Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Г. Зархин, О кольцах эндоморфизмов некоторых якобианов в конечной характеристике, *Матем. сб.*, 2002, том 193, номер 8, 39–48

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm673>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 18:00:32

УДК 513.6

Ю. Г. Зархин

О кольцах эндоморфизмов некоторых якобианов в конечной характеристике

Мы доказываем, что при некоторых дополнительных предположениях кольцо всех эндоморфизмов якобиана кривой $y^\ell = f(x)$ содержит максимальное коммутативное подкольцо, изоморфное кольцу всех целых алгебраических чисел ℓ -го кругового поля. Здесь ℓ – нечетное простое число, делящее степень n многочлена f и отличное от характеристики основного алгебраически замкнутого поля; при этом $n \geq 9$. Дополнительные же предположения состоят в том, что все коэффициенты многочлена f лежат в некотором подполе K , над которым его (многочлена) группа Галуа совпадает либо с полной симметрической группой S_n , либо со знакопеременной группой A_n .

Библиография: 20 названий.

Как обычно, мы используем обозначения $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$ для кольца целых чисел и полей рациональных и комплексных чисел соответственно. Пусть ℓ – простое число. Через $\mathbb{F}_\ell$, $\mathbb{Z}_\ell$, $\mathbb{Q}_\ell$ мы обозначаем конечное простое поле из ℓ элементов, кольцо целых ℓ -адических чисел и поле ℓ -адических чисел соответственно. Зафиксируем примитивный корень степени ℓ из единицы

$$\zeta_\ell \in \mathbb{C}.$$

Тогда $\mathbb{Q}(\zeta_\ell)$ – ℓ -е круговое поле, $\mathbb{Z}[\zeta_\ell]$ – его кольцо целых. Хорошо известно, что $\mathbb{Q}(\zeta_\ell)$ – числовое поле степени $\ell - 1$.

Пусть K – поле характеристики отличной от ℓ . Зафиксируем его алгебраическое замыкание K_a и обозначим через $\text{Gal}(K)$ его абсолютную группу Галуа $\text{Aut}(K_a/K)$. Зафиксируем также примитивный корень степени ℓ из единицы

$$\zeta \in K_a.$$

Пусть $f(x) \in K[x]$ – многочлен степени $n \geq 4$ без кратных корней. Далее мы предполагаем, что либо $\text{char}(K) = 0$, либо $\ell \mid n$.

Пусть $C_{f,\ell}$ – гладкая проективная модель гладкой аффинной кривой

$$y^\ell = f(x).$$

Хорошо известно [1; с. 401, 402], [2; предложение 1, с. 3359], [3; с. 148], что род $g(C_{f,\ell})$ кривой $C_{f,\ell}$ равен $(\ell - 1)(n - 1)/2$, если ℓ не делит n , и $(\ell - 1)(n - 2)/2$, если делит.

Отображение

$$(x, y) \mapsto (x, \zeta y)$$

Работа выполнена при поддержке Национального научного фонда (NSF) США.

задает нетривиальный бирациональный автоморфизм

$$\delta_\ell: C_{f,\ell} \rightarrow C_{f,\ell}$$

периода ℓ .

Пусть $J^{(f,\ell)} = J(C_{f,\ell})$ – якобиан кривой $C_{f,\ell}$; это абелево многообразие размерности $g(C_{f,\ell})$. Обозначим через $\text{End}(J^{(f,\ell)})$ кольцо всех K_a -эндоморфизмов абелева многообразия $J^{(f,\ell)}$. В силу функториальности δ_ℓ индуцирует автоморфизм абелева многообразия $J^{(f,\ell)}$, который мы по-прежнему обозначаем через δ_ℓ . Известно [3; с. 149], [4; с. 448], что

$$\delta_\ell^{\ell-1} + \dots + \delta_\ell + 1 = 0$$

в $\text{End}(J^{(f,\ell)})$, и это дает нам естественное вложение

$$\mathbb{Z}[\zeta_\ell] \cong \mathbb{Z}[\delta_\ell] \subset \text{End}(J^{(f,\ell)}),$$

при котором ζ_ℓ переходит в δ_ℓ .

Основным результатом настоящей статьи является следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 0.1. *Пусть K – поле характеристики отличной от ℓ . Пусть $n \geq 9$ – натуральное число, делящееся на ℓ . Предположим, что $f(x) \in K[x]$ – неприводимый многочлен степени n и его группа Галуа совпадает либо с полной симметрической группой S_n , либо со знакопеременной группой A_n .*

Тогда $\mathbb{Z}[\delta_\ell]$ – максимальное коммутативное подкольцо в $\text{End}(J^{(f,\ell)})$. Другими словами, если эндоморфизм якобиана $J^{(f,\ell)}$ коммутирует с автоморфизмом δ_ℓ , то он лежит в $\mathbb{Z}[\delta_\ell]$.

ЗАМЕЧАНИЕ 0.2. Случай $\ell = 2$ (т.е. случай гиперэллиптических кривых, для которых, как хорошо известно, $\delta_2 = -1$) рассмотрен в [5], [6] (см. также [7], [8]). Ясно, что $\mathbb{Z}[\delta_2] = \mathbb{Z}$, и утверждение теоремы означает, что $\text{End}(J^{(f,2)}) = \mathbb{Z}$.

Для полей K нулевой характеристики случай нечетного ℓ рассмотрен в [9]; см. также [10], где доказано, что $\text{End}(J^{(f,\ell)}) = \mathbb{Z}[\delta_\ell]$ для всех $n \geq 5$.

Тем самым, при доказательстве теоремы 0.1 достаточно ограничиться случаем, когда ℓ нечетно и делит n , а $\text{char}(K) > 0$.

Мы выведем теорему 0.1 из вспомогательного утверждения (теорема 0.3), представляющего некоторый самостоятельный интерес. Но вначале обсудим следующую ситуацию.

Пусть X – абелево многообразие над K и $\text{End}(X)$ – кольцо всех его K_a -эндоморфизмов. Обозначим через $\text{End}_K(X)$ подкольцо в $\text{End}(X)$, состоящее из всех эндоморфизмов, определенных над K . Пусть E – числовое поле, $\mathcal{O} = \mathcal{O}_E \subset E$ – его кольцо целых, λ – максимальный идеал в $\mathcal{O}$ такой, что соответствующее (конечное) поле вычетов $k(\lambda) = \mathcal{O}/\lambda$ имеет нечетную характеристику ℓ . Предположим, что задано вложение

$$\mathcal{O} \hookrightarrow \text{End}_K(X) \subset \text{End}(X),$$

переводящее $1 \in \mathcal{O}$ в тождественный эндоморфизм. Далее мы отождествляем $\mathcal{O}$ с его образом в $\text{End}(X)$. Хорошо известно [11], [12], что

$$d = \frac{2 \dim(X)}{[E : \mathbb{Q}]}$$

– положительное целое число. Рассмотрим коммутативную группу

$$X_\lambda = \{x \in X(K_a) : ax = 0 \ \forall a \in \lambda \subset \mathcal{O} \subset \text{End}(X)\}.$$

Легко видеть, что $X_\lambda - k(\lambda)$ -векторное пространство; известно [13; § 7.6, предложение 7.20], что его размерность равна d . С другой стороны, так как $\mathcal{O} \subset \text{End}_K(X)$, подгруппа

$$X_\lambda \subset X(K_a)$$

Галуа-инвариантна и действие на нее группы $\text{Gal}(K)$ задает естественный гомоморфизм

$$\bar{\rho}_{\lambda, X} : \text{Gal}(K) \rightarrow \text{Aut}_{k(\lambda)}(X_\lambda) \cong \text{GL}_d(k(\lambda)).$$

Чтобы описать этот гомоморфизм, предположим для простоты, что $\ell\mathcal{O} = \lambda^{[E:\mathbb{Q}]}$, т.е. λ – единственный максимальный идеал в $\mathcal{O}$, лежащий над ℓ , и $k(\lambda) = \mathbb{F}_\ell$. Тогда

$$\mathcal{O} \otimes \mathbb{Z}_\ell = \mathcal{O}_\lambda,$$

где $\mathcal{O}_\lambda$ – пополнение кольца $\mathcal{O}$ в λ -адической топологии. Хорошо известно, что $\mathcal{O}_\lambda$ – кольцо главных идеалов с *единственным* максимальным идеалом $\lambda\mathcal{O}_\lambda$. Легко видеть, что

$$\ell\mathcal{O}_\lambda = (\lambda\mathcal{O}_\lambda)^{[E:\mathbb{Q}]}.$$

Зафиксируем элемент c идеала λ , не лежащий в λ^2 . Легко видеть, что $\lambda\mathcal{O}_\lambda = c\mathcal{O}_\lambda$. Отсюда вытекает, что найдется единица $u \in \mathcal{O}_\lambda^*$ такая, что

$$\ell = uc^{[E:\mathbb{Q}]}.$$

Также из однозначности разложения для идеалов в $\mathcal{O}$ следует, что

$$\lambda = \ell\mathcal{O} + c\mathcal{O}.$$

Отсюда немедленно вытекает, что

$$X_\lambda = \{x \in X_\ell : cx = 0\} \subset X_\ell.$$

Пусть $T_\ell(X) - \mathbb{Z}_\ell$ -модуль Тэйта абелева многообразия X [11]. Напомним, что $T_\ell(X)$ – свободный $\mathbb{Z}_\ell$ -модуль ранга $2 \dim(X)$, снабженный непрерывным действием

$$\rho_{\ell, X} : \text{Gal}(K) \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{Z}_\ell}(T_\ell(X)) \cong \text{GL}_{2 \dim(X)}(\mathbb{Z}_\ell)$$

и естественным вложением

$$\text{End}_K(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \hookrightarrow \text{End}_{\mathbb{Z}_\ell}(T_\ell(X)),$$

образ которого коммутирует с $\rho_{\ell, X}(\text{Gal}(K)) \subset \text{Aut}_{\mathbb{Z}_\ell}(T_\ell(X))$. Также имеется естественный изоморфизм модулей Галуа

$$X_\ell = T_\ell(X)/\ell T_\ell(X),$$

коммутирующий с естественными действиями кольца $\text{End}_K(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \supset \mathcal{O}$ на $T_\ell(X)$ и X_ℓ . Отсюда вытекает, что $\mathcal{O}[\text{Gal}(K)]$ -модуль X_λ равен

$$\begin{aligned} c^{-1}\ell T_\ell(X)/\ell T_\ell(X) &= c^{[E:\mathbb{Q}]-1}\ell T_\ell(X)/c^{[E:\mathbb{Q}]}T_\ell(X) \cong T_\ell(X)/cT_\ell(X) \\ &= T_\ell(X)/\lambda T_\ell(X) = T_\ell(X)/\lambda\mathcal{O}_\lambda T_\ell(X). \end{aligned}$$

Тем самым,

$$X_\lambda \cong T_\ell(X)/cT_\ell(X) = T_\ell(X)/\lambda T_\ell(X) = T_\ell(X)/(\lambda\mathcal{O}_\lambda)T_\ell(X).$$

ТЕОРЕМА 0.3. Пусть ℓ – простое число, K – поле характеристики отличной от ℓ . Зафиксируем алгебраическое замыкание K_a поля K и обозначим через $\text{Gal}(K)$ его абсолютную группу Галуа $\text{Aut}(K_a/K)$. Пусть X – абелево многообразие над K и $\text{End}(X)$ – кольцо всех его K_a -эндоморфизмов. Обозначим через $\text{End}_K(X)$ подкольцо в $\text{End}(X)$, состоящее из всех эндоморфизмов, определенных над K . Пусть E – числовое поле, $\mathcal{O} = \mathcal{O}_E \subset E$ – его кольцо целых, λ – максимальный идеал в $\mathcal{O}$ такой, что соответствующее (конечное) поле вычетов $k(\lambda) = \mathcal{O}/\lambda$ имеет нечетную характеристику ℓ . Предположим, что λ – единственный максимальный идеал в $\mathcal{O}$, лежащий над ℓ , и $k(\lambda) = \mathbb{F}_\ell$.

Предположим, что задано вложение

$$\mathcal{O} \hookrightarrow \text{End}_K(X) \subset \text{End}(X),$$

переводящее $1 \in \mathcal{O}$ в тождественный эндоморфизм. Далее мы отождествляем $\mathcal{O}$ с его образом в $\text{End}(X)$. Положим

$$d = \frac{2 \dim(X)}{[E : \mathbb{Q}]}$$

и рассмотрим d -мерное векторное пространство X_λ над $k(\lambda)$.

Обозначим через $\tilde{G}_{\lambda, X}$ образ естественного гомоморфизма

$$\bar{\rho}_{\lambda, X} : \text{Gal}(K) \rightarrow \text{Aut}_{k(\lambda)}(X_\lambda).$$

Предположим, что $d \geq 7$, $\ell \mid (d+2)$ и $\tilde{G}_{\lambda, X}$ содержит подгруппу, изоморфную A_{d+2} .

Тогда $\mathcal{O}$ – максимальное коммутативное подкольцо в $\text{End}(X)$. Другими словами, если эндоморфизм абелева многообразия X коммутирует с $\mathcal{O}$, то он сам лежит в $\mathcal{O}$.

Мы выведем теорему 0.1 из теоремы 0.3 в § 1. Теорема 0.3 будет доказана в § 4. Параграфы 2 и 3 содержат вспомогательные результаты из теории представлений, используемые при доказательстве теоремы 0.3.

§ 1. Доказательство теоремы 0.1

В этом параграфе мы докажем теорему 0.1, предполагая справедливость теоремы 0.3.

Мы предполагаем, что ℓ нечетно и делит n . Заменяя (в случае $\text{Gal}(f) = S_n$) поле K на соответствующее квадратичное расширение, мы можем считать, что $\text{Gal}(f) = A_n$. Так как группа Галуа $\text{Gal}(K(\zeta)/K)$ абелева, а группа A_n совершенна, то, заменив K на $K(\zeta)$, мы можем считать, что $\zeta \in K$.

Положим $X = J^{(f, \ell)}$. Так как $\zeta \in K$, то $\delta_\ell \in \text{End}_K(X)$. Положим

$$E = \mathbb{Q}(\zeta_\ell), \quad \mathcal{O} = \mathbb{Z}[\zeta_\ell] \cong \mathbb{Z}[\delta_\ell] \subset \text{End}_K(J^{(f, \ell)}) \subset \text{End}(J^{(f, \ell)}).$$

Имеем

$$d = \frac{2 \dim(J^{(f, \ell)})}{[\mathbb{Q}(\zeta_\ell) : \mathbb{Q}]} = \frac{(\ell-1)(n-2)}{\ell-1} = n-2.$$

Мы получаем, что $d \geq 7$ и $d+2 = n$ делится на ℓ .

Обозначим через λ максимальный идеал

$$(1 - \zeta_\ell)\mathbb{Z}[\zeta_\ell] = (1 - \delta_\ell)\mathbb{Z}[\delta_\ell].$$

Имеем

$$k(\lambda) = \mathbb{Z}[\zeta_\ell]/(1 - \zeta_\ell)\mathbb{Z}[\zeta_\ell] = \mathbb{F}_\ell.$$

Дадим теперь описание модуля Галуа $J_\lambda^{(f, \ell)}$, следуя [3]. Пусть $R = \{a_1, \dots, a_n\} \subset K_a$ – множество всех корней многочлена f . Мы можем рассматривать группу S_n как группу всех перестановок множества R . Группа Галуа $\text{Gal}(f)$ многочлена f переставляет эти корни и тем самым реализуется как подгруппа в S_n . Напомним также, что определена каноническая сюръекция

$$\text{Gal}(K) \twoheadrightarrow \text{Gal}(f).$$

Действие группы $\text{Gal}(f)$ на множестве R задает стандартное *перестановочное* представление в n -мерном $\mathbb{F}_\ell$ -векторном пространстве $\mathbb{F}_\ell^R$ всех функций $\psi: R \rightarrow \mathbb{F}_\ell$. Это представление не является неприводимым. Действительно, “прямая” постоянных функций $\mathbb{F}_\ell \cdot 1$ и гиперплоскость $(\mathbb{F}_\ell^B)^0 := \{\psi : \sum_{i=1}^n \psi(a_i) = 0\}$ являются $\text{Gal}(f)$ -инвариантными подпространствами в $\mathbb{F}_\ell^R$. Так как $\ell \mid n$, гиперплоскость $(\mathbb{F}_\ell^B)^0$ содержит прямую $\mathbb{F}_\ell \cdot 1$, и мы получаем естественное точное представление группы $\text{Gal}(f)$ в $(n - 2)$ -мерном $\mathbb{F}_\ell$ -векторном факторпространстве

$$(\mathbb{F}_\ell^B)^{00} := (\mathbb{F}_\ell^B)^0 / (\mathbb{F}_\ell \cdot 1),$$

называемом *сердечником* (heart) перестановочного действия группы $\text{Gal}(f)$ на множество R .

Каноническая сюръекция $\text{Gal}(K) \twoheadrightarrow \text{Gal}(f)$ задает на точном $\text{Gal}(f)$ -модуле $(\mathbb{F}_\ell^B)^{00}$ естественную структуру $\text{Gal}(K)$ -модуля. Известно [3; предложение 6.2], что $\text{Gal}(K)$ -модули $(\mathbb{F}_\ell^B)^{00}$ и $J_\lambda^{(f, \ell)}$ канонически изоморфны. Отсюда, в частности, вытекает, что $\tilde{G}_{\lambda, X} \cong \text{Gal}(f)$ для $X = J^{(f, \ell)}$. Вспоминая, что $\text{Gal}(f) = A_n$, мы получаем, что $\tilde{G}_{\lambda, X} \cong A_n = A_{d+2}$. Теперь теорема 0.1 легко следует из теоремы 0.3, примененной к $X = J^{(f, \ell)}$, $\mathcal{O} = \mathbb{Z}[\delta_\ell]$ и $\lambda = (1 - \delta_\ell)\mathbb{Z}[\delta_\ell]$.

§ 2. Очень простые представления

Следующее понятие введено автором в [7].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Пусть V – векторное пространство над полем k , G – группа и $\rho: G \rightarrow \text{Aut}_k(V)$ – линейное представление группы G в пространстве V . Мы говорим, что G -модуль V *очень прост*, если он удовлетворяет следующему условию:

если $R \subset \text{End}_k(V)$ – k -подалгебра, содержащая тождественный оператор Id , такая, что

$$\rho(\sigma)R\rho(\sigma)^{-1} \subset R \quad \forall \sigma \in G,$$

то либо $R = k \cdot \text{Id}$, либо $R = \text{End}_k(V)$.

Это условие очевидным образом эквивалентно следующему:

если $R \subset \text{End}_k(V)$ – k -подалгебра, содержащая тождественный оператор Id и инвариантная относительно сопряжений с помощью $\rho(\sigma)$ (для всех $\sigma \in G$), то либо $\dim_k(R) = 1$, либо $\dim_k(R) = (\dim_k(V))^2$.

ЗАМЕЧАНИЯ 2.2. (i) Ясно, что G -модуль V очень прост, если и только если соответствующий $\rho(G)$ -модуль V очень прост.

(ii) Ясно, что если V очень прост, то соответствующий гомоморфизм k -алгебр

$$k[G] \rightarrow \text{End}_k(V)$$

сюръективен. Здесь $k[G]$ – групповая k -алгебра группы G . В частности, очень простой модуль абсолютно прост.

(iii) Если G' – подгруппа в G и соответствующий G' -модуль V очень прост, то G -модуль V также очень прост.

(iv) Пусть G' – нормальная подгруппа в G . Если V – очень простой G -модуль, то либо $\rho(G') \subset \text{Aut}_k(V)$ состоит из скаляров (т.е. лежит в $k \cdot \text{Id}$), либо соответствующий G' -модуль V абсолютно прост. Действительно, пусть $R' \subset \text{End}_k(V)$ – образ естественного гомоморфизма $k[G'] \rightarrow \text{End}_k(V)$. Ясно, что R' инвариантен относительно сопряжения элементами из G . Значит, либо R' состоит из скаляров и, следовательно, $\rho(G') \subset R'$ состоит из скаляров, либо $R' = \text{End}_k(V)$ и, следовательно, G' -модуль V абсолютно прост.

(v) Пусть O_F – кольцо дискретного нормирования с полем частных F , максимальным идеалом m_F и полем вычетов $k = O_F/m_F$. Пусть V_F – конечномерное векторное пространство над F ,

$$\rho_F: G \rightarrow \text{Aut}_F(V_F)$$

– F -линейное представление группы G . Пусть T – G -инвариантная O_F -решетка в V_F и соответствующий $k[G]$ -модуль $T/m_F T$ изоморфен V . Предположим, что G -модуль V очень прост. Тогда G -модуль V_F также очень прост. Другими словами, *подъем очень простого представления также очень прост*. Действительно, пусть $R_F \subset \text{End}_F(V_F)$ – F -подалгебра, содержащая тождественный оператор и инвариантная относительно сопряжений с помощью $\rho_F(\sigma)$ (для всех $\sigma \in G$). Положим

$$R_O = R \cap \text{End}_{O_F}(T) \subset \text{End}_{O_F}(T).$$

Ясно, что R_O – свободный O_F -модуль, ранг которого совпадает с $\dim_F(R_F)$. Также ясно, что R_O – чистый O_F -подмодуль в $\text{End}_{O_F}(T)$, т.е. O_F -фактормодуль $\text{End}_{O_F}(T)/R_O$ не имеет кручения. Положим

$$R_k = R_O/m_F R_O = R_O \otimes_{O_F} k \subset \text{End}_{O_F}(T) \otimes_{O_F} k = \text{End}_k(T/m_F T) = \text{End}_k(V).$$

Ясно, что R_k является k -подалгеброй в $\text{End}_k(V)$ размерности $\dim_F(R_F)$, содержит тождественный оператор и инвариантна относительно сопряжений с помощью элементов G . Теперь то, что V очень прост, влечет за собой то, что либо $\dim_k(R_k) = 1$, либо $\dim_k(R_k) = \dim_k(V)^2$. Поскольку $\dim_k(V) = \dim_F(V_F)$, мы получаем, что либо $\dim_F(R_F) = 1$, либо $\dim_F(R_F) = \dim_F(V_F)^2$. Ясно, что в первом случае R_F состоит из скаляров, а во втором $R_F = \text{End}_F(V_F)$.

ПРИМЕР 2.3. Пусть $n > 6$ – натуральное число, W – векторное пространство над $\mathbb{F}_p$, размерность которого равна $n - 1$, если p не делит n , и равна $n - 2$, если $p \mid n$. Если $p = 2$, то мы дополнительно предполагаем, что $n > 8$. Предположим, что задано вложение

$$A_n \hookrightarrow \text{Aut}_{\mathbb{F}_p}(W).$$

Тогда A_n -модуль W очень прост. Действительно, положим $n' = \dim_{\mathbb{F}_p}(W)$. Известно [14], [15], что точное n' -мерное представление группы A_n над $\mathbb{F}_p$ единственно с точностью до изоморфизма. С другой стороны, известно [9; теорема 4.7], что некоторое специальное представление такого вида очень просто. Отсюда вытекает, что любое точное n' -мерное представление группы A_n над $\mathbb{F}_p$ (и, в частности, W) очень просто.

§ 3. Проективные представления знакопеременной группы

Пусть $n \geq 8$ – натуральное число. Рассмотрим нерасщепляющуюся короткую точную последовательность

$$1 \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \hookrightarrow A'_n \twoheadrightarrow A_n \rightarrow 1,$$

задающую нетривиальное центральное расширение группы A_n (т.е. A'_n – универсальное центральное расширение совершенной группы A_n).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Любое точное линейное представление группы A'_n в характеристике 0 имеет размерность $> n - 2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $8 \leq n \leq 14$, то наше утверждение следует из таблицы характеров [16]. Поэтому далее мы предполагаем, что $n \geq 15$.

Рассмотрим двоичное представление

$$n = 2^{w_1} + \dots + 2^{w_s}$$

числа n . Здесь w_i – различные неотрицательные целые числа, $w_1 < \dots < w_s$, а s – точное число ненулевых разрядов в двоичной записи числа n . Легко видеть, что каждое $w_i \geq i - 1$ и, следовательно, $n \geq 2^s - 1$. Отсюда вытекает, что

$$s \leq \log_2(n + 1).$$

По теореме Вагнера [17; с. 583, 584, теорема 1.3 (ii)] каждое точное линейное представление группы A'_n в характеристике $\neq 2$ имеет размерность, делящуюся на $N := 2^{\lfloor \frac{n-s-1}{2} \rfloor}$. Стало быть, нам достаточно убедиться в том, что $n - 2 < N$ для всех $n \geq 15$.

Если $n \geq 15$, то $2^{n-2} > (n+1)(n-2)^2$. Тогда $2^{n-2-\log_2(n+1)} > (n-2)^2$ и, следовательно, $2^{n-s-2} > (n-2)^2$. Извлекая квадратные корни из обеих частей последнего неравенства, мы получаем $2^{\frac{n-s-2}{2}} > n-2$. Отсюда легко вытекает, что $N = 2^{\lfloor \frac{n-s-1}{2} \rfloor} > n-2$.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. *Пусть $n \geq 8$ – натуральное число, $\gamma: H \rightarrow A_n$ – сюръективный гомоморфизм конечных групп. Тогда любое точное представление группы H в характеристике 0 имеет размерность $> n - 2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим вначале, что любое нетривиальное проективное представление группы A_n в характеристике 0 имеет размерность $> n - 2$. Действительно, любое нетривиальное проективное представление группы A_n есть “проективизация” точного линейного представления либо группы A_n , либо группы A'_n . Остается напомнить, что все точные представления групп A_n и A'_n в характеристике 0 имеют размерность $> n - 2$. Для группы A'_n это утверждение доказано в предложении 3.1, а для представлений группы A_n оно хорошо известно [18; с. 71, теорема 2.5.15].

Теперь предположим, что утверждение доказываемого нами следствия неверно, т.е. для некоторого поля F нулевой характеристики существует вложение $H \hookrightarrow \mathrm{GL}(n-2, F)$. Далее, мы будем отождествлять группу H с его образом в $\mathrm{GL}(n-2, F)$. Заменив поле F на его алгебраическое замыкание, мы можем (и будем) считать F алгебраически замкнутым. Пусть Z – пересечение группы H с подгруппой всех скалярных матриц в $\mathrm{GL}(n-2, F)$. Ясно, что Z – центральная подгруппа в H и

$$H/Z \subset \mathrm{PGL}(n-2, F).$$

С другой стороны, из простоты и неабелевости группы A_n вытекает, что $Z \subset \ker(\gamma)$ и, следовательно, существует сюръекция

$$H/Z \twoheadrightarrow A_n.$$

Теперь из теоремы Фейта–Титса (см. [19], а также [20; с. 315, 316]) вытекает существование вложения $A_n \hookrightarrow \mathrm{PGL}(n-2, F)$, что противоречит отсутствию нетривиальных проективных представлений группы A_n в характеристике 0 размерности $\leq n-2$.

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть ℓ – нечетное простое число, F – дискретно нормированное поле нулевой характеристики с кольцом нормирования $\mathcal{O}_F$, максимальным идеалом $\mathfrak{m}_F$ и полем вычетов $\mathcal{O}_F/\mathfrak{m}_F = \mathbb{F}_\ell$. Пусть $d \geq 6$ – целое число такое, что $\ell \mid (d+2)$. Пусть V – d -мерное векторное пространство над F , Λ – $\mathcal{O}_F$ -решетка в V , $W := \Lambda/\mathfrak{m}_F\Lambda$ – d -мерное векторное пространство над $\mathbb{F}_\ell$. Пусть

$$G \subset \mathrm{Aut}_{\mathcal{O}_F}(\Lambda) \subset \mathrm{Aut}_F(V)$$

– группа такая, что ее образ

$$\tilde{G} \subset \mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_\ell}(W)$$

относительно естественного гомоморфизма редукции по модулю $\mathfrak{m}_F$

$$\mathrm{red}: \mathrm{Aut}_{\mathcal{O}_F}(\Lambda) \hookrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_\ell}(W)$$

содержит подгруппу, изоморфную A_{d+2} . Тогда

- (i) группа G бесконечна;
- (ii) для любой подгруппы G' конечного индекса в G естественное представление группы G' в F -пространстве V абсолютно неприводимо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заменив G на подходящую подгруппу, мы можем считать, что $\tilde{G} = A_{d+2}$. Из простоты и некоммутативности группы A_{d+2} вытекает, что, заменив G на ее пересечение со специальной линейной группой $\mathrm{SL}_{\mathcal{O}_F}(\Lambda)$, мы можем считать, что

$$G \subset \mathrm{SL}_{\mathcal{O}_F}(\Lambda) \subset \mathrm{SL}_F(W).$$

Из примера 2.3 вытекает, что $\tilde{G}(=A_{d+2})$ -модуль W очень прост, а из замечания 2.2 (v) – что G -модуль V также очень прост. В частности, согласно замечанию 2.2 (ii) естественное представление группы G в F -пространстве V абсолютно неприводимо. Обозначим через G_0 нормальную подгруппу в G , являющуюся ядром отображения редукции

$$\mathrm{red}: G \rightarrow \tilde{G} \subset \mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_\ell}(W).$$

Если $G_0 = \{1\}$, то $G \cong \tilde{G} = A_{d+2}$ и, следовательно, V — d -мерное пространство точного представления группы A_{d+2} , что невозможно ввиду предложения 3.1. Следовательно, $G_0 \neq \{1\}$.

Если G_0 — центральная подгруппа в G , то из абсолютной неприводимости $F[G]$ -модуля V вытекает, что G_0 состоит из скаляров. Принимая во внимание естественный изоморфизм

$$G/G_0 \cong \tilde{G} = A_{d+2},$$

мы получаем, что вложение $G \subset \text{Aut}_F(V)$ задает нетривиальное проективное представление группы A_{d+2} в d -мерном пространстве, что невозможно ввиду предложения 3.1. Следовательно, G_0 не является центральной подгруппой в G . В частности, G_0 не является циклической группой из двух элементов. Отметим также, что ввиду простоты и неабелевости группы $G/G_0 = \tilde{G} = A_{d+2}$ центр группы G лежит в G_0 .

Предположим, что группа G_0 конечна, т.е. G конечна. Имеем

$$G \subset \text{Aut}_F(V) \cong \text{GL}_d(F).$$

Применяя следствие 3.2 к $n = d + 2$ и $H = G$, мы получаем противоречие, которое доказывает бесконечность группы G и, тем самым, утверждение (i) теоремы 3.3.

Для доказательства утверждения (ii) достаточно ограничиться случаем нормальной подгруппы G' . Из бесконечности G и конечности индекса $[G : G']$ вытекает бесконечность группы G' . Поскольку $G' \subset G \subset \text{SL}(V)$, бесконечная подгруппа G' не может состоять из скаляров. С другой стороны, то, что G -модуль V очень прост, влечет за собой согласно замечанию 2.2 (iv) либо абсолютную простоту G' -модуля V , либо включение $G' \subset F \cdot \text{Id}$.

§ 4. Доказательство теоремы 0.3

Мы выведем теорему 0.3 из теоремы 3.3. Для этого положим

$$F = E_\lambda, \quad \theta_F = \theta_\lambda, \quad m_F = \lambda \theta_\lambda, \quad V = V_\ell(X), \quad \Lambda = T_\ell(X), \quad W = X_\lambda.$$

Положим также

$$G := \rho_{\ell, X}(\text{Gal}(K)) \subset \text{Aut}_{\theta_\lambda}(T_\ell(X)) \subset \text{Aut}_{\mathbb{Z}_\ell}(T_\ell(X)).$$

Существует конечное расширение Галуа поля K , над которым определены все эндоморфизмы абелева многообразия X . Положим

$$G' := \rho_{\ell, X}(\text{Gal}(K')) \subset \text{Aut}_{\theta_\lambda}(T_\ell(X)) \subset \text{Aut}_{\mathbb{Z}_\ell}(T_\ell(X)).$$

Ясно, что G' — нормальная подгруппа конечного индекса в группе G , коммутирующая с

$$\text{End}(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell = \text{End}_{K'}(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \subset \text{End}_{\mathbb{Z}_\ell}(T_\ell(X)).$$

Применяя теорему 3.3, мы находим, что $E_\lambda[G']$ -модуль $V_\ell(X)$ абсолютно прост. Иначе говоря, любой эндоморфизм векторного $\mathbb{Q}_\ell$ -пространства $V_\ell(X)$, коммутирующий с K и G' , лежит в E_λ . Обозначим через M централизатор кольца θ в $\text{End}(X) = \text{End}_{K'}(X)$. Наша цель — доказать, что $M = \theta$.

Ясно, что M является свободной коммутативной группой конечного ранга (по сложению), а $\mathcal{O}$ лежит в центре кольца M . Также ясно, что любой элемент кольца M , рассматриваемый как эндоморфизм в $V_\ell(X)$, коммутирует с K и G' и, следовательно, лежит в E_λ . Отсюда немедленно вытекает, что

$$E_\lambda = \mathcal{O} \otimes \mathbb{Q}_\ell \subset M \otimes \mathbb{Q}_\ell \subset E_\lambda \subset \text{End}_{\mathbb{Q}_\ell}(V_\ell(X)).$$

Это влечет за собой равенство $\mathcal{O} \otimes \mathbb{Q}_\ell = M \otimes \mathbb{Q}_\ell$, и, следовательно свободные коммутативные группы $\mathcal{O}$ и M имеют один и тот же ранг. Из включения $\mathcal{O} \subset M$ вытекает, что кольцо M лежит в $\mathcal{O} \otimes \mathbb{Q} = E$. Поскольку $\mathcal{O}$ — максимальный порядок в E и $M \supset \mathcal{O}$, мы заключаем, что $M = \mathcal{O}$. Доказательство окончено.

Список литературы

1. *Koo J. K.* On holomorphic differentials of some algebraic function field of one variable over $\mathbb{C}$ // *Bull. Austral. Math. Soc.* 1991. V. 43. P. 399–405.
2. *Towse C.* Weierstrass points on cyclic covers of the projective line // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1996. V. 348. P. 3355–3377.
3. *Poonen B., Schaefer E.* Explicit descent for Jacobians of cyclic covers of the projective line // *J. Reine Angew. Math.* 1997. V. 488. P. 141–188.
4. *Schaefer E.* Computing a Selmer group of a Jacobian using functions on the curve // *Math. Ann.* 1998. V. 310. P. 447–471.
5. *Zarhin Yu. G.* Hyperelliptic Jacobians without complex multiplication // *Math. Res. Lett.* 2000. V. 7. P. 123–132.
6. *Zarhin Yu. G.* Hyperelliptic Jacobians without complex multiplication in positive characteristic // *Math. Res. Lett.* 2001. V. 8. P. 429–435.
7. *Zarhin Yu. G.* Hyperelliptic Jacobians and modular representations // *Moduli of abelian varieties* / ed. C. Faber, G. van der Geer, F. Oort. Basel: Birkhäuser, 2001. (Progr. Math. V. 195.) P. 473–490.
8. *Zarhin Yu. G.* Very simple 2-adic representations and hyperelliptic Jacobians // *Moscow Math. J.* 2002. V. 2; <http://xxx.lanl.gov/abs/math.AG/0109014>.
9. *Zarhin Yu. G.* Cyclic covers of the projective line, their jacobians and endomorphisms // *J. Reine Angew. Math.* 2002. V. 544. P. 91–110; <http://xxx.lanl.gov/abs/math.AG/0003002>.
10. *Zarhin Yu. G.* The endomorphism rings of Jacobians of cyclic covers of the projective line // <http://xxx.lanl.gov/abs/math.AG/0103203>.
11. *Mumford D.* Abelian varieties. London: Oxford Univ. Press, 1974.
12. *Ribet K.* Galois action on division points of Abelian varieties with real multiplications // *Amer. J. Math.* 1976. V. 98. P. 751–804.
13. *Shimura G.* Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions. Princeton, NJ: Iwanami Shoten, Publ. and Princeton Univ. Press, 1971.
14. *Wagner A.* The faithful linear representations of S_n and A_n over a field of characteristic 2 // *Math. Z.* 1976. V. 151. P. 127–137.
15. *Wagner A.* The faithful linear representations of S_n and A_n over a field of odd characteristic // *Math. Z.* 1977. V. 154. P. 103–114.
16. *Hoffman P. N., Humphreys J. F.* Projective representations of the symmetric groups. Oxford: Clarendon Press, 1992.
17. *Wagner A.* An observation on the degrees of the symmetric and alternating group over an arbitrary field // *Arch. Math. (Basel).* 1977. V. 29. P. 583–589.
18. *James G., Kerber A.* The representation theory of the symmetric group. Reading, MA: Addison-Wesley, 1981. (Encyclopedia Math. Appl. V. 16.)
19. *Feit W., Tits J.* Projective representations of minimum degree of group extensions // *Canad. J. Math.* 1978. V. 30. P. 1092–1102.
20. *Kleidman P. B., Liebeck M. W.* On a theorem of Feit and Tits // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1989. V. 107. P. 315–322.

Университет Штата Пенсильвания,
Институт математических проблем биологии РАН, Пушкино
E-mail: zarhin@math.psu.edu

Поступила в редакцию
04.12.2001