Общероссийский математический портал

В. Ф. Кириченко, А. Р. Рустанов, Дифференциальная геометрия квази-сасакиевых многообразий, *Матем. сб.*, 2002, том 193, номер 8, 71–100

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm675>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 16:26:43

УДК 514.76

В. Ф. Кириченко, А. Р. Рустанов

Дифференциальная геометрия квази-сасакиевых многообразий

Получена полная группа структурных уравнений квази-сасакиевой структуры. На их основе изучено строение основных тензоров квази-сасакиева многообразия: тензора Римана–Кристоффеля, тензора Риччи и т.п. Получены интересные характеристики квази-сасакиевых многообразий Эйнштейна. Установлены дополнительные свойства симметрии тензора Римана–Кристоффеля. С их помощью выделен новый класс – класс CR_1 квази-сасакиевых многообразий. Приведено исчерпывающее описание локального строения многообразий этого класса. Получена полная классификация (с точностью до $\mathcal{B}$ -преобразования метрики) многообразий этого класса, обладающих дополнительными свойствами типа изотропности.

Библиография: 19 названий.

Контактные и почти контактные структуры составляют один из наиболее содержательных примеров дифференциально-геометрических структур. Их теория является естественным обобщением так называемой контактной геометрии, имеющей существенные приложения в классической и квантовой механике. Их изучение именно как дифференциально-геометрических структур началось с появлением основополагающих работ Чжэня [1], Дж. Грея [2], Сасаки [3]. Почти контактные метрические структуры являются нечетномерным аналогом почти эрмитовых структур, и между этими классами структур существует ряд важных взаимосвязей. Например, почти контактная метрическая структура внутренним образом возникает на гиперповерхности почти эрмитова многообразия, на пространстве главного T^1 -расслоения над почти эрмитовым многообразием и т.д. Однако несмотря на это обстоятельство геометрия почти контактных метрических структур резко отличается от геометрии почти эрмитовых структур и требует при классическом подходе принципиально новых средств изучения [4]. Тем не менее, как показано первым из авторов, обе теории укладываются в общие рамки так называемых обобщенных почти эрмитовых структур, и такой подход позволил получить существенные продвижения в обоих направлениях [5]–[8].

Одним из главных аспектов аппарата обобщенной эрмитовой геометрии является метод присоединенных G -структур, широко используемый в настоящей работе. Эта работа посвящена изучению геометрии обширного класса почти контактных метрических многообразий келерова типа, известного под названием *квази-сасакиевых* (quasi-Sasakian [9]) *многообразий*. Квази-сасакиевы многообразия интересны тем, что они заполняют естественную нишу между двумя контактными аналогами келеровых многообразий, а именно сасакиевыми и косимплектическими

многообразиями. Квази-сасакиевы многообразия введены в работах Блэра. После своей диссертационной работы (1966 г.) им была опубликована статья [9], заложившая основы теории квази-сасакиевых многообразий. Впоследствии появились работы Танно [10], Канемаки [11], Янамото [12] и других авторов, в которых квази-сасакиевы многообразия рассматривались с различных точек зрения. Одно из наиболее популярных направлений изучения квази-сасакиевых многообразий заключено в исследовании их локального строения. Именно хорошо известно, что произведение многообразия Сасаки на келерово многообразие является квази-сасакиевым многообразием [13]. Возникает вопрос: когда квази-сасакиево многообразие имеет такое строение хотя бы локально? На этот счет Блэром [9] и Канемаки [11] получены некоторые достаточные условия. В нашей работе дан исчерпывающий ответ на этот вопрос в терминах дополнительных свойств симметрии тензора римановой кривизны квази-сасакиева многообразия. При этом естественно выделился так называемый класс CR_1 квази-сасакиевых многообразий, представляющий существенный интерес с различных точек зрения. Этот результат достигнут систематическим использованием полной группы структурных уравнений присоединенной G -структуры, полученной в настоящей работе, позволившим досконально изучить дополнительные свойства симметрии тензора римановой кривизны квази-сасакиева многообразия, выделить несколько интересных классов квази-сасакиевых многообразий и изучить их геометрические характеристики. Наиболее подробно исследованы квази-сасакиевы многообразия класса CR_1 . Получено в определенном смысле исчерпывающее описание локального строения многообразий этого класса. Приведена полная классификация (с точностью до $\mathcal{B}$ -преобразования метрики) квази-сасакиевых многообразий класса CR_1 постоянной Φ -голоморфной секционной кривизны, а также квази-сасакиевых многообразий этого класса, удовлетворяющих аксиоме Φ -голоморфных $(2r+1)$ -плоскостей, что существенно обобщает известные результаты Танно, касающиеся классификации сасакиевых пространственных форм [14], а также обобщает и углубляет результаты Огиуэ [15] и Исихары [16], касающиеся изучения почти контактных метрических многообразий, в частности многообразий Сасаки, удовлетворяющих аксиоме Φ -голоморфных $(2r+1)$ -плоскостей.

Пусть M – гладкое многообразие, $\mathfrak{X}(M)$ – $C^\infty(M)$ -модуль гладких векторных полей на M , d – оператор внешнего дифференцирования. Все многообразия, тензорные поля и подобные объекты предполагаются гладкими класса C^∞ . Напомним [4], что почти контактной метрической структурой на M называется совокупность $(\Phi, \xi, \eta, g = \langle \cdot, \cdot \rangle)$ тензорных полей на M , где Φ – тензор типа $(1, 1)$, называемый *структурным эндоморфизмом*, ξ и η – вектор и ковектор, называемые соответственно *структурным вектором* и *контактной формой*, g – (псевдо)риманова метрика. При этом

$$\begin{aligned} \eta(\xi) &= 1, & \Phi(\xi) &= 0, & \eta \circ \Phi &= 0, \\ \Phi^2 &= -\text{id} + \eta \otimes \xi, & \langle \Phi X, \Phi Y \rangle &= \langle X, Y \rangle - \eta(X)\eta(Y), \end{aligned}$$

$X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Легко проверить, что тензор $\Omega(X, Y) = \langle X, \Phi Y \rangle$ кососимметричен, т.е. является 2-формой на M . Он называется *фундаментальной формой структуры*. Хорошо известно, что необходимыми условиями существования почти контактной метрической структуры на многообразии является его нечетномерность и

ориентируемость. Многообразие, на котором фиксирована почти контактная метрическая структура, называется *почти контактным метрическим многообразием*. Два почти контактных метрических многообразия M_1 и M_2 называются *голоморфно изометричными*, или *эквивалентными*, если существует изометрический диффеоморфизм $f: M_1 \rightarrow M_2$ такой, что $\Phi_2 \circ f_* = f_* \circ \Phi_1$, где Φ_1 и Φ_2 – структурные эндоморфизмы многообразий M_1 и M_2 соответственно, f_* – отображение увлечения векторных полей, порожденное диффеоморфизмом f .

В случае, когда $d\eta = \Omega$, почти контактная метрическая структура называется *контактной метрической структурой*.

Почти контактная метрическая структура называется *нормальной*, если

$$N + 2d\eta \otimes \xi = 0,$$

где N – тензор Нейенхейса оператора Φ . Нормальная контактная метрическая структура называется *сасакиевой структурой*. Классическим примером сасакиевой структуры является почти контактная метрическая структура на нечетномерной сфере S^{2n+1} , канонически вложенной в комплексное евклидово пространство $\mathbb{C}^n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Почти контактная метрическая структура называется *квази-сасакиевой* (короче, *QS*-) структурой, если она нормальна, а ее фундаментальная форма замкнута.

Очевидно, всякая сасакиева структура является *QS*-структурой. Другим важным примером *QS*-структуры является *косимплектическая структура*, которую можно охарактеризовать как нормальную контактную метрическую структуру с замкнутыми контактной и фундаментальной формами [11].

Пусть (Φ, ξ, η, g) – почти контактная метрическая структура на многообразии M^{2n+1} . В модуле $\mathfrak{X}(M)$ внутренним образом определены два взаимно дополнительных проектора $\mathbf{m} = \eta \otimes \xi$ и $\mathbf{l} = \text{id} - \mathbf{m} = -\Phi^2$; таким образом, $\mathfrak{X}(M) = \mathcal{L} \oplus \mathcal{M}$, где $\mathcal{M} = \text{Im } \mathbf{m}$ – линейная оболочка структурного вектора, $\mathcal{L} = \text{Im } \Phi = \ker \eta$ – так называемое *контактное распределение*. Очевидно, распределения $\mathcal{M}$ и $\mathcal{L}$ инвариантны относительно Φ и взаимно ортогональны. Очевидно также, что

$$\tilde{\Phi}^2 = -\text{id}, \quad \langle \tilde{\Phi}X, \tilde{\Phi}Y \rangle = \langle X, Y \rangle, \quad X, Y \in \mathcal{L},$$

где $\tilde{\Phi} = \Phi|_{\mathcal{L}}$. Поэтому если $p \in M$, то в касательном пространстве $T_p(M)$ можно построить ортонормированный репер $(p, e_0, e_1, \dots, e_n, \Phi e_1, \dots, \Phi e_n)$, где $e_0 = \xi_p$. Такой репер будем называть *вещественно адаптированным репером*. С другой стороны, пусть $\mathcal{L}^c = \mathcal{L} \otimes \mathbb{C}$ – комплексификация распределения $\mathcal{L}$. В ней внутренним образом определены два взаимно дополнительных проектора $\sigma = \frac{1}{2}(\text{id} - \sqrt{-1}\Phi)$ и $\bar{\sigma} = \frac{1}{2}(\text{id} + \sqrt{-1}\Phi)$ на собственные подмодули $\mathcal{D}_{\Phi}^i$ и $\mathcal{D}_{\Phi}^{-i}$ эндоморфизма Φ , отвечающие собственным значениям $\sqrt{-1}$ и $-\sqrt{-1}$ соответственно. Следовательно, можно построить репер $(p, \varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \varepsilon_{\hat{1}}, \dots, \varepsilon_{\hat{n}})$ комплексификации пространства $T_p(M)$, где $\varepsilon_0 = \xi_p$, $\varepsilon_a = \sqrt{2}\sigma(e_a)$, $\varepsilon_{\hat{a}} = \sqrt{2}\bar{\sigma}(e_a)$, состоящий

из собственных векторов оператора Φ_p . Такой репер называется *A-репером*. Легко видеть, что матрицы компонент тензоров Φ_p и g_p в *A*-репере имеют вид соответственно

$$(\Phi_j^i) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{-1} I_n & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{-1} I_n \end{pmatrix}, \quad (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & I_n & 0 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где I_n – единичная матрица порядка n . Хорошо известно [5], [6], что совокупность таких реперов определяет *G*-структуру на M со структурной группой $\{1\} \times U(n)$,

представленной матрицами вида $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & \bar{A} \end{pmatrix}$, где $A \in U(n)$. Эта *G*-структура на-

зывается *присоединенной*. Еще раз подчеркнем, что пространство присоединенной *G*-структуры состоит из *комплексных* реперов, т.е. реперов комплексификации соответствующих касательных пространств. Поэтому, даже имея дело с вещественными тензорами, мы, говоря об их компонентах на пространстве присоединенной *G*-структуры, подразумеваем компоненты комплексных расширений этих тензоров. В свою очередь, комплексный тензор является комплексным расширением вещественного тензора тогда и только тогда, когда он инвариантен относительно оператора комплексного сопряжения. Следуя общепринятой традиции, будем называть такой тензор *вещественным*. В частности, сумма чистого комплексного тензора и комплексно сопряженного ему тензора является вещественным тензором.

На протяжении всей работы будем подразумевать, что индексы $i, j, k, \dots$ пробегают значения от 0 до $2n$, индексы $a, b, c, d, f, g, \dots$ – значения от 1 до n , и положим $\hat{a} = a + n, \hat{\hat{a}} = a, \hat{0} = 0$. Поскольку Φ и g – тензоры типов $(1, 1)$ и $(2, 0)$ соответственно, их компоненты на пространстве расслоения всех комплексных реперов над M удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} d\Phi_j^i + \Phi_k^i \omega_j^k - \Phi_j^k \omega_k^i &= \Phi_{j,k}^i \omega^k, \\ dg_{ij} + g_{kj} \omega_i^k + g_{ik} \omega_j^k &= g_{ij,k} \omega^k, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\{\omega^i\}, \{\omega_j^i\}$ – компоненты форм смещения и римановой связности ∇ соответственно, $\Phi_{j,k}^i, g_{ij,k}$ – компоненты ковариантного дифференциала тензоров Φ и g в этой связности соответственно. Более того, в силу определения римановой связности $\nabla g = 0$ и, значит,

$$g_{ij,k} = 0. \quad (3)$$

С учетом (1) и (3) соотношения (2) на пространстве присоединенной *G*-структуры переписутся в форме

$$\begin{aligned} \Phi_{b,k}^a &= 0, & \Phi_{b,k}^{\hat{a}} &= 0, & \Phi_{0,k}^0 &= 0, \\ \omega_b^a &= -\frac{1}{2}\sqrt{-1}\Phi_{b,k}^a\omega^k, & \omega_b^{\hat{a}} &= \frac{1}{2}\sqrt{-1}\Phi_{b,k}^{\hat{a}}\omega^k, \\ \omega_0^a &= -\sqrt{-1}\Phi_{0,k}^a\omega^k, & \omega_0^{\hat{a}} &= \sqrt{-1}\Phi_{0,k}^{\hat{a}}\omega^k, \\ \omega_b^0 &= \sqrt{-1}\Phi_{b,k}^0\omega^k, & \omega_b^{\hat{0}} &= -\sqrt{-1}\Phi_{b,k}^{\hat{0}}\omega^k, \\ \omega_0^0 &= 0, & \omega_j^i + \omega_i^j &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Кроме того, заметим, что в силу вещественности соответствующих форм и тензоров $\bar{\omega}^i = \omega^i$, $\bar{\omega}_j^i = \omega_j^i$, $\bar{\nabla}\Phi_{j,k}^i = \nabla\Phi_{j,\hat{k}}^i$, где $t \rightarrow \bar{t}$ – оператор комплексного сопряжения.

С учетом этих соотношений первая группа структурных уравнений римановой связности

$$d\omega^i = \omega_j^i \wedge \omega^j$$

на пространстве присоединенной G -структуры почти контактного метрического многообразия запишется в следующей форме, называемой *первой группой структурных уравнений почти контактного метрического многообразия*:

$$\begin{aligned} d\omega^a &= \omega_b^a \wedge \omega^b + B^{ab}{}_c \omega^c \wedge \omega_b + B^{abc} \omega_b \wedge \omega_c + B^{ab} \omega \wedge \omega_b + B^a{}_b \omega \wedge \omega^b, \\ d\omega_a &= -\omega_a^b \wedge \omega_b + B_{ab}{}^c \omega_c \wedge \omega^b + B_{abc} \omega^b \wedge \omega^c + B_{ab} \omega \wedge \omega^b + B_a{}^b \omega \wedge \omega_b, \\ d\omega &= C_{ab} \omega^a \wedge \omega^b + C^{ab} \omega_a \wedge \omega_b + C_b^a \omega^b \wedge \omega_a + C_a \omega \wedge \omega^a + C^a \omega \wedge \omega_a, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} \omega &= \omega^0, & \omega_i &= g_{ij}\omega^j, \\ B^{abc} &= \frac{\sqrt{-1}}{2} \Phi^a_{[\hat{b}, \hat{c}]}, & B_{abc} &= -\frac{\sqrt{-1}}{2} \Phi^{\hat{a}}_{[b, c]}, \\ B^{ab}{}_c &= -\frac{\sqrt{-1}}{2} \Phi^a_{\hat{b}, \hat{c}}, & B_{ab}{}^c &= \frac{\sqrt{-1}}{2} \Phi^{\hat{a}}_{b, \hat{c}}, \\ B^{ab} &= -\sqrt{-1} \left(\frac{1}{2} \Phi^a_{\hat{b}, 0} - \Phi^a_{0, \hat{b}} \right), & B_{ab} &= \sqrt{-1} \left(\frac{1}{2} \Phi^{\hat{a}}_{b, 0} - \Phi^{\hat{a}}_{0, b} \right), \\ B^a{}_b &= \sqrt{-1} \Phi^a_{0, \hat{b}}, & B_a{}^b &= -\sqrt{-1} \Phi^{\hat{a}}_{0, \hat{b}}, \\ C^{ab} &= \sqrt{-1} \Phi^0_{[\hat{a}, \hat{b}]}, & C_{ab} &= -\sqrt{-1} \Phi^0_{[a, b]}, \\ C_b^a &= -\sqrt{-1} (\Phi^0_{b, \hat{a}} + \Phi^0_{\hat{a}, b}), & C^a &= -\sqrt{-1} \Phi^0_{a, 0}, \quad C_a = \sqrt{-1} \Phi^0_{a, 0}. \end{aligned} \quad (6)$$

При этом

$$\overline{B^{abc}} = B_{abc}, \quad \overline{B^{ab}} = B_{ab}, \quad \overline{\omega_b^a} = -\omega_a^b. \quad (7)$$

Напомним [17], что тензором (или оператором) Нейенхейса эндоморфизма Φ касательного пучка многообразия называется тензор N типа $(2,1)$, определяемый формулой

$$N(X, Y) = \frac{1}{4} (\Phi^2[X, Y] + [\Phi X, \Phi Y] - \Phi[\Phi X, Y] - \Phi[X, \Phi Y]), \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Его обращение в нуль равносильно интегрируемости структуры [17]. Прямой подсчет с учетом тождества $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ показывает, что

$$N(X, Y) = \frac{1}{4} (\nabla_{\Phi X}(\Phi)Y - \Phi \nabla_X(\Phi)Y - \nabla_{\Phi Y}(\Phi)X + \Phi \nabla_Y(\Phi)X). \quad (8)$$

С учетом (4) получаем отсюда, что на пространстве присоединенной G -структуры компоненты тензора N определяются тождествами

$$\begin{aligned} N_{ab}^0 &= -\frac{\sqrt{-1}}{2} \Phi_{0[a,b]}, \quad N_{\widehat{a}b}^0 = -N_{b\widehat{a}}^0 = -\frac{\sqrt{-1}}{2} \Phi_{(\widehat{a},b)}^0, \quad N_{\widehat{a}\widehat{b}}^0 = \frac{\sqrt{-1}}{2} \Phi^{0[a,b]}, \\ N_{\widehat{b}0}^a &= -N_{0\widehat{b}}^a = \frac{\sqrt{-1}}{4} \Phi^{ab,0} - \frac{\sqrt{-1}}{2} \Phi^{a0,b}, \quad N_{\widehat{b}\widehat{c}}^a = \sqrt{-1} \Phi^{a[b,c]}, \\ N_{\widehat{b}c}^{\widehat{a}} &= -\sqrt{-1} \Phi_{a[b,c]}, \quad N_{b0}^{\widehat{a}} = -N_{0b}^{\widehat{a}} = \frac{\sqrt{-1}}{2} \Phi_{a0,b} - \frac{\sqrt{-1}}{4} \Phi_{ab,0}. \end{aligned} \quad (9)$$

Остальные компоненты тензора Нейенхейса тождественно равны нулю.

С другой стороны, учитывая, что $\omega = \pi^*(\eta)$, где π – естественная проекция пространства присоединенной G -структуры на многообразие M , а также то обстоятельство, что на пространстве присоединенной G -структуры $\xi^a = \xi^{\widehat{a}} = 0$, $\xi^0 = 1$, с учетом (5) находим, что на этом пространстве

$$\begin{aligned} (\xi \otimes d\eta)_{ij}^a &= (\xi \otimes d\eta)_{ij}^{\widehat{a}} = 0, \\ (\xi \otimes d\eta)_{bc}^0 &= -\sqrt{-1} \Phi_{[b,c]}^0, \\ (\xi \otimes d\eta)_{b\widehat{c}}^0 &= -(\xi \otimes d\eta)_{\widehat{c}b}^0 = -\sqrt{-1} \Phi_{(b,\widehat{c})}^0, \\ (\xi \otimes d\eta)_{a0}^0 &= -(\xi \otimes d\eta)_{0a}^0 = -\frac{\sqrt{-1}}{2} \Phi_{a,0}^0, \\ (\xi \otimes d\eta)_{\widehat{a}0}^0 &= -(\xi \otimes d\eta)_{0\widehat{a}}^0 = \frac{\sqrt{-1}}{2} \Phi_{\widehat{a},0}^0, \\ (\xi \otimes d\eta)_{00}^0 &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

С учетом (9) и (10) несложно подсчитать, что почти контактная метрическая структура нормальна тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G -структуры

$$\Phi_{b,c}^{\widehat{a}} = \Phi_{b,\widehat{c}}^a = \Phi_{b,0}^{\widehat{a}} = \Phi_{b,0}^a = \Phi_{a,b}^0 = \Phi_{a,\widehat{b}}^0 = \Phi_{a,0}^0 = \Phi_{\widehat{a},0}^0 = 0, \quad (11)$$

в силу чего первая группа (5) структурных уравнений нормальной структуры примет вид:

$$\begin{aligned} d\omega &= C_b^a \omega^b \wedge \omega_a, \\ d\omega^a &= \omega_b^a \wedge \omega^b + B^{ab}_c \omega^c \wedge \omega_b + B^a_b \omega \wedge \omega^b, \\ d\omega_a &= -\omega_a^b \wedge \omega_b + B_{ab}^c \omega_c \wedge \omega^b + B_a^b \omega \wedge \omega_b. \end{aligned} \quad (12)$$

Заметим, что соотношения (11) с учетом (4) можно переписать в форме

$$\Phi_{a,0}^i = 0, \quad \Phi_{b,c}^i = 0. \quad (13)$$

Рассмотрим первое из этих соотношений. В фиксированной точке $p \in M$ оно, очевидно, равносильно соотношению $\nabla_{\varepsilon_0}(\Phi)(\varepsilon_a) = 0$. Поскольку $\xi_p = \varepsilon_0$, а векторы $\{\varepsilon_a\}$ образуют базис подпространства $(\mathcal{D}_{\Phi}^i)_p$, это соотношение равносильно тождеству

$$\nabla_{\xi}(\Phi)\widetilde{X} = 0, \quad \widetilde{X} \in \mathcal{D}_{\Phi}^i. \quad (14)$$

Учитывая, что эндоморфизм $\sigma = \frac{1}{2}(\text{id} - \sqrt{-1}\Phi)$ является проектором модуля $\mathcal{L}^c$ на подмодуль $\mathcal{D}_\Phi^i$, тождество (14) можно переписать в форме

$$\nabla_\xi(\Phi)(\text{id} - \sqrt{-1}\Phi)X = 0, \quad X \in \mathcal{L}.$$

Раскрывая это соотношение по линейности и выделяя действительную и мнимую части полученного равенства, приходим к эквивалентному тождеству:

$$\nabla_\xi(\Phi)X = 0, \quad X \in \mathcal{L}.$$

Наконец, учитывая, что $\mathcal{L} = \text{Im } \Phi$, получаем, что последнее тождество равносильно тождеству

$$\nabla_\xi(\Phi)\Phi X = 0, \quad X \in \mathfrak{X}(M). \quad (*)$$

Назовем описанную процедуру *процедурой восстановления тождества*.

Аналогично, проводя процедуру восстановления по второму из соотношений (13), получаем, что оно равносильно тождеству

$$\nabla_{\Phi X}(\Phi)\Phi Y - \nabla_{\Phi^2 X}(\Phi)\Phi^2 Y = 0, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M). \quad (**)$$

Заметим, что тождества (*) и (**) равносильны тождеству

$$\nabla_X(\Phi)\Phi Y - \nabla_{\Phi X}(\Phi)\Phi^2 Y = 0. \quad (15)$$

В самом деле, заменив в (15) X на ξ (соответственно на ΦX), мы получим тождества (*) и (**) соответственно. С другой стороны, пусть справедливы тождества (*) и (**), и пусть $X \in \mathfrak{X}(M)$. Тогда $X = \lambda\xi + \Phi Z$ для некоторых $\lambda \in C^\infty(M)$ и $Z \in \mathfrak{X}(M)$. С учетом этого

$$\begin{aligned} \nabla_X(\Phi)\Phi Y &= \lambda\nabla_\xi(\Phi)\Phi Y + \nabla_{\Phi Z}(\Phi)\Phi Y = \nabla_{\Phi Z}(\Phi)\Phi Y \\ &= \nabla_{\Phi^2 Z}(\Phi)\Phi^2 Y = \nabla_{\Phi X}(\Phi)\Phi^2 Y. \end{aligned}$$

Тем самым установлен удобный аналитический критерий нормальности почти контактного метрического многообразия:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Почти контактное метрическое многообразие нормально тогда и только тогда, когда на нем выполняется тождество*

$$\nabla_X(\Phi)\Phi Y - \nabla_{\Phi X}(\Phi)\Phi^2 Y = 0, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Далее, компоненты фундаментальной формы структуры на пространстве присоединенной G -структуры имеют вид $\Omega_{a\hat{b}} = -\Omega_{\hat{b}a} = -\sqrt{-1}\delta_a^b$, а значит,

$$\Omega = -2\sqrt{-1}\omega^a \wedge \omega_a. \quad (16)$$

Дифференцируя это соотношение внешним образом с учетом (12), убеждаемся, что эта форма на нормальном многообразии замкнута тогда и только тогда, когда

$$\Phi_{\hat{b},c}^a = \Phi_{\hat{b},\hat{c}}^{\hat{a}} = 0, \quad \Phi_{0,\hat{b}}^{\hat{a}} = \Phi_{0,a}^b, \quad (17)$$

откуда с учетом (6) и (11) находим, что

$$B^{ab}_c = B_{ab}^c = 0, \quad C_b^a = 2B^a_b = -2B_b^a.$$

Следовательно, первая группа структурных уравнений $Q\mathcal{S}$ -структуры имеет вид:

$$\begin{aligned} d\omega &= 2B_b^a\omega^b \wedge \omega_a, \\ d\omega^a &= \omega_b^a \wedge \omega^b + B_b^a\omega \wedge \omega^b, \\ d\omega_a &= -\omega_a^b \wedge \omega_b - B_a^b\omega \wedge \omega_b, \end{aligned} \quad (18)$$

где $B_b^a = B^a_b = -B_b^a = \sqrt{-1}\Phi_{0,b}^a$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Очевидно, $\overline{B_b^a} = -B_a^b$.

Далее, с учетом (16) и (18) условие $d\eta = \Omega$ (соответственно $d\eta = 0$) на пространстве присоединенной G -структуры $Q\mathcal{S}$ -многообразия задается соотношениями $B_b^a = -\sqrt{-1}\delta_b^a$ (соответственно $B_b^a = 0$). Получено

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. $Q\mathcal{S}$ -структура является сасакиевой (соответственно косимплектической) тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G -структуры

$$B_b^a = -\sqrt{-1}\delta_b^a \quad (\text{соответственно } B_b^a = 0).$$

Стандартная процедура дифференциального продолжения соотношений (17) позволяет получить вторую группу структурных уравнений $Q\mathcal{S}$ -структуры:

$$d\omega_b^a = \omega_c^a \wedge \omega_b^c + (A_{bc}^{ad} - 2B_b^a B_c^d) \omega^c \wedge \omega_d + B_{bc}^a \omega \wedge \omega^c + B_d^{ac} \omega \wedge \omega^c, \quad (19)$$

где $\{A_{bc}^{ad}\}$ – семейство функций на пространстве присоединенной G -структуры, служащих компонентами так называемого *тензора кривизны присоединенной Q -алгебры* [5], или *структурного тензора второго рода*, причем

$$A_{[bc]}^{ad} = 0, \quad A_{bc}^{[ad]} = 0, \quad \overline{A_{bc}^{ad}} = A_{ad}^{bc}. \quad (20)$$

Кроме того,

$$dB_b^a - B_b^h \omega_h^a + B_h^a \omega_b^h = B_{bc}^a \omega^c + B_b^{ac} \omega_c, \quad (21)$$

где B_{bc}^a, B_b^{ac} – подходящие функции на пространстве присоединенной G -структуры, причем

$$B_{[bc]}^a = B_b^{[ac]} = 0, \quad (22_1)$$

$$\overline{B_{bc}^a} = -B_a^{bc}. \quad (22_2)$$

Из (21) следует, что набор функций $\{B_b^a\}$ является набором компонент (комплексного) тензора B типа (1,1) на M , который мы назовем *структурным тензором первого рода*. В силу замечания 1 этот тензор является косоэрмитовым оператором в модуле $\mathcal{D}_\Phi^i$ относительно стандартной эрмитовой метрики [5].

Сравнивая соотношения (19) со второй группой структурных уравнений римановой связности

$$d\omega_j^i = \omega_k^i \wedge \omega_j^k + \frac{1}{2} R_{jkl}^i \omega^k \wedge \omega^l, \quad (23)$$

где R_{jkl}^i – компоненты тензора Римана–Кристоффеля, в силу линейной независимости базисных форм получаем, что на пространстве присоединенной G -структуры

$$R_{\hat{a}bcd} = A_{bc}^{ad} - 2B_b^a B_c^d - B_c^a B_b^d, \quad (24_1)$$

$$R_{\hat{a}b0c} = B_{bc}^a, \quad (24_2)$$

$$R_{\hat{a}b0\hat{c}} = B_b^{ac}. \quad (24_3)$$

Кроме того, с учетом (4), (6), (11) и (17) имеем:

$$\begin{aligned}\omega^{ab} &\equiv \omega_b^a = 0, & \omega_{ab} &\equiv \omega_b^{\widehat{a}} = 0, \\ \omega_0^a &= -B_c^a \omega^c, & \omega_a^0 &= -B_a^c \omega_c.\end{aligned}\quad (25)$$

Дифференциальное продолжение этих соотношений с учетом (18), (21), (23) и (25) приводит к равенствам

$$R_{\widehat{a}bcd} = 2B_{[c}^a B_{d]}^b, \quad R_{\widehat{a}0b0} = B_c^a B_b^c, \quad (26)$$

а также к соотношениям, полученным из (24) и (26) с учетом классических свойств симметрии и вещественности тензора Римана–Кристоффеля. Все остальные компоненты этого тензора равны нулю.

С использованием (24) и (26) вычислим компоненты $S_{ij} = R_{ij}^k$ тензора Риччи S на пространстве присоединенной G -структуры:

$$S_{ab} = S_{\widehat{a}\widehat{b}} = 0, \quad (27_1)$$

$$S_{\widehat{a}b} = S_{b\widehat{a}} = 2B_c^a B_b^c - A_{bc}^{ac}, \quad (27_2)$$

$$S_{a0} = S_{0a} = B_{ab}^b, \quad (27_3)$$

$$S_{\widehat{a}0} = S_{0\widehat{a}} = B_b^{\widehat{a}b}, \quad (27_4)$$

$$S_{00} = -2B_b^a B_a^b. \quad (27_5)$$

В частности, скалярная кривизна $\varkappa$ $Q\mathcal{S}$ -многообразия вычисляется по формуле

$$\varkappa = g^{ij} S_{ij} = 2(B_b^a B_a^b - A_{ab}^{ab}). \quad (28)$$

Пусть, в частности, M – многообразие Эйнштейна с космологической константой ε , т.е. $S_{ij} = \varepsilon g_{ij}$. Тогда $S_{\widehat{a}b} = \varepsilon \delta_b^{\widehat{a}}$, $S_{a0} = 0$, $S_{00} = \varepsilon$. С учетом (27₃) $B_{ac}^c = 0$ и, кроме того, с учетом (27₂) и (27₅)

$$2 \operatorname{tr}(B^2) - A_{ac}^{ac} = \varepsilon n, \quad -2 \operatorname{tr}(B^2) = \varepsilon,$$

откуда $A_{ac}^{ac} = 2(n+1) \operatorname{tr}(B^2)$, $\varkappa = -2(2n+1) \operatorname{tr}(B^2)$,

$$\varepsilon = -2 \operatorname{tr}(B^2). \quad (29)$$

Заметим, что в силу косоэрмитовости оператора B_p при подходящем выборе A -репера $\{p, \varepsilon_a, \varepsilon_{\widehat{b}}\}$ он приводится к диагональному виду с чисто мнимыми собственными значениями, т.е.

$$B_b^a = B_b \delta_b^a, \quad B_b = \sqrt{-1} \alpha_b, \quad \alpha_b \in \mathbb{R}, \quad b = 1, \dots, n.$$

В таком базисе $\operatorname{tr}(B^2) = -\sum_{b=1}^n (\alpha_b)^2 \leq 0$. Из (29) следует, что $\varepsilon \geq 0$. Если $\varepsilon = 0$, то $\operatorname{tr}(B^2) = 0$, т.е. $0 = B_b^a B_a^b = -\sum_{a,b=1}^n |B_b^a|^2$, а значит, $B_b^a = 0$, т.е. M – косимплектическое многообразие. Согласно [18] M локально голоморфно изометрично многообразию вида $\mathbb{R} \times N^{2n}$, где N^{2n} – риччи-плоское келерово многообразие. Если $\varepsilon > 0$, то по классической теореме Майерса [17] в случае полноты M компактно и имеет конечную фундаментальную группу. Мы получаем следующий результат:

ТЕОРЕМА 1. *Полное QS -многообразие Эйнштейна является либо риччи-плоским косимплектическим многообразием, а значит, голоморфно изометрично покрывается произведением вещественной прямой на риччи-плоское келерово многообразие, либо компактно и имеет конечную фундаментальную группу.*

Выясним геометрический смысл первого структурного тензора. Поскольку ξ – тензор типа $(0, 1)$, его компоненты на пространстве расслоения реперов многообразия M удовлетворяют уравнениям

$$d\xi^i - \xi^j \omega_j^i = \xi^i_{,j} \omega^j,$$

где $\xi^i_{,j}$ – компоненты тензора $\mathcal{B} = \nabla \xi$. Расписывая эти соотношения на пространстве присоединенной G -структуры с учетом (25) и того обстоятельства, что на этом пространстве $\xi^a = 0$, $\xi^{\hat{b}} = 0$, $\xi^0 = 1$, получаем, что

$$\xi^a_{,b} = B_b^a, \quad \xi^a_{,\hat{b}} = \xi^a_{,0} = 0, \quad \xi^0_{,a} = \xi^0_{,\hat{a}} = \xi^0_{,0} = 0.$$

С учетом вещественности вектора ξ и в силу замечания 1 этот результат можно сформулировать следующим образом:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *На пространстве присоединенной G -структуры матрица оператора $\mathcal{B}$ имеет вид:*

$$(\mathcal{B}_j^i) \equiv (\xi^i_{,j}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (B_b^a) & 0 \\ 0 & 0 & -(B_b^a)^T \end{pmatrix}. \quad (30)$$

В частности, распределение $\mathcal{D}_\Phi^i$ инвариантно относительно этого оператора, причем $\mathcal{B}|_{\mathcal{D}_\Phi^i} = B$. Кроме того, $\text{Im } \mathcal{B} \subset \mathcal{L}$, $\mathcal{M} \subset \ker \mathcal{B}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Оператор $\mathcal{B}$ обладает следующими свойствами:*

$$\mathcal{B} \circ \Phi = \Phi \circ \mathcal{B}, \quad (31_1)$$

$$\langle \mathcal{B}(X), Y \rangle = -\langle X, \mathcal{B}Y \rangle \quad (X, Y \in \mathfrak{X}(M)). \quad (31_2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО немедленно следует из (30) и (1). Например,

$$\langle \mathcal{B}X, Y \rangle = g_{ij} \mathcal{B}_j^i X^j Y_i = B_b^a X^b Y_a + B_{\hat{b}}^{\hat{a}} X^{\hat{b}} Y_{\hat{a}} = B_b^a X^b Y_a - B_a^b X_b Y^a.$$

Аналогично

$$\langle X, \mathcal{B}Y \rangle = g_{ij} \mathcal{B}_k^j X^i Y^k = B_b^a Y^b X_a + B_{\hat{b}}^{\hat{a}} Y^{\hat{b}} X_{\hat{a}} = B_b^a Y^b X_a - B_a^b Y_b X^a,$$

откуда следует (31₂). Точно так же доказывается и (31₁).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. На пространстве присоединенной G -структуры тензор $\nabla \mathcal{B}$ имеет следующие компоненты:

$$\mathcal{B}_{b,c}^a = B_{bc}^a, \quad (32_1)$$

$$\mathcal{B}_{b,\hat{c}}^a = B_b^{ac}, \quad (32_2)$$

$$\mathcal{B}_{0,b}^a = -B_c^a B_b^c, \quad \mathcal{B}_{b,\hat{c}}^0 = B_b^h B_h^c, \quad (32_3)$$

плюс соотношения, полученные с учетом вещественности этого тензора. Остальные компоненты этого тензора нулевые.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\mathcal{B}$ – тензор типа $(1, 1)$, его компоненты на пространстве расслоения реперов многообразия M удовлетворяют уравнениям

$$d\mathcal{B}_j^i + \mathcal{B}_j^k \omega_k^i - \mathcal{B}_k^i \omega_j^k = \mathcal{B}_{j,k}^i \omega^k.$$

Расписывая эти соотношения на пространстве присоединенной G -структуры с учетом (21), (25) и (30), ввиду линейной независимости базисных форм получим (32).

Выясним геометрический смысл соотношений (24₂), (24₃), проведя над ними процедуру восстановления (см. (13)–(15)). Прежде всего отметим, что в силу вещественности тензора R и ввиду (22) эти соотношения равносильны, получаясь друг из друга операцией комплексного сопряжения. С учетом предложения 3, а также соотношений (24), (26) и последующих замечаний имеем: $R^a{}_{b0c} = \mathcal{B}_{b,c}^a$, $R^{\hat{a}}{}_{b0c} = \mathcal{B}_{b,c}^{\hat{a}} = 0$, $R^0{}_{b0c} = \mathcal{B}_{b,c}^0 = 0$. Таким образом, $R^i{}_{b0c} = \mathcal{B}_{b,c}^i$, а значит, в каждой точке $p \in M$

$$R(\varepsilon_0, \varepsilon_c)\varepsilon_b = \nabla_{\varepsilon_c}(\mathcal{B})\varepsilon_b.$$

Поскольку $\xi_p = \varepsilon_0$, а векторы $\{\varepsilon_a\}$ образуют базис подпространства $(\mathcal{D}_{\Phi}^i)_p$, последнее соотношение равносильно тождеству

$$R(\xi, X)Y = \nabla_X(\mathcal{B})Y, \quad X, Y \in \mathcal{D}_{\Phi}^i. \quad (33)$$

Учитывая, что эндоморфизм $\sigma = \frac{1}{2}(\text{id} - \sqrt{-1}\Phi)$ является проектором модуля $\mathcal{L}^c$ на подмодуль $\mathcal{D}_{\Phi}^i$, тождество (33) можно переписать в форме

$$R(\xi, X - \sqrt{-1}\Phi(X))(Y - \sqrt{-1}\Phi(Y)) = \nabla_{X - \sqrt{-1}\Phi(X)}(\Phi)(Y - \sqrt{-1}\Phi(Y)),$$

где $X \in \mathcal{L}$. Раскрывая это соотношение по линейности и выделяя действительную и мнимую части полученного равенства, приходим к эквивалентному тождеству:

$$R(\xi, X)Y - R(\xi, \Phi X)\Phi Y = \nabla_X(\mathcal{B})Y - \nabla_{\Phi X}(\mathcal{B})\Phi Y, \quad X, Y \in \mathcal{L}.$$

Наконец, поскольку эндоморфизм $\mathbf{1} = -\Phi^2$ является проектором на распределение $\mathcal{L}$, получаем, что последнее тождество равносильно тождеству

$$R(\xi, \Phi^2 X)\Phi^2 Y - R(\xi, \Phi X)\Phi Y = \nabla_{\Phi^2 X}(\mathcal{B})\Phi^2 Y - \nabla_{\Phi X}(\mathcal{B})\Phi Y, \quad (34)$$

где $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ – произвольные векторные поля. Доказана

ТЕОРЕМА 2. Тензор Римана–Кристоффеля $Q\mathcal{S}$ -многообразия обладает дополнительным свойством симметрии, выраженным тождеством (34).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. С учетом (32) непосредственно проверяется, что функции системы $\{B_{ab}^c, \overline{B_{ab}^c} = -B_c^{ab}\}$ служат компонентами вещественного тензора

$$\mathbf{B}(X, Y) = \frac{1}{2}(\nabla_{\Phi^2 X}(\Phi)(\Phi^2 Y) - \nabla_{\Phi X}(\Phi)(\Phi Y)).$$

Из (34) вытекает тождество

$$\mathbf{B}(X, Y) = \frac{1}{2}(R(\xi, \Phi^2 X)\Phi^2 Y - R(\xi, \Phi X)\Phi Y),$$

которое в известной мере определяет геометрический смысл тензора $\mathbf{B}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Скажем, что $Q\mathcal{S}$ -многообразие M удовлетворяет первому дополнительному тождеству кривизны, или является многообразием класса CR_1 , если

$$R(\xi, \Phi^2 X)\Phi^2 Y - R(\xi, \Phi X)\Phi Y = 0, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M). \quad (35)$$

ТЕОРЕМА 3. $Q\mathcal{S}$ -многообразие M является многообразием класса CR_1 тогда и только тогда, когда на нем $\mathbf{B} = 0$ или, что равносильно, на M выполнено тождество

$$\nabla_{\Phi^2 X}(\mathcal{B})\Phi^2 X - \nabla_{\Phi X}(\mathcal{B})\Phi X = 0, \quad X \in \mathfrak{X}(M). \quad (36)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (34) следует, что многообразие M принадлежит классу CR_1 тогда и только тогда, когда на нем выполняется тождество

$$\nabla_{\Phi^2 X}(\mathcal{B})\Phi^2 Y - \nabla_{\Phi X}(\mathcal{B})\Phi Y = 0, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M), \quad (37)$$

т.е. $\mathbf{B} = 0$. С другой стороны, проводя процедуру восстановления соотношения (22₁) с учетом (32₁), (32₂) и замечания 2, убеждаемся, что тензор, стоящий в левой части тождества (37), симметричен, а следовательно, равенство нулю этого тензора равносильно равенству нулю его симметризации, что, в свою очередь, равносильно тождеству (36).

В качестве приложения этого результата приведем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Сасакиево и косимплектическое многообразия являются многообразиями класса CR_1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что в силу равенств (1) и предложения 2 для са-
скиевых и косимплектических структур $\mathcal{B} = \varepsilon \Phi$, где $\varepsilon = -1$ либо 0 соответствен-
но. Но в силу нормальности обоих видов структур тождества (37), а тем более (36),
выполнены в силу предложения 1.

Другой важный пример $Q\mathcal{S}$ -многообразий класса CR_1 дают пространства ка-
нонических главных T^1 -расслоений над келеровыми многообразиями. Характе-
ристический класс таких главных расслоений порожден формой Риччи [19]. Пря-
мым подсчетом можно убедиться, что почти контактная метрическая структура,
канонически индуцированная на пространстве такого расслоения, действительно
является $Q\mathcal{S}$ -структурой, причем выполнено тождество (36).

Пусть M – $Q\mathcal{S}$ -многообразие класса CR_1 . Заметим, что тождество (37) на
пространстве присоединенной G -структуры равносильно тождествам

$$B_{bc}^a = 0, \quad B_b^{ac} = 0. \quad (38)$$

С учетом этого, проводя процедуру восстановления соотношений (32), убеждаем-
ся, что они равносильны тождеству

$$\nabla_X(\mathcal{B})Y = \langle \mathcal{B}^2 X, Y \rangle \xi - \eta(Y) \mathcal{B}^2 X, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M). \quad (39)$$

Пусть M – $Q\mathcal{S}$ -многообразие. Введем в рассмотрение две связности на M : связ-
ность

$$\widehat{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \eta(X) \mathcal{B}(Y)$$

(первая каноническая связность) и связность

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \langle \mathcal{B}(X), Y \rangle \xi - \mathcal{B}(X) \eta(Y)$$

(вторая каноническая связность). Первая каноническая связность замечательна
тем, что в ней первая группа структурных уравнений (18) записывается в форме

$$d\omega = 2B_b^a \omega^b \wedge \omega_a, \quad d\omega^a = \zeta_b^a \wedge \omega^b, \quad d\omega_a = -\zeta_a^b \wedge \omega_b, \quad (18')$$

где $\{\zeta_j^i\}$ – компоненты формы первой канонической связности. При этом $\zeta_b^a = \omega_b^a +$
 $B_b^a \omega$, $\zeta_b^{\widehat{a}} = -\zeta_a^b$, $\zeta_b^{\widehat{a}} = \omega_b^{\widehat{a}}$, $\zeta_b^a = \omega_b^a$. Основное свойство второй канонической
связности определяется следующим утверждением.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Тензоры $\mathcal{B}$, Ψ , ξ , η , g $Q\mathcal{S}$ -многообразия класса CR_1
параллельны во второй канонической связности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что из (30) непосредственно следу-
ет, что $\eta \circ \mathcal{B} = 0$ и $\mathcal{B}(\xi) = 0$. Далее, если обозначить

$$T(X, Y) = \langle \mathcal{B}(X), Y \rangle \xi - \mathcal{B}(X) \eta(Y), \quad (40)$$

то T – это тензор аффинной деформации от римановой связности к первой кано-
нической связности. Следовательно,

$$\widetilde{\nabla}_X(\mathcal{B})Y = \nabla_X(\mathcal{B})Y + T(X, \mathcal{B}(Y)) - \mathcal{B} \circ T(X, Y).$$

Подставляя сюда (39) и (40), с учетом сделанных замечаний и ввиду (31₂) получа-
ем, что $\widetilde{\nabla}_X(\mathcal{B})Y = 0$, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Аналогично доказывается параллельность
остальных тензоров.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Во введенных обозначениях $\mathcal{L} = \mathcal{D}' \oplus \mathcal{D}''$, причем подмодули $\mathcal{D}' = \text{Im } \mathcal{B}$ и $\mathcal{D}'' = \ker \mathcal{B}|_{\mathcal{L}}$ взаимно ортогональны и являются расщеплениями определенной размерности на многообразии M , инвариантными относительно действия эндоморфизмов Φ и $\mathcal{B}$.

Доказательство немедленно вытекает из (31) и из предложения 7.

В частности, корректно следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Рангом $Q\mathcal{S}$ -структуры на многообразии M назовем число $r = \text{rank } \mathcal{B} = \dim \mathcal{D}'$. Если $\text{rank } \mathcal{B} = \dim M - 1$, многообразие M назовем $Q\mathcal{S}$ -многообразием максимального ранга.

Например, из предложения 2 вытекает, что многообразие Сасаки является $Q\mathcal{S}$ -многообразием максимального ранга.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Аналогично предложению 8 доказывается, что для $Q\mathcal{S}$ -многообразия класса CR_1

$$\mathcal{L} = \bigoplus_{k=1}^m \mathcal{D}_{\lambda_k},$$

где $\mathcal{D}_{\lambda_k} = (\mathcal{D}_{\mathcal{B}}^{\lambda_k} \oplus \mathcal{D}_{\mathcal{B}}^{-\lambda_k}) \cap \mathcal{L}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ — попарно различные по модулю собственные значения эндоморфизма $\mathcal{B}$, $\mathcal{D}_{\mathcal{B}}^{\lambda_k}$ — собственный подмодуль эндоморфизма $\mathcal{B}$, отвечающий собственному значению λ_k . При этом $\mathcal{D}_{\lambda_i} \perp \mathcal{D}_{\lambda_j}$ ($i \neq j$).

ТЕОРЕМА 4. $Q\mathcal{S}$ -многообразие M класса CR_1 либо является косимплектическим многообразием, либо локально эквивалентно произведению $Q\mathcal{S}$ -многообразия максимального ранга и келерова многообразия.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предложения 8 вытекает, что присоединенная G -структура многообразия M допускает редукцию по подгруппе $\{1\} \times U(r) \times U(s)$, где $2r = \dim \mathcal{D}'$, $2s = \dim \mathcal{D}''$. Пространство сокращенной G -структуры состоит из A -реперов, векторы $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r$ которых принадлежат комплексификации подпространства $(\mathcal{D}')_p$, а векторы $\varepsilon_{r+1}, \dots, \varepsilon_n$ — комплексификации подпространства $(\mathcal{D}'')_p$, где $p \in M$ — вершина репера. Условимся, что индексы $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ пробегают значения от 1 до r , индексы ρ, σ, τ — значения от 0 до r , а индексы $\varphi, \psi, \chi, \dots$ — значения от $r+1$ до n . Очевидно, на пространстве сокращенной G -структуры $B_{\varphi}^{\alpha} = 0$, $B_{\alpha}^{\varphi} = 0$, $B_{\psi}^{\varphi} = 0$. Дифференцируя эти соотношения внешним образом с учетом (21), (38) и невырожденности оператора $\mathcal{B}|_{\mathcal{D}'}$, получаем, что $\omega_{\varphi}^{\alpha} = 0$, $\omega_{\alpha}^{\varphi} = 0$. С учетом этих замечаний структурные уравнения (18), (19) на пространстве сокращенной G -структуры распадутся на две группы:

$$\begin{aligned} d\omega &= 2B_{\beta}^{\alpha}\omega^{\beta} \wedge \omega_{\alpha}, \\ d\omega^{\alpha} &= \omega_{\beta}^{\alpha} \wedge \omega^{\beta} + B_{\beta}^{\alpha}\omega \wedge \omega^{\beta}, \\ d\omega_{\alpha} &= -\omega_{\alpha}^{\beta} \wedge \omega_{\beta} - B_{\alpha}^{\beta}\omega \wedge \omega_{\beta}, \\ d\omega_{\beta}^{\alpha} &= \omega_{\gamma}^{\alpha} \wedge \omega_{\beta}^{\gamma} + (A_{\beta\gamma}^{\alpha\delta} - 2B_{\beta}^{\alpha}B_{\gamma}^{\delta})\omega^{\gamma} \wedge \omega_{\delta} \\ &\quad + B_{\beta\gamma}^{\alpha}\omega \wedge \omega^{\gamma} + B_{\alpha}^{\gamma}\omega \wedge \omega_{\gamma}, \end{aligned} \tag{41}$$

$$\begin{aligned}
d\omega^\varphi &= \omega_\psi^\varphi \wedge \omega^\psi, \\
d\omega_\varphi &= -\omega_\varphi^\psi \wedge \omega_\psi, \\
d\omega_\psi^\varphi &= \omega_\chi^\varphi \wedge \omega_\psi^\chi + A_{\psi\chi}^{\varphi\tau} \omega^\chi \wedge \omega_\tau.
\end{aligned} \tag{42}$$

Отсюда следует, что распределения $\mathcal{D}'$ и $\mathcal{D}''$ вполне интегрируемы. Зафиксируем какое-нибудь локальное сечение s тотального пространства присоединенной G -структуры и отождествим формы ω_j^i и ω^i с их антиувлечениями $s^*\omega_j^i$ и $s^*\omega^i$ на M соответственно. Тогда формы $\{\omega^\varphi\}$ и $\{\omega^\alpha, \omega\}$, а также им комплексно сопряженные, очевидно, локально образуют системы Пфаффа (комплексификации) распределений $\mathcal{D}'$ и $\mathcal{D}''$ соответственно. Соотношения (41), (42) показывают, что эти распределения вполне интегрируемы. В силу предложения 8 на интегральных многообразиях максимальной размерности этих систем индуцируются почти контактная метрическая и почти эрмитова структуры соответственно (а именно ограничения исходной почти контактной метрической структуры), причем опять-таки в силу соотношений (41), (42) эти структуры являются $Q\mathcal{S}$ -структурой и келеровой структурой соответственно. Пусть (U, φ) – локальная карта многообразия M с координатами $\{x^0, \dots, x^{2n}\}$. Тогда отображение φ – диффеоморфизм области $U \subset M$ на область $V = \varphi(U) \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ и, следовательно, φ определяет отображение увлечения φ_* тензорной алгебры многообразия U . Применяя это отображение к системам форм $\{\omega^\varphi\}$ и $\{\omega^\alpha, \omega\}$ на U , получаем системы форм $\{\vartheta^\varphi\}$ и $\{\vartheta^\rho\}$ на V , удовлетворяющих уравнениям вида $d\vartheta^\varphi = \vartheta_\psi^\varphi \wedge \vartheta^\psi$ и $d\vartheta^\rho = \vartheta_\sigma^\rho \wedge \vartheta^\sigma$ соответственно. Из классической теоремы Фробениуса следует, что существует система $u^i = u^i(x^0, \dots, x^{2n})$ гладких функций на V таких, что

$$\vartheta^\rho = A_\sigma^\rho du^\sigma, \quad \vartheta^\varphi = A_\psi^\varphi du^\psi,$$

где (A_σ^ρ) и (A_ψ^φ) – матрицы гладких функций, невырожденные в каждой точке области определения. Отсюда, в частности, вытекает, что матрица

$$(A_j^i) = \begin{pmatrix} A_\sigma^\rho & 0 \\ 0 & A_\psi^\varphi \end{pmatrix}$$

также невырождена в каждой точке области определения, а система функций $\{u^i = u^i \circ \varphi(p) : p \in U\}$ определяет допустимые карты (U, ϕ) на M , которые назовем *специальными*. При этом системы функций $\{u^\rho\}$ и $\{u^\varphi\}$ определяют допустимые карты $(U', \phi|_{U'})$ и $(U'', \phi|_{U''})$ на интегральных многообразиях распределений $\mathcal{D}'$ и $\mathcal{D}''$ соответственно. Фиксируем точку $m_0 \in U$. Пусть $\phi(u) = (u_0^0, \dots, u_0^{2n})$. Без ограничения общности можно считать, что область $V = \phi(U)$ является *кубической*, т.е. задается системой неравенств

$$|u^i - u_0^i| < \alpha, \quad i = 0, \dots, 2n, \quad \alpha \in \mathbb{R}^{2n+1}.$$

Пусть $W'_0 = U'$ и $W''_0 = U''$ – интегральные многообразия распределений $\mathcal{D}'$ и $\mathcal{D}''$ соответственно, проходящие через точку m_0 . Они задаются уравнениями $u^\varphi = u_0^\varphi$ ($\varphi = 2r + 1, \dots, 2n$) и $u^\rho = u_0^\rho$ ($\rho = 0, \dots, 2r$) соответственно. Пусть $m \in U$ – произвольная точка, $\phi(m) = (u^1, \dots, u^{2n+1})$, W' и W'' – интегральные многообразия этих распределений, проходящие через точку m . Построим точки $m' = W'_0 \cap W'' \in$

W'_0 и $m'' = W''_0 \cap W' \in W''_0$ с координатами $m'(u^0, \dots, u^{2r}, u^{2r+1}, \dots, u^{2n})$ и $m''(u^0, \dots, u^{2r}, u^{2r+1}, \dots, u^{2n})$ соответственно. Тем самым построено отображение $f_U: U \rightarrow U' \times U''$, которое, очевидно, является диффеоморфизмом. Оно индуцирует в каждой точке $m \in U$ изоморфизмы $(f_*)_m|_{T_m(W')}: T_m(W') \rightarrow T_{m'}(U')$ и $(f_*)_m|_{T_m(W'')}: T_m(W'') \rightarrow T_{m''}(U'')$. Эти изоморфизмы индуцируют на многообразиях U' и U'' почти контактную метрическую структуру (Φ', ξ', η', g') и почти эрмитову структуру (J'', g'') соответственно, которые являются увлечениями соответствующих структур $(\Phi|_{W'}, \xi|_{W'}, \eta|_{W'}, g|_{W'})$ и $(\Phi|_{W''}, g|_{W''})$. Покажем, что в действительности эти структуры не зависят от выбора точки m_0 , а значит, внутренним образом определяют соответствующие структуры на многообразиях U' и U'' . Из построения диффеоморфизма f_U видно, что для этого достаточно доказать, что компоненты $\Phi_\sigma^\rho, \xi^\rho, \eta_\rho, g_{\rho\sigma}$ и $\Phi_\psi^\varphi, g_{\varphi\psi}$ ограниченных на интегральных многообразиях W' и W'' структур не зависят от переменных u^φ и u^ρ соответственно. Заметим, что в силу соотношений $\omega_\varphi^\rho = \omega_\rho^\varphi = 0$ компоненты обобщенных символов Кристоффеля Γ_{jk}^i второй канонической связности в специальной карте (U, ϕ) будут равны нулю, если среди их индексов i, j есть как индексы, пробегающие значения от 0 до $2r$, так и индексы, пробегающие значения от $2r+1$ до $2n$. Далее, в силу параллельности тензора Φ во второй канонической связности $\tilde{\nabla}\Phi = 0$, в частности

$$0 = \tilde{\nabla}_\varphi \Phi_\sigma^\rho = \frac{\partial \Phi_\sigma^\rho}{\partial u^\varphi} - \Phi_\tau^\rho \Gamma_{\sigma\varphi}^\tau + \Phi_\beta^\tau \Gamma_{\tau\varphi}^\rho = \frac{\partial \Phi_\sigma^\rho}{\partial u^\varphi},$$

откуда вытекает, что $\frac{\partial \Phi_\sigma^\rho}{\partial u^\varphi} = 0$. Аналогично $\frac{\partial \Phi_\psi^\varphi}{\partial u^\rho} = 0$, что и требовалось доказать. Точно такое же рассуждение с учетом предложения 7 проводится и для метрического тензора, а также вектора ξ и ковектора η . Следовательно, на многообразиях U' и U'' отображением f_U корректно индуцируются почти контактная метрическая структура и почти эрмитова структура соответственно, относительно которых отображение f_U является эквивалентностью. Как мы уже видели, индуцированные на W' и W'' структуры являются $Q\mathcal{S}$ -структурой (максимального ранга) и келеровой структурой соответственно. Следовательно, такими же будут и структуры, индуцированные на U' и U'' соответственно. Заметим также, что, как следует из классической теоремы де-Рама [17], если многообразие M полно и односвязно, построенные выше локальные изометрии могут быть определены глобально.

Пусть M — $Q\mathcal{S}$ -многообразие максимального ранга. В этом случае $\mathcal{D}' = \mathcal{L}$, а значит, $\mathcal{D}'' = \{0\}$, $\ker \mathcal{B} = \mathcal{M}$. Определим на многообразии M билинейную форму

$$G(X, Y) = -\langle \mathcal{B}X, \Phi Y \rangle + \eta(X)\eta(Y), \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M). \quad (43)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. На $Q\mathcal{S}$ -многообразии M максимального ранга форма G задает псевдориманову структуру.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предложения 4 легко следует, что форма G симметрична. Докажем ее невырожденность. Пусть $G(X, Y) = 0$ для любого $Y \in \mathfrak{X}(M)$. В частности, $G(X, \tilde{Y}) = 0$ ($\tilde{Y} \in \mathcal{L}$). Но тогда $\langle \mathcal{B} \circ \Phi(X), Y \rangle = 0$ и в силу невырожденности метрики $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на $\mathcal{L}$ заключаем, что $\mathcal{B} \circ \Phi(X) = 0$. Но $\ker(\mathcal{B} \circ \Phi) = \mathcal{M}$, откуда вытекает, что $X = \alpha\xi$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Следовательно, $0 = G(X, Y) = \alpha\eta(\xi)\eta(Y) = \alpha\eta(Y)$, а поскольку $\eta \neq 0$, имеем $\alpha = 0$, т.е. $X = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Из предложения 2 вытекает, что в случае многообразия Сасаки метрика G совпадает с исходной метрикой g многообразия.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. Во введенных обозначениях $\mathcal{S} = (\Phi, \xi, \eta, G)$ – сасакиева структура на M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, первые четыре аксиомы почти контактной метрической структуры для $\mathcal{S}$ выполнены. Далее,

$$\begin{aligned} G(\Phi X, \Phi Y) &= -\langle \Phi \circ \mathcal{B}(X), \Phi^2(Y) \rangle + \eta(\Phi X)\eta(\Phi Y) \\ &= \langle \mathcal{B}X, \Phi^3 Y \rangle + 0 = -\langle \mathcal{B}X, \Phi Y \rangle = G(X, Y) - \eta(X)\eta(Y). \end{aligned}$$

Таким образом, $\mathcal{S}$ – почти контактная метрическая структура. Очевидно, она нормальна, поскольку отличается от исходной структуры только метрикой. Наконец, $d\eta = \tilde{\Omega}$, где $\tilde{\Omega}$ – фундаментальная форма почти контактной метрической структуры $\mathcal{S}$. В самом деле, из (18) следует, что $d\eta = d\omega = 2B_b^a \omega^b \wedge \omega_a$. С другой стороны, в силу предложения 4

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}(X, Y) &= -\langle \mathcal{B}X, \Phi^2 Y \rangle + \eta(X)\eta(\Phi Y) = -\langle \mathcal{B}X, \Phi^2 Y \rangle \\ &= \langle \Phi \circ \mathcal{B}(X), \Phi Y \rangle = \langle \mathcal{B}X, Y \rangle - \eta(\mathcal{B}X)\eta(Y) = \langle \mathcal{B}X, Y \rangle. \end{aligned}$$

Значит, в произвольном репере $\tilde{\Omega}_{ij} = -g_{kj}\mathcal{B}_i^k$. В частности, в A -репере

$$\tilde{\Omega}_{ab} = \tilde{\Omega}_{\hat{a}\hat{b}} = \tilde{\Omega}_{a0} = \tilde{\Omega}_{\hat{a}0} = 0, \quad \tilde{\Omega}_{\hat{a}\hat{b}} = g_{\hat{c}\hat{b}}\mathcal{B}_{\hat{a}}^{\hat{c}} = \mathcal{B}_{\hat{a}}^{\hat{b}}.$$

Следовательно, $\tilde{\Omega} = \Omega_{ij}\omega^i \otimes \omega^j = 2\Omega_{\hat{a}\hat{b}}\omega^{\hat{a}} \wedge \omega^{\hat{b}} = 2B_{\hat{a}}^{\hat{b}}\omega^{\hat{a}} \wedge \omega_{\hat{b}} = d\eta$. Таким образом, $\mathcal{S}$ – нормальная контактная метрическая, т.е. сасакиева структура.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Переход от метрики $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ к метрике G , заданной соотношением (43), назовем $\mathcal{B}$ -преобразованием $Q\mathcal{S}$ -структуры максимального ранга. В случае, когда M – $Q\mathcal{S}$ -структура класса CR_1 , ее $\mathcal{B}$ -преобразованием назовем переход от метрики $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ к метрике $\mathcal{G} = G|_{\mathcal{D}' \oplus \mathcal{M}} + g|_{\mathcal{D}''}$.

ПРИМЕР 1. Пусть $\mathcal{S} = (\Phi, \xi, \eta, g)$ – почти контактная метрическая структура. Перейдем от нее к новой структуре $\tilde{\mathcal{S}} = (\Phi, \frac{1}{\alpha}\xi, \alpha\eta, \alpha^2 g)$, где α – ненулевая константа. Очевидно, $\tilde{\mathcal{S}}$ – почти контактная метрическая структура. Указанное преобразование почти контактной метрической структуры называется *гомотетией с коэффициентом α* . Очевидно, почти контактная метрическая структура, гомотетичная сасакиевой, является $Q\mathcal{S}$ -структурой максимального ранга. Более того, с учетом определения оператора $\mathcal{B}$ и в силу предложения 2 она однозначно характеризуется соотношением $\mathcal{B} = -\frac{1}{\alpha}\Phi$, или

$$B_b^a = -\frac{\sqrt{-1}}{\alpha}\delta_b^a.$$

$\mathcal{B}$ -преобразование такой структуры приводит к новой сасакиевой структуре $\hat{\mathcal{S}} = (\Phi, \frac{1}{\alpha}\xi, \alpha\eta, G)$ с метрикой

$$\begin{aligned} G(X, Y) &= -\alpha^2 g(\mathcal{B}X, \Phi Y) + \alpha^2 \eta(X)\eta(Y) = \alpha^2 \frac{1}{\alpha} g(\Phi X, \Phi Y) + \alpha^2 \eta(X)\eta(Y) \\ &= \alpha(g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)) + \alpha^2 \eta(X)\eta(Y) \\ &= \alpha g(X, Y) + \alpha(\alpha - 1)\eta(X)\eta(Y). \end{aligned}$$

Переход от структуры $\mathcal{S}$ к структуре $\hat{\mathcal{S}}$ известен как *обобщенное преобразование D -гомотетии* (преобразование D -гомотетии при $\alpha > 0$ и преобразование D -инверсии при $\alpha < 0$) [6] (см. также [14]). Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 5. *Обобщенное преобразование D -гомотетии сасакиевой структуры является композицией гомотетии и $\mathcal{B}$ -преобразования.*

С учетом приведенных определений, теоремы 4 и предложения 10 получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 6. *$Q\mathcal{S}$ -многообразие класса CR_1 либо является косимплектическим многообразием, либо с точностью до $\mathcal{B}$ -преобразования структуры локально эквивалентно произведению сасакиева и келерова многообразий.*

Пусть M – $Q\mathcal{S}$ -многообразие максимального ранга. Используя характеристические свойства римановой связности (отсутствие кручения и параллельность метрического тензора), нетрудно вычислить тензор

$$h(X, Y) = \nabla_X^* Y - \nabla_X Y$$

аффинной деформации от римановой связности ∇ метрики g к римановой связности ∇^* метрики G :

$$h = -\eta \otimes (\mathcal{B} + \Phi) - (\mathcal{B} + \Phi) \otimes \eta. \quad (44)$$

С учетом (1) и (30) очевидно, что соотношение (44) в A -репере (т.е. на пространстве присоединенной G -структуры) выражается тождествами

$$h_{0a}^b = h_{a0}^b = -(B_a^b + \sqrt{-1} \delta_a^b), \quad (45)$$

плюс соотношения, полученные с учетом вещественности тензора h . Остальные компоненты этого тензора нулевые.

ЛЕММА 1. *Пусть $\{\omega_j^i\}$ и $\{\theta_j^i\}$ – компоненты форм связностей ∇ и ∇^* на многообразии M соответственно, $\{h_{jk}^i\}$ – компоненты тензора $h(X, Y) = \nabla_X^* Y - \nabla_X Y$ аффинной деформации от связности ∇ к связности ∇^* . Тогда*

$$\theta_j^i = \omega_j^i - h_{kj}^i \omega^k. \quad (46)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $Y^i_{,k}$ и $Y^i|_k$ – компоненты тензоров ∇Y и $\nabla^* Y$ соответственно. Тогда

$$dY^i - Y^j \omega_j^i = Y^i_{,k} \omega^k, \quad (47_1)$$

$$dY^i - Y^j \theta_j^i = Y^i|_k \omega^k. \quad (47_2)$$

С другой стороны, тождество $\nabla_X^* Y = \nabla_X Y + h(X, Y)$ равносильно соотношению $Y^i|_k X^k = Y^i_{,k} X^k + h_{jk}^i X^j Y^k$ и в силу произвола в выборе X $Y^i|_k = Y^i_{,k} + h_{kj}^i Y^j$. Теперь из (47₁) получаем, что $dY^i - Y^j (\omega_j^i - h_{kj}^i) \omega^k = Y^i|_k \omega^k$. Сравнивая это равенство с (47₂), в силу линейной независимости базисных форм получаем (46).

С учетом (45) и (46) имеем, в частности:

$$\begin{aligned}\omega_0^a &= \theta_0^a - (B_b^a + \sqrt{-1} \delta_b^a) \omega^b, & \omega_a^0 &= \theta_a^0 - (B_a^b - \sqrt{-1} \delta_a^b) \omega_b, \\ \omega_b^a &= \theta_b^a - (B_b^a + \sqrt{-1} \delta_b^a) \omega.\end{aligned}\quad (48)$$

Подставляя эти соотношения в (18) и (19), получаем структурные уравнения структуры $\mathcal{S}$ в связности ∇^* на пространстве присоединенной G -структуры:

$$\begin{aligned}d\omega &= 2B_b^a \omega^b \wedge \omega_a, \\ d\omega^a &= \theta_b^a \wedge \omega^b - \sqrt{-1} \omega \wedge \omega^a, \\ d\omega_a &= -\theta_a^b \wedge \omega_b + \sqrt{-1} \omega \wedge \omega_a, \\ d\theta_b^a &= \theta_c^a \wedge \theta_b^c + (A_{bc}^{ad} + 2\sqrt{-1} \delta_b^a B_c^d) \omega^c \wedge \omega_d.\end{aligned}\quad (49)$$

Теперь перейдем от G -структуры, присоединенной к исходной $Q\mathcal{S}$ -структуре, пространство которой состоит из A -реперов, к новой G -структуре, пространство которой состоит из так называемых косых A -реперов относительно построенной сасакиевой структуры. Именно рассмотрим автоморфизм $C = (B \circ \Phi)^{-1}$ модуля $\mathcal{D}_\Phi^i$. С его помощью каждому A -реперу $r = (p, \varepsilon_a, \varepsilon^b, \varepsilon)$ сопоставим репер $\tilde{r} = (p, \zeta_a, \zeta^b, \varepsilon)$, где $\zeta_a = \varepsilon_a$, $\zeta^b = \tau C \tau(\varepsilon^b)$, $a, b = 1, \dots, n$. Репер вида $\tilde{r}$ мы и назовем *косым A -репером*. Оператор C , очевидно, эрмитов, поэтому $\zeta^b = \tau C \varepsilon_b = \tau(C_b^h \varepsilon_h) = \overline{C}^h_b \tau(\varepsilon_h) = C_h^b \varepsilon^h = -\sqrt{-1} (B^{-1})_h^b \varepsilon^h$. Следовательно,

$$\zeta^b = C_h^b \varepsilon^h = -\sqrt{-1} (B^{-1})_h^b \varepsilon^h. \quad (50)$$

С учетом этого для дуального корепера $(p, \theta^a, \theta_b, \omega)$ имеем:

$$\theta^a = \omega^a, \quad \theta_b = \sqrt{-1} B_b^h \omega_h. \quad (51)$$

С учетом (50) легко проверить, что совокупность всех косых A -реперов определяет G -структуру на M со структурной группой $\{1\} \times U(n)$, представленной матрицами

вида $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & BAB^{-1} \end{pmatrix}$, где $A \in U(n)$. Эту G -структуру назовем *специальной*.

Очевидно, в косом A -репере

$$\begin{aligned}G(\zeta_a, \zeta^b) &= -\langle \mathcal{B} \varepsilon_a, \Phi \zeta^b \rangle = -\langle \mathcal{B} \varepsilon_a, \tau \circ \Phi \circ \Phi^{-1} \circ B^{-1} \varepsilon_b \rangle \\ &= -\langle \mathcal{B} \varepsilon_a, \mathcal{B}^{-1} \varepsilon^b \rangle = \langle \varepsilon_a, \mathcal{B} \circ \mathcal{B}^{-1}(\varepsilon^b) \rangle = \langle \varepsilon_a, \varepsilon^b \rangle = \delta_b^a.\end{aligned}$$

Кроме того, поскольку $\mathcal{D}_\Phi^i \subset \mathcal{X}(M)$ — вполне изотропный подмодуль, инвариантный относительно эндоморфизмов $\mathcal{B}$ и Φ , $G(\zeta^a, \zeta^b) = -\langle \mathcal{B} \zeta^a, \Phi \zeta^b \rangle = 0$. Аналогично $G(\zeta_a, \zeta_b) = 0$. Наконец,

$$\begin{aligned}\Phi(\zeta^a) &= \Phi \circ \tau \circ C \circ \tau(\varepsilon^a) = \Phi \circ \tau \circ C(\varepsilon_a) = \Phi \circ \tau(C_a^h \varepsilon_h) \\ &= \Phi(\overline{C}^h_a \tau \varepsilon_h) = \Phi(C_h^a \varepsilon^h) = C_h^a (-\sqrt{-1} \varepsilon^h) = -\sqrt{-1} \zeta^a.\end{aligned}$$

Таким образом, в косом A -репере выполняются соотношения (1), хотя, вообще говоря, не выполняются условия $\tau(\varepsilon_a) = \varepsilon^a$, чем и объясняется название “косой A -репер”. Важно отметить, что понятие косого A -репера совпадает с понятием A -репера тогда и только тогда, когда $C = \text{id}$, т.е. $\mathcal{B} = -\Phi$, т.е. M — многообразие Сасаки. Доказано

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11. $Q\mathcal{S}$ -многообразие максимального ранга является многообразием Сасаки тогда и только тогда, когда присоединенная и специальная G -структуры на этом многообразии совпадают.

Пусть теперь M – $Q\mathcal{S}$ -многообразие класса CR_1 . С учетом (18), (21), (38), (49) и (51) подсчитаем первую группу его структурных уравнений на пространстве специальной G -структуры:

$$\begin{aligned} d\omega &= -2\sqrt{-1}\theta^a \wedge \theta_a, \\ d\theta^a &= \theta_b^a \wedge \theta^b - \sqrt{-1}\omega \wedge \theta^a, \\ d\theta_a &= -\theta_a^b \wedge \theta_b + \sqrt{-1}\omega \wedge \theta_a. \end{aligned}$$

Как мы уже знаем, дифференциальное продолжение этих уравнений приводит ко второй группе структурных уравнений, имеющей вид:

$$d\theta_b^a = \theta_c^a \wedge \theta_b^c + (\tilde{A}_{bc}^{ad} + 2\delta_b^a \delta_c^d)\theta^c \wedge \theta_d, \quad (52)$$

где $\{\tilde{A}_{bc}^{ad}\}$ – семейство функций на пространстве специальной G -структуры, служащих компонентами структурного тензора второго рода преобразованной $Q\mathcal{S}$ -структуры, причем

$$\tilde{A}_{[bc]}^{ad} = 0, \quad (53_1)$$

$$\tilde{A}_{bc}^{[ad]} = 0. \quad (53_2)$$

Здесь мы воспользовались тем, что с учетом (21), (38) и (48)

$$dB_b^a + B_c^a \theta_b^c - B_b^c \theta_c^a = 0.$$

С другой стороны, в силу (49)

$$d\theta_b^a = \theta_c^a \wedge \theta_b^c + (A_{bc}^{ah} + 2\sqrt{-1}\delta_b^a B_c^h)C_h^d \theta^c \wedge \theta_d.$$

Сравнивая это соотношение с (52), с учетом линейной независимости базисных форм находим, что

$$\tilde{A}_{bc}^{ad} = A_{bc}^{ah} C_h^d. \quad (54)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Почти контактное метрическое многообразие M называется многообразием *точечно постоянной Φ -голоморфной секционной кривизны* s , если

$$\langle R(X, \Phi X)X, \Phi X \rangle = c\|X\|^4, \quad X \in \mathcal{L}, \quad c \in C^\infty(M). \quad (55)$$

Если к тому же $c = \text{const}$, многообразие называется *многообразием глобально постоянной Φ -голоморфной секционной кривизны*. Многообразие Сасаки *точечно постоянной Φ -голоморфной секционной кривизны* называется *сасакиевой пространственной формой* [14].

Пусть M – почти контактное метрическое многообразие *точечно постоянной Φ -голоморфной секционной кривизны* s . Соотношение (55) на пространстве присоединенной G -структуры запишется в форме

$$4R_{\hat{a}bf\hat{d}}\hat{X}^{\hat{a}}X^bX^fX^{\hat{d}} = -4cg_{\hat{a}b}g_{f\hat{d}}\hat{X}^{\hat{a}}X^bX^fX^{\hat{d}}.$$

С учетом (1) это соотношение можно переписать в виде

$$(R_{\hat{a}bf\hat{d}} + c\delta_b^a \delta_f^d)\hat{X}^{\hat{a}}X^bX^fX^{\hat{d}} = 0.$$

Поляризация этого соотношения приводит нас к следующему результату.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12. Почти контактное метрическое многообразие является многообразием точечно постоянной Φ -голоморфной секционной кривизны с тогда и только тогда, когда

$$R^{(a}{}_{(b}{}^{d)}{}_{f)} = -\frac{c}{2}\tilde{\delta}_{bf}^{ad}, \quad (56)$$

$$\text{где } \tilde{\delta}_{bf}^{ad} = \delta_b^a \delta_f^d + \delta_f^a \delta_b^d.$$

Пусть, в частности, M — $Q\mathcal{S}$ -многообразие. Тогда с учетом (24₁) и (56) получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 13. $Q\mathcal{S}$ -многообразие является многообразием точечно постоянной Φ -голоморфной секционной кривизны тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G -структуры

$$A_{bc}^{ad} = 3B_{(b}^{(a} B_{c)}^{d)} - \frac{c}{2}\tilde{\delta}_{bc}^{ad}, \quad (57)$$

$$\text{где } \tilde{\delta}_{bc}^{ad} = \delta_b^a \delta_c^d + \delta_c^a \delta_b^d.$$

Следующий результат является контактным аналогом классической теоремы Шура для $Q\mathcal{S}$ -многообразий класса CR_1 .

ТЕОРЕМА 7. Точечное постоянство Φ -голоморфной секционной кривизны $Q\mathcal{S}$ -многообразия класса CR_1 размерности выше трех равносильно глобальному постоянству его Φ -голоморфной секционной кривизны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего отметим, что вторая группа структурных уравнений (19) $Q\mathcal{S}$ -многообразия в случае $Q\mathcal{S}$ -многообразий класса CR_1 с учетом (38) примет вид

$$d\omega_b^a = \omega_c^a \wedge \omega_b^c + (A_{bc}^{ad} - 2B_b^a B_c^d)\omega^c \wedge \omega_d.$$

Стандартная процедура дифференциального продолжения этих соотношений с учетом (38) приводит к тождеству

$$dA_{bc}^{ad} + A_{hc}^{ad}\omega_b^h + A_{bh}^{ad}\omega_c^h - A_{bc}^{hd}\omega_h^a - A_{bc}^{ah}\omega_h^d = A_{bch}^{ad}\omega^h + A_{bc}^{adh}\omega_h, \quad (58)$$

где $\{A_{bch}^{ad}, A_{bc}^{adh}\}$ — семейство функций на пространстве присоединенной G -структуры, симметричное по любой паре верхних либо нижних индексов. Продифференцируем с учетом (58), (21) и (38) соотношение (57):

$$\frac{1}{2}\tilde{\delta}_{bc}^{ad}dc = A_{bch}^{ad}\omega^h + A_{bc}^{adh}\omega_h.$$

Пусть $dc = c_h\omega^h + c^h\omega_h$. Сравнивая с предыдущим соотношением, с учетом линейной независимости базисных форм получаем, что

$$\tilde{\delta}_{bc}^{ad}c_h = 2A_{bch}^{ad}.$$

Поскольку $A_{bch}^{ad} = A_{bhc}^{ad}$, имеем отсюда, что $\tilde{\delta}_{bc}^{ad}c_h = \tilde{\delta}_{bh}^{ad}c_c$. Свертывая это соотношение сначала по индексам c и d , а затем по индексам a и b , получаем, что $(n^2 - 1)c_h = 0$, а значит, $c_h = 0$, $c^h = \bar{c}_h = 0$. Следовательно, $dc = 0$, т.е. $c = \text{const}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Очевидно, любое трехмерное почти контактное метрическое многообразие является многообразием точечно постоянной, но, вообще говоря, не глобально постоянной Φ -голоморфной секционной кривизны.

ТЕОРЕМА 8. Пусть M – $Q\mathcal{S}$ -многообразие класса CR_1 точечно постоянной Φ -голоморфной секционной кривизны c . Тогда с точностью до $\mathcal{B}$ -преобразования метрики либо M – косимплектическое многообразие, либо M является сасакиевой пространственной формой, либо M локально эквивалентно произведению комплексного евклидова пространства на сасакиеву пространственную форму.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть эндоморфизм B многообразия M имеет единственное собственное значение λ . Если $\lambda = 0$, то $\mathcal{B} = 0$, а значит, M – косимплектическое многообразие. В этом случае $\mathcal{B}$ -преобразование метрики сводится к тождественному. Если $\lambda \neq 0$, то $B_b^a = \lambda \delta_b^a$, причем в силу косоэрмитовости оператора B λ – число чисто мнимое. В этом случае $C_b^a = -\frac{\sqrt{-1}}{\lambda} \delta_b^a$ и в силу (54) и (57)

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{bc}^{ad} &= A_{bc}^{ah} C_h^d = \left(3B_{(b}^{(a} B_{c)}^{h)} - \frac{c}{2} \tilde{\delta}_{bc}^{ah} \right) C_h^d \\ &= -\frac{3\sqrt{-1}}{2} (B_b^a \delta_c^d + B_c^a \delta_b^d) - \frac{c}{2} (\delta_b^a C_c^d + \delta_c^a C_b^d) \\ &= \frac{\sqrt{-1}}{2} \left(\frac{c}{\lambda} - 3\lambda \right) \tilde{\delta}_{bc}^{ad}. \end{aligned} \quad (59)$$

В силу предложений 13 и 2 сасакиева структура на M , полученная после $\mathcal{B}$ -преобразования метрики, имеет постоянную Φ -голоморфную секционную кривизну.

Пусть теперь эндоморфизм B имеет по крайней мере два различных собственных значения λ и μ . Обозначим $r_1 = \dim \mathcal{D}_\lambda$, $r_2 = \dim \mathcal{D}_\mu$. Построим сокращенную G -структуру, состоящую из A -реперов, первые r_1 векторов которых принадлежат подпространству $(\mathcal{D}_B^\lambda)_p$, а следующие r_2 векторов – подпространству $(\mathcal{D}_B^\mu)_p$, где p – вершина репера. Пусть индексы $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ пробегают значения от 1 до r_1 , а индексы $\varphi, \psi, \chi, \tau$ – значения от $r_1 + 1$ до $r_1 + r_2$. Очевидно, на пространстве этой G -структуры

$$B_\beta^\alpha = \lambda \delta_\beta^\alpha, \quad B_\psi^\varphi = \mu \delta_\psi^\varphi, \quad B_\varphi^\alpha = 0, \quad B_\alpha^\varphi = 0. \quad (60)$$

Дифференцируя последние два тождества, с учетом (21) и (38) получаем, что

$$\omega_\varphi^\alpha = 0, \quad \omega_\alpha^\varphi = 0.$$

Дифференцируя эти соотношения внешним образом с учетом (19), убеждаемся, что на пространстве сокращенной G -структуры

$$A_{\varphi c}^{\alpha b} = 0, \quad A_{\alpha c}^{\varphi b} = 0. \quad (61)$$

Более того, соотношения (57) с учетом (60) и (61) на пространстве сокращенной G -структуры примут вид:

$$\begin{aligned} A_{\gamma\delta}^{\alpha\beta} &= 3B_{(\gamma}^{(\alpha} B_{\delta)}^{\beta)} - \frac{c}{2} \tilde{\delta}_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}, \quad A_{\psi\tau}^{\varphi\chi} = 3B_{(\psi}^{(\varphi} B_{\tau)}^{\chi)} - \frac{c}{2} \tilde{\delta}_{\psi\tau}^{\varphi\chi}, \\ 0 &= A_{\beta\psi}^{\alpha\varphi} = \frac{3}{2} B_\beta^\alpha B_\psi^\varphi - \frac{c}{2} \delta_\beta^\alpha \delta_\psi^\varphi. \end{aligned}$$

С учетом (60) эти соотношения переищутся в форме

$$A_{\gamma\delta}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(3\lambda^2 - c)\tilde{\delta}_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}, \quad A_{\psi\tau}^{\varphi\chi} = \frac{1}{2}(3\mu^2 - c)\tilde{\delta}_{\psi\tau}^{\varphi\chi}, \quad 0 = \frac{1}{2}(3\lambda\mu - c). \quad (62)$$

В частности, из последнего соотношения следует, что эндоморфизм B имеет не более двух (а значит, ровно два) различных собственных значений λ и μ , причем эти собственные значения связаны соотношением

$$\lambda\mu = \frac{c}{3}. \quad (63)$$

Если одно из этих собственных значений нулевое, из (62) следует, что M — многообразие нулевой Φ -голоморфной секционной кривизны. В этом случае в силу теоремы 4 многообразие M локально эквивалентно произведению $Q\mathcal{S}$ -многообразия, эндоморфизм B которого имеет единственное (ненулевое) собственное значение, нулевой Φ -голоморфной секционной кривизны на келерово многообразие нулевой голоморфной секционной кривизны, т.е. на многообразии C^{r2} . Как мы уже видели, первое из многообразий после $\mathcal{B}$ -преобразования метрики является сасакиевой пространственной формой. Нетрудно подсчитать [6], что ее структура получается из стандартной сасакиевой структуры на нечетномерной сфере с помощью D -гомотетии с коэффициентом $4/3$. Метрика же второго многообразия в процессе $\mathcal{B}$ -преобразования согласно определению не меняется.

Пусть, наконец, $\lambda, \mu \neq 0$. Тогда M — многообразие максимального ранга. С помощью $\mathcal{B}$ -преобразования метрики оно переводится в многообразие Сасаки. Так же как и при выводе (59), находим из (62), что

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{\beta\gamma}^{\alpha\delta} &= \frac{\sqrt{-1}}{2} \left(\frac{c}{\lambda} - 3\lambda \right) \tilde{\delta}_{\beta\gamma}^{\alpha\delta}, \quad \tilde{A}_{\chi\tau}^{\varphi\psi} = \frac{\sqrt{-1}}{2} \left(\frac{c}{\mu} - 3\mu \right) \tilde{\delta}_{\chi\tau}^{\varphi\psi}, \\ \tilde{A}_{\beta\psi}^{\alpha\varphi} &= \frac{\sqrt{-1}}{2} \left(\frac{c}{\mu} - 3\lambda \right) \tilde{\delta}_{\beta\psi}^{\alpha\varphi}. \end{aligned}$$

В силу (63) $c/\lambda - 3\lambda = c/\mu - 3\mu$, $c/\mu - 3\lambda = 0$, а значит,

$$\tilde{A}_{bc}^{ad} = \frac{\sqrt{-1}}{2} \left(\frac{c}{\lambda} - 3\lambda \right) \tilde{\delta}_{bc}^{ad}.$$

В силу предложений 13 и 2 сасакиева структура на M , полученная после $\mathcal{B}$ -преобразования метрики, имеет постоянную Φ -голоморфную секционную кривизну.

Как известно, косимплектическое многообразие локально эквивалентно произведению келерова многообразия на вещественную прямую [18]. В частности, косимплектическое многообразие постоянной Φ -голоморфной секционной кривизны локально эквивалентно произведению комплексной пространственной формы (т.е. келерова многообразия постоянной голоморфной секционной кривизны) на вещественную прямую. С учетом хорошо известных классификаций комплексных пространственных форм [8] и сасакиевых пространственных форм [14], [6] из теоремы 8 получаем следующий результат, дающий полную классификацию (с точностью до $\mathcal{B}$ -преобразования метрики) $Q\mathcal{S}$ -многообразий класса CR_1 постоянной Φ -голоморфной секционной кривизны.

ТЕОРЕМА 9. *$Q\mathcal{S}$ -многообразие класса CR_1 является многообразием постоянной Φ -голоморфной секционной кривизны тогда и только тогда, когда после $\mathcal{B}$ -преобразования метрики оно локально эквивалентно одному из следующих многообразий:*

1. произведению комплексного евклидова пространства на вещественную прямую;
2. произведению комплексного проективного пространства на вещественную прямую;
3. произведению комплексного гиперболического пространства на вещественную прямую;
4. произведению двумерного многообразия на вещественную прямую;
5. нечетномерной сфере, снабженной канонической сасакиевой структурой либо структурой, полученной из канонической с помощью преобразования D -гомотетии;
6. нечетномерному аффинному пространству, снабженному канонической сасакиевой структурой постоянной Φ -голоморфной секционной кривизны равной -3 ;
7. нечетномерной сфере, снабженной сасакиевой структурой, полученной из канонической с помощью преобразования D -инверсии;
8. произведению многообразия Сасаки, полученного из нечетномерной сферы, снабженной стандартной сасакиевой структурой, с помощью D -гомотетии с коэффициентом $4/3$, на комплексное евклидово пространство.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6 [16]. Говорят, что $(2n + 1)$ -мерное почти контактное метрическое многообразие M удовлетворяет аксиоме Φ -голоморфных $(2r + 1)$ -плоскостей, $1 \leq r \leq n$, если через каждую точку $p \in M$ для всякого $(2r + 1)$ -мерного подпространства $L \subset T_p(M)$, инвариантного относительно действия структурного оператора Φ_p , проходит $(2r + 1)$ -мерное вполне геодезическое Φ -инвариантное подмногообразие $N \subset M$ такое, что $T_p(N) = L$.

Пусть M — $(2n + 1)$ -мерное $Q\mathcal{S}$ -многообразие, удовлетворяющее аксиоме Φ -голоморфных $(2r + 1)$ -плоскостей, $p \in M$, $L \subset T_p(M)$ — $(2r + 1)$ -мерное Φ -инвариантное подпространство, $N \subset M$ — соответствующее вполне геодезическое Φ -инвариантное подмногообразие. В силу нечетномерности N модуль $\mathfrak{X}(N)$ содержит ненулевой элемент ядра эндоморфизма $\Phi|_N$, а значит, и векторное поле $\xi|_N$, которое мы по-прежнему будем обозначать через ξ . Фиксируем $p \in N$. Пусть $\rho = (p, \beta_0 = \xi_p, \beta_1, \dots, \beta^r)$ — A -репер комплексификации пространства $T_p(N)$. Если $j: N \rightarrow M$, $N \subset M$, — естественное вложение, то, отождествляя векторы с их образами при отображении $(j_*)_p$ — дифференциале отображения j в точке p , получаем в произвольном A -репере пространства $T_p(M)$ с учетом вещественности j

$$\beta_\alpha = C_\alpha^a \varepsilon_a, \quad \beta^\alpha = C_a^\alpha \varepsilon^\alpha, \quad \overline{C_\alpha^a} = C_a^\alpha.$$

Здесь и далее греческие индексы пробегает значения от 1 до r . Двойственные

соотношения задаются уравнениями

$$\omega^a = C_\alpha^a \theta^\alpha, \quad (64_1)$$

$$\omega_a = C_a^\alpha \theta_\alpha, \quad (64_2)$$

$$\omega = \theta, \quad (64_3)$$

где $(p, \theta, \theta^1, \dots, \theta_r)$ – корепер, дуальный реперу ρ . Продифференцируем (64₁) внешним образом с учетом (18):

$$-C_\alpha^a d\theta^\alpha = (dC_\alpha^a - C_\alpha^b \omega_b^a - B_b^a C_\alpha^b \omega) \wedge \theta^\alpha. \quad (65)$$

Заметим, что $C_\alpha^a C_a^\gamma = \langle C_\alpha^a \varepsilon_a, C_c^\gamma \varepsilon_c \rangle = \langle \beta_\alpha, \beta^\gamma \rangle = \delta_\alpha^\gamma$. Поэтому, свертывая (65) с C_a^γ , получаем, что

$$d\theta^\gamma = \theta_\alpha^\gamma \wedge \theta^\alpha + B_\alpha^\gamma \theta \wedge \theta^\alpha, \quad (66)$$

где $\theta_\alpha^\gamma = -C_a^\gamma dC_\alpha^a + C_a^\gamma C_\alpha^b \omega_b^a$, $B_\alpha^\gamma = C_\alpha^b C_b^c B_c^a$. Аналогично, дифференцируя соотношение (64₂) внешним образом, получаем, что

$$d\theta_\gamma = -\theta_\gamma^\alpha \wedge \theta_\alpha - B_\gamma^\alpha \theta \wedge \theta_\alpha. \quad (67)$$

При этом используется соотношение

$$C_a^\gamma dC_\alpha^a + C_\alpha^a dC_a^\gamma = 0,$$

полученное дифференцированием тождества $C_\alpha^a C_a^\gamma = \delta_\alpha^\gamma$. Далее, соотношение (65) с учетом (66) можно переписать в форме

$$(dC_\gamma^a - C_\gamma^b \omega_b^a + C_\alpha^a \theta_\gamma^\alpha - (B_b^a C_\gamma^b - B_\gamma^\alpha C_c^b) \theta) \wedge \theta^\gamma = 0,$$

откуда по лемме Картана находим, что

$$dC_\gamma^a - C_\gamma^b \omega_b^a + C_\alpha^a \theta_\gamma^\alpha - (B_b^a C_\gamma^b - B_\gamma^\alpha C_c^b) \theta = C_{\gamma\beta}^a \theta^\beta,$$

где $C_{\beta\gamma}^a = C_{\gamma\beta}^a$ – система функций на пространстве присоединенной G -структуры, служащих компонентами второй квадратичной формы вложения $N \subset M$. Поскольку N – вполне геодезическое подмногообразие, имеем $C_{\beta\gamma}^a = 0$, а значит,

$$dC_\gamma^a - C_\gamma^b \omega_b^a + C_\alpha^a \theta_\gamma^\alpha - (B_b^a C_\gamma^b - B_\gamma^\alpha C_c^b) \theta = 0.$$

Наиболее удобно это выражение записывается в терминах формы первой канонической связности:

$$dC_\gamma^a - C_\gamma^b \zeta_b^a + C_\alpha^a \eta_\gamma^\alpha = 0, \quad (68)$$

где $\eta_\gamma^\alpha = \theta_\gamma^\alpha + B_\gamma^\alpha \theta$. Дифференцируя (68) внешним образом с учетом (18') и (64), получаем:

$$C_\gamma^a d\eta_\alpha^\gamma = C_\delta^a \eta_\gamma^\delta \wedge \eta_\alpha^\gamma + C_\alpha^b C_\delta^c C_d^a A_{bc}^{\delta d} \theta^\delta \wedge \theta_\varepsilon. \quad (69)$$

С другой стороны, записывая (66) и (67) в виде

$$d\theta^\alpha = \eta_\gamma^\alpha \wedge \theta^\gamma, \quad d\theta_\alpha = -\eta_\alpha^\gamma \wedge \theta_\gamma$$

соответственно и находя дифференциальное продолжение этих соотношений, получаем, что

$$d\eta_\beta^\alpha = \eta_\gamma^\alpha \wedge \eta_\beta^\gamma + \lambda_{\beta\gamma}^{\alpha\delta} \theta^\gamma \wedge \theta_\delta, \quad (70)$$

где $\{\lambda_{\beta\gamma}^{\alpha\delta}\}$ — система функций на пространстве соответствующей G -структуры, удовлетворяющая соотношениям $\lambda_{\beta\gamma}^{[\alpha\delta]} = \lambda_{[\beta\gamma]}^{\alpha\delta} = 0$. Подставляя (70) в (69), с учетом линейной независимости базисных форм получаем

$$C_\alpha^a \lambda_{\beta\gamma}^{\alpha\delta} = C_\beta^b C_\gamma^c C_d^\delta A_{bc}^{ad}. \quad (71)$$

Из единственности определения вполне геодезического подмногообразия по его начальным данным в какой-либо точке следует, что из выполнимости аксиомы Φ -голоморфных $(2r+1)$ -плоскостей ($r \geq 1$) на данном многообразии вытекает выполнимость на нем аксиомы 3-плоскостей. Но тогда (71) принимает вид

$$C^a \lambda = C^b C^c C_d A_{bc}^{ad}. \quad (72)$$

Из (72) видно, что λ является однородной функцией первой степени по переменным C^h . Продифференцируем (72) по этим переменным:

$$\lambda \delta_h^a + C^a \frac{\partial \lambda}{\partial C^h} = A_{bc}^{ad} \delta_h^b C^c C_d + A_{bc}^{ad} C^b \delta_h^c C_d.$$

Свернем это соотношение по индексам a и h . С учетом теоремы Эйлера об однородных функциях и соотношений (20) получим:

$$\lambda = \frac{2}{n+1} A_c^d C^c C_d, \quad \text{где} \quad A_c^d = A_{hc}^{hd}.$$

Подставим это соотношение в (72):

$$\left(A_{bc}^{ad} - \frac{2}{n+1} A_c^d \delta_b^a \right) C^b C^c C_d = 0.$$

В силу произвола в выборе C^b , C_d находим отсюда, что

$$A_{bc}^{ad} = \frac{1}{n+1} (A_b^a \delta_c^d + A_c^a \delta_b^d).$$

Свернем это соотношение по индексам a и b : $A_c^d = \frac{1}{n} A \delta_c^d$, где $A = A_a^a$, а значит,

$$A_{bc}^{ad} = \frac{A}{n(n+1)} \tilde{\delta}_{bc}^{ad}. \quad (73)$$

Обратное очевидно: система Пфаффа, задающая Φ -голоморфную $(2r+1)$ -плоскость, при выполнении соотношений (73) вполне интегрируема, а ее интегральные многообразия суть вполне геодезические подмногообразия. Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 10. $Q\mathcal{S}$ -многообразие удовлетворяет аксиоме Φ -голоморфных $(2r+1)$ -плоскостей тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G -структуры компоненты структурного тензора второго рода удовлетворяют соотношениям (73).

Пусть теперь $M - Q\mathcal{S}$ -многообразие точечно постоянной Φ -голоморфной секционной кривизны c , удовлетворяющее аксиоме Φ -голоморфных $(2r+1)$ -плоскостей. В силу (57) и (73) на пространстве присоединенной G -структуры

$$B_b^a B_c^d + B_c^a B_b^d = k \delta_{bc}^{ad}, \quad \text{где} \quad k = \frac{2A}{3n(n+1)} - \frac{c}{3}. \quad (74)$$

Как уже отмечалось, в силу косоэрмитовости оператора B_p его матрица при подходящем выборе A -репера $\{p, \varepsilon_a, \varepsilon_{\bar{b}}\}$ приводится к диагональному виду с чисто мнимыми собственными значениями, т.е.

$$B_b^a = B_b \delta_b^a, \quad B_b = \sqrt{-1} \alpha_b, \quad \alpha_b \in \mathbb{R}, \quad b = 1, \dots, n.$$

Из (74) следует, что в таком репере $B_b B_c = k$, $b, c = 1, \dots, n$, следовательно, $(B_b - B_c)^2 = 0$, т.е. $B_b = B_c$, а значит, $B_b^a = \sqrt{-1} \alpha \delta_b^a$, где α — подходящая гладкая функция. Более того, из (21) и (38) вытекает, что $\alpha = \text{const}$. Если $\alpha = 0$, то M — косимплектическое многообразие постоянной Φ -голоморфной секционной кривизны. Если $\alpha \neq 0$, то M — многообразие, гомотетичное сасакиевой пространственной форме, а значит, само является сасакиевой пространственной формой. Обратно, если M — многообразие одного из перечисленных типов, то оно удовлетворяет аксиоме Φ -голоморфных $(2r+1)$ -плоскостей [5]. Тем самым доказана

ТЕОРЕМА 11. $Q\mathcal{S}$ -многообразие точечно постоянной Φ -голоморфной секционной кривизны удовлетворяет аксиоме Φ -голоморфных $(2r+1)$ -плоскостей тогда и только тогда, когда оно либо является косимплектическим многообразием, либо гомотетично многообразию Сасаки. Полная классификация таких многообразий с точностью до гомотетии представлена многообразиями, перечисленными в пп. 1–7 теоремы 9.

СЛЕДСТВИЕ. Многообразие, указанное в п. 8 теоремы 9, будучи многообразием постоянной Φ -голоморфной секционной кривизны, не удовлетворяет аксиомам Φ -голоморфных $(2r+1)$ -плоскостей.

Пусть, наконец, $M - Q\mathcal{S}$ -многообразие класса CR_1 , удовлетворяющее аксиоме Φ -голоморфных $(2r+1)$ -плоскостей. В силу (73) и (54) для этого многообразия

$$\tilde{A}_{bc}^{ad} = \frac{A}{n(n+1)} (\delta_b^a C_c^d + \delta_c^a C_b^d).$$

Если оператор B многообразия нулевой, то M — косимплектическое многообразие, которое в силу предложения 13 является многообразием постоянной Φ -голоморфной секционной кривизны.

Пусть B – невырожденный эндоморфизм. В силу (53₂) в случае $A \neq 0$ имеем:

$$\delta_b^a C_c^d + \delta_c^a C_b^d = \delta_b^d C_c^a + \delta_c^d C_b^a.$$

Свертывая это соотношение по индексам a и b , получаем, что

$$C_b^a = \alpha \delta_b^a,$$

где $\alpha = \frac{1}{n} C_h^h$ – вещественная функция. Следовательно, $(\mathcal{B} \circ \Phi)^{-1} = \alpha \text{id}$, откуда $\mathcal{B} = -\frac{1}{\alpha} \Phi$, $\alpha = \text{const}$, т.е. M – многообразие, гомотетичное многообразию Сасаки. В этом случае по предложению 13 M – многообразие постоянной Φ -голоморфной секционной кривизны.

Пусть теперь $A = 0$. Тогда $A_{bc}^{ad} = 0$ и ввиду (54) $\tilde{A}_{bc}^{ad} = 0$. С учетом (24₁) и предложения 2 $\tilde{R}_{\hat{a}bc\hat{d}} = -2\delta_b^a \delta_c^d + \delta_b^d \delta_c^a$. Следовательно,

$$\tilde{R}^{(a}{}_{(bc)}{}^{d)} = \frac{3}{2} \tilde{\delta}_{bc}^{ad},$$

где $\tilde{R}$ – тензор кривизны метрики G . По предложению 12 $\mathcal{B}$ -преобразованная структура является сасакиевой структурой постоянной Φ -голоморфной секционной кривизны (равной -3).

Пусть, наконец, B – ненулевой, но вырожденный эндоморфизм. Построив, как и при доказательстве теоремы 8, сокращенную G -структуру и проводя то же рассуждение, что и при выводе соотношения (62), получаем, что в этом случае $A = 0$. Следовательно,

$$A_{bc}^{ad} = 0, \quad \text{в частности} \quad A_{\beta\gamma}^{\alpha\delta} = 0, \quad A_{\psi\tau}^{\varphi\chi} = 0. \quad (75)$$

Напомним, что по теореме 4 многообразие M в этом случае локально эквивалентно произведению $Q\mathcal{S}$ -многообразия максимального ранга на келерово многообразие. Первое из них в силу (75) и доказанного выше $\mathcal{B}$ -эквивалентно сасакиевой пространственной форме Φ -голоморфной секционной кривизны (равной -3), а второе является плоским келеровым многообразием, а значит, локально эквивалентно комплексному евклидову пространству $\mathbb{C}^{r2}$.

Обратно, очевидно, для любого из перечисленных типов многообразий выполняется тождество (73), а значит, оно удовлетворяет аксиоме Φ -голоморфных $(2r+1)$ -плоскостей.

С учетом тех же соображений, которыми завершено доказательство теоремы 9, получаем следующий результат, дающий полную классификацию (с точностью до $\mathcal{B}$ -преобразования метрики) $Q\mathcal{S}$ -многообразий класса CR_1 , удовлетворяющих аксиоме Φ -голоморфных $(2r+1)$ -плоскостей.

ТЕОРЕМА 12. *$Q\mathcal{S}$ -многообразие класса CR_1 удовлетворяет аксиоме Φ -голоморфных $(2r+1)$ -плоскостей тогда и только тогда, когда после $\mathcal{B}$ -преобразования метрики оно локально эквивалентно одному из следующих многообразий:*

1. *произведению комплексного евклидова пространства на вещественную прямую;*

2. произведению комплексного проективного пространства на вещественную прямую;
3. произведению комплексного гиперболического пространства на вещественную прямую;
4. произведению двумерного многообразия на вещественную прямую;
5. нечетномерной сфере, снабженной канонической сасакиевой структурой либо структурой, полученной из канонической с помощью преобразования D -гомотетии;
6. нечетномерному аффинному пространству, снабженному канонической сасакиевой структурой постоянной Φ -голоморфной секционной кривизны равной -3 ;
7. нечетномерной сфере, снабженной сасакиевой структурой, полученной из канонической с помощью преобразования D -инверсии;
8. произведению многообразия вида (6) на комплексное евклидово пространство.

С учетом теорем 9 и 12 получаем

СЛЕДСТВИЕ. Многообразие, указанное в п. 8 теоремы 12, будучи многообразием, удовлетворяющим аксиоме Φ -голоморфных $(2r + 1)$ -плоскостей, не является многообразием постоянной Φ -голоморфной секционной кривизны.

Этот результат, как и следствие к теореме 11, наглядно демонстрирует отличие геометрии $Q\mathcal{S}$ -многообразий от геометрии многообразий Сасаки, для которых выполнимость указанной аксиомы равносильна постоянству Φ -голоморфной секционной кривизны многообразия (см. [16]).

Список литературы

1. Chern S.-S. Pseudogroupes continus infinis // Colloques Internat. Centre Nat. Rech. Sci. 1953. V. 52. P. 119–136.
2. Gray J. W. Some global properties of contact structures // Ann. of Math. (2). 1959. V. 69. №2. P. 421–450.
3. Sasaki S. On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure. I // Tôhoku Math. J. (2). 1960. V. 12. №3. P. 459–476.
4. Blair D. E. Contact manifolds in Riemannian geometry. Berlin: Springer-Verlag, 1976. (Lecture Notes in Math. V. 509.)
5. Кириченко В. Ф. Методы обобщенной эрмитовой геометрии в теории почти контактных многообразий // Итоги науки и техн. Проблемы геометрии. Т. 18. М.: ВИНТИ, 1986. С. 25–71.
6. Кириченко В. Ф. Аксиома Φ -голоморфных плоскостей в контактной метрической геометрии // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1984. Т. 48. №4. С. 711–739.
7. Kirichenko V. F. Generalized quasi-Kaehlerian manifolds and axioms of CR -submanifolds in generalized Hermitian geometry. I // Geom. Dedicata. 1994. V. 51. P. 75–104.
8. Kirichenko V. F. Generalized quasi-Kaehlerian manifolds and axioms of CR -submanifolds in generalized Hermitian geometry. II // Geom. Dedicata. 1994. V. 52. P. 53–85.
9. Blair D. E. The theory of quasi-Sasakian structures // J. Differential Geom. 1967. V. 1. P. 331–345.
10. Tanno S. Quasi-Sasakian structures of rank $2p + 1$ // J. Differential Geom. 1971. V. 5. P. 317–324.
11. Kanetaki Sh. Quasi-Sasakian manifolds // Tôhoku Math. J. (2). 1977. V. 29. P. 227–233.

12. *Yanamoto H.* Quasi-Sasakian hypersurfaces in almost Hermitian manifolds // Res. Rep. Nagaoka Tech. College. 1969. V. 5. №2. P. 149–158.
13. *Kanetaki Sh.* Products of f -manifolds // TRU Math. 1974. V. 10. P. 11–17.
14. *Tanno S.* Sasakian manifolds with constant φ -holomorphic sectional curvature // Tôhoku Math. J. (2). 1969. V. 21. P. 501–507.
15. *Ogiue K.* On almost contact manifolds admitting axiom of planes and axioms of free mobility // Kodai Math. Semin. Rep. 1964. V. 16. P. 223–232.
16. *Ishihara I.* Anti-invariant submanifolds of a Sasakian space forms // Kodai Math. J. 1979. V. 2. P. 171–186.
17. *Кобаяши Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1981.
18. *Kiritchenko V. F.* Sur la géométrie des variétés approximativement cosymplectiques // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I. Math. 1982. V. 295. P. 673–676.
19. *Kobayashi S.* Principal fibre bundles with the 1-dimensional toroidal group // Tôhoku Math. J. (2). 1956. V. 8. P. 29–45.

Московский педагогический
государственный университет

Поступила в редакцию
04.05.2000 и 19.12.2001