Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Зудилин, О мере иррациональности q -аналога $\zeta(2)$, *Матем. сб.*, 2002, том 193, номер 8, 49–70

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm674>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 16:43:05

УДК 511.3

В. В. Зудилин

О мере иррациональности q -аналога $\zeta(2)$

В работе доказывается оценка лиувиллева типа для меры иррациональности чисел

$$\zeta_q(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{(1-q^n)^2}$$

в случае $q^{-1} \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1\}$. Доказательство основано на применении q -аналога арифметического метода Чудновского–Рухадзе–Хаты и группы преобразований гипергеометрических рядов – группового подхода Рина–Виолы.

Библиография: 21 название.

Введение

Для комплексного q , $|q| < 1$, определим величины

$$\zeta_q(1) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{1-q^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_0(n) q^n, \quad \zeta_q(2) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{(1-q^n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n) q^n, \quad (1)$$

где $\sigma_k(n) = \sum_{l|n} l^k$ для $k = 0, 1$. После домножения рядов в (1) на $(1-q)^k$, $k = 1, 2$, и почленного предельного перехода при $q \rightarrow 1-0$ мы получаем (расходящийся) гармонический ряд и (сходящийся) ряд для $\zeta(2)$ соответственно. Иррациональность q -гармонического ряда $\zeta_q(1)$ при $q = 1/p$, где $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1\}$, доказана Ж.-П. Безиваном [1] и независимо П. Борвейном [2]; иррациональность $\zeta_q(2)$ при тех же значениях q установлена Д. Дюверне [3]. Из общего результата Ю. В. Нестеренко [4] об арифметических свойствах значений модулярных функций следует трансцендентность значения $\zeta_q(2)$ для любого алгебраического q , $0 < |q| < 1$.

Цель настоящей работы – установить меру иррациональности числа $\zeta_q(2)$ при $q = 1/p$, где $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1\}$. А именно мы доказываем следующий результат.

ТЕОРЕМА. Пусть $q = 1/p$, где $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1\}$, и

$$\zeta_q(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{(1-q^n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^n}{(p^n-1)^2}. \quad (2)$$

Тогда число $\zeta_q(2)$ иррационально и неравенство

$$\left| \zeta_q(2) - \frac{a}{b} \right| \leq |b|^{-4.07869375}$$

имеет конечное число решений в целых числах a и b .

Отметим, что из теоремы Нестеренко [5; теорема 2] вытекает справедливость оценки

$$\left| \zeta_q(2) - \frac{a}{b} \right| > |b|^{-\gamma \ln^9 \max\{2, \ln |b|\}}$$

для любых $a, b \in \mathbb{Z}$ с постоянной γ , зависящей только от $q \in \mathbb{Q}$, $0 < |q| < 1$. Таким образом, доказываемая нами теорема дает качественное усиление иррациональности чисел (2) в случае $q^{-1} \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1\}$ – наличие оценки лиувиллева типа для меры иррациональности. Напомним также, что *показателем иррациональности* вещественного иррационального числа α называется величина

$$\mu = \mu(\alpha) := \inf \{c \in \mathbb{R} : \text{неравенство } |\alpha - a/b| \leq |b|^{-c} \text{ имеет конечное число решений в } a, b \in \mathbb{Z}\};$$

в случае $\mu(\alpha) < +\infty$ говорят, что α – *лиувиллево число*. В этой терминологии результат теоремы может быть сформулирован в виде следующего неравенства:

$$\mu(\zeta_q(2)) \leq 4.07869374\dots \quad (3)$$

Приводимое далее доказательство теоремы основано на q -аналоге метода, предложенного Дж. Рином и К. Виолой для усиления оценки меры иррациональности $\zeta(2) = \pi^2/6$; а именно в работе [6] они доказали неравенство $\mu(\zeta(2)) \leq 5.44124250\dots$, которое является наилучшим на сегодняшний день результатом для $\zeta(2)$ в этом направлении. Указанный метод – групповой подход – получил дальнейшее продолжение в виде рекорда $\mu(\zeta(3)) \leq 5.51389062\dots$ для постоянной Апери; последний результат также принадлежит Рину и Виоле [7]. В настоящей работе мы демонстрируем возможности группового подхода для решения новой задачи в теории чисел, придерживаясь q -аналога общей схемы работ [6], [8], [9]. Основные q -арифметические ингредиенты для приложения группового подхода Рина–Виолы получены в [10], [11]; мы формулируем их в §1 для независимости изложения нашей работы. В §§2–6 мы доказываем теорему, а в §7 приводим последовательность линейных форм, являющуюся q -аналогом последовательности Апери [12] для доказательства иррациональности $\zeta(2)$; разумеется, последовательность из §7 также влечет иррациональность и лиувиллевость числа $\zeta_q(2)$ для $q^{-1} \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1\}$. Таким образом, мы даем утвердительный ответ на вопрос У. Ван Аша [13] о существовании доказательства иррациональности q -расширения $\zeta(2)$ “в духе Апери”, хотя задача об интерпретации q -последовательности Апери в терминах разностных уравнений и/или ортогональных многочленов нами не решается.

§1. q -арифметика

Напомним стандартные q -обозначения (см. [14; гл. 1]):

$$(a; q)_n := \prod_{\nu=1}^n (1 - aq^{\nu-1}), \quad (a_1, a_2, \dots, a_m; q)_n := (a_1; q)_n (a_2; q)_n \cdots (a_m; q)_n,$$

$$\Gamma_q(t) := \frac{(q; q)_\infty}{(q^t; q)_\infty} (1 - q)^{1-t}, \quad [n]_q! := \Gamma_q(n+1) = \frac{(q; q)_n}{(1-q)^n},$$

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q := \frac{[n]_q!}{[k]_q! [n-k]_q!} = \frac{(q; q)_n}{(q; q)_k \cdot (q; q)_{n-k}},$$

где $k = 0, 1, \dots, n$ и $n = 0, 1, 2, \dots$.

Рассмотрим *круговые многочлены* (*многочлены деления круга*)

$$\Phi_l(x) := \prod_{\substack{k=1 \\ (k,l)=1}}^l (x - e^{2\pi i k/l}), \quad \deg \Phi_l(x) = \varphi(l), \quad l = 1, 2, \dots, \quad (4)$$

где $\varphi(\cdot)$ – функция Эйлера. Хорошо известно, что коэффициенты многочленов (4) являются целыми числами [15; теорема 13.3] и для каждого $l = 1, 2, \dots$ многочлен $\Phi_l(x)$ неприводим над $\mathbb{Z}$ [15; теорема 13.4] (см. также [16; §60]); кроме того, имеет место формула

$$x^n - 1 = \prod_{l|n} \Phi_l(x). \quad (5)$$

Поскольку

$$(x; x)_n = (1 - x)(1 - x^2) \cdots (1 - x^n) = \pm \prod_{k=1}^n \prod_{l|k} \Phi_l(x),$$

мы получаем, что разложение $(x; x)_n$ в произведение неприводимых многочленов содержит только многочлены (4), причем

$$\text{ord}_{\Phi_l(x)}(x; x)_n = \left\lfloor \frac{n}{l} \right\rfloor, \quad l = 1, 2, \dots, \quad (6)$$

где $\lfloor \cdot \rfloor$ обозначает целую часть числа. Простым следствием формулы (6) является

$$\text{ord}_{\Phi_l(x)} \left[\frac{n}{k} \right]_x = \left\lfloor \frac{n}{l} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{k}{l} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-k}{l} \right\rfloor, \quad (7)$$

что делает возможным рассматривать круговые многочлены как q -аналоги простых чисел. В свою очередь, формула (7) влечет включения

$$\left[\frac{n}{k} \right]_x \in \mathbb{Z}[x], \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (8)$$

которые обычно доказываются с помощью q -версии треугольника Паскаля.

Из разложения (5) следует, что многочлен

$$D_n(x) := \prod_{l=1}^n \Phi_l(x) \in \mathbb{Z}[x]$$

является наименьшим общим кратным многочленов $x-1, x^2-1, \dots, x^n-1$, иными словами, $D_n(x)$ есть многочлен наименьшей степени, удовлетворяющий включениям

$$D_n(x) \cdot \frac{1}{x^k - 1} \in \mathbb{Z}[x], \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Формула Мертенса [17], [18; §18.5, теорема 330]

$$\sum_{l \leq n} \varphi(l) = \frac{3}{\pi^2} n^2 + O(n \log n),$$

являющаяся в нашем случае q -аналогом асимптотического закона распределения простых чисел, приводит к следующим утверждениям.

ЛЕММА 1 (см. [10; § 2], [13; лемма 2]). *Для любого $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1\}$ справедливо предельное соотношение*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |D_n(p)|}{n^2} = \frac{3}{\pi^2} \log |p|.$$

ЛЕММА 2 (см. [11; лемма 1]). *Для любого $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1\}$ и любого полуинтервала $[u, v) \subset (0, 1)$, $u, v \in \mathbb{Q}$, справедливо предельное соотношение*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{l: \{n/l\} \in [u, v)} \log |\Phi_l(p)| = \frac{3}{\pi^2} (\psi'(u) - \psi'(v)) \log |p| = -\frac{3 \log |p|}{\pi^2} \int_u^v d\psi'(z),$$

где $\{a\} = a - [a]$ и $\psi(z)$ — логарифмическая производная гамма-функции.

§ 2. q -гипергеометрическая конструкция

Зафиксируем целые параметры

$$(a, b) = \begin{pmatrix} a_1, a_2, a_3 \\ b_1, b_2, b_3 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

удовлетворяющие условиям

$$\min\{a_2, a_3\} \geq b_1 = 1, \quad a_2 < b_2, \quad a_3 < b_3, \quad a_1 + a_2 + a_3 \leq b_2 + b_3 - 1, \quad (10)$$

и рассмотрим q -базисный гипергеометрический ряд [14]

$$\begin{aligned} G_q(a, b) &:= \frac{\Gamma_q(a_2) \Gamma_q(a_3) \Gamma_q(b_2 - a_2) \Gamma_q(b_3 - a_3)}{(1 - q)^2 \Gamma_q(b_2) \Gamma_q(b_3)} \\ &\quad \times {}_3\phi_2 \left(\begin{matrix} q^{a_1}, q^{a_2}, q^{a_3} \\ q^{b_2}, q^{b_3} \end{matrix} \middle| q, q^{b_2 + b_3 - a_1 - a_2 - a_3} \right) \\ &= \frac{\Gamma_q(a_2) \Gamma_q(a_3) \Gamma_q(b_2 - a_2) \Gamma_q(b_3 - a_3)}{(1 - q)^2 \Gamma_q(b_2) \Gamma_q(b_3)} \\ &\quad \times \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(q^{a_1}, q^{a_2}, q^{a_3}; q)_t}{(q^{b_1}, q^{b_2}, q^{b_3}; q)_t} q^{t(b_2 + b_3 - a_1 - a_2 - a_3)}, \end{aligned} \quad (11)$$

абсолютно сходящийся в области $|q| < 1$. Очевидная симметрия величины $G_q(a, b)$ приводит к следующему утверждению.

ЛЕММА 3. *Величина $G_q(a, b)$ инвариантна относительно преобразования*

$$\sigma: \begin{pmatrix} a_1, a_2, a_3 \\ 1, b_2, b_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_1, a_3, a_2 \\ 1, b_3, b_2 \end{pmatrix}.$$

Из тождества Холла [14; формула (3.2.10)]

$$\begin{aligned} &{}_3\phi_2 \left(\begin{matrix} q^{a_1}, q^{a_2}, q^{a_3} \\ q^{b_2}, q^{b_3} \end{matrix} \middle| q, q^{b_2 + b_3 - a_1 - a_2 - a_3} \right) \\ &= \frac{\Gamma_q(b_2) \Gamma_q(b_3) \Gamma_q(b_2 + b_3 - a_1 - a_2 - a_3)}{\Gamma_q(a_2) \Gamma_q(b_2 + b_3 - a_2 - a_3) \Gamma_q(b_2 + b_3 - a_1 - a_2)} \\ &\quad \times {}_3\phi_2 \left(\begin{matrix} q^{b_3 - a_2}, q^{b_2 - a_2}, q^{b_2 + b_3 - a_1 - a_2 - a_3} \\ q^{b_2 + b_3 - a_2 - a_3}, q^{b_2 + b_3 - a_1 - a_2} \end{matrix} \middle| q, q^{a_2} \right) \end{aligned}$$

вытекает также “нетривиальное” преобразование величины $G_q(a, b)$.

ЛЕММА 4. Величина $G_q(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ инвариантна относительно преобразования

$$\tau: \begin{pmatrix} a_1, a_2, a_3 \\ 1, b_2, b_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} b_3 - a_2, & b_2 - a_2, b_2 + b_3 - a_1 - a_2 - a_3 \\ 1, b_2 + b_3 - a_2 - a_3, & b_2 + b_3 - a_1 - a_2 \end{pmatrix}.$$

Следующее утверждение содержит рекуррентные соотношения для величины (11), которые являются q -аналогом тождеств, полученных при доказательстве теоремы 2.1 в [6; с. 31].

ЛЕММА 5. Справедливо тождество

$$\begin{aligned} & q^{b_2+b_3-a_1-a_2-a_3} G_q \begin{pmatrix} a_1, a_2, a_3 \\ b_1, b_2, b_3 \end{pmatrix} \\ &= G_q \begin{pmatrix} a_1, a_2 - 1, a_3 - 1 \\ b_1, b_2 - 1, b_3 - 1 \end{pmatrix} - G_q \begin{pmatrix} a_1 - 1, a_2 - 1, a_3 - 1 \\ b_1, b_2 - 1, b_3 - 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку

$$\begin{aligned} \frac{(q^{a_1}; q)_{t+1}}{(q; q)_{t+1}} - \frac{(q^{a_1-1}; q)_{t+1}}{(q; q)_{t+1}} &= \frac{(q^{a_1}; q)_t}{(q; q)_t} \cdot \frac{(1 - q^{a_1+\nu}) - (1 - q^{a_1-1})}{1 - q^{\nu+1}} \\ &= q^{a_1-1} \frac{(q^{a_1}; q)_t}{(q; q)_t}, \end{aligned}$$

заключаем, что

$$\begin{aligned} & \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(q^{a_1}, q^{a_2-1}, q^{a_3-1}; q)_t}{(q, q^{b_2-1}, q^{b_3-1}; q)_t} q^{tc} - \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(q^{a_1-1}, q^{a_2-1}, q^{a_3-1}; q)_t}{(q, q^{b_2-1}, q^{b_3-1}; q)_t} q^{tc} \\ &= \sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{(q^{a_1}, q^{a_2-1}, q^{a_3-1}; q)_{t+1}}{(q, q^{b_2-1}, q^{b_3-1}; q)_{t+1}} - \frac{(q^{a_1-1}, q^{a_2-1}, q^{a_3-1}; q)_{t+1}}{(q, q^{b_2-1}, q^{b_3-1}; q)_{t+1}} \right) q^{(t+1)c} \\ &= q^{c+a_1-1} \frac{(1 - q^{a_2-1})(1 - q^{a_3-1})}{(1 - q^{b_2-1})(1 - q^{b_3-1})} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(q^{a_1}, q^{a_2}, q^{a_3}; q)_t}{(q, q^{b_2}, q^{b_3}; q)_t} q^{tc}, \end{aligned} \quad (13)$$

где $c = b_2 + b_3 - a_1 - a_2 - a_3$. С другой стороны,

$$\begin{aligned} & \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(q^{a_1-1}, q^{a_2-1}, q^{a_3-1}; q)_t}{(q, q^{b_2-1}, q^{b_3-1}; q)_t} q^{tc} - \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(q^{a_1-1}, q^{a_2-1}, q^{a_3-1}; q)_t}{(q, q^{b_2-1}, q^{b_3-1}; q)_t} q^{t(c+1)} \\ &= \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(q^{a_1-1}, q^{a_2-1}, q^{a_3-1}; q)_t}{(q, q^{b_2-1}, q^{b_3-1}; q)_t} (1 - q^t) q^{tc} \\ &= \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(q^{a_1-1}, q^{a_2-1}, q^{a_3-1}; q)_{t+1}}{(q, q^{b_2-1}, q^{b_3-1}; q)_{t+1}} (1 - q^{t+1}) q^{(t+1)c} \\ &= q^c \frac{(1 - q^{a_1-1})(1 - q^{a_2-1})(1 - q^{a_3-1})}{(1 - q^{b_2-1})(1 - q^{b_3-1})} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(q^{a_1}, q^{a_2}, q^{a_3}; q)_t}{(q, q^{b_2}, q^{b_3}; q)_t} q^{tc}. \end{aligned} \quad (14)$$

Складывая левые и правые части соотношений (13) и (14), получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(q^{a_1}, q^{a_2-1}, q^{a_3-1}; q)_t}{(q, q^{b_2-1}, q^{b_3-1}; q)_t} q^{tc} - \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(q^{a_1-1}, q^{a_2-1}, q^{a_3-1}; q)_t}{(q, q^{b_2-1}, q^{b_3-1}; q)_t} q^{t(c+1)} \\ &= q^c \frac{(1 - q^{a_2-1})(1 - q^{a_3-1})}{(1 - q^{b_2-1})(1 - q^{b_3-1})} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(q^{a_1}, q^{a_2}, q^{a_3}; q)_t}{(q, q^{b_2}, q^{b_3}; q)_t} q^{tc}. \end{aligned} \quad (15)$$

После домножения обеих частей равенства (15) на

$$\frac{\Gamma_q(a_2 - 1) \Gamma_q(a_3 - 1) \Gamma_q(b_2 - a_2) \Gamma_q(b_3 - a_3)}{(1 - q)^2 \Gamma_q(b_2 - 1) \Gamma_q(b_3 - 1)}$$

мы приходим к требуемому соотношению (12).

В следующем параграфе мы показываем, что построенные нами величины (11) являются линейными формами от 1 и $\zeta_q(2)$.

§ 3. Арифметика линейных форм

Свяжем с параметрами (9) другой набор $\mathbf{c}$ из десяти целых чисел:

$$\begin{aligned} c_{00} &= (b_1 + b_2 + b_3) - (a_1 + a_2 + a_3) - 2, \\ c_{jk} &= \begin{cases} a_j - b_k & \text{для } k = 1, \\ b_k - a_j - 1 & \text{для } k = 2, 3, \end{cases} \quad j, k = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (16)$$

Согласно (10) набор

$$\{c_{00}, c_{21}, c_{22}, c_{33}, c_{31}\} \quad (17)$$

состоит из целых неотрицательных чисел, в то время как целые параметры в наборе

$$\{c_{11}, c_{23}, c_{13}, c_{12}, c_{32}\} \quad (18)$$

могут быть и отрицательными. Отметим также, что исходные параметры (9) однозначно восстанавливаются по любому из наборов (17) и (18):

$$\begin{aligned} a_1 &= c_{22} + c_{33} - c_{00} + 1, & a_2 &= c_{21} + 1, & a_3 &= c_{31} + 1, \\ b_1 &= 1, & b_2 &= c_{21} + c_{22} + 2, & b_3 &= c_{31} + c_{33} + 2; \\ a_1 &= c_{11} + 1, & a_2 &= c_{11} + c_{13} - c_{23} + 1, & a_3 &= c_{11} + c_{12} - c_{32} + 1, \\ b_1 &= 1, & b_2 &= c_{11} + c_{12} + 2, & b_3 &= c_{11} + c_{13} + 2. \end{aligned}$$

Согласно леммам 3, 4 и формулам (16) действие преобразований σ, τ на параметры $\mathbf{c}$ определяется следующим образом:

$$\sigma: \begin{pmatrix} c_{00}, c_{21}, c_{22}, c_{33}, c_{31} \\ c_{11}, c_{23}, c_{13}, c_{12}, c_{32} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} c_{00}, c_{31}, c_{33}, c_{22}, c_{21} \\ c_{11}, c_{32}, c_{12}, c_{13}, c_{23} \end{pmatrix}, \quad (19)$$

$$\tau: \begin{pmatrix} c_{00}, c_{21}, c_{22}, c_{33}, c_{31} \\ c_{11}, c_{23}, c_{13}, c_{12}, c_{32} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} c_{21}, c_{22}, c_{33}, c_{31}, c_{00} \\ c_{23}, c_{13}, c_{12}, c_{32}, c_{11} \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Таким образом, преобразования σ, τ задают перестановки 10-элементного множества

$$\mathbf{c} := \begin{pmatrix} c_{00}, c_{21}, c_{22}, c_{33}, c_{31} \\ c_{11}, c_{23}, c_{13}, c_{12}, c_{32} \end{pmatrix} \quad (21)$$

и не меняют величины

$$H_q(\mathbf{c}) := G_q(\mathbf{a}, \mathbf{b}). \quad (22)$$

Обозначим через $\mathfrak{G}_0 \subset \mathfrak{S}_{10}$ группу, порожденную перестановками (19), (20); поскольку порядок σ равен 5, а порядок τ равен 2, группа $\mathfrak{G}_0$ состоит из десяти элементов.

Отметим также, что формулы (16) позволяют записать рекуррентные соотношения леммы 5 в виде

$$\begin{aligned} q^{c_{00}+1} H_q(\mathbf{c}) &= H_q \begin{pmatrix} c_{00}, c_{21}-1, & c_{22}, & c_{33}, & c_{31}-1 \\ c_{11}, & c_{23}, & c_{13}-1, c_{12}-1, & c_{32} \end{pmatrix} \\ &\quad - H_q \begin{pmatrix} c_{00}+1, c_{21}-1, c_{22}, c_{33}, c_{31}-1 \\ c_{11}-1, & c_{23}, & c_{13}, c_{12}, & c_{32} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (23)$$

Для каждого набора параметров (9) и соответствующего набора (16) определим величину

$$\begin{aligned} m &= m(\mathbf{c}) := c_{00} + c_{21} + c_{22} + c_{33} + c_{31} = c_{11} + c_{23} + c_{13} + c_{12} + c_{32} \\ &= 2(b_1 + b_2 + b_3) - (a_1 + a_2 + a_3) - 3; \end{aligned} \quad (24)$$

через $m_1 = m_1(\mathbf{c})$ и $m_2 = m_2(\mathbf{c})$ обозначим два максимальных элемента, стоящих на разных местах в наборе (18); тот факт, что $m_1 \geq 0$ и $m_2 \geq 0$, доказан в [6; теорема 2.1]. Положим

$$\begin{aligned} M_0 &= M_0(\mathbf{c}) := \begin{cases} c_{00}c_{21} + c_{31}c_{33} - c_{21}c_{33}, & \text{если } c_{21} \leq c_{31}, \\ c_{00}c_{31} + c_{21}c_{22} - c_{31}c_{22}, & \text{если } c_{21} \geq c_{31}, \end{cases} = M_0(\sigma\mathbf{c}), \\ M &= M(\mathbf{c}) := \max_{\mathbf{g} \in \mathfrak{G}_0} \{M_0(\mathbf{g}\mathbf{c})\} = \max_{0 \leq j \leq 4} \{M_0(\tau^j \mathbf{c})\} \geq 0, \end{aligned} \quad (25)$$

где через $\mathbf{g}\mathbf{c}$ обозначается действие перестановки $\mathbf{g} \in \mathfrak{G}_0$ на множестве (21). Как следует из определения, величины

$$H_q(\mathbf{c}), \quad m(\mathbf{c}), \quad m_1(\mathbf{c}), \quad m_2(\mathbf{c}), \quad M(\mathbf{c})$$

инвариантны относительно действия группы $\mathfrak{G}_0$.

Отметим, что $\zeta_q(2)$ не является рациональной (и даже алгебраической) функцией над полем $\mathbb{C}(q)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Справедливо включение*

$$x^{-M} \cdot D_{m_1}(x) D_{m_2}(x) \cdot H_q(\mathbf{c}) \in \mathbb{Z}[x] \zeta_q(2) + \mathbb{Z}[x], \quad \text{где } x = q^{-1}. \quad (26)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем проводить доказательство индукцией по величине

$$m(c) = c_{00} + c_{21} + c_{22} + c_{33} + c_{31}, \quad (27)$$

где каждое слагаемое в сумме (27) неотрицательно.

В качестве базы индукции рассмотрим случаи, когда по крайней мере три из параметров (17) нулевые. Здесь возможны две ситуации: три нулевых параметра расположены или не расположены по порядку в циклическом наборе (17) (т.е. параметр c_{00} считается следующим за параметром c_{31}). Первая ситуация с помощью одного или нескольких применений циклической перестановки (19) может быть сведена к случаю

$$c_{22} = c_{33} = c_{31} = 0, \quad (28)$$

а вторая — к случаю

$$c_{00} = c_{22} = c_{33} = 0; \quad (29)$$

непосредственная проверка показывает, что в каждом из этих случаев $M(c) = 0$. Рассмотрим сначала вторую возможность.

В случае (29) имеем

$$c_{11} = c_{22} + c_{33} - c_{00} = 0,$$

откуда

$$a_1 = c_{11} + 1 = 1, \quad b_2 = c_{22} + a_2 + 1 = a_2 + 1, \quad b_3 = c_{33} + a_3 + 1 = a_3 + 1.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} H_q(c) &= G_q \left(\begin{matrix} 1, & a_2, & a_3 \\ 1, & a_2 + 1, & a_3 + 1 \end{matrix} \right) \\ &= \frac{\Gamma_q(a_2) \Gamma_q(a_3)}{(1-q)^2 \Gamma_q(a_2+1) \Gamma_q(a_3+1)} \cdot \mathfrak{A} \phi_2 \left(\begin{matrix} q, & q^{a_2}, & q^{a_3} \\ q^{a_2+1}, & q^{a_3+1} \end{matrix} \middle| q, q \right) \\ &= \frac{1}{(1-q^{a_2})(1-q^{a_3})} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(q^{a_2}, q^{a_3}; q)_t}{(q^{a_2+1}, q^{a_3+1}; q)_t} q^t \\ &= \sum_{t=0}^{\infty} \frac{q^t}{(1-q^{t+a_2})(1-q^{t+a_3})}. \end{aligned}$$

Если $a_2 = a_3$, то

$$\begin{aligned} H_q(c) &= q^{-a_2} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{q^{t+a_2}}{(1-q^{t+a_2})^2} = q^{-a_2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} - \sum_{n=1}^{a_2-1} \right) \frac{q^n}{(1-q^n)^2} \\ &= q^{-a_2} \zeta_q(2) - q^{-a_2} \sum_{n=1}^{a_2-1} \frac{q^n}{(1-q^n)^2} = x^{a_2} \zeta_q(2) - x^{a_2} \sum_{n=1}^{a_2-1} \frac{x^n}{(x^n-1)^2}, \end{aligned}$$

откуда вытекает включение

$$x^{-a_2} \cdot D_{a_2-1}(x)^2 \cdot H_q(c) \in \mathbb{Z}[x] \zeta_q(2) + \mathbb{Z}[x]. \quad (30)$$

Если $a_2 \neq a_3$, то (считая для определенности $a_2 < a_3$)

$$\begin{aligned} H_q(c) &= \frac{1}{q^{a_2} - q^{a_3}} \sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1 - q^{t+a_2}} - \frac{1}{1 - q^{t+a_3}} \right) = \frac{1}{q^{a_2} - q^{a_3}} \sum_{n=a_2}^{a_3-1} \frac{1}{1 - q^n} \\ &= \frac{x^{a_3}}{x^{a_3-a_2} - 1} \cdot x^{a_2} \sum_{n=a_2}^{a_3-1} \frac{x^{n-a_2}}{x^n - 1} \end{aligned}$$

и, значит,

$$x^{-(a_2+a_3)} \cdot D_{a_3-a_2}(x) D_{a_3-1}(x) \cdot H_q(c) \in \mathbb{Z}[x]. \quad (31)$$

Оба включения (30), (31) означают, что в случае (29) требуемое утверждение (26) выполнено, поскольку

$$\{c_{11}, c_{23}, c_{13}, c_{12}, c_{32}\} = \{0, a_3 - a_2, a_3 - 1, a_2 - 1, a_2 - a_3\}.$$

Рассмотрим теперь случай (28). Возможность $c_{00} = 0$ исследована выше, поэтому считаем далее $c_{00} > 0$, т.е. $a_1 \leq 0$ и ряд в (11) содержит лишь конечное число слагаемых. По аналогичной причине мы можем считать $c_{21} > 0$ (иначе после применения перестановки τ мы вновь приходим к случаю (29)), так что $a_2 > 1$. Имеем

$$b_2 = c_{22} + a_2 + 1 = a_2 + 1, \quad a_3 = c_{31} + 1 = 1, \quad b_3 = c_{33} + a_3 + 1 = 2,$$

откуда

$$\begin{aligned} H_q(c) &= G_q \left(\begin{matrix} a_1, & a_2, & 1 \\ 1, & a_2 + 1, & 2 \end{matrix} \right) \\ &= \frac{\Gamma_q(a_2)}{(1-q)^2 \Gamma_q(a_2+1)} \cdot {}_3\phi_2 \left(\begin{matrix} q^{a_1}, & q^{a_2}, & q \\ q^{a_2+1}, & q^2 \end{matrix} \middle| q, q^{-a_1+2} \right) \\ &= \frac{1}{(1-q)(1-q^{a_2})} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(q^{a_1}, q^{a_2}; q)_t}{(q^2, q^{a_2+1}; q)_t} q^{t(-a_1+2)}. \end{aligned} \quad (32)$$

Полагая $n = -a_1 \geq 0$, перепишем получившийся ряд в виде

$$\begin{aligned} H_q(c) &= \sum_{t=0}^{n-1} \frac{(q^{-n}; q)_t}{(q; q)_{t+1}} \cdot \frac{q^{t(n+2)}}{1 - q^{t+a_2}} = \sum_{t=0}^{n-1} \frac{(q^{-n}; q)_t}{(q; q)_t} \cdot \frac{q^{t(n+2)}}{(1 - q^{t+1})(1 - q^{t+a_2})} \\ &= \sum_{t=0}^{n-1} (-1)^t x^{t(t+1)/2} \begin{bmatrix} n \\ t \end{bmatrix}_x \cdot \frac{x^{(t+1)+(t+a_2)-t(n+2)}}{(x^{t+1} - 1)(x^{t+a_2} - 1)} \\ &= x^{a_2+1-n(n+1)/2} \sum_{t=0}^{n-1} (-1)^t \begin{bmatrix} n \\ t \end{bmatrix}_x \cdot \frac{x^{(n-t)(n-t-1)/2}}{(x^{t+1} - 1)(x^{t+a_2} - 1)}. \end{aligned} \quad (33)$$

Согласно (8) формула (33) влечет включение

$$x^{-(a_2+1)+n(n+1)/2} \cdot D_n(x) D_{a_2+n-1}(x) \cdot H_q(c) \in \mathbb{Z}[x]. \quad (34)$$

С другой стороны, сумма в правой части (32) имеет иное представление:

$$\begin{aligned} H_q(c) &= \frac{q^{a_1-2}}{(1-q^{a_1-1})(1-q^{a_2-1})} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(q^{a_1-1}, q^{a_2-1}; q)_{t+1}}{(q, q^{a_2}; q)_{t+1}} q^{(t+1)(-a_1+2)} \\ &= \frac{q^{a_1-2}}{(1-q^{a_1-1})(1-q^{a_2-1})} \left({}_2\phi_1 \left(\begin{matrix} q^{a_1-1}, q^{a_2-1} \\ q^{a_2} \end{matrix} \middle| q, q^{-a_1+2} \right) - 1 \right). \end{aligned}$$

Теперь q -аналог Гейне [14; формула (1.5.2)] для формулы суммирования Гаусса позволяет свернуть последний q -базисный ряд:

$$\begin{aligned} H_q(c) &= \frac{q^{a_1-2}}{(1-q^{a_1-1})(1-q^{a_2-1})} \left(\frac{(q; q)_{-a_1+1}}{(q^{a_2}; q)_{-a_1+1}} - 1 \right) \\ &= -q^{-1} \frac{(q; q)_n}{(q^{a_2-1}; q)_{n+2}} - \frac{q^{-n-2}}{(1-q^{-n-1})(1-q^{a_2-1})} \\ &= -x^{a_2(n+2)+n} \frac{(x; x)_n}{(x^{a_2-1}; x)_{n+2}} - \frac{x^{a_2+n+1}}{(1-x^{n+1})(x^{a_2-1}-1)}, \end{aligned}$$

откуда следует включение

$$x^{-(a_2+n+1)} \cdot (x^{n+1}-1)(x; x)_{a_2+n+1} \cdot H_q(c) \in \mathbb{Z}[x]. \quad (35)$$

Так как многочлен x взаимно прост с многочленами $D_n(x)$, $D_{a_2+n-1}(x)$, $x^{n+1}-1$ и $(x; x)_{a_2+n+1}$, включения (34), (35) можно записать в виде

$$x^{-(a_2+n+1)} \cdot D_n(x) D_{a_2+n-1}(x) \cdot H_q(c) \in \mathbb{Z}[x]$$

или после возврата к параметру $a_1 = -n$

$$x^{-(a_2-a_1+1)} \cdot D_{-a_1}(x) D_{a_2-a_1-1}(x) \cdot H_q(c) \in \mathbb{Z}[x].$$

Поскольку

$$\{c_{11}, c_{23}, c_{13}, c_{12}, c_{32}\} = \{a_1 - 1, -a_2 + 1, -a_1 + 1, a_2 - a_1, a_2 - 1\},$$

требуемое включение (26) также оказывается выполненным. Это завершает доказательство базы индукции.

Предположим теперь, что по крайней мере три параметра в наборе (17) ненулевые и для наборов c' с условием $m(c') < m(c)$ требуемое включение (26) доказано.

Рассмотрим сначала случай $M(c) = 0$. Среди трех ненулевых параметров в циклическом наборе (17) всегда можно выбрать два, не являющихся соседями; циклическая перестановка (20) позволяет перейти к $\mathfrak{G}_0$ -эквивалентному набору, у которого $c_{21} > 0$ и $c_{31} > 0$. Тогда включение (26) вытекает из рекуррентных соотношений (23) и индуктивного предположения, поскольку для наборов

$$\begin{aligned} c' &= \begin{pmatrix} c_{00}, c_{21}-1, & c_{22}, & c_{33}, & c_{31}-1 \\ c_{11}, & c_{23}, & c_{13}-1, c_{12}-1, & c_{32} \end{pmatrix}, \\ c'' &= \begin{pmatrix} c_{00}+1, c_{21}-1, c_{22}, c_{33}, c_{31}-1 \\ c_{11}-1, & c_{23}, & c_{13}, c_{12}, & c_{32} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (36)$$

выполнено

$$m_1(\mathbf{c}') \leq m_1(\mathbf{c}), \quad m_2(\mathbf{c}') \leq m_2(\mathbf{c}), \quad m_1(\mathbf{c}'') \leq m_1(\mathbf{c}), \quad m_2(\mathbf{c}'') \leq m_2(\mathbf{c}) \quad (37)$$

и $M(\mathbf{c}') \geq 0, M(\mathbf{c}'') \geq 0$.

Пусть теперь $M(\mathbf{c}) > 0$. Ввиду $\mathfrak{G}_0$ -инвариантности величины $M(\mathbf{c})$ можно считать, что $M_0(\mathbf{c}) = M(\mathbf{c})$. Если при этом $c_{21} > 0$ и $c_{31} > 0$, то, применяя вновь тождества (23), индуктивное предположение для наборов (36) и учитывая соотношения (37) и

$$\begin{aligned} M(\mathbf{c}') &\geq M_0(\mathbf{c}') = M_0(\mathbf{c}) - c_{00} = M(\mathbf{c}) - c_{00}, \\ M(\mathbf{c}'') &\geq M_0(\mathbf{c}'') = M_0(\mathbf{c}) - c_{00} + \min\{c_{21} - 1, c_{31} - 1\} \\ &\geq M_0(\mathbf{c}) - c_{00} = M(\mathbf{c}) - c_{00}, \end{aligned}$$

мы вновь приходим к требуемому включению (26).

Предположим, что для набора $\mathbf{c}$ с условием $M_0(\mathbf{c}) = M(\mathbf{c}) > 0$ по крайней мере один из параметров c_{21}, c_{31} нулевой. Оба параметра не могут быть нулями одновременно, поскольку в этом случае имеем $M_0(\mathbf{c}) = 0$. Не ограничивая общности, можно считать $c_{21} = 0$ и $c_{31} > 0$, поскольку $M_0(\mathbf{c}) = M_0(\sigma\mathbf{c})$. Как следует из определения (25), в нашем случае $M(\mathbf{c}) = M_0(\mathbf{c}) = c_{31}c_{33} > 0$, откуда также получаем $c_{33} > 0$. По крайней мере один из параметров c_{00}, c_{22} ненулевой, так как $c_{21} = 0$ и в наборе (17) не более двух нулевых параметров. В случае $c_{00} > 0$ рассмотрим тождество (23) для набора $\tau^4\mathbf{c}$:

$$x^{-c_{31}-1} H_q(\tau^4\mathbf{c}) = H_q(\mathbf{c}') - H_q(\mathbf{c}''), \quad (38)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{c}' &= \begin{pmatrix} c_{31}, c_{00} - 1, & c_{21}, & c_{22}, & c_{33} - 1 \\ c_{32}, & c_{11}, & c_{23} - 1, c_{13} - 1, & c_{12} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{c}'' &= \begin{pmatrix} c_{31} + 1, c_{00} - 1, c_{21}, c_{22}, c_{33} - 1 \\ c_{32} - 1, & c_{11}, & c_{23}, c_{13}, & c_{12} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (39)$$

Из $\mathfrak{G}_0$ -инвариантности величин $m_1(\mathbf{c}), m_2(\mathbf{c})$ для наборов (39) имеем оценки (37). Кроме того,

$$\begin{aligned} M(\mathbf{c}') &\geq M_0(\tau\mathbf{c}') = c_{31}(c_{33} - 1) = M(\mathbf{c}) - c_{31}, \\ M(\mathbf{c}'') &\geq M_0(\tau\mathbf{c}'') = (c_{31} + 1)(c_{33} - 1) \geq M(\mathbf{c}) - c_{31}, \end{aligned}$$

откуда в соответствии с индуктивным предположением для наборов (39) и тождеством (38) следует требуемое включение (26). В случае $c_{22} > 0$ аналогичные рассуждения с заменой $\tau^4\mathbf{c}$ на $\tau^3\mathbf{c}$ также приводят к включению (26). Это завершает доказательство индукционного перехода и предложения 1.

§ 4. Групповая структура для $\zeta_q(2)$

Потребуем теперь более жестких, чем (10), ограничений на параметры (9):

$$\{b_1 = 1\} \leq \{a_1, a_2, a_3\} < \{b_2, b_3\}, \quad a_1 + a_2 + a_3 \leq b_1 + b_2 + b_3 - 2. \quad (40)$$

Тогда все параметры (16) неотрицательны, и помимо преобразований σ, τ можно также рассматривать всевозможные перестановки параметров a_1, a_2, a_3 , с одной стороны, и перестановку параметров b_2, b_3 , с другой стороны, не меняющие величины

$$\frac{\Gamma_q(a_1)}{\Gamma_q(b_2 - a_2) \Gamma_q(b_3 - a_3)} \cdot G_q(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{[c_{11}]_q!}{[c_{22}]_q! [c_{33}]_q!} \cdot H_q(\mathbf{c}). \quad (41)$$

Таким образом, величина (41) инвариантна относительно действия “ $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ -тривиальной” группы $\mathfrak{S}_1$, порожденной перестановками

$$\mathbf{a}_1 = (a_1 \ a_3), \quad \mathbf{a}_2 = (a_1 \ a_3), \quad \mathbf{b} = (b_2 \ b_3). \quad (42)$$

В терминах параметров $\mathbf{c}$ действие перестановок (42) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= (c_{11} \ c_{31})(c_{12} \ c_{32})(c_{13} \ c_{33}), \quad \mathbf{a}_2 = (c_{21} \ c_{31})(c_{22} \ c_{32})(c_{23} \ c_{33}), \\ \mathbf{b} &= (c_{12} \ c_{13})(c_{22} \ c_{23})(c_{32} \ c_{33}). \end{aligned} \quad (43)$$

Рассматривая теперь группу

$$\mathfrak{S} = \langle \mathfrak{S}_0, \mathfrak{S}_1 \rangle = \langle \sigma, \tau, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b} \rangle$$

как группу перестановок 10-элементного множества $\mathbf{c}$, а также учитывая $\mathfrak{S}_0$ -инвариантность величины (22) и $\mathfrak{S}_1$ -инвариантность величины (41), мы приходим к следующему утверждению.

ЛЕММА 6 (ср. с [6; § 3], [9; лемма 14]). *Величина*

$$\frac{H_q(\mathbf{c})}{\Pi_q(\mathbf{c})}, \quad \text{где} \quad \Pi_q(\mathbf{c}) = [c_{00}]_q! [c_{21}]_q! [c_{22}]_q! [c_{33}]_q! [c_{31}]_q!,$$

инвариантна относительно действия группы $\mathfrak{S}$.

Отметим также $\mathfrak{S}$ -инвариантность величины (24).

В [6] доказано, что группа $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{S}_{10}$ имеет порядок 120. В качестве образующих группы $\mathfrak{S}$ можно выбрать [9; § 6] перестановки (43) и

$$\mathfrak{h} = (c_{00} \ c_{22})(c_{11} \ c_{33})(c_{13} \ c_{31})$$

второго порядка; при этом $\sigma = \mathbf{a}_2 \mathbf{b}$ и $\tau = (\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1 \mathbf{b} \mathfrak{h})^2$.

С учетом непосредственно проверяемого равенства

$$[n]_q! = x^{-n(n-1)/2} [n]_x!, \quad \text{где} \quad x = q^{-1},$$

из леммы 6 вытекает $\mathfrak{S}$ -инвариантность величины

$$\frac{H_q(\mathbf{c})}{x^{-N(\mathbf{c})} \Pi_x(\mathbf{c})}, \quad (44)$$

где мы положили

$$N(\mathbf{c}) := \frac{c_{00}(c_{00} - 1) + c_{21}(c_{21} - 1) + c_{22}(c_{22} - 1) + c_{33}(c_{33} - 1) + c_{31}(c_{31} - 1)}{2}. \quad (45)$$

ЛЕММА 7. *Величина $M(\mathbf{c}) + N(\mathbf{c})$ инвариантна относительно действия группы $\mathfrak{G}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разумеется, это утверждение может быть доказано с использованием определений (25) и (45) величин $M(\mathbf{c})$ и $N(\mathbf{c})$ соответственно. Возникающий громоздкий перебор делает подобное доказательство скучным, поэтому мы ограничимся лишь указанием на тот факт, что утверждение достаточно проверить для “общего” набора параметров $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ и отвечающего ему набора $\mathbf{c}$. С помощью программы для калькулятора GP-PARI мы проверили справедливость утверждения леммы для всех наборов параметров (9), удовлетворяющих условиям (40) и $b_2 + b_3 \leq 100$. Тем самым, лемма доказана.

Обозначая через $m_1^* \geq m_2^*$ два максимальных элемента, стоящих на разных местах в 10-элементном множестве $\mathbf{c}$, согласно предложению 1 получаем включение

$$x^{-M} \cdot D_{m_1^*}(x) D_{m_2^*}(x) \cdot H_q(\mathbf{c}) \in \mathbb{Z}[x]\zeta_q(2) + \mathbb{Z}[x], \quad \text{где } x = q^{-1}. \quad (46)$$

Кроме того, величины m_1^*, m_2^* (в отличие от введенных в §3 величин m_1, m_2) являются $\mathfrak{G}$ -инвариантными.

Для заданного набора параметров $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, удовлетворяющего условиям (40), и соответствующего набора (16) определим многочлен

$$\Omega(x) := \prod_{l=1}^{m_1^*} \Phi_l^{\nu_l}(x) \in \mathbb{Z}[x],$$

где

$$\nu_l := \max_{\mathbf{g} \in \mathfrak{G}} \text{ord}_{\Phi_l(x)} \frac{\Pi_x(\mathbf{c})}{\Pi_x(\mathbf{g}\mathbf{c})}, \quad l = 1, 2, \dots \quad (47)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Справедливо включение*

$$x^{-M} \cdot D_{m_1^*}(x) D_{m_2^*}(x) \cdot \Omega^{-1}(x) \cdot H_q(\mathbf{c}) \in \mathbb{Z}[x]\zeta_q(2) + \mathbb{Z}[x], \quad \text{где } x = q^{-1}. \quad (48)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду $\mathfrak{G}$ -инвариантности величин $M(\mathbf{c}) + N(\mathbf{c})$, $m_1^*(\mathbf{c})$, $m_2^*(\mathbf{c})$ и (44) согласно включению (46) заключаем, что для любой перестановки $\mathbf{g} \in \mathfrak{G}$ линейная форма

$$\begin{aligned} & x^{-M(\mathbf{c})} \cdot D_{m_1^*(\mathbf{c})}(x) D_{m_2^*(\mathbf{c})}(x) \cdot \frac{\Pi_x(\mathbf{g}\mathbf{c})}{\Pi_x(\mathbf{c})} \cdot H_q(\mathbf{c}) \\ &= x^{-M(\mathbf{c}) - N(\mathbf{c}) + N(\mathbf{g}\mathbf{c})} \cdot D_{m_1^*(\mathbf{c})}(x) D_{m_2^*(\mathbf{c})}(x) \cdot H_q(\mathbf{g}\mathbf{c}) \\ &= x^{-M(\mathbf{g}\mathbf{c})} \cdot D_{m_1^*(\mathbf{g}\mathbf{c})}(x) D_{m_2^*(\mathbf{g}\mathbf{c})}(x) \cdot H_q(\mathbf{g}\mathbf{c}) \end{aligned}$$

лежит в $\mathbb{Z}[x]\zeta_q(2) + \mathbb{Z}[x]$. Воспользуемся теперь тем фактом, что $\zeta_q(2)$ как функция от $x = q^{-1}$ иррациональна над $\mathbb{Q}(x)$; кроме того, в разложении $\Pi_x(\mathbf{g}\mathbf{c})$, $\mathbf{g} \in \mathfrak{G}$, на неприводимые множители участвуют только многочлены (4). С учетом доказанных в [6] неравенств

$$\nu_l = 0 \quad \text{для } l > m_1^*, \quad \nu_l \leq 1 \quad \text{для } m_2^* < l \leq m_1^*$$

мы получаем требуемое включение (48). Предложение доказано.

Ввиду $\mathfrak{G}_0$ -инвариантности величины $H_q(\mathbf{c})$ для определения показателей (47) нам достаточно рассмотреть действие представителей левых смежных классов факторгруппы $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_0$ (порядка 12) на 5-элементное (упорядоченное) множество $\mathbf{c}' = (c_{00}, c_{21}, c_{22}, c_{33}, c_{31})$:

$$\begin{aligned} \nu_l &= \max_{\mathfrak{g} \in \mathfrak{G}/\mathfrak{G}_0} \text{ord}_{\Phi_l(x)} \frac{\Pi_x(\mathbf{c})}{\Pi_x(\mathfrak{g}\mathbf{c})} \\ &= \max_{\mathfrak{g} \in \mathfrak{G}/\mathfrak{G}_0} \left(\left\lfloor \frac{c_{00}}{l} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{c_{21}}{l} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{c_{22}}{l} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{c_{33}}{l} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{c_{31}}{l} \right\rfloor \right. \\ &\quad \left. - \left\lfloor \frac{\mathfrak{g}c_{00}}{l} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{\mathfrak{g}c_{21}}{l} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{\mathfrak{g}c_{22}}{l} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{\mathfrak{g}c_{33}}{l} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{\mathfrak{g}c_{31}}{l} \right\rfloor \right), \quad l = 1, 2, \dots, m_1^*, \end{aligned} \quad (49)$$

согласно (6). В качестве таких представителей выберем

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_0 &= \text{id}, & \mathfrak{g}_1 &= \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1, & \mathfrak{g}_2 &= \mathbf{a}_1, & \mathfrak{g}_3 &= \mathbf{a}_2, \\ \mathfrak{g}_4 &= \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2, & \mathfrak{g}_5 &= \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1, & \mathfrak{g}_6 &= \mathfrak{h} \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1, & \mathfrak{g}_7 &= \mathfrak{h} \mathbf{a}_2, \\ \mathfrak{g}_8 &= \mathfrak{h} \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2, & \mathfrak{g}_9 &= \mathfrak{h} \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1, & \mathfrak{g}_{10} &= \mathfrak{h} \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1 \mathfrak{h} \mathbf{a}_2, & \mathfrak{g}_{11} &= \mathfrak{h} \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1 \mathfrak{h} \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1. \end{aligned} \quad (50)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_0 \mathbf{c}' &= (c_{00}, c_{21}, c_{22}, c_{33}, c_{31}), & \mathfrak{g}_1 \mathbf{c}' &= (c_{00}, c_{11}, c_{12}, c_{33}, c_{31}), \\ \mathfrak{g}_2 \mathbf{c}' &= (c_{00}, c_{21}, c_{22}, c_{13}, c_{11}), & \mathfrak{g}_3 \mathbf{c}' &= (c_{00}, c_{31}, c_{32}, c_{23}, c_{21}), \\ \mathfrak{g}_4 \mathbf{c}' &= (c_{00}, c_{11}, c_{12}, c_{23}, c_{21}), & \mathfrak{g}_5 \mathbf{c}' &= (c_{00}, c_{31}, c_{32}, c_{13}, c_{11}), \\ \mathfrak{g}_6 \mathbf{c}' &= (c_{22}, c_{33}, c_{12}, c_{11}, c_{13}), & \mathfrak{g}_7 \mathbf{c}' &= (c_{22}, c_{13}, c_{32}, c_{23}, c_{21}), \\ \mathfrak{g}_8 \mathbf{c}' &= (c_{22}, c_{33}, c_{12}, c_{23}, c_{21}), & \mathfrak{g}_9 \mathbf{c}' &= (c_{22}, c_{13}, c_{32}, c_{31}, c_{33}), \\ \mathfrak{g}_{10} \mathbf{c}' &= (c_{12}, c_{23}, c_{32}, c_{31}, c_{33}), & \mathfrak{g}_{11} \mathbf{c}' &= (c_{12}, c_{23}, c_{32}, c_{13}, c_{11}). \end{aligned} \quad (51)$$

§ 5. Оценки линейных форм и их коэффициентов

В этом параграфе мы также будем считать, что набор целочисленных параметров (9) удовлетворяет условиям (40). Используя явное выражение величины (22) в виде

$$\begin{aligned} G_q(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= A \zeta_q(2) - B, \\ A &= A_q(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = A_q(\mathbf{c}) \in \mathbb{Q}(q), \quad B = B_q(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = B_q(\mathbf{c}) \in \mathbb{Q}(q), \end{aligned} \quad (52)$$

мы получим оценки для $|G_q(\mathbf{a}, \mathbf{b})|$ и $|A|$ при $|q| \leq 1/2$.

Начнем с иного представления величины (11). Именно рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} R_q(t) &= R_q(\mathbf{a}, \mathbf{b}; t) := \frac{\Gamma_q(b_2 - a_2) \Gamma_q(b_3 - a_3)}{(1 - q)^2 \Gamma_q(a_1 - b_1 + 1)} \cdot q^{t(b_1 + b_2 + b_3 - a_1 - a_2 - a_3 - 2)} \\ &\quad \times \frac{\Gamma_q(t + a_1) \Gamma_q(t + a_2) \Gamma_q(t + a_3)}{\Gamma_q(t + b_1) \Gamma_q(t + b_2) \Gamma_q(t + b_3)} \end{aligned} \quad (53)$$

и запишем (11) в виде

$$G_q(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{t=0}^{\infty} R_q(t) q^t. \quad (54)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $c_{00} = b_2 + b_3 - a_1 - a_2 - a_3 - 1 \geq 5$ и $|q| \leq 1/2$. Тогда справедливы оценки

$$3^{-3(b_2 + b_3)} < |G_q(\mathbf{a}, \mathbf{b})| < 3^{3(b_2 + b_3)}. \quad (55)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из функционального уравнения для Γ_q -функции

$$\Gamma_q(t+1) = \frac{1-q^t}{1-q} \Gamma_q(t) \quad (56)$$

получаем

$$\frac{R_q(t+1)}{R_q(t)} = \frac{(1-q^{t+a_1})(1-q^{t+a_2})(1-q^{t+a_3})}{(1-q^{t+b_1})(1-q^{t+b_2})(1-q^{t+b_3})} \cdot q^{c_{00}},$$

откуда

$$\frac{|R_q(t+1)q^{t+1}|}{|R_q(t)q^t|} \leq \frac{(1+|q|)^3}{(1-|q|)^3} \cdot |q|^{c_{00}+1} \leq 3^3 \cdot 2^{-(c_{00}+1)} < \frac{1}{2}. \quad (57)$$

Применяя теперь полученную оценку (57) к ряду в (54), находим, что, с одной стороны,

$$\begin{aligned} |G_q(\mathbf{a}, \mathbf{b})| &\leq |R_q(0)| \cdot \left(1 + \frac{|R_q(1)q|}{|R_q(0)|} + \frac{|R_q(2)q^2|}{|R_q(0)|} + \frac{|R_q(3)q^3|}{|R_q(0)|} + \dots \right) \\ &< |R_q(0)| \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots \right) = 2|R_q(0)| \end{aligned} \quad (58)$$

и, с другой стороны,

$$|G_q(\mathbf{a}, \mathbf{b})| \geq |R_q(0)| \cdot \left(1 - \frac{|R_q(1)q|}{|R_q(0)|} \right) > \frac{1}{2}|R_q(0)|. \quad (59)$$

Воспользуемся тривиальными неравенствами

$$3^{-n} \leq \left(\frac{1-|q|}{1+|q|} \right)^n \leq |\Gamma_q(n+1)| \leq \left(\frac{1+|q|}{1-|q|} \right)^n \leq 3^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

для оценки всех Γ_q -множителей, входящих в $R_q(0)$. С учетом

$$(b_2 - a_2 - 1) + (b_3 - a_3 - 1) + (a_1 - b_1) + (a_1 + a_2 + a_3 - 3) + (b_1 + b_2 + b_3 - 3) < 3(b_2 + b_3) - 1$$

это приводит к оценкам

$$3^{-3(b_2+b_3)+1} < |R_q(0)| < 3^{3(b_2+b_3)-1}. \quad (60)$$

Собирая теперь вместе (58)–(60), получаем требуемые неравенства (55). Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Для коэффициента $A = A_q(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathbb{Q}(q)$ в представлении (52) при $|q| \leq 1/2$ справедлива оценка

$$|A| < 3^{2(b_2+b_3)} \cdot |q|^{a_1(a_1-1)/2 + a_2(a_2-1)/2 + a_3(a_3-1)/2 - (b_2-1)(b_3-1)}. \quad (61)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам будет удобно ввести упорядоченную версию $(\mathbf{a}^*, \mathbf{b}^*)$ набора параметров $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, именно

$$b_1^* = 1 < a_1^* \leq a_2^* \leq a_3^* < b_2^* \leq b_3^*, \\ \{a_1^*, a_2^*, a_3^*\} = \{a_1, a_2, a_3\}, \quad \{b_1^*, b_2^*, b_3^*\} = \{b_1, b_2, b_3\}.$$

Согласно функциональному уравнению (56) выполнено

$$\frac{\Gamma_q(t + a_j)}{\Gamma_q(t + b_j)} = \begin{cases} \frac{(1 - q^{t+b_j})(1 - q^{t+b_j+1}) \dots (1 - q^{t+a_j-1})}{(1 - q)^{a_j-b_j}} & \text{при } j = 1, \\ \frac{(1 - q)^{b_j-a_j}}{(1 - q^{t+a_j})(1 - q^{t+a_j+1}) \dots (1 - q^{t+b_j-1})} & \text{при } j = 2, 3; \end{cases}$$

поэтому $R_q(t)$ в (53) является рациональной функцией параметра $T = q^t$ над полем $\mathbb{Q}(q) = \mathbb{Q}(q^{-1})$:

$$R_q(t) = \frac{[b_2 - a_2 - 1]_q! [b_3 - a_3 - 1]_q!}{[a_1 - b_1]_q!} \cdot \frac{(1 - q^{b_1}T) \dots (1 - q^{a_1-1}T)}{(1 - q)^{a_1-b_1}} \\ \times \frac{(1 - q)^{b_2-a_2-1}}{(1 - q^{a_2}T) \dots (1 - q^{b_2-1}T)} \cdot \frac{(1 - q)^{b_3-a_3-1}}{(1 - q^{a_3}T) \dots (1 - q^{b_3-1}T)} \\ \times T^{b_2+b_3-a_1-a_2-a_3-1}. \quad (62)$$

Поскольку степень числителя функции (62) как функции от T на двойку меньше степени знаменателя, имеем

$$R_q(t) = O(T^{-2}) \quad \text{при } T \rightarrow \infty, \quad (63)$$

и $R_q(t)$ может быть разложена в сумму простейших дробей:

$$R_q(t) = \sum_{k=a_3^*}^{b_2^*-1} \frac{A_k}{(1 - q^k T)^2} + \sum_{k=a_2^*}^{b_3^*-1} \frac{B_k}{1 - q^k T}.$$

Из условия (63) следует, что

$$\sum_{k=a_2^*}^{b_3^*-1} B_k q^{-k} = - \sum_{k=a_3^*}^{b_2^*-1} \text{Res}_{T=q^{-k}} R_q(t) = \text{Res}_{T=\infty} R_q(t) = 0;$$

поэтому

$$G_q(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{t=0}^{\infty} \left(\sum_{k=a_3^*}^{b_2^*-1} \frac{A_k q^t}{(1 - q^{t+k})^2} + \sum_{k=a_2^*}^{b_3^*-1} \frac{B_k q^t}{1 - q^{t+k}} \right) \\ = \sum_{k=a_3^*}^{b_2^*-1} A_k q^{-k} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{q^{t+k}}{(1 - q^{t+k})^2} + \sum_{k=a_2^*}^{b_3^*-1} B_k q^{-k} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{q^{t+k}}{1 - q^{t+k}} \\ = \sum_{k=a_3^*}^{b_2^*-1} A_k q^{-k} \left(\sum_{l=1}^{\infty} - \sum_{l=1}^{k-1} \right) \frac{q^l}{(1 - q^l)^2} + \sum_{k=a_2^*}^{b_3^*-1} B_k q^{-k} \left(\sum_{l=1}^{\infty} - \sum_{l=1}^{k-1} \right) \frac{q^l}{1 - q^l} \\ = A \zeta_q(2) - B,$$

где

$$A = \sum_{k=a_3^*}^{b_2^*-1} A_k q^{-k}, \quad (64)$$

$$B = \sum_{k=a_3^*}^{b_2^*-1} A_k q^{-k} \sum_{l=1}^{k-1} \frac{q^l}{(1-q^l)^2} + \sum_{k=a_3^*}^{b_3^*-1} B_k q^{-k} \sum_{l=1}^{k-1} \frac{q^l}{1-q^l}$$

– рациональные функции переменной q . Для коэффициентов A_k , $a_3^* \leq k < b_2^*$, с помощью представления (62) находим явные формулы (напомним, что $b_1 = 1$):

$$\begin{aligned} A_k &= R_q(t)(1-q^k T)^2 \Big|_{T=q^{-k}} = R_q(t)(1-q^{t+k})^2 \Big|_{t=-k} \\ &= (-1)^{a_1-b_1} q^{(a_1-b_1)(a_1+b_1-2k-1)/2} \begin{bmatrix} k-b_1 \\ a_1-b_1 \end{bmatrix}_q \\ &\quad \times (-1)^{k-a_2} q^{(k-a_2)(k-a_2+1)/2} \begin{bmatrix} b_2-a_2-1 \\ k-a_2 \end{bmatrix}_q \\ &\quad \times (-1)^{k-a_3} q^{(k-a_3)(k-a_3+1)/2} \begin{bmatrix} b_3-a_3-1 \\ k-a_3 \end{bmatrix}_q \cdot q^{-k(b_2+b_3-a_1-a_2-a_3-1)} \\ &= (-1)^{a_1+a_2+a_3-1} q^{a_1(a_1-1)/2+a_2(a_2-1)/2+a_3(a_3-1)/2-k(b_2+b_3-3)+k^2} \\ &\quad \times \begin{bmatrix} k-b_1 \\ a_1-b_1 \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} b_2-a_2-1 \\ k-a_2 \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} b_3-a_3-1 \\ k-a_3 \end{bmatrix}_q, \quad a_3^* \leq k < b_2^*. \end{aligned}$$

Функция $k^2 - k(b_2 + b_3 - 2)$ убывает при изменении k от a_3^* до $b_2^* - 1 = \min\{b_2, b_3\} - 1$ и принимает в указанном промежутке наименьшее значение $-(b_2 - 1)(b_3 - 1)$ при $k = b_2^* - 1$. Кроме того,

$$\begin{aligned} \left| \begin{bmatrix} k-b_1 \\ a_1-b_1 \end{bmatrix}_q \right| &= \left| \frac{(1-q^{k-a_1+1}) \cdots (1-q^{k-b_1})}{(1-q)(1-q^2) \cdots (1-q^{a_1-b_1})} \right| \leq \left(\frac{1+|q|}{1-|q|} \right)^{a_1-b_1}, \\ \left| \begin{bmatrix} b_j-a_j-1 \\ k-a_j \end{bmatrix}_q \right| &= \left| \frac{(1-q)(1-q^2) \cdots (1-q^{b_j-a_j-1})}{(1-q) \cdots (1-q^{b_j-k-1}) \cdot (1-q) \cdots (1-q^{k-b_j})} \right| \\ &\leq \left(\frac{1+|q|}{1-|q|} \right)^{b_j-a_j-1}, \quad j = 2, 3. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |A_k q^{-k}| &\leq \left(\frac{1+|q|}{1-|q|} \right)^{a_1-a_2-a_3+b_2+b_3-3} \\ &\quad \times |q|^{a_1(a_1-1)/2+a_2(a_2-1)/2+a_3(a_3-1)/2-(b_2-1)(b_3-1)}, \quad a_3^* \leq k < b_2^*. \end{aligned}$$

С учетом неравенств $a_1 < b_2$ и

$$\frac{1+|q|}{1-|q|} \leq 3$$

при $|q| \leq 1/2$, а также того факта, что в суммировании (64) участвует не более $b_3 < 3^{b_3}$ слагаемых, мы окончательно приходим к требуемой оценке (61). Предложение доказано.

§6. Мера иррациональности $\zeta_q(2)$

Зафиксируем теперь набор целочисленных параметров (*направлений*) (α, β) , удовлетворяющих условиям

$$\{\beta_1 = 0\} \leq \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \leq \{\beta_2, \beta_3\}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \leq \beta_1 + \beta_2 + \beta_3, \quad (65)$$

и для каждого $n = 0, 1, 2, \dots$ свяжем их с исходным набором параметров (9) по правилу

$$\begin{aligned} a_1 &= \alpha_1 n + 1, & a_2 &= \alpha_2 n + 1, & a_3 &= \alpha_3 n + 1, \\ b_1 &= \beta_1 n + 1, & b_2 &= \beta_2 n + 2, & b_3 &= \beta_3 n + 2. \end{aligned} \quad (66)$$

Определяя множество дополнительных параметров $\mathbf{c}$ равенствами

$$\begin{aligned} c_{00} &= (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3), \\ c_{jk} &= \begin{cases} \alpha_j - \beta_k & \text{для } k = 1, \\ \beta_k - \alpha_j & \text{для } k = 2, 3, \end{cases} \quad j, k = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (67)$$

мы получаем, что 10-элементное множество $\mathbf{c} \cdot n$ отвечает набору параметров (66) в соответствии с (16). С набором (67) свяжем определенные ранее характеристики $m(\mathbf{c})$, $m_1^*(\mathbf{c})$, $m_2^*(\mathbf{c})$, $M(\mathbf{c})$ и рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} \omega_0(z) &= \max_{0 \leq k \leq 11} (\lfloor c_{00} \cdot z \rfloor + \lfloor c_{21} \cdot z \rfloor + \lfloor c_{22} \cdot z \rfloor + \lfloor c_{33} \cdot z \rfloor + \lfloor c_{31} \cdot z \rfloor \\ &\quad - \lfloor \mathfrak{g}_k c_{00} \cdot z \rfloor - \lfloor \mathfrak{g}_k c_{21} \cdot z \rfloor - \lfloor \mathfrak{g}_k c_{22} \cdot z \rfloor - \lfloor \mathfrak{g}_k c_{33} \cdot z \rfloor - \lfloor \mathfrak{g}_k c_{31} \cdot z \rfloor), \end{aligned} \quad (68)$$

где представители $\mathfrak{g}_k$, $k = 0, 1, \dots, 11$, левых смежных классов факторгруппы $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_0$ и их действие на параметры $c_{00}, c_{21}, c_{22}, c_{33}, c_{31}$ указаны в (50), (51). Отметим, что ввиду $\mathfrak{G}$ -инвариантности характеристики $m(\mathbf{c})$ функция (68) является 1-периодической.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. В приведенных выше обозначениях положим

$$C_0 = M - \frac{3}{\pi^2} \left(m_1^{*2} + m_2^{*2} + \int_0^1 \omega_0(z) d\psi'(z) \right), \quad C_1 = \beta_2 \beta_3 - \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}{2}.$$

Если $C_0 > 0$, то число $\zeta_q(2)$ иррационально для любого $q = 1/p$, $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1\}$, и справедлива оценка

$$\mu(\zeta_q(2)) \leq \frac{C_1}{C_0} \quad (69)$$

для показателя иррациональности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $q^{-1} = p \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1\}$. Для заданного набора направлений (α, β) и соответствующего набора (67) рассмотрим последовательности

$$\begin{aligned} H_n &:= H(cn), & L_n &:= p^{-Mn^2} \cdot D_{m_1^* n}(p) D_{m_2^* n}(p) \cdot \prod_{l=1}^{m_1^* n} \Phi_l^{-\omega_0(n/l)}(p), \\ n &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Поскольку $M(cn) = Mn^2$, $m_1^*(cn) = m_1^*n$, $m_2^*(cn) = m_2^*n$ и $\nu_l = \omega_0(n/l)$ согласно (49), $n = 0, 1, 2, \dots$, предложение 2 влечет включения

$$\tilde{H}_n := L_n H_n \in \mathbb{Z}[p]\zeta_q(2) + \mathbb{Z}[p] \subset \mathbb{Z}\zeta_q(2) + \mathbb{Z}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

С другой стороны, записывая линейные формы H_n в виде $H_n = A_n \zeta_q(2) - B_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, и применяя предложения 3, 4, находим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |H_n|}{n^2} = 0, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |A_n|}{n^2} \leq C_1 \log |p|, \quad (70)$$

а асимптотическое поведение последовательности L_n , $n = 0, 1, 2, \dots$, определяется с помощью лемм 1, 2:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |L_n|}{n^2} = -C_0 \log |p|. \quad (71)$$

Поэтому в случае $C_0 > 0$ иррациональность числа $\zeta_q(2)$ вытекает из оценок

$$0 < |\tilde{H}_n| < |p|^{-(C_0 - \varepsilon)n^2},$$

справедливых для всех $n \geq n_0(\varepsilon)$, где в качестве $\varepsilon > 0$ можно взять $C_0/2$. Неравенство (69) выводится из предельных соотношений (70), (71) стандартным образом (см., например, [19; § 11.3, упражнение 3] или [20; лемма 2]). Это завершает доказательство предложения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Реализуя перебор по всем целочисленным направлениям (α, β) , удовлетворяющим условиям (65) и $\beta_2 + \beta_3 \leq 100$, с помощью программы для калькулятора GP-PARI, мы обнаружили, что наилучшая оценка (3) для показателя иррациональности $\zeta_q(2)$ достигается (с точностью до действия группы $\mathfrak{G}$ и умножения вектора направлений на положительное целое) на наборе

$$\alpha_1 = 5, \quad \alpha_2 = 6, \quad \alpha_3 = 7, \quad \beta_2 = 14, \quad \beta_3 = 15.$$

В этом случае $M = 74$, $m_1^* = 11$, $m_2^* = 10$,

$$\omega_0(z) = \begin{cases} 0, & \text{если } z \in [0, \frac{1}{11}) \cup [\frac{1}{9}, \frac{1}{8}) \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{4}) \cup [\frac{1}{3}, \frac{4}{11}) \cup [\frac{4}{9}, \frac{1}{2}) \\ & \cup [\frac{3}{5}, \frac{5}{8}) \cup [\frac{7}{10}, \frac{8}{11}) \cup [\frac{4}{5}, \frac{5}{6}), \\ 1, & \text{если } z \in [\frac{1}{11}, \frac{1}{9}) \cup [\frac{1}{8}, \frac{2}{11}) \cup [\frac{1}{5}, \frac{2}{9}) \cup [\frac{1}{4}, \frac{1}{3}) \cup [\frac{4}{11}, \frac{3}{8}) \\ & \cup [\frac{2}{5}, \frac{4}{9}) \cup [\frac{1}{2}, \frac{6}{11}) \cup [\frac{5}{9}, \frac{3}{5}) \cup [\frac{5}{8}, \frac{7}{10}) \cup [\frac{8}{11}, \frac{3}{4}) \\ & \cup [\frac{7}{9}, \frac{4}{5}) \cup [\frac{5}{6}, \frac{7}{8}) \cup [\frac{8}{9}, \frac{9}{10}), \\ 2, & \text{если } z \in [\frac{2}{11}, \frac{1}{5}) \cup [\frac{3}{8}, \frac{2}{5}) \cup [\frac{6}{11}, \frac{5}{9}) \cup [\frac{3}{4}, \frac{7}{9}) \cup [\frac{7}{8}, \frac{8}{9}), \end{cases}$$

для $z \in [0, 1)$. Следовательно,

$$C_0 = 74 - \frac{3}{\pi^2}(11^2 + 10^2 - 102.57252091\dots) = 38.00236293\dots,$$

$$C_1 = 14 \cdot 15 - \frac{5^2 + 6^2 + 7^2}{2} = 155$$

и согласно предложению 5 мы получаем требуемую оценку (3). Теорема доказана.

§ 7. q -аналог последовательности Апери

Выбор параметров

$$a_1 = a_2 = a_3 = n + 1, \quad b_1 = 1, \quad b_2 = b_3 = 2n + 2, \quad \text{где } n = 0, 1, 2, \dots, \quad (72)$$

приводит к величинам $C_0 = 1 - 6/\pi^2 > 0$, $C_1 = 5/2$ в обозначениях предложения 5, а значит, к иррациональности числа $\zeta_q(2)$ для $q^{-1} \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1\}$. Соответствующая оценка для показателя иррациональности в этом случае имеет вид

$$\mu(\zeta_q(2)) \leq \frac{5\pi^2}{2\pi^2 - 12} = 6.37636524\dots$$

Цель этого параграфа – показать, что случай (72) является точным q -аналогом оригинального доказательства Апери [12] иррациональности $\zeta(2)$.

Зафиксируем целое $n \geq 0$ и запишем разложение рациональной функции (53) в сумму простейших дробей относительно параметра $T = q^t$:

$$\begin{aligned} R_q(t) &= \frac{(1 - qT) \cdots (1 - q^n T)}{(1 - q^{n+1}T) \cdots (1 - q^{2n+1}T)} \cdot \frac{(q; q)_n T^n}{(1 - q^{n+1}T) \cdots (1 - q^{2n+1}T)} \\ &= (-1)^n \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} k+n \\ k \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \frac{(-1)^k q^{k(k+1)/2 - kn - n(n+1)/2}}{1 - q^{k+n+1}T} \\ &\quad \times \sum_{j=0}^n \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q \frac{(-1)^j q^{j(j+1)/2 - jn - n(n+1)}}{1 - q^{j+n+1}T} \\ &= (-1)^n \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} k+n \\ k \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q^2 \frac{q^{k(k+1) - 2kn - 3n(n+1)/2}}{(1 - q^{t+k+n+1})^2} \\ &\quad + (-1)^n \sum_{k=0}^n \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \begin{bmatrix} k+n \\ k \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q q^{k(k+1)/2 + j(j+1)/2 - (k+j)n - 3n(n+1)/2} \\ &\quad \times \frac{(-1)^{k+j}}{q^k - q^j} \left(\frac{1}{1 - q^{t+k+n+1}} - \frac{1}{1 - q^{t+j+n+1}} \right). \end{aligned} \quad (73)$$

Учитывая равенства

$$R_q(t) = 0 \quad \text{для } t = -1, -2, \dots, -n$$

и

$$\begin{aligned} \sum_{t=-n}^{\infty} \frac{q^t}{(1 - q^{t+k+n+1})^2} &= q^{-(k+n+1)} \left(\zeta_q(2) - \sum_{l=1}^k \frac{q^l}{(1 - q^l)^2} \right), \\ \sum_{t=-n}^{\infty} \frac{q^t}{1 - q^{t+k+n+1}} &= q^{-(k+n+1)} \left(\zeta_q(1) - \sum_{l=1}^k \frac{q^l}{1 - q^l} \right), \end{aligned} \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

из (73) мы получаем линейную форму

$$\begin{aligned} H_n(q) &:= (-1)^n q^{(3n+2)(n+1)/2} \sum_{t=0}^{\infty} R_q(t) = (-1)^n q^{(3n+2)(n+1)/2} \sum_{t=-n}^{\infty} R_q(t) \\ &= A_n(q) \zeta_q(2) - B_n(q) \end{aligned} \quad (74)$$

(коэффициент при $\zeta_q(1)$ в (74) равен нулю согласно предложению 1), где

$$\begin{aligned} A_n(q) &= \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} k+n \\ k \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q^2 q^{k^2-2kn}, \\ B_n(q) &= \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} k+n \\ k \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q^2 q^{k^2-2kn} \sum_{l=1}^k \frac{q^l}{(1-q^l)^2} \\ &\quad + \sum_{k=0}^n \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \begin{bmatrix} k+n \\ k \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q q^{k(k+1)/2+j(j+1)/2-(k+j)n} \\ &\quad \times \frac{(-1)^{k+j}}{q^k - q^j} \left(q^{-k} \sum_{l=1}^k \frac{q^l}{1-q^l} - q^{-j} \sum_{l=1}^j \frac{q^l}{1-q^l} \right). \end{aligned}$$

Осуществляя теперь предельный переход при $q \rightarrow 1$, имеем

$$\begin{aligned} A_n &:= \lim_{q \rightarrow 1} A_n(q) = \sum_{k=0}^n \binom{k+n}{k} \binom{n}{k}^2, \\ B_n &:= \lim_{q \rightarrow 1} (1-q)^2 B_n(q) = \sum_{k=0}^n \binom{k+n}{k} \binom{n}{k}^2 \sum_{l=1}^k \frac{1}{l^2} \\ &\quad + \sum_{k=0}^n \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \binom{k+n}{k} \binom{n}{k} \binom{n}{j} \frac{(-1)^{k+j}}{j-k} \left(\sum_{l=1}^k \frac{1}{l} - \sum_{l=1}^j \frac{1}{l} \right). \end{aligned}$$

Остается заметить (см., например, [21; §4]), что последовательность линейных форм

$$H_n := A_n \zeta(2) - B_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

есть в точности последовательность Апери [12].

Список литературы

1. *Bézivin J.-P.* Indépendance linéaire des valeurs des solutions transcendentes de certaines équations fonctionnelles // Manuscripta Math. 1988. V. 61. P. 103–129.
2. *Borwein P.* On the irrationality of $\sum \frac{1}{q^n+r}$ // J. Number Theory. 1991. V. 37. P. 253–259.
3. *Duvernoy D.* Irrationalité d'un q -analogue de $\zeta(2)$ // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 1995. V. 321. №10. P. 1287–1289.
4. *Нестеренко Ю. В.* Модулярные функции и вопросы трансцендентности // Матем. сб. 1996. Т. 187. №9. С. 65–96.
5. *Нестеренко Ю. В.* О мере алгебраической независимости значений функций Рамануджана // Труды МИАН. 1997. Т. 218. С. 299–334.
6. *Rhin G., Viola C.* On a permutation group related to $\zeta(2)$ // Acta Arith. 1996. V. 77. №1. P. 23–56.
7. *Rhin G., Viola C.* The group structure for $\zeta(3)$ // Acta Arith. 2001. V. 97. №3. P. 269–293.
8. *Nesterenko Yu. V.* Integral identities and constructions of approximations to zeta-values // Actes des 12èmes rencontres arithmétiques de Caen (29–30 juin 2001). J. Théor. Nombres Bordeaux. 2003 (to appear).
9. *Zudilin W.* Arithmetic of linear forms involving odd zeta values // Preprint <http://arXiv.org/abs/math.NT/0206176> (August 2001).

10. *Bundschuh P., Väänänen K.* Arithmetical investigations of a certain infinite product // *Compositio Math.* 1994. V. 91. P. 175–199.
11. *Zudilin W.* Remarks on irrationality of q -harmonic series // *Manuscripta Math.* 2002. V. 107. № 4. P. 463–477.
12. *Apéry R.* Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$ // *Astérisque.* 1979. V. 61. P. 11–13.
13. *Van Assche W.* Little q -Legendre polynomials and irrationality of certain Lambert series // *Ramanujan J.* 2001. V. 5. № 3. P. 295–310.
14. *Гаспер Г., Рахман М.* Базисные гипергеометрические ряды. М.: Мир, 1993.
15. *Прасолов В. В.* Многочлены. Классические направления в математике. М.: МЦНМО, 2001.
16. *Ван дер Варден Б. Л.* Алгебра. М.: Наука, 1976.
17. *Mertens F.* Ueber einige asymptotische Gesetze der Zahlentheorie // *J. Reine Angew. Math.* 1874. V. 77. № 4. P. 289–338.
18. *Hardy G. H., Wright E. M.* An introduction to the theory of numbers. Oxford: Oxford Univ. Press, 1979.
19. *Borwein J. M., Borwein P. B.* Pi and the AGM. A study in analytic number theory and computational complexity. *Canad. Math. Soc. Ser. Monogr. Adv. Texts.* New York: Wiley, 1987.
20. *Данилов Л. В.* Рациональные приближения некоторых функций в рациональных точках // *Матем. заметки.* 1978. Т. 24. № 4. С. 449–458.
21. *Van Assche W.* Approximation theory and analytic number theory // *Special functions and differential equations (Madras 1997)* / ed. K. Srinivasa Rao et al. New Delhi: Allied Publ., 1998. P. 336–355.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: wadim@ips.ras.ru

Поступила в редакцию
08.11.2001