1/2 \\ \varepsilon = 1 \end{array} \downarrow \quad \begin{array}{l} r = \infty \\ \varepsilon = 1 \end{array} \downarrow \\ A \quad A^* \\ \begin{array}{l} r = 0 \\ \varepsilon = 1 \end{array} \downarrow \\ B \\ \begin{array}{l} r = \infty \\ \varepsilon = 1 \end{array} \swarrow \quad \begin{array}{l} r = \infty \\ \varepsilon = 1 \end{array} \searrow \\ A \quad A \end{array} $	$ \begin{array}{c} A \quad A \\ \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \downarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \downarrow \\ A \quad A^* \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \downarrow \\ B \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \swarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \searrow \\ A \quad A \end{array} $
11	$ \begin{array}{c} A \\ \begin{array}{l} r = \infty \\ \varepsilon = 1 \end{array} \downarrow \\ A^* \\ \begin{array}{l} r = \infty \\ \varepsilon = 1 \end{array} \downarrow \\ A^* \\ \begin{array}{l} r = 0 \\ \varepsilon = 1 \end{array} \downarrow \\ B \\ \begin{array}{l} r = \infty \\ \varepsilon = 1 \end{array} \swarrow \quad \begin{array}{l} r = \infty \\ \varepsilon = 1 \end{array} \searrow \\ A \quad A \end{array} $	$ \begin{array}{c} A \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \downarrow \\ A^* \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \downarrow \\ A^* \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \downarrow \\ B \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \swarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \searrow \\ A \quad A \end{array} $
12	$ \begin{array}{c} A \\ \begin{array}{l} r = \infty \\ \varepsilon = 1 \end{array} \downarrow \\ B \\ \begin{array}{l} r = 1/2 \\ \varepsilon = 1 \end{array} \swarrow \quad \begin{array}{l} r = \infty \\ \varepsilon = 1 \end{array} \searrow \\ A \quad A^* \\ \begin{array}{l} r = 0 \\ \varepsilon = 1 \end{array} \downarrow \\ B \\ \begin{array}{l} r = \infty \\ \varepsilon = 1 \end{array} \swarrow \quad \begin{array}{l} r = \infty \\ \varepsilon = 1 \end{array} \searrow \\ A \quad A \end{array} $	$ \begin{array}{c} A \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \downarrow \\ B \\ \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \swarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \searrow \\ A \quad A^* \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \downarrow \\ B \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \swarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \searrow \\ A \quad A \end{array} $

во всем фазовом пространстве. Поэтому, строго говоря, при таком подходе круговые молекулы для рассматриваемой системы не являются обычными круговыми молекулами. Однако формально мы можем их построить аналогично тому, как это было сделано для изоэнергетических молекул.

Круговые молекулы (с r -метками) для всех пяти особых точек, отмеченных на рис. 2 буквами a, b, c, d, e , приведены на рис. 14. Они имеют тот же вид, что и круговые молекулы для типичных особых точек, встречающихся в классических случаях интегрируемости (см. [15], [16]). Для точек a и e круговые молекулы совпадают с круговыми молекулами точек типа центр-седло, для точки b — с круговой молекулой особенности, называемой “вилка” (“pitchfork”), а для точек c и d — с круговыми молекулами особенностей, являющихся соответственно гиперболическим и эллиптическим “удвоением периода” (“period-doubling”).

§ 3. Движения на конфигурационном пространстве

Рассмотрим движения и предельные движения, которые возникают при бифуркациях торов Лиувилля, на конфигурационном пространстве.

Каждой области на бифуркационной диаграмме соответствует определенный тип движения на конфигурационном пространстве. Проекции торов Лиувилля для каждой из этих шести областей приведены на рис. 15 (номера на рис. 15 соответствуют номерам областей на рис. 2).

Рис. 15.

Отметим, что проекции торов Лиувилля могут заходить за экватор сферы, что в случаях плоского пространства и пространства Лобачевского соответствует уходу на бесконечность. Случаи, когда материальная точка заходит за экватор и когда она остается все время в верхней полусфере, разделяются прямой $l = h\beta^2/R^2$, являющейся одной из асимптот гипербол. Действительно, при $\eta^2 = \beta^2$ материальная точка пересекает экватор (что соответствует уходу на бесконечность). В частности, в случаях 1, 3, 4 проекции торов Лиувилля могут иметь вид, изображенный на рис. 16.

Рис. 16.

Опишем тип движения для каждой области.

В области 1 (рис. 2) мы имеем спутниковое движение (аналогичное движение существует для плоского пространства и пространства Лобачевского [9], [17]), планета движется около одного центра, орбита может всюду плотно заметать всю область (рис. 15 (1)). Если точка $x \in \mathbb{R}^2(h, l)$ находится слева от прямой $l = -h\alpha^2/R^2$, то на конфигурационном пространстве этот случай соответствует движению только по правой полусфере. При пересечении прямой материальная частица заходит на левую полусферу.

В области 2 наблюдаем аналогичное спутниковое движение, которое возможно уже около двух центров.

В области 3 движение лемнискатоподобное, траектория может всюду плотно заметать область. Если точка $x \in \mathbb{R}^2(h, l)$ находится справа от прямой $l = h\beta^2/R^2$, то получим область, содержащую всю верхнюю полусферу. В случае пространств Евклида и Лобачевского соответствующая область совпадает со всем конфигурационным пространством.

В области 4 проекция тора на конфигурационное пространство является кольцом, которое охватывает два притягивающих центра. Справа от прямой $l = h\beta^2/R^2$ при аналогичном движении в плоском пространстве и пространстве Лобачевского траектория уходит на бесконечность.

В области 5 точка движется в криволинейном прямоугольнике, сторонами которого являются квадрики. В случае пространств Евклида и Лобачевского этому прямоугольнику всегда соответствует неограниченная область на конфигурационном пространстве (между двумя гиперболами).

В области 6 мы, как и в случае 4, имеем кольцо, но в этом случае оно расположено между притягивающими центрами. Эта область также соответствует уходу на бесконечность. Оба случая 5 и 6 соответствуют одному и тому же случаю в пространствах Евклида и Лобачевского.

Представляют интерес также предельные движения, так как они дают наглядное представление о перестройках торов Лиувилля при бифуркациях, закодированных с помощью инвариантов Фоменко–Цишанга.

Рассмотрим сначала движения, связанные с падением на центр.

Точкам на линии Γ_5 при $h < \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{R} \operatorname{ctg} \delta$ (т.е. слева от точки касания с гиперболой) соответствует движение материальной точки по части дуги, соединяющей притягивающий и отталкивающий центры. Движение по дуге ограничено квадратом $v = \operatorname{const}$, определяемой второй из формул (8) при $p_v = 0$ (см. рис. 17 (а)). Этому движению соответствует 3-атом A (минимальная критическая окружность

Рис. 17.

интеграла, рождение тора Лиувилля).

Точкам линии Γ_4 при $h < -\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{R} \operatorname{ctg} \delta$ (т.е. слева от точки касания с гиперболой) соответствует рождение еще одного тора Лиувилля (3-атом A). Движение следующее: материальная частица либо движется около правого центра (спутниковое движение), либо по части дуги, соединяющей притягивающий и отталкивающий центры в левой полусфере (рис. 17(b)).

Для точек линии Γ_3 , лежащих левее точки пересечения с гиперболой, имеем аналогичное движение вдоль частей дуги, соединяющей два притягивающих центра (рис. 17(c)), а для точек линии Γ_3 , лежащих между точкой пересечения и точкой касания, — движение вдоль всей дуги (рис. 17(d)). Эти движения соответствуют максимальным окружностям интеграла (3-атомы A , описывающие исчезновение торов Лиувилля).

Точкам, лежащим на гиперболе Γ_2 и на нижней ветви гиперболы Γ_1 , также соответствуют бифуркации торов Лиувилля, описываемые 3-атомами A .

Рис. 18.

Для гиперболы Γ_1 движение происходит вдоль квадрики $u = \operatorname{const}$, окружающей притягивающий и отталкивающий центры, а для гиперболы Γ_2 — вдоль квадрики $v = \operatorname{const}$, окружающей два притягивающих центра (рис. 18). Как и выше, эти квадрики определяются формулами (8) соответственно при $p_u = 0$ и при $p_v = 0$. При этом для части гиперболы Γ_1 , разделяющей области 6 и $\emptyset$, движение происходит вдоль всей квадрики, а для части, разделяющей области 5 и $\emptyset$, частица совершает колебания вдоль этой квадрики между притягивающими центрами.

Теперь рассмотрим движения для бифуркаций, описываемых седловыми атомами (неустойчивые периодические траектории и соответствующие им асимптотические траектории).

Для точек линии Γ_3 при $h > -\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{R} \operatorname{ctg} \delta$ (справа от точки касания) материальная точка асимптотически стремится к дуге, соединяющей два центра, на-

матываясь на нее (с другой стороны движение ограничено квадрикой $v = \text{const}$; рис. 19 (a)).

Точкам на участке кривой Γ_1 между областями 2 и 3 соответствует следующее асимптотическое движение: точка совершает маятникообразные колебания внутри квадрики $v = \text{const}$ и асимптотически приближается к квадрике $u = \text{const}$ со стороны одного из центров (рис. 19 (b)).

Рис. 19.

Рис. 20.

Точкам на участке линии Γ_4 между областями 1 и 3 (справа от точки касания) соответствует следующее асимптотическое движение: точка совершает маятникообразные колебания внутри квадрики $v = \text{const}$ и асимптотически приближается к части дуги, соединяющей притягивающий и отталкивающий центры (рис. 19 (c)). Для участка линии Γ_5 , разделяющего области 1 и 5, ситуация аналогичная, но движение происходит вокруг другого притягивающего центра.

Точкам линии Γ_6 между областями 5 и 6 соответствует следующее асимптотическое движение: точка совершает маятникообразные колебания внутри квадрики $u = \text{const}$ и асимптотически приближается к дуге, соединяющей два отталкивающих центра (рис. 19 (d)).

Рассмотрим, наконец, положения равновесия.

Точке пересечения гиперболы Γ_1 и линии Γ_3 соответствует положение равновесия, когда частица находится на дуге, соединяющей два притягивающих центра, на таком расстоянии от них, что гравитационные силы уравновешены. Точке пересечения гиперболы Γ_1 и линии Γ_6 соответствует положение равновесия в противоположной точке сферы (рис. 20).

Список литературы

1. *Лобачевский Н. И.* Новые начала геометрии с полной теорией параллельных // Полное собрание сочинений. Т. 2. М.–Л.: ГИТТЛ, 1949.
2. *Chernikov N. A.* The Kepler problem in the Lobachevsky space and its solution // Acta Phys. Polon. B. 1992. V. 23. P. 115–119.
3. *Козлов В. В.* О динамике в пространствах постоянной кривизны // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1994. №2. С. 28–35.
4. *Kozlov V. V., Harin O. A.* Kepler's problem in constant curvature spaces // Celestial Mech. Dynam. Astronom. 1992. V. 54. P. 393–399.
5. *Жуковский Н. Е.* О движении материальной псевдосферической фигуры по поверхности псевдосферы // Полное собрание сочинений. Т. 1. М.–Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1937. С. 490–535.
6. *Шрёдингер Э.* Метод определения квантовомеханических собственных значений и собственных функций // Избранные труды по квантовой механике. М.: Наука, 1976. С. 239–247.
7. *Возмищева Т. Г.* Классификация движений для обобщения задачи Эйлера на сферу // Математический сборник. Ижевск: Изд-во УдГУ, 1998. С. 34–40.
8. *Vozmischeva T. G.* Mathematical aspects in celestial mechanics, the Lagrange and Euler problems in the Lobachevsky space // Proceedings of the international conference on geometry, integrability and quantization, Varna, Bulgaria, 1999 / ed. I. M. Mladenov et al. Sofia: Coral Press Sci. Publ., 2000. P. 283–298.
9. *Vozmischeva T. G.* Classification of motions for generalization of the two center problem on a sphere // Celestial Mech. Dynam. Astronom. 2000. V. 77. P. 37–48.
10. *Shepetilov A. V.* Reduction of the two-body problem with central interaction on simply connected spaces of constant sectional curvature // J. Phys. A. 1998. V. 31. P. 6279–6291.
11. *Переломов А. М.* Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли. М.: Наука, 1990.
12. *Higgs P. W.* Dynamical symmetries in a spherical geometry. I // J. Phys. A. 1979. V. 12. №3. P. 309–323.
13. *Архангельский Ю. А.* Аналитическая динамика твердого тела. М.: Наука, 1977.
14. *Levi-Chivita T.* Sur la résolution qualitative du problème restreint des trois corps // Acta Math. 1906. V. 30. P. 305–327.
15. *Болсинов А. В., Фоменко А. Т.* Интегрируемые гамильтоновы системы. Т. 1, 2. Ижевск: Издательский дом “Удмуртский университет”, 1999.
16. *Болсинов А. В., Ризтер П., Фоменко А. Т.* Метод круговых молекул и топология волчка Ковалевской // Матем. сб. 2000. Т. 191. №2. С. 3–42.
17. *Дубошин А. Г.* Небесная механика. Аналитические и качественные методы. М.: Наука, 1964.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
23.10.2001