Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. С. Чакветадзе, Топологические и метрические свойства одномерной динамической системы из лазерной физики, *Матем. сб.*, 2002, том 193, номер 8, 101–140

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm676>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 14:47:02

УДК 517.987.5

Г. С. Чакветадзе

Топологические и метрические свойства одномерной динамической системы из лазерной физики

В статье изучаются итерации вещественной рациональной функции $s_{a,b}(x) = b - ax/(1 + x^2)$ в зависимости от параметров $a, b \in \mathbb{R}$. Найдены зоны в пространстве параметров, соответствующие динамически тривиальному, а также хаотическому поведению системы. При этом получен аналог теоремы Якобсона для двухпараметрического семейства одномерных отображений, близких к определенному преобразованию с нейтральной неподвижной точкой.

Библиография: 12 названий.

Введение

В работе изучается динамическая система на прямой, порожденная рациональной функцией

$$s_{a,b}(x) = b - \frac{ax}{1 + x^2},$$

в зависимости от вещественных параметров a, b . Известно, что при $a > 0$ итерации $s_{a,b}$ моделируют эволюцию так называемой кавитации Фабри–Перо в лазерах. С прикладной точки зрения наиболее предпочтительными значениями параметров оказываются те, которые соответствуют предельно простому поведению системы (универсальное отталкивающее множество конечно). В этой связи представляет интерес вопрос о существовании, расположении и массивности множеств в пространстве параметров, соответствующих поведению хаотическому. Этот вопрос частично исследовался в работе [1] в рамках топологической динамики. В настоящей статье он рассматривается также и с эргодической точки зрения: ищутся множества положительной лебеговой меры в пространстве параметров, соответствующие существованию вероятностной абсолютно непрерывной меры, инвариантной относительно $s_{a,b}$ (далее: к.а.н.и. меры отображения $s_{a,b}$). Подобного рода вопросы для обширного класса семейств гладких отображений отрезка широко освещены в литературе, начиная с работы [2]. В представленном исследовании особое внимание уделено случаю, когда отображения семейства близки к некоторому предельному преобразованию со свойством Мисюревича, обладающему нейтральной неподвижной точкой и, вообще говоря, не имеющему к.а.н.и. меры. Характерно, что несмотря на наличие невырожденных критических точек у рассматриваемых отображений существование к.а.н.и. меры в определенном смысле типично даже в этом, если угодно, сильно негиперболическом случае. Похожие явления в иной ситуации недавно обнаружены в работах [3] и [4], где изучались возмущения одномерных отображений в присутствии бифуркаций типа “седло-узел”.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 99-01-01104 и № 00-15-96107).

Автор выражает глубокую признательность А. М. Степину за постановку задачи и постоянное внимание в процессе ее решения. Кроме того, автор благодарен Д. Ааронсону за дискуссию по поводу преобразований с бесконечной инвариантной мерой и М. Якобсону за полезные замечания, относящиеся к тексту статьи. Часть работы выполнена во время пребывания автора в Институте математики Вроцлавского технологического университета (2000) и в Центре международных математических мероприятий в Люмине, Марсель (2001). Автор благодарит эти учреждения за оказанное гостеприимство и Российский фонд фундаментальных исследований за поддержку упомянутых визитов.

§ 1. Простейшие свойства исследуемых отображений и формулировка результатов

Приведем простейшие аналитические свойства исследуемой функции:

- (1) функция $s_{a,b}$ является вещественно аналитической на всей прямой и имеет две невырожденные критические точки ± 1 ;
- (2) при $a > 0$ функция $s_{a,b}$ возрастает на промежутке $(-\infty, -1]$ от b до $b + a/2$ и на промежутке $[1, +\infty)$ от $b - a/2$ до b , а также убывает на отрезке $[-1, 1]$ от $b + a/2$ до $b - a/2$, причем $s_{a,b}(0) = b$.

Последнее свойство влечет, что

- (3) каждая точка на прямой имеет не более двух прообразов при отображении $s_{a,b}$.

Легко проверяется, что $s_{a,b}$ имеет по крайней мере одну и не более трех неподвижных точек. Для дальнейшего существенно также, что

- (4) $s_{a,b}$ имеет отрицательную производную Шварца, т.е.

$$\frac{s_{a,b}'''}{s_{a,b}'} - \frac{3}{2} \left(\frac{s_{a,b}''}{s_{a,b}'} \right)^2 < 0, \quad x \neq \pm 1;$$

- (5) отображение $s_{a,b}$ сопряжено с отображением $s_{a,-b}$ с помощью преобразования $x \mapsto -x$;
- (6) функция $s_{a,b}$ инвариантна относительно преобразования инверсии, т.е.

$$s_{a,b}(x) = s_{a,b}\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \neq 0.$$

Свойство (5) означает, что при исследовании параметрической плоскости для $s_{a,b}$ можно ограничиться значениями $b \geq 0$. Свойства (3) и (6) говорят о том, что

- (7) если x_1 и x_2 являются прообразами одной и той же точки при отображении $s_{a,b}$, то $x_1 = x_2^{-1}$.

Обозначим через $\mathfrak{D}$ пару $(+\infty, 2)$. В § 2 будет доказан следующий результат.

ТЕОРЕМА 1. *Вблизи точки $\mathfrak{D}$ существует множество положительной лебеговой меры $\mathfrak{S}_1 \in \mathbb{R}^2$ такое, что для любой пары $(a, b) \in \mathfrak{S}_1$ отображение $s_{a,b}$ имеет к.а.н.и. меру.*

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Сформулированная теорема представляет собой результат теории специального возмущения отображения $V: x \mapsto 2 + x + x^{-1}$, имеющего нейтральную неподвижную точку в бесконечности и бесконечную инвариантную меру: ее плотность дается формулой

$$\rho(x) = \begin{cases} |x|^{-1/2}, & x < 0, \\ 0, & x \geq 0. \end{cases}$$

Сужение $V|_{(-\infty, 0)}$ консервативно, вполне эргодично, а также поточечно сопряженно-эргодично с последовательностью возвратов

$$\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{2}\Gamma(\frac{3}{2})^2}$$

(см. [5] по поводу соответствующих определений и результатов теории преобразований, сохраняющих бесконечную меру).

Для того чтобы сформулировать следующий результат, удобнее наряду с семейством $s_{a,b}$, $a > 0$, $b > 0$, рассмотреть семейство $r_{a,d}$, $a > 0$, $d > -a/2$, задаваемое формулой

$$r_{a,d}(x) = d + \frac{a}{2} \frac{(1-x)^2}{1+x^2}. \quad (1.1)$$

Нетрудно видеть, что

$$r_{a,d} = s_{a,d+a/2}. \quad (1.2)$$

Обозначим через $a_0 = a_0(d)$ функцию $d \mapsto \max(0, -2d)$.

ТЕОРЕМА 2. *Существуют число $d' \in (0, 1)$, а также дифференцируемые функции $a_1: [-1/2, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $a_2: (-\infty, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ и $a_3: (d', 1) \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что*

- (i) *выполнены следующие неравенства: $a_0 < a_1 < a_2$, $d \in (-1/2, 1)$, $a_0 < a_2$, $d \in (-\infty, 1)$, и $a_2 < a_3$, $d \in (d', 1)$;*
- (ii) *имеем равенства*

$$\lim_{d \rightarrow -1-0} a_1(d) = \lim_{d \rightarrow 1-0} a_2(d) = \lim_{d \rightarrow 1-0} a_3(d) = \lim_{d \rightarrow -\infty} a_2(d) = +\infty$$

и, кроме того, $a_1(-2^{-1}) = a_0(-2^{-1}) = 1$;

- (iii) *для любой пары (a, d) из множества $\mathfrak{P}_1 = \{(a, d) \in \mathbb{R}^2 : -1/2 < d < 1, a_0(d) < a < a_1(d)\} \cup \{(a, d) \in \mathbb{R}^2 : d \geq 1, a > 0\}$ универсальное отталкивающее множество системы $r_{a,d}$ (см. [6]) либо пусто, либо одноточечно;*
- (iv) *для любой пары (a, d) из множества $\mathfrak{P}_2 = \{(a, d) \in \mathbb{R}^2 : d < 1, a > a_2(d)\}$ топологическая энтропия системы $r_{a,d}$ положительна;*
- (v) *вблизи графика $\mathfrak{P}_3$ функции a_3 существует множество положительной лебеговой меры $\mathfrak{S}_2 \in \mathbb{R}^2$ такое, что для любой пары $(a, d) \in \mathfrak{S}_2$ отображение $r_{a,d}$ имеет к.а.н.и. меру.*

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Заменяя в утверждениях (iii), (iv), (v) множества $\mathfrak{P}_i$ их образами под действием преобразования $(a, d) \mapsto (a, d + a/2)$, получим соответствующие результаты для семейства $s_{a,b}$, $a > 0$, $b > 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В работе [1] доказан вариант утверждения (iv), в котором вместо множества $\mathfrak{P}_2$ фигурируют определенные сегменты прямых, лежащие внутри $\mathfrak{P}_2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В §3 найдены выражения для функций a_i (см. (3.14)–(3.16)).

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Вычисления показывают, что $d' \approx 0.317183$.

В дальнейшем символ ∂ будет использоваться для обозначения пространственной производной, а символы ∂_a, ∂_b – для обозначения производных по соответствующим параметрам. Для множества $J \subset \mathbb{R}$ через $\bar{J}$ обозначается его замыкание и через $|J|$ – его линейная мера Лебега (в случае, если J измеримо).

§2. Доказательство теоремы 1

В этом параграфе будет доказана теорема 1 для отображения $s_{a,-b}$, что не меняет сути дела согласно свойству (5) функции $s_{a,b}$. Центральное место в построении множества $\mathfrak{S}_1$ занимает доказательство следующего результата.

ТЕОРЕМА 3. *Существует $c_0 \gg 1$ такое, что для любого $c \geq c_0$ существует множество $\mathfrak{S}_c \in \mathbb{R}$ положительной лебеговой меры такое, что для любого $b \in \mathfrak{S}_c$ отображение $s_{c(2-b)^{-3}, -b}$ имеет к.а.н.и. меру. При этом для любого c точка $b = 2$ является левосторонней точкой плотности множества $\mathfrak{S}_c$.*

Зафиксируем символ S для обозначения отображения $s_{c(2-b)^{-3}, -b}|_{[0, +\infty)}$. Отметим, что большое число c в сформулированной теореме играет роль, в некотором смысле аналогичную роли малого параметра в семействе отображений Эно (параметр b в работе [7]). Ключевые оценки доказательства появляются уже при исследовании однопараметрического семейства отображений, получающихся из S при $c = \infty$, каждое из которых имеет нейтральную неподвижную точку в бесконечности. Доказательство в общем случае может быть получено путем выбора такого числа c_0 , что эти оценки выживают при $c \geq c_0$.

2.1. Метод индуцирования. Пусть $F: \Lambda \rightarrow I$ есть диффеоморфизм своего интервала определения $\text{dom}(F) = \Lambda$ на образ I . Обозначим

$$\tau(F) = \tau(F, \Lambda) = \sup_{x, y \in \Lambda} \frac{|F'(x)|}{|F'(y)|}, \quad \mu(F) = \mu(F, \Lambda) = \sup_{x \in \Lambda} \frac{|F''(x)|}{F'(x)^2}.$$

Будем называть диффеоморфизм F *продолжаемым* до диффеоморфизма на интервал $\hat{I} \supset I$, если существуют интервал $\hat{\Lambda} \supset \Lambda$ и диффеоморфизм $\hat{F}: \hat{\Lambda} \rightarrow \hat{I}$, имеющих отрицательную производную Шварца и совпадающий с F на Λ . Пусть при этом $\hat{I} = L \cup \bar{I} \cup R$, $L, R \neq \emptyset$. Тогда согласно принципу Кёбе (см. [8]) для любого $\nu > 0$ существуют числа $\tau = \tau(\nu)$, $\chi = \chi(\nu)$, не зависящие от F , такие, что

- 1) если $\nu < \min\left(\frac{|L|}{|I|}, \frac{|R|}{|I|}\right)$, то $\tau(F, \Lambda) \leq \tau$;
- 2) если при этом интервал I содержит середину интервала $\hat{I}$, то

$$\tau(F, \Lambda) \leq \exp\left(\chi \frac{|I|}{|\hat{I}|}\right).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Можно показать, что в этих условиях существует число $\mu < \infty$, зависящее только от длин $|L|, |R|, |I|$, такое, что $\mu(F, \Lambda) \leq \mu$.

Пусть I – интервал, I_n , $n \in \mathbb{N}$, – семейство дизъюнктивных интервалов, и пусть $G: \bigcup I_n \rightarrow I$ – отображение. Для любого n ограничение $G|_{I_n}$ называется *ветвью* отображения G . В ходе изложения будут возникать ветви двух типов: *монотонные* (т.е. такие, которые являются диффеоморфизмами на I) и *параболические*

(т.е. такие, каждая из которых представляет собой дифференцируемое унимодальное отображение с невырожденной критической точкой, переводящее границу своего интервала определения в границу I).

Известно (см., к примеру, [8]), что для доказательства теоремы 3 достаточно для любого $c \gg 1$ построить множество $\mathfrak{G}_c \in \mathbb{R}$ такое, что для любого $b \in \mathfrak{G}_c$ найдутся интервал I , семейство I_n , $n \in \mathbb{N}$, дизъюнктивных подынтервалов I и отображение $G: \bigcup I_n \rightarrow I$, удовлетворяющие следующим свойствам:

- (а) $|I \setminus \bigcup I_n| = 0$;
- (б) все ветви $G|_{I_n}$ продолжаемы до диффеоморфизмов $\widehat{G}_n$ на некоторый фиксированный интервал $\widehat{I} \supset I$ с тем условием, что множество $\widehat{I} \setminus I$ имеет две нетривиальные компоненты связности и для любого n $\text{dom}(\widehat{G}_n) \subset \widehat{I}$;
- (в) для любого n существует $k_n \in \mathbb{N}$ такое, что $G|_{I_n} = S^{k_n}$;
- (г) числовой ряд $\sum k_n |I_n|$ сходится.

Общая схема построения отображения G заимствована автором из работ [2], [9], однако определенные технические детали отличаются. В частности, предлагаемая конструкция существенно опирается на свойство (4) функции $s_{a,b}$. Она состоит из трех компонент: вычислительной части, предварительной конструкции и основной индуктивной конструкции.

2.2. Вычислительная часть. Заметим, что при $b > 1$ ограничение отображения $s_{a,-b}^2$ на промежуток $[0, +\infty)$ унимодально, причем $s_{a,-b}^2$ убывает на отрезке $[0, 1]$ и возрастает на промежутке $[1, +\infty)$, $s_{a,-b}^2(0) = s_{a,-b}^2(+\infty) = s_{a,-b}(-b)$. Зафиксируем ε , $0 < \varepsilon \ll 10^{-1}$, и обозначим через h число c^{-1} .

ЛЕММА 1. *Существуют числа $c_1 = c_1(\varepsilon)$, $b_1 = b_1(\varepsilon)$ такие, что при $c \geq c_1$, $b_1 \leq b \leq 2$ выполнено неравенство $(1 - \varepsilon)(2 - b) \leq S(1) \leq 2 - b$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы вытекает из того, что

$$S(1) = (2 - b)(1 + h(2 - b)^3 \Phi(c, b)),$$

причем существует $C > 0$ такое, что $C \leq \Phi(c, b) \leq 0$ в некоторой окрестности точки $(+\infty, 2)$.

Таким образом, промежуток $[0, +\infty)$ инвариантен относительно S и $S(1) < 1$ при надлежащем выборе c и b . При этом существует неподвижная точка $p \in (0, 1)$ отображения S . Положим $I = (p, p^{-1})$. Заметим, что в силу свойства (6) функции $s_{a,b}$ точка p^{-1} представляет собой прообраз p под действием S .

ЛЕММА 2. *Существуют числа $c_2 = c_2(\varepsilon)$, $b_2 = b_2(\varepsilon)$ такие, что при $c \geq c_2$, $b_2 \leq b \leq 2$ выполнены неравенства*

$$\left| p - \frac{1}{2} \right| \leq \varepsilon, \quad \left| \frac{1}{p} - 2 \right| \leq \varepsilon, \quad \left| \partial S(p) + 3 \right| \leq \varepsilon.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лемма следует из того, что для любого $x \neq 0$

$$\lim_{(a,b) \rightarrow \infty} s_{a,-b}^2(x) = s_{\infty,-2}^2(x) = x + \frac{1}{x} - 2,$$

причем сходимость равномерна на компактных множествах, не содержащих 0. Легко видеть, что отображение $s_{\infty,-2}^2$ имеет неподвижную точку 2^{-1} с мультипликатором -3 .

Следующая лемма описывает асимптотику определенных прообразов в окрестности инвариантного интервала $(S(1), S^2(1))$.

ЛЕММА 3. Существуют $c_3 = c_3(\varepsilon)$, $b_3 = b_3(\varepsilon)$ такие, что для любого $c \geq c_3$ определена функция $N = N_c: [b_3, 2) \rightarrow \mathbb{N}$ со следующими свойствами:

- (i) для любого c $\lim_{b \rightarrow 2-0} N_c(b) = \infty$;
- (ii) существует множество $\{z_0, z_1, \dots, z_N\}$ такое, что $p^{-1} = z_0 < z_1 < \dots < z_N$, $S(z_n) = z_{n-1}$, $n = 1, \dots, N$;
- (iii) существуют множество $\{y_0, y_1, \dots, y_N\}$ и число $C_1 > 0$ такие, что $p = y_0 > y_1 > \dots > y_N > 0$, $S(y_n) = z_{n-1}$, $n = 1, \dots, N$, и выполнены оценки

$$\frac{1}{5n} \leq y_n \leq \frac{1}{n}, \quad \frac{C_1^{-1}}{n^2} \leq |\Lambda_n| \leq \frac{C_1}{n^2}, \quad n = 1, \dots, N,$$

где $\Lambda_n = (y_n, y_{n-1})$;

- (iv) пусть $M = M_c(b) = \max\{n \leq N : \Lambda_n \subset S(I)\}$, тогда

$$M < \frac{14}{15}N, \quad \lim_{b \rightarrow 2-0} M_c(b) = \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i), (ii) Рассмотрим последовательность, быть может и бесконечную, точек z_n , $n = 1, \dots$, таких, что $p^{-1} = z_0 < z_1 < \dots$, $S(z_n) = z_{n-1}$, $n = 1, \dots$. Пусть

$$N = \max\{n \in \mathbb{N} : \Omega_n \text{ существует и } \Omega_n \subset (p^{-1}, 15(2-b)^{-1})\},$$

где $\Omega_n = (z_{n-1}, z_n)$. Чтобы доказать корректность определения числа N и свойство (i), достаточно установить, что существуют $c_3 = c_3(\varepsilon)$, $b_3 = b_3(\varepsilon)$ такие, что при $c \geq c_3$, $b_3 \leq b < 2$ для любого $x \in [p^{-1}, 16(2-b)^{-1}]$ выполнено неравенство

$$x - 2 \leq S(x) \leq x - 1. \quad (2.1)$$

Действительно, в этих условиях для любого $x \in (p^{-1}, 15(2-b)^{-1})$ определен единственный прообраз x' точки x такой, что $x' > x$, причем $x' \geq x + 1$, откуда N конечно. Кроме того, для любого n такого, что z_n определено и принадлежит $[p^{-1}, 16(2-b)^{-1}]$, имеем оценку

$$1 \leq z_n - z_{n-1} \leq 2. \quad (2.2)$$

Используя ее последовательно и учитывая лемму 2, получаем

$$n + 2 - \varepsilon \leq z_n \leq 2n + 2 + \varepsilon, \quad (2.3)$$

откуда выводится неравенство

$$\frac{15}{2(2-b)} - 2 - \frac{\varepsilon}{2} \leq N \leq \frac{15}{2-b} + 2 - \varepsilon. \quad (2.4)$$

Докажем неравенство (2.1). Так как

$$\begin{aligned} x - S(x) &= x \left(1 - \frac{1 + h(2-b)^3 b(x + x^{-1})}{(1 + h(2-b)^3 b(x + x^{-1}))^2 + h^2(2-b)^6(x + x^{-1})^2} \right) \\ &\quad + b - \frac{1}{x} \frac{1 + h(2-b)^3 b(x + x^{-1})}{(1 + h(2-b)^3 b(x + x^{-1}))^2 + h^2(2-b)^6(x + x^{-1})^2} \\ &= \mathcal{A}_1(c, b, x) + b - \mathcal{A}_2(c, b, x), \end{aligned}$$

то достаточно показать, что существуют $c_3 = c_3(\varepsilon)$, $b_3 = b_3(\varepsilon)$ такие, что при $c \geq c_3$, $b_3 \leq b < 2$ для любого $x \in [p^{-1}, 16(2-b)^{-1}]$

$$0 \leq \mathscr{A}_1 \leq 2 - b, \quad 0 \leq \mathscr{A}_2 \leq b - 1.$$

В силу того что $x \geq 2 - \varepsilon$ и $0 < x + x^{-1} < 32(2-b)^{-1}$ при $x \in [p^{-1}, 16(2-b)^{-1}]$, имеем

$$\begin{aligned} 0 < \mathscr{A}_1 &\leq \frac{16}{2-b} \\ &\times \frac{h(2-b)^3 b \cdot 32(2-b)^{-1} + h^2(2-b)^6(b^2+1)32^2(2-b)^{-2}}{1 - 2h(2-b)^3 b \cdot 32(2-b)^{-1} - h^2(2-b)^6(b^2+1)32^2(2-b)^{-2}} \leq 2 - b, \\ 0 < \mathscr{A}_2 &\leq \frac{1}{2-\varepsilon}(1 + h(2-b)^3 b \cdot 32(2-b)^{-1}) \leq \frac{3}{4} \leq b - 1 \end{aligned}$$

при достаточно малом $\max(h, 2-b)$.

(iii) В силу свойства (6) функции $s_{a,b}$ точки вида $y_n = z_n^{-1}$, $n = 1, \dots, N$, удовлетворяют требованиям п. (iii). Учитывая это, не составляет труда вывести оценки п. (iii) из неравенств (2.2) и (2.3). Заметим, что прообразы точек под действием S , лежащие на интервале $(0, 1)$, определены однозначно, ибо S убывает на $(0, 1)$.

(iv) В силу определения числа M выполнено неравенство $S(1) \leq y_M$. Из леммы 1 получаем, что $(1-\varepsilon)(2-b) \leq y_M$. Используя оценку на y_n , отсюда выводим, что $(1-\varepsilon)(2-b) \leq M^{-1}$. Принимая во внимание оценку (2.4), из последнего неравенства получаем

$$M \leq (1-\varepsilon)^{-1}(2-b)^{-1} \leq 2 \cdot \frac{2}{15} \left(N + 2 + \frac{\varepsilon}{2} \right) \leq \frac{2}{15} N \cdot 7,$$

$M \ll N$. Поэтому число y_{M+1} определено, $y_{M+1} < S(1)$ и аналогично предыдущему получаем, что $M \rightarrow \infty$ равномерно по c при $b \rightarrow 2-0$, что и требовалось доказать.

Заметим, что должны выполняться условия $c_3 \geq \max(c_1, c_2)$, $b_3 \geq \max(b_1, b_2)$, так как в доказательстве использовались леммы 1 и 2.

Динамическое определение чисел p^{-1} , y_n , z_n , $n = 1, \dots, N$, и монотонность отображения S на интервалах $(0, 1)$ и $(1, +\infty)$ говорят о том, что для любого $n = 1, \dots, N$ S^n диффеоморфно отображает интервалы Λ_n и Ω_n на I , причем всюду на Λ_n и Ω_n n есть момент первого попадания в I . Определим отображение $H: \bigcup_{n=1}^N \Lambda_n \rightarrow I$ по формуле $H|_{\Lambda_n} = H_n = S^n|_{\Lambda_n}$, $n = 1, \dots, N$, и положим $T = H \circ S$ на множестве $\bigcup_{n=1}^{M+1} \Delta_n$, где для любого n $\Delta_n = S^{-1}(\Lambda_n)$. Из сказанного вытекает, что T представляет собой отображение первого возвращения на I . Заметим, что T , вообще говоря, не удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к отображению G , так как, в частности, может обладать центральной параболической ветвью $T_{M+1} = H_{M+1} \circ S$. Подобные ветви будут впоследствии устраняться путем взятия определенных композиций. При этом окажутся важными некоторые свойства диффеоморфизмов H_n , которые будут суммированы в лемме 5. Подготовкой к ее доказательству служит формулируемая ниже лемма 4.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Для отображения S при $b = 2$ (см. доказательство леммы 2) все сказанное остается в силе за тем исключением, что в лемме 3 числа N и M не определены, соответствующие множества прообразов бесконечны и отображение T обладает бесконечным числом монотонных ветвей. Полиномиальная асимптотика прообразов y_n в этом случае известна и вычислялась, к примеру, в [10] и [11]. Кроме того, T удовлетворяет требованиям (а)–(в), предъявляемым к отображению G (в качестве $\hat{I}$ берется интервал $(0, +\infty)$).

В дальнейшем для любых целых $i \geq 0$, $j \geq 0$ символом $O(h^i(2-b)^j)$ обозначается любая числовая функция Φ переменных c, b, x со следующим свойством: существует число $C > 0$ такое, что для любых $c \geq c_3$, $b_3 \leq b \leq 2$, $x \in [y_N, z_N]$ выполнено неравенство $|\Phi(c, b, x)| \leq Ch^i(2-b)^j$.

ЛЕММА 4. При $c \geq c_3$, $b_3 \leq b \leq 2$ выполнены следующие утверждения:

- (i) $\partial_b S = -1 + O(h)$, $\partial_b \partial S \cdot (\partial S)^{-1} = O(h(2-b))$;
- (ii) существует $C_2 = C_2(c_3, b_3) > 0$ такое, что для любых $n \in \{1, \dots, N\}$, $y \in \Lambda_n$ и $z \in \Omega_n$ имеем

$$\left| \frac{\partial^2 S(y)}{\partial S(y)^2} \right| \leq \frac{C_2}{n} + O(h(2-b)^3), \quad \left| \frac{\partial^2 S(z)}{\partial S(z)^2} \right| \leq \frac{C_2}{n^3} + O(h(2-b)^3).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) После некоторых простых преобразований запишем

$$\begin{aligned} \partial_b S &= -1 + h \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 (2-b)^2 \left(\frac{2-4b}{\mathcal{A}_3} - \frac{(1+h(2-b)^3 b(x+x^{-1}))\mathcal{A}_4}{\mathcal{A}_3^2} \right), \\ \partial S &= \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) \left(\frac{1+2h(2-b)^3 b(x+x^{-1})}{\mathcal{A}_3} - \frac{(1+h(2-b)^3 b(x+x^{-1}))\mathcal{A}_5}{\mathcal{A}_3^2} \right), \\ \partial \partial_b S &= \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) \left[2h(2-b)^2 \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 \left(\frac{2-4b}{\mathcal{A}_3} - \frac{(1+h(2-b)^3 b(x+x^{-1}))\mathcal{A}_4}{\mathcal{A}_3^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + h(2-b)^2 \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 \left(-\frac{(2-4b)\mathcal{A}_5}{\mathcal{A}_3^2} - \frac{h(2-b)^3 b\mathcal{A}_4}{\mathcal{A}_3^2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{(1+h(2-b)^3 b(x+x^{-1}))\mathcal{A}_6}{\mathcal{A}_3^2} + 2 \frac{(1+h(2-b)^3 b(x+x^{-1}))\mathcal{A}_4\mathcal{A}_5}{\mathcal{A}_3^3} \right], \end{aligned} \tag{2.5}$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_3 &= (1+h(2-b)^3 b(x+x^{-1}))^2 + h^2(2-b)^6(x+x^{-1})^2, \\ \mathcal{A}_4 &= 2(1+h(2-b)^3 b(x+x^{-1}))(2-4b) - 6h(2-b)^3(x+x^{-1}), \\ \mathcal{A}_5 &= 2(1+h(2-b)^3 b(x+x^{-1}))h(2-b)^3 b + 2h^2(2-b)^6(x+x^{-1}), \\ \mathcal{A}_6 &= 2h(2-b)^3 b(2-4b) - 6h(2-b)^3. \end{aligned}$$

Так как $2 \leq x + x^{-1} \leq 15(2-b)^{-1} + 15^{-1}(2-b)$ при $x \in [y_N, z_N] \subset [15^{-1}(2-b), 15(2-b)^{-1}]$, то

$$\mathcal{A}_3 = 1 + O(h(2-b)^2), \quad \mathcal{A}_4 = O(1), \quad \mathcal{A}_5 = O(h(2-b)^3), \quad \mathcal{A}_6 = O(h(2-b)^3).$$

Отсюда $\partial_b S = -1 + O(h)$. Кроме того,

$$\frac{\partial_b \partial S}{\partial S} = \frac{(1 - x^{-2})(O(h(2 - b)) + O(h(2 - b)^3))}{(1 - x^{-2})(1 + O(h(2 - b)^2))} = O(h(2 - b)),$$

что и требовалось доказать. Заметим, что как $\mathcal{A}_3$, так и вторая скобка в выражении (2.5) должны быть не меньше 2^{-1} , что может быть достигнуто за счет подходящего изменения чисел c_3 и b_3 .

(ii) Вычислив $\partial^2 S$ и используя выражение (2.5), запишем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 S(x)}{\partial S(x)^2} &= \frac{2x^{-3}}{(1 - x^{-2})^2} \left(\frac{1 + 2h(2 - b)^3 b(x + x^{-1})}{\mathcal{A}_3} - \frac{(1 + h(2 - b)^3 b(x + x^{-1})) \mathcal{A}_5}{\mathcal{A}_3^2} \right)^{-1} + O(h(2 - b)^3) \\ &\leq \frac{2}{z_{n-1}^3} \frac{1}{(1 - (2 - \varepsilon)^{-2})^2} (1 + O(h(2 - b)^2)) + O(h(2 - b)^3) \\ &\leq \frac{2}{(n - 1 + 2 - \varepsilon)^3} \left(\frac{9}{5} \right)^2 (1 + O(h(2 - b)^2)) + O(h(2 - b)^3), \end{aligned}$$

если $x \in \Omega_n$, $n = 1, \dots, N$ (при этом были использованы малость ε и оценка (2.3)). Отсюда следует второе из неравенств п. (ii). Первое из них проверяется аналогично с учетом того, что $y_n \leq n^{-1}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Не ограничивая общности, будем считать, что при $c \geq c_3$, $b_3 \leq b \leq 2$ выполнены оценки $1 - \varepsilon < |\partial_b S| < 1 + \varepsilon$ и $|\partial_b \partial S| |\partial S|^{-1} < \varepsilon$ на промежутке $[y_N, z_N]$.

Заметим, что все диффеоморфизмы H_n , так же как и их интервалы определения, зависят от c и от b . Следующий результат описывает некоторые свойства диффеоморфизмов H_n , относящиеся к их зависимости от b .

ЛЕММА 5. *Существуют константы $C_i > 0$, $i = 3, 4, 5$, такие, что для любых $c \geq c_3$, $b_3 \leq b < 2$, $n = 1, \dots, N$ справедливы следующие оценки:*

- (i) $\inf_{y \in \Lambda_n} |\partial H_n(y)| \geq C_3 n^2$;
- (ii) $\sup_{y \in \Lambda_n} \left| \frac{\partial_b H_n(b, y)}{\partial H_n(b, y)} \right| \leq C_4 n^{-1}$;
- (iii) $\sup_{x \in I} \left| \frac{\partial_b \partial H_n^{-1}(b, x)}{\partial H_n^{-1}(b, x)} \right| \leq C_5$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Обозначим $p = z_{-1}$, $\Omega_0 = (z_{-1}, z_0) = I$. Зафиксируем $n \geq 2$ и заметим, что диффеоморфизм $S^{n-1}|_{\Lambda_n}$ продолжаем до диффеоморфизма на интервал (z_{-1}, z_2) . При этом отношения длин интервалов $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2$ оцениваются ненулевыми числами, не зависящими от c, b (см. лемму 2 и неравенство (2.2)). Это влечет существование числа τ такого, что $\tau(S^{n-1}|_{\Lambda_n}) \leq \tau$ для любого $n \geq 2$. Используя оценку на $|\Lambda_n|$ из п. (iii) леммы 3, получаем квадратичную оценку снизу для $\partial S^{n-1}|_{\Lambda_n}$, которая влечет п. (i). Используя аналогичные рассуждения, можно считать, что для любых $n \in \{1, \dots, N\}$, $k \in \{1, \dots, n\}$

$$\inf_{z \in \Omega_n} |\partial S^k(z)| \geq C_3, \quad \inf_{y \in \Lambda_n} |\partial S^k(y)| \geq C_3 n^2. \quad (2.6)$$

(ii) Для композиции отображений

$$\varphi(b, y) = \varphi_n(b, \varphi_{n-1}(b, \dots \varphi_2(b, \varphi_1(b, y)) \dots))$$

располагаем формулой (см. [2])

$$\frac{\partial_b \varphi(b, y)}{\partial \varphi(b, y)} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial_b \varphi_i(b, \varphi^{i-1}(b, y))}{\partial(\varphi^i(b, y))}, \quad (2.7)$$

где $\varphi^i(b, y) = \varphi_i(b, \varphi_{i-1}(b, \dots \varphi_2(b, \varphi_1(b, y)) \dots))$ для любого i . Используя эту формулу и опуская зависимость от параметра, запишем

$$\frac{\partial_b H_n(y)}{\partial H_n(y)} = \frac{\partial_b S(y)}{\partial S(y)} + \sum_{i=2}^n \frac{\partial_b S(S^{i-1}(y))}{\partial S^i(y)}, \quad y \in \Lambda_n,$$

откуда с помощью леммы 4 получим

$$\left| \frac{\partial_b H_n(y)}{\partial H_n(y)} \right| \leq (1 + O(h)) \left(\frac{1}{C_3 n^2} + (n-1) \frac{1}{C_3 n^2} \right) = (1 + O(h)) \frac{C_3^{-1}}{n},$$

что и требовалось доказать.

(iii) Пусть $x = S(y)$ и $y \neq 1$. Тогда справедливо выражение

$$\frac{\partial_b \partial S^{-1}(x)}{\partial S^{-1}(x)} = \frac{\partial^2 S(y)}{\partial S(y)^2} \partial_b S(y) - \frac{\partial_b \partial S(y)}{\partial S(y)}. \quad (2.8)$$

В обозначениях предыдущего пункта проверяется формула

$$\begin{aligned} \frac{\partial_b \partial \varphi^{-1}(b, x)}{\partial \varphi^{-1}(b, x)} &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial_b \partial \varphi_i^{-1}(b, \varphi^i(b, y))}{\partial \varphi_i^{-1}(b, \varphi^i(b, y))} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial^2 \varphi_i(b, \varphi^{i-1}(b, y))}{\partial \varphi_i(b, \varphi^{i-1}(b, y))^2} \partial_b (\varphi_{i+1}^{-1} \circ \dots \circ \varphi_n^{-1}(b, x)) \right), \end{aligned} \quad (2.9)$$

где $x = \varphi(b, y)$, $\varphi_{i+1}^{-1} \circ \dots \circ \varphi_n^{-1}(b, x) = \varphi_{i+1}^{-1}(b, \dots \varphi_n^{-1}(b, x) \dots)$. Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{\partial_b \partial H_n^{-1}(x)}{\partial H_n^{-1}(x)} &= \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\partial_b \partial S^{-1}(S^i(y))}{\partial S^{-1}(S^i(y))} - \frac{\partial^2 S(S^{i-1}(y))}{\partial S(S^{i-1}(y))^2} \partial_b ((S^{n-i}|_{\Omega_{n-i}})^{-1})(x) \right) \\ &\quad + \frac{\partial_b \partial S^{-1}(x)}{\partial S^{-1}(x)}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

где $x \in I$, $y \in \Lambda_n$, $x = H_n(y)$. Используя формулу (2.7) и лемму 4, оценим

$$\begin{aligned} |\partial_b ((S^k|_{\Omega_k})^{-1})(x)| &= \left| \frac{\partial_b S^k(z)}{\partial S^k(z)} \right| \leq \sum_{j=1}^k \frac{|\partial_b S(S^{j-1}(z))|}{\partial S^j(z)} \leq (1 + O(h)) C_3^{-1} k, \\ k &= 1, \dots, n-1, \end{aligned} \quad (2.11)$$

где $x = S^k(z)$, $z \in \Omega_k$. Обозначив $y_i = S^i(y) \in \Omega_{n-i}$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, а также принимая во внимание лемму 4 и соотношения (2.8), (2.10), (2.11), запишем

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial_b \partial H_n^{-1}(x)}{\partial H_n^{-1}(x)} \right| &\leq \sum_{i=1}^{n-1} \left(\left| \frac{\partial^2 S(y_{i-1})}{\partial S(y_{i-1})^2} \partial_b S(y_{i-1}) - \frac{\partial_b \partial S(y_{i-1})}{\partial S(y_{i-1})} \right| \right. \\
&\quad \left. + \left| \frac{\partial^2 S(y_{i-1})}{\partial S(y_{i-1})^2} \right| (1 + O(h)) C_3^{-1} (n-i) \right) \\
&\quad + \left| \frac{\partial^2 S(y_{n-1})}{\partial S(y_{n-1})^2} \partial_b S(y_{n-1}) - \frac{\partial_b \partial S(y_{n-1})}{\partial S(y_{n-1})} \right| \\
&\leq \sup_{x \in [y_N, z_N]} |\partial_b S(x)| \left(\left| \frac{\partial^2 S(y)}{\partial S(y)^2} \right| + \sum_{i=2}^n \left| \frac{\partial^2 S(y_{i-1})}{\partial S(y_{i-1})^2} \right| \right) \\
&\quad + (1 + O(h)) C_3^{-1} \left(\left| \frac{\partial^2 S(y)}{\partial S(y)^2} \right| (n-1) + \sum_{i=2}^{n-1} \left| \frac{\partial^2 S(y_{i-1})}{\partial S(y_{i-1})^2} \right| (n-i) \right) \\
&\quad + n \sup_{x \in [y_N, z_N]} \left| \frac{\partial_b \partial S(x)}{\partial S(x)} \right| \leq (1 + O(h)) \left(\frac{C_2}{n} + O(h(2-b)^3) \right) \\
&\quad + \sum_{i=2}^n \left(\frac{C_2}{(n-i+1)^3} + O(h(2-b)^3) \right) \\
&\quad + (1 + O(h)) C_3^{-1} \left(\left(\frac{C_2}{n} + O(h(2-b)^3) \right) (n-1) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=2}^{n-1} \left(\frac{C_2}{(n-i+1)^3} + O(h(2-b)^3) \right) (n-i) \right) + n O(h(2-b)) \\
&\leq (1 + O(h)) \left(\frac{C_2}{n} (1 + C_3^{-1} (n-1)) + O(h(2-b)^3) \left(n + C_3^{-1} \sum_{i=1}^{n-1} i \right) \right. \\
&\quad \left. + C_2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^3} + C_3^{-1} C_2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \right) + N O(h(2-b)) \leq \text{const},
\end{aligned}$$

так как

$$\sum_{i=1}^{n-1} i \leq n^2, \quad n \leq N \leq 15(2-b)^{-1}(1 + O(2-b)).$$

Заметим, что константы C_4 и C_5 зависят от c_3, b_3 . Будем считать, что $C_4 > 1$.

2.3. Предварительная конструкция. На протяжении пп. 2.3–2.6 все рассмотрения проводятся для некоторого фиксированного значения $c \geq c_3$. На начальном шаге индуктивной конструкции построения отображения G требуется, чтобы большая часть интервала I была занята интервалами определения сильно растягивающих диффеоморфизмов. Так как периферические ветви отображения T не обязаны быть сильно растягивающими, то T , вообще говоря, непригодно в качестве начального приближения к отображению G и нуждается в модификации (см. [9]), которая проделывается следующим образом. Напомним, что для любого $n \in \{1, \dots, M\}$ множество Δ_n состоит из двух компонент связности, которые с этого момента не различаются и имеют одно и то же обозначение Δ_n ; символ T_n будет использоваться для обозначения каждой из ветвей $T|_{\Delta_n}$. Наряду с этим символ

T_l (T_r) служит для обозначения той ветви T_1 , которая определена в непосредственной близости к точке p (p^{-1}).

Для заданного $E > 0$ назовем диффеоморфизм $F: \Lambda \rightarrow I$ *E-растягивающим*, если $\inf_{x \in \Lambda} |F'(x)| \geq E$. Пусть $b = 2$ и $E \gg 1$. В силу сказанного в замечании 7 соответствующее отображение T имеет к.а.н.и. меру. Используя свойство (4) функции $s_{a,b}$, отсюда можно вывести существование такого $L = L(E)$, что для любого $x \in \text{dom}(T^L)$ $|(T^L)'(x)| \geq 2E$. Пусть для некоторого набора $(n_1, \dots, n_i) \in \mathbb{N}^i$ диффеоморфизм $U = T_{n_i} \circ \dots \circ T_{n_1}: \Delta \rightarrow I$ не является $2E$ -растягивающим. Тогда $i < L$ и существует $K = K(E)$ такое, что для любого $k \in \{1, \dots, i\}$ $n_k \leq K$, так как ветви T_n с большими n сильно растягивают. Здесь в первый раз возникает следующее понятие. *Композицией* в интервал Δ отображения T называется переход к рассмотрению отображения $W = T \circ U: \bigcup U^{-1}(\Delta_n) \rightarrow I$. Сделаем композицию в Δ . При этом вблизи прообраза $u = U^{-1}(1)$ расположены $2E$ -растягивающие ветви отображения W , которые не участвуют в дальнейших композициях. В то же время, при наличии некоторой ветви отображения W , находящейся в условиях диффеоморфизма U , делается композиция (отображения T) в ее интервал определения и т.д. Из сказанного ясно, что за конечное число шагов ($\leq K^L$) можно построить отображение $\bar{T}$, совпадающее с T вблизи точки 1, все ветви которого будут $2E$ -растягивающими. При этом получим конечное множество интервалов, в которые на каком-либо шаге делалась композиция, с определенными на этих интервалах диффеоморфизмами. Каждый интервал из этого множества будем обозначать через Δ_0 , а соответствующий диффеоморфизм – через T_0 . Заметим, что любой интервал Δ_0 содержит прообраз $u = (T_0)^{-1}(1)$ и геометрические свойства отображения $\bar{T}$ вблизи u и отображения T около точки 1 одинаковы. При малом изменении b производные ветвей отображения T существенно меняются только вблизи единицы. Стало быть, значительное изменение производных ветвей отображения $\bar{T}$ происходит только около единицы и конечного числа прообразов u . Как результат, большая часть интервала I будет занята областями определения E -растягивающих ветвей отображения $\bar{T}$.

Описанное построение называется *E-предварительной конструкцией*. Отметим, что однозначно определены отображение $\bar{H}: [y_N, p] \rightarrow I$, интервалы Λ_0 , диффеоморфизмы $H_0: \Lambda_0 \rightarrow I$ такие, что

$$\bar{H}|_{\bigcup_{K < n \leq N} \Lambda_n} = H, \quad \bar{T} = \bar{H} \circ S, \quad \Delta_0 = S^{-1}(\Lambda_0), \quad T_0 = H_0 \circ S,$$

а также точки $v = (H_0)^{-1}(1)$, вблизи которых геометрические свойства $\bar{H}$ аналогичны соответствующим свойствам T около точки 1.

2.4. Основная индуктивная конструкция. Выбор параметров. Пусть $b = 2$. Тогда $I = (2^{-1}, 2)$ и

$$\partial S(p) = -3. \quad (2.12)$$

Положим $\hat{I} = (x_1, x_2)$, где x_1 и x_2 удовлетворяют соотношениям

$$0 \ll x_1 < \frac{1}{2}, \quad 2 < x_2 \ll 3, \quad x_1 < x'_1 < \frac{1}{2}, \quad 2 < x''_1 < x_2,$$

а точки x'_1, x''_1 однозначно определяются условиями

$$S^2(x'_1) = S^2(x''_1) = x_1, \quad S(x'_1) = S(x''_1) \in (0, 1).$$

Такой выбор возможен вследствие равенства (2.12). Через I' обозначим интервал (x'_1, x''_1) , $I \subset I' \subset \hat{I}$.

В дальнейшем любой диффеоморфизм $F: J \rightarrow I$, продолжаемый до диффеоморфизма на $\hat{I}$, будем называть просто *продолжаемым* и использовать символ $\hat{F}$ для обозначения интервала определения продолжения $\hat{F}$. При этом диффеоморфизмы H_n , $n = 1, \dots, N$, оказываются продолжаемыми. Не сужая общности, можно дополнительно считать, что

- 1) для любого $n \geq 2$ выполнено включение $\hat{\Lambda}_n \subset (0, p)$;
- 2) для любых m, n таких, что $|m - n| > 1$, имеем $\hat{\Lambda}_n \cap \hat{\Lambda}_m = \emptyset$.

Пусть $F: J \rightarrow I$ есть продолжаемый диффеоморфизм такой, что $J \subset (0, p)$. Будем называть диффеоморфизм F и интервал J *накрываемыми*, если $S(I') \supset \hat{J}$. Диффеоморфизм F и интервал J называются *критическими*, если они не являются накрываемыми, $\hat{J} \subset (0, p)$ и $J \cap S(I) \neq \emptyset$. Если диффеоморфизм F накрываемый, то диффеоморфизм $F \circ S: \Delta \rightarrow I$, $\Delta = S^{-1}(J)$, является продолжаемым, причем $\hat{\Delta} = S^{-1}(\hat{J}) \subset I'$. Из сказанного нетрудно видеть, что ветви H_n , $n = 1, \dots, M-1$, являются накрываемыми, тогда как ветвь H_M , вообще говоря, может быть и критической (ветвь H_{M+1} , очевидно, критическая). Кроме того, $S^{-1}(\hat{\Lambda}_n) \subset I$ для любого n такого, что $M-1 \geq n \geq 2$. Поэтому отображение T может иметь только три непродолжаемые ветви: центральную параболическую и соседние с ней, причем $\hat{\Delta}_1 \subset I'$ и для любого $n \in \{2, \dots, M-1\}$ имеем включение $\hat{\Delta}_n \subset I$.

Пусть $2^{-1}\tau$ ($2^{-1}\tau_1$) представляет собой константу из принципа Кёбе, подходящую для пары интервалов $(2^{-1}, 2)$ и $\hat{I}$ (соответственно I' и $\hat{I}$). Тогда при рассматриваемом малом возмущении b для любого продолжаемого диффеоморфизма F имеем $\tau(F, F^{-1}(I)) \leq \tau$ и $\tau(\hat{F}, \hat{F}^{-1}(I')) \leq \tau_1$.

Зафиксируем числа $\varkappa, \lambda$ такие, что $0 < \varkappa < 10^{-1}\lambda < 100^{-1}$, и сделаем E -предварительную конструкцию, где $E = \tau\varkappa^{-1}$. В обозначениях предыдущего пункта отображение $\bar{T}$ ($\bar{H}$) имеет конечное число непродолжаемых ветвей вблизи прообразов u (v). Обозначим через $\bar{T}_l, \bar{T}_r$ монотонные ветви отображения $\bar{T}$, определенные в непосредственной близости от точек p и p^{-1} соответственно, $\Delta_l = \text{dom}(\bar{T}_l) = (p, x')$, $\Delta_r = \text{dom}(\bar{T}_r) = (x'', p^{-1})$, $x', x'' \in I$. Тогда $\hat{\Delta}_l \subset I'$, $\hat{\Delta}_r \subset I'$ и если $\bar{T}|_{\Delta'}$ является какой-либо из остальных продолжаемых ветвей отображения $\bar{T}$, то $\hat{\Delta}' \subset I$. Это нетрудно установить по индукции, учитывая, что аналогичным свойством обладают ветви отображения T и на каждом шаге предварительной конструкции делается композиция T в интервал определения продолжаемого диффеоморфизма. Отметим, что $\bar{T}_l = T_l \circ \dots \circ T_l \circ T_l$, $\bar{T}_r = T_l \circ \dots \circ T_l \circ T_r$. Поэтому, опираясь на равенство (2.12) и уменьшая в случае необходимости $\varkappa$, можно считать, что $\max(|\hat{\Delta}_l \setminus I|, |\hat{\Delta}_r \setminus I|) < (10\tau_1)^{-1}|I|$.

С учетом сказанного в п. 2.3 все ветви отображения $\bar{T}$, за исключением определенных на ничтожно малых интервалах вблизи точки $x = 1$ и ее прообразов u , являются E -растягивающими. Поэтому сделанный выбор E означает, что при композиции отображения $\bar{T}$ в интервал определения Λ продолжаемого диффеоморфизма F длины возникающих интервалов меньше $|\Lambda|$ по крайней мере в $\varkappa^{-1}$ раз. Кроме того, имеем $\max(|\hat{F}^{-1}(\hat{\Delta}_l) \setminus \Lambda|, |\hat{F}^{-1}(\hat{\Delta}_r) \setminus \Lambda|) < 10^{-1}|\Lambda|$ в силу принципа Кёбе и определения числа τ_1 .

Зафиксируем натуральные числа P, P_1 такие, что

$$C_1 B_1 B_2 \sqrt{\lambda}^P < \frac{1}{2} \quad (2.13)$$

и $P_1 \gg P$, где $B_1 = C_4 + 1 + \varepsilon$, $B_2 = \tau(2|I|(1 - \varepsilon))^{-1}$, константы C_1 и C_4 введены в леммах п. 2.2.

Основные составляющие индуктивной конструкции. В доказательстве теоремы 3 для любого достаточно малого числа $\alpha > 0$ строится множество $\mathfrak{G}(\alpha) = \mathfrak{G}_c(\alpha)$ такое, что для любого $b \in \mathfrak{G}(\alpha)$ существуют последовательности множеств $\mathfrak{k}_n$ интервалов из $(S(1), p)$ и отображений $F_n: \bigcup_{\Lambda \in \mathfrak{k}_n} \Lambda \rightarrow I$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, со следующими свойствами:

- (i) для любого n множество $\mathfrak{k}_n$ конечно;
- (ii) для произвольных $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m < n$, выполнено включение $\mathfrak{k}_m \subset \mathfrak{k}_n$, причем для любого $\Lambda \in \mathfrak{k}_m$ $F_m|_{\Lambda} = F_n|_{\Lambda}$;
- (iii) для каждого n любой интервал из множества $\mathfrak{k}_n$ является накрываемым;
- (iv) для любого n и для каждого $\Lambda \in \mathfrak{k}_n$ найдется $k = k_{\Lambda}$ такое, что $F_n|_{\Lambda} = S^k$.

Пусть для любого n множество $\mathfrak{l}_n$ интервалов из I задается равенством $\mathfrak{l}_n = \{\Delta : S(\Delta) \in \mathfrak{k}_n\}$. Определим отображения $G_n: \bigcup_{\Delta \in \mathfrak{l}_n} \Delta \rightarrow I$ по формуле $G_n = F_n \circ S$. Тогда имеем:

- (v) числовая последовательность $|I \setminus \bigcup_{\Delta \in \mathfrak{l}_n} \Delta|$ стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$ экспоненциально равномерно по c , b вблизи точки $\mathfrak{D}$;
- (vi) любая ветвь отображения G_n продолжаема и интервал определения продолжения лежит внутри I' .

Нетрудно видеть, что свойство (vi) является непосредственным следствием свойства (iii) и что наличия последовательности G_n , $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, достаточно для существования отображения G со свойствами (a)–(в).

Множество $\mathfrak{G}(\alpha)$ представляется в виде $\bigcap_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \mathfrak{D}_n$, где $\mathfrak{D}_n$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, является убывающей последовательностью множеств со следующими свойствами:

- (vii) для любого n множество $\mathfrak{D}_n$ является объединением дизъюнктивных интервалов $\mathfrak{E}_n$, причем каждый отрезок, не содержащий точку $b = 2$, пересекается не более чем с конечным их числом;
- (viii) числовая последовательность $|\mathfrak{D}_n \setminus \mathfrak{D}_{n+1}|$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, убывает по n экспоненциально равномерно по c , причем ее первый член не превосходит $\text{const} \sqrt{\alpha}$;
- (ix) для любых $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $b \in \mathfrak{D}_n$ определены множество $\mathfrak{k}_n$ и отображение F_n .

Множество $\mathfrak{D}_0$. Примем для удобства изложения следующее соглашение. Пусть $\Pi = \Pi(y_n, \Lambda_n, H_n)$ есть какое-либо условие на число $n \in \mathbb{N}$. Считается, что n удовлетворяет условию Π , если ввиду оценок леммы 3 или леммы 5 n удовлетворяет этому условию для всех c и b таких, что $c \geq c_3$, $b_3 \leq b < 2$ и $N_c(b) > n$.

Не ограничивая общности, будем считать, что $K > 100$, где $K = K(E)$ введено в п. 2.3, и что для любого $y \in (S(1), y_K)$ выполнены неравенства

$$\begin{aligned} \sqrt{y - S(1)}(1 - \varepsilon) &< |x - 1| < \sqrt{y - S(1)}(1 + \varepsilon), \\ 2\sqrt{y - S(1)}(1 - \varepsilon) &< |\partial S(x)| < 2\sqrt{y - S(1)}(1 + \varepsilon) \end{aligned} \quad (2.14)$$

при условии, что $S(x) = y$ (см. доказательство леммы 2).

Найдем число $m_0 > K$ такое, что для любого $n > m_0$

$$\max \left(\sup_{y \in \Lambda_n} \left| \frac{\partial_b H_n(b, y) - \partial_b p^{-1}(b)}{\partial H_n(b, y)} \right|, \sup_{y \in \Lambda_n} \left| \frac{\partial_b H_n(b, y) - \partial_b p(b)}{\partial H_n(b, y)} \right| \right) < \frac{1}{10}. \quad (2.15)$$

Зафиксируем число $\alpha < y_{m_0} 2^{-1} \lambda^{P+3}$.

Излагаемая конструкция индуцирования базируется на определенных оценках, в основном собранных в лемме 8 и зависящих от параметров α и β , $\beta > 0$. В свою очередь, эти оценки возможны благодаря тому, что частное чисел β и α достаточно мало. Для диффеоморфизма $F: \Lambda \rightarrow I$, зависящего от параметра b , будем обозначать

$$\mathcal{V}(F) = \mathcal{V}(F, \Lambda) = \sup_{y \in \Lambda} \left| \frac{\partial_b F(b, y)}{\partial F(b, y)} \right|.$$

Выберем числа $A_1 > 0$, $A_2 > 0$, $A_3 > 0$, $A_4 > 0$ такие, что

$$\max(A_1 + A_2, A_1 + A_3 + A_4) < \left(\frac{1 + \varepsilon}{C_4} + 1 \right)^{-1}, \quad (2.16)$$

и зафиксируем число β такое, что

$$\frac{A_1}{100} + \beta B_1 B_2 B_4 \sum_{n=0}^{\infty} \kappa^n \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha} \lambda^n} + B_3 \right) < \frac{1}{10C_4} B_1 A_1, \quad (2.17)$$

$$\frac{B_2}{\sqrt{\lambda}} \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} < A_2, \quad \frac{B_2}{\sqrt{\lambda}} \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} \frac{B_4}{B_1} < A_3, \quad \frac{\beta B_2 B_3 B_4}{B_1} < A_4 \quad (2.18)$$

и

$$\beta < \frac{1}{2} \alpha \kappa^2, \quad (2.19)$$

где

$$B_3 = \sup_{\Lambda_0} \mathcal{V}(H_0) + 1 + \varepsilon \gg B_1, \quad B_4 = 2(1 - \varepsilon) \sup_{n \leq K} \sup_{x \in \Delta_n} |\partial S|^{-1} > 1.$$

Отметим, что требуемый порядок малости β (как и сами числа P , P_1) будет еще уточняться в п. 2.6 при оценивании меры множеств $\mathfrak{D}_n$.

Найдем число $m_1 > m_0$ такое, что для любого $n > m_1$

$$y_n < \alpha \lambda^{P_1}, \quad |\Lambda_n| < \beta, \quad \mathcal{V}(H_n) < \frac{A_1}{100}. \quad (2.20)$$

Выберем число $m_2 > m_1$ такое, что для любых чисел m и n , удовлетворяющих неравенствам $m > m_2$, $m_1 > n > 100$,

$$y_m < \frac{1}{2} \alpha \lambda^{P_1}, \quad |\Lambda_n| < \frac{1}{3} \sum_{k=n+1}^{m-1} |\Lambda_k|. \quad (2.21)$$

При изменении параметра b числа $S(1)$, p , y_n , $n = 1, \dots, N$ (а стало быть, и интервалы Λ_n), меняются. Соответствующие параметрические производные этих величин будем называть скоростями их движения. Первая оценка в утверждении (i) леммы 4 говорит о том, что критическое значение $S(1)$ движется с почти единичной скоростью. Наряду с этим оценка (2.15) означает, что при $n > m_0$ скорости интервалов Λ_n малы (см. [2]). Сравнение этих скоростей показывает, что параметрический интервал вблизи $b = 2$ разбивается на интервалы $\mathfrak{E}_0$ такие, что при изменении b в пределах одного из $\mathfrak{E}_0 = \mathfrak{E}_{0,M}$ критическое значение $S(1)$ пробегает определенный интервал $\Lambda_n = \Lambda_{M+1}$, где $M = M_c(b)$ введено в лемме 3. Положим

$$\mathfrak{D}_0 = \bigcup_{M > m_2} \mathfrak{E}_{0,M}.$$

При этом интервалы $\mathfrak{E}_{0,M}$, $M > m_2$, называются *составляющими* интервалами множества $\mathfrak{D}_0$. Отметим, что мера $\mathfrak{D}_0$ оценивается равномерно по s .

Перейдем к определению отображения F_0 . Прежде заметим, что в силу сказанного в начале этого пункта можно исключить из $\text{dom}(\overline{T})$ множество малой меры так, что получившееся сужение будет удовлетворять свойству (vi) отображений G_n при $n = 0$. Аккуратная реализация этого приводит ниже к отображениям F_0 и G_0 .

Зафиксируем какой-нибудь из интервалов $\mathfrak{E}_0 = (b'_0, b''_0)$ множества $\mathfrak{D}_0$ и обозначим соответствующий интервал изменения $S(1)$ через $\varkappa_0$, $\varkappa_0 = (y_{M+1}, y_M)$, $M > m_2$. Найдутся числа $n_0 > n_{-1} > \dots > n_{-P} > \dots > n_{-P-3} > m_0$ такие, что для любого $b \in \mathfrak{E}_0$ убывающая последовательность интервалов $\lambda_i = (S(1), y_{n_i})$, $i = -P-3, \dots, -1, 0$, подчинена условию

$$\alpha \lambda^i < |\lambda_i| < 2\alpha \lambda^i. \quad (2.22)$$

Действительно, зафиксируем i и $b = b''_0$ и положим $n_i = n - 1$, где n таково, что $\frac{3}{2}\alpha \lambda^i \in \Lambda_n$, $m_1 > n > m_0$ (см. также п. 2.7). Оценка сверху на длину λ_i вытекает из второго неравенства в (2.21) и из сравнения скоростей $S(1)$ (лемма 4) и y_{n_i} (оценка (2.15)). Оценка снизу выводится с помощью следующей леммы, которая в неявной форме в такой же ситуации использовалась в [2; с. 62].

ЛЕММА 6. Пусть $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\zeta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ суть дифференцируемые функции такие, что для некоторых малых чисел $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ и для любого $x \in \mathbb{R}$

$$1 - \varepsilon_1 < |\zeta'(x)| < 1 + \varepsilon_1, \quad \max(|\phi'(x)|, |\psi'(x)|) < \varepsilon_2, \quad \phi(x) < \psi(x).$$

Если x_1 и x_2 заданы уравнениями $\phi(x_1) = \zeta(x_1)$, $\psi(x_2) = \zeta(x_2)$, то для любого $i = 1, 2$

$$(1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2)^{-1} |\psi(x_i) - \phi(x_i)| < |x_2 - x_1| < (1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2)^{-1} |\psi(x_i) - \phi(x_i)|.$$

Последовательность λ_i , $i = -P-3, \dots, -1, 0$, порождает убывающую последовательность интервалов $\delta_i = S^{-1}(\lambda_i)$, $i = -P-3, \dots, -1, 0$, экспоненциально сжимающихся к $x = 1$. Пусть для любого i символ $\delta_i^{-(+)}$ обозначает левую (правую) компоненту связности множества $\delta_{i-1} \setminus \delta_i$. В силу оценок (2.14) и (2.22) получаем

$$\frac{1}{10\sqrt{\lambda}} < \frac{|\delta_i^{-(+)}|}{|\delta_i|} < \frac{1}{\sqrt{\lambda}}, \quad \frac{|\delta_i|}{|\delta_{i-1}|} < 2\sqrt{\lambda} \quad (2.23)$$

и $|\Delta_{M+1}| \ll |\delta_0| < |\delta_{-P-3}| \ll |I|$.

Положим

$$F_0 = \overline{H}|_{(S(1), p) \setminus (\lambda_0 \cup \bigcup_{H_0} (H_0)^{-1}(\delta_{-P}))}, \quad G_0 = F_0 \circ S.$$

В дальнейшем интервал определения J произвольного диффеоморфизма F будем обозначать через ΛF , если $J \subset (0, p)$, и через ΔF , если $J \subset I$. Кроме того, будем использовать следующие обозначения: символ F_0^0 — для ветвей отображения F_0 , определенных внутри интервалов Λ_0 , символ F^0 — для всех остальных ветвей F_0 и символ Q_0 — для диффеоморфизмов H_n , $n = m_1 + 1, \dots, M, M + 1$. Диффеоморфизмы Q_0 называются *диффеоморфизмами глубины 0*, а интервалы ΛQ_0 — *интервалами глубины 0*. Отметим, что на последующих шагах индукции не делается

композиций в какие-либо интервалы, расположенные вне интервалов глубины 0. Заметим, что производные диффеоморфизмов F^0 и Q_0 контролируются с помощью леммы 5, причем $|\Lambda Q_0| < \beta$ для любого Q_0 . В принятых обозначениях имеем

$$\mathfrak{k}_0 = \{\Lambda : \Lambda = \Lambda F^0, \Lambda = \Lambda F_0^0\}.$$

Дополнение к множеству $\text{dom}(F^0)$ в интервале $(S(1), p)$ организовано в виде объединения интервала λ_0 с прообразами $(H_0)^{-1}(\delta_{-P})$, которые с этого момента будут называться λ -интервалами. Дополнение $\mathfrak{M}_0$ к множеству $\text{dom}(G^0)$ представляет собой объединение интервала δ_0 с прообразами λ -интервалов под действием S . Все эти интервалы (вместе с δ_0) называются δ -интервалами шага 0. Обозначим через $\mathfrak{m}_0$ множество δ -интервалов шага 0 и через $\mathfrak{M}_i$, $i = 1, 2, 3$, множества $\delta_{-i} \cup \bigcup_{T_0}(T_0)^{-1}(\delta_{-P-i})$. Как λ -интервалы, так и δ -интервалы отображаются с помощью определенных диффеоморфизмов на интервал δ_{-P} (кроме центрального δ_0 , который отображается на себя самого с помощью тождественного диффеоморфизма). Если ξ является одним из $\lambda(\delta)$ -интервалов и $f: \xi \rightarrow \delta_i$, $i = 0, -P, -$ соответствующий диффеоморфизм, то f продолжаем до диффеоморфизма $\hat{f}$ на δ_{i-3} . Введем обозначения: $\xi' = \hat{f}^{-1}(\delta_{i-1})$, $\xi'' = \hat{f}^{-1}(\delta_{i-2})$, $\xi''' = \hat{f}^{-1}(\delta_{i-3})$. В случае, когда ξ есть λ -интервал, отметим, что ветви F_0^0 , определенные внутри множества $\xi' \setminus \xi$, находятся в биективном соответствии с ветвями отображения G_0 , заданными внутри множества $\delta_{-P-1} \setminus \delta_{-P}$. Обозначим через $\tau_2 > 1$ константу Кёбе, соответствующую паре интервалов δ_i, δ_{i-1} . Вследствие оценок (2.23) τ_2 зависит только от λ . Кроме того,

$$\bigcup_{\xi \in \mathfrak{m}_0} \xi''' = \mathfrak{M}_{-3}. \quad (2.24)$$

Первый шаг конструкции. Сделаем композицию отображения G_0 во все критические интервалы, т.е. в Λ_M и Λ_{M+1} . Полученные при этом диффеоморфизмы обозначим через Q_1 . Эти диффеоморфизмы и их интервалы определения называются соответственно диффеоморфизмами и интервалами глубины 1. Они соседствуют с прообразами δ -интервалов. Наряду с имеющимися λ -интервалами эти прообразы также называются λ -интервалами и отображаются с помощью соответствующих продолжаемых диффеоморфизмов на δ_{-P} и δ_0 . Изыдем из $\mathfrak{M}_0$ множество $(H_{M+1})^{-1}\mathfrak{M}_{-3}$. То, что осталось, представляет собой объединение (mod 0) некоторых интервалов глубины 1. Совокупность этих интервалов обозначается через $\mathfrak{p}_1$. Покажем, что скорости движения интервалов ΛQ_1 малы по сравнению с единицей.

ЛЕММА 7. *Для любого диффеоморфизма Q_1 выполнена оценка*

$$\mathcal{V}(Q_1) < \frac{A_1}{100} + \beta B_1 B_2 B_4 \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + B_3 \right). \quad (2.25)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $Q_1 = F \circ S \circ Q_0$, где $F = F^0$ или $F = F_0^0$. Пользуясь формулой (2.7), запишем

$$\frac{\partial_b Q_1}{\partial Q_1} = \frac{\partial_b F}{\partial F} \frac{1}{\partial S \partial Q_0} + \frac{\partial_b S}{\partial S} \frac{1}{\partial Q_0} + \frac{\partial_b Q_0}{\partial Q_0}, \quad (2.26)$$

поэтому надо оценить $\mathcal{V}(F_0^0)$. Так как $F_0^0 = F^0 \circ S \circ H_0$, $\Lambda F^0 \subset (y_{n-P}, y_K)$, оценим

$$\mathcal{V}(F_0^0) < \mathcal{V}(F^0) \sup \left| \frac{1}{\partial S \partial H_0} \right| + \mathcal{V}(S, S^{-1}(\Lambda F^0)) \sup \left| \frac{1}{\partial H_0} \right| + \mathcal{V}(H_0) = \mathcal{B}_1.$$

В соответствии с замечанием 8 имеем

$$\mathcal{V}(S, S^{-1}(\Lambda F^0)) \leq (1 + \varepsilon) \sup_{x: S(x) - S(1) \geq \alpha \lambda^{-P}} \frac{1}{|\partial S|}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 &< B_1 \frac{\sqrt{\lambda}^P}{2(1-\varepsilon)\sqrt{\alpha}} \frac{\tau C_1}{|I|} + B_3 - 1 - \varepsilon \\ &< B_1 B_2 C_1 \sqrt{\lambda}^P \frac{1}{\sqrt{\alpha}} + B_3 - 1 - \varepsilon < \frac{1}{\sqrt{\alpha}} + B_3 - 1 - \varepsilon \end{aligned}$$

(в этой выкладке использованы неравенства (2.13), (2.14) и (2.22), а также продолжаемость H_0). Подставляя последнюю оценку в равенство (2.26), запишем

$$\mathcal{V}(Q_1) < \max \left(B_1 B_2 \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}}, \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + B_3 \right) B_2 \beta B_4 \right) + \mathcal{V}(Q_0),$$

откуда с учетом последнего из соотношений в (2.20) вытекает требуемое неравенство.

Отметим, что правая часть неравенства (2.25) не превосходит 10^{-1} вследствие условий (2.16), (2.17). Отмеченное соотношение скоростей показывает, что внутри интервала $\mathfrak{E}_0$ находится множество, состоящее из интервалов $\mathfrak{E}_1$ и находящееся в биективном соответствии с $\mathfrak{p}_1$. Объединение интервалов $\mathfrak{E}_1$ есть часть множества $\mathfrak{D}_1$, расположенная в интервале $\mathfrak{E}_0$. Интервалы $\mathfrak{E}_1$ называются *составляющими* интервалами множества $\mathfrak{D}_1$.

Зафиксируем интервал $\mathfrak{E}_1$. Когда b изменяется в пределах $\mathfrak{E}_1$, $S(1)$ пробегает определенный интервал $\mathfrak{I}_1$ вида $\Lambda Q_1 \in \mathfrak{p}_1$, расположенный относительно далеко от λ -интервалов, как вытекает из включения (2.24). Заметим, что отображение F_1 уже определено на элементах множества $\mathfrak{k}_0$. Осталось определить его на части дополнения к $\text{dom}(F_0)$ в интервале $(S(1), p)$. На первых шагах стратегия проста. Действуя полностью аналогично тому, как это делалось при построении отображения F_0 , выберем интервал $\lambda_1 = (S(1), y_{n_1}) \subset \lambda_0$ такой, что для любого $b \in \mathfrak{E}_1$ $\alpha \lambda < |\lambda_1| < 2\alpha \lambda$, и определим

$$F_1|_{\lambda_0 \setminus \lambda_1} = \overline{H}.$$

Ветви, составляющие $F_1|_{\lambda_0 \setminus \lambda_1}$, обозначим через F_1^1 . Если ξ есть произвольный λ -интервал вне λ_0 и $f: \xi \rightarrow \delta_{-P}$ — соответствующий диффеоморфизм, то положим

$$F_1|_{\xi \setminus \eta} = \overline{H},$$

где $\eta = f^{-1}(\delta_{-P+1}) \subset \xi$. При этом ξ перестает быть λ -интервалом, а им становится η , причем в силу оценок (2.23) и продолжаемости f имеем

$$|\eta| < 2\tau_2 \sqrt{\lambda} |\xi|. \quad (2.27)$$

Сделанная композиция называется *заполнением* λ -интервала ξ . Ветви всех отображений $F_1|_{\xi \setminus \eta(\xi)}$ для всевозможных λ -интервалов ξ , расположенных вне λ_0 , обозначаются через F_1^0 . Таким образом,

$$\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{E}_0 \cup \{\Lambda : \Lambda = \Lambda F_1^1, \Lambda = \Lambda F_1^0\}. \quad (2.28)$$

Определим $\delta_1 = S^{-1}(\lambda_1)$, $G_1 = F_1 \circ S$. Заметим, что после сделанной на этом шаге композиции критическими будут только интервалы глубины 1. Согласно предварительной конструкции их длины не превосходят $\beta\mathfrak{K}$. Если Λ представляет собой один из таких интервалов, то либо $\Lambda \subset \mathfrak{K}_0$, либо $\Lambda \subset \Lambda_M$. Таким образом, критические диффеоморфизмы будут определены очень близко от $S(1)$ и заведомо внутри λ_1 . Отсюда следует, что отображение G_1 удовлетворяет требованию (vi).

Дополнение к $\text{dom}(G_1)$ представляет собой объединение δ -интервалов шага 1, образующих множество $\mathfrak{m}_1$. Все эти интервалы, кроме центрального δ_1 , являются прообразами новых λ -интервалов под действием S . Суммируя неравенства (2.27) по всем δ -интервалам шага 0 и используя (2.23) при $i = 1$, получаем

$$\left| \bigcup_{\delta \in \mathfrak{m}_1} \delta \right| < 2\tau_2 \sqrt{\lambda} \left| \bigcup_{\delta \in \mathfrak{m}_0} \delta \right|. \quad (2.29)$$

Будем считать, что

$$10\tau_2^2 \sqrt{\lambda} < \frac{1}{4}, \quad (2.30)$$

основываясь на оценке $\tau_2 < \exp(\nu(10^{-1}\sqrt{\lambda})2\sqrt{\lambda})$ (см. п. 2.1) и уменьшая λ в случае необходимости.

Заметим, что отображения F_1 и G_1 зависят непрерывно от b на интервале $\mathfrak{E}_1$.

($n+1$)-й шаг индукции. На n -м шаге построено множество $\mathfrak{D}_n$, которое удовлетворяет предъявляемым к нему требованиям (vii), (ix), и зафиксирован составляющий интервал $\mathfrak{E}_n$ множества $\mathfrak{D}_n$. При этом существует интервал $\mathfrak{K}_n = (y'_n, y''_n)$ глубины n такой, что при изменении b в пределах $\mathfrak{E}_n$ критическое значение $S(1)$ пробегает интервал $\mathfrak{K}_n$; обозначим через $R_n: \mathfrak{K}_n \rightarrow I$ соответствующий диффеоморфизм глубины n . Продолжаемый диффеоморфизм называется *диффеоморфизмом глубины k* , $k \leq n$, если он получен в результате композиции отображения G_{k-1} в интервал глубины $k-1$. Каждый из диффеоморфизмов глубины k обозначается символом Q_k . Любой интервал вида ΛQ_k называется *интервалом глубины k* . Для каждого k и для любого интервала ΛQ_k выполнена оценка $|\Lambda Q_k| < \beta\mathfrak{K}^k$, что вытекает из продолжаемости Q_k и свойств предварительной конструкции. Отметим, что отображения F_n и G_n меняются непрерывно на интервале $\mathfrak{E}_n$.

В дополнение к требованиям (i)–(vi) множества $\mathfrak{E}_n$, $\mathfrak{I}_n$ и отображения F_n , G_n обладают рядом свойств, которые будут формулироваться постепенно по мере необходимости для обоснования построений на шаге $n+1$. Приведем ряд свойств, относящихся к геометрии диффеоморфизмов, введенных в рассмотрение за первые n шагов:

- (b_1) каждая из ветвей отображения F_n относится к одному из следующих типов: ветви H_i , $m_1 \geq i > K$, ветви Q_l , $0 \leq l \leq n$, ветви, полученные на шагах $0, 1, \dots, n$ в результате заполнений; в этой связи отметим, что ветви F_0^0 , созданные на этапе предварительной конструкции, с точки зрения оценок удобнее относить к третьему типу;

- (b₂) дополнение к $\text{dom}(F_n)$ в множестве $(S(1), p)$ представляет собой объединение некоторого интервала λ_n вида $(S(1), \tilde{y}_n)$ с дизъюнктивными интервалами, которые расположены вне λ_n и называются λ -интервалами; как результат, дополнение к множеству $\text{dom}(G_n)$ в I является дизъюнктивным объединением интервалов, среди которых находится и $\delta_n = S^{-1}(\lambda_n)$ и которые называются δ -интервалами шага n ; при этом для любого $b \in \mathfrak{E}_n$ выполнены оценки (2.22) и (2.23) с $i = n$;
- (b₃) интервал λ_n , вообще говоря, разбивается (mod 0) на некоторые интервалы глубин l , $l \in \{0, 1, \dots, n\}$, интервал $\varkappa_n \cap S(I)$, некоторые интервалы Λ_k , $k \in \{n_0, \dots, m_1\}$ (для достаточно малых n), и прообразы δ -интервалов шагов $0, 1, \dots, n-1$; эти прообразы тоже называются λ -интервалами, все остальные из перечисленных интервалов (вместе с $\varkappa_n$) образуют множество $\mathfrak{n}_n$, и совокупность соответствующих продолжаемых диффеоморфизмов (вместе с R_n) задает отображение $Z_n: \bigcup_{\Lambda \in \mathfrak{n}_n} \Lambda \rightarrow I$; все критические интервалы являются интервалами глубины n .

Сформулируем лемму, с помощью которой контролируются скорости интервалов из множеств $\mathfrak{k}_n$ и $\mathfrak{n}_n$.

ЛЕММА 8 (n). *Справедливы следующие оценки:*

- (i) для любого $k \in \{0, \dots, n\}$

$$\sup_{Q_k} \mathcal{V}(Q_k) < \frac{A_1}{100} + \beta B_1 B_2 B_4 \sum_{i=0}^{k-1} \varkappa^i \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha \lambda^i}} + B_3 \right);$$

- (ii) для любого $k \in \{1, \dots, n\}$ и для каждой ветви F отображения F_n такой, что $\Lambda F \subset \lambda_{k-1} \setminus \lambda_k$,

$$\mathcal{V}(F) < \frac{B_1}{\sqrt{\lambda^{n-k}}} - 1 - \varepsilon;$$

- (iii) для любой ветви F отображения F_n такой, что $\Lambda F \subset \bigcup_{H_0} \text{dom}(H_0)$,

$$\mathcal{V}(F) < \frac{1}{\sqrt{\alpha \lambda^n}} + B_3 - 1 - \varepsilon.$$

Обозначим через $\mathfrak{m}_n$ множество δ -интервалов шага n , $\mathfrak{M}_n = \bigcup_{\xi \in \mathfrak{m}_n} \xi$, и перейдем к описанию шага $n+1$. Сделаем композицию отображения G_n во все критические интервалы. Полученные при этом диффеоморфизмы и их интервалы определения называются соответственно *диффеоморфизмами* и *интервалами глубины $n+1$* . Они обозначаются через Q_{n+1} и ΛQ_{n+1} соответственно. Согласно предварительной конструкции для любого диффеоморфизма Q_{n+1} имеем $|\Lambda Q_{n+1}| < \beta \varkappa^{n+1}$. По соседству с интервалами глубины $n+1$ расположены прообразы элементов множества $\mathfrak{m}_n$, которые тоже причисляются к λ -интервалам. Изымем из интервала $\varkappa_n$ множество $(R_n)^{-1}(\mathfrak{M}_{n-3})$. То, что осталось, представляет собой некоторое семейство интервалов глубины $n+1$, которое обозначим через $\mathfrak{p}_{n+1}$.

Заметим, что критические интервалы в совокупности имеют сравнительно малую меру.

- (b_{4n}) Пусть J есть минимальный интервал, содержащий все критические интервалы шага n . Тогда $|J| < \beta \varkappa^{n-1}$.

В самом деле, либо все критические интервалы содержатся внутри $\varkappa_{n-1}$, либо есть интервалы с этим свойством вне $\varkappa_{n-1}$. Обозначим их через $J_1, \dots, J_i$. В первом случае оценка очевидна. Во втором случае выбор параметра предварительной конструкции означает, что $\text{dist}(S(1), J_j) < 10^{-1}\beta\varkappa^{n-1}$ для любого $j \in \{1, \dots, i\}$. Это вытекает из того, что в силу свойства (b_3) J_j является интервалом глубины n , стало быть, содержится в некотором интервале глубины $n-1$, причем должен примыкать к его левой границе. Нетрудно видеть, что последнее неравенство влечет свойство (b_{4n}) .

Таким образом, интервалы глубины $n+1$, создаваемые на этом шаге, сосредоточены в $\beta\varkappa^{n-1}$ -окрестности критического значения $S(1)$. Покажем, что интервалы ΛQ_{n+1} двигаются медленно по сравнению с критическим значением $S(1)$. Принимая во внимание неравенство (2.17), для этого достаточно доказать соответствующие оценки леммы 8 ($n+1$).

ЛОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ (i) ЛЕММЫ 8 ($n+1$). Пусть Q_{n+1} — некоторый диффеоморфизм глубины $n+1$. Тогда $Q_{n+1} = F \circ S \circ Q_n$, где Q_n — определенный диффеоморфизм глубины n , а F — одна из ветвей отображения F_n . Используя формулу (2.7), запишем

$$\mathcal{V}(Q_{n+1}) < \mathcal{V}(F) \sup \frac{1}{\partial S \partial Q_n} + \mathcal{V}(S, S^{-1}(\Lambda F)) \sup \frac{1}{\partial Q_n} + \mathcal{V}(Q_n).$$

Предположим, что $\Lambda F \subset \lambda_{k-1} \setminus \lambda_k$ для некоторого $k \in \{1, \dots, n\}$. Учитывая оценку (ii) леммы 8 (n), продолжаемость Q_n , неравенства (2.14), (2.22) и замечание 8, оценим

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(Q_{n+1}) &< (\mathcal{V}(F) + 1 + \varepsilon) \frac{1}{2(1-\varepsilon)\sqrt{\alpha\lambda^k}} \frac{\tau}{|I|} |\Lambda Q_n| + \mathcal{V}(Q_n) \\ &< \frac{B_1}{\sqrt{\lambda^{n-k}}} B_2 \frac{\beta\varkappa^n}{\sqrt{\alpha\lambda^k}} + \mathcal{V}(Q_n). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Если $\Lambda F \subset \bigcup_{\Lambda_0} \Lambda_0$, то, действуя аналогично, получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(Q_{n+1}) &< (\mathcal{V}(F) + 1 + \varepsilon) \frac{B_4}{2(1-\varepsilon)} \frac{\tau}{|I|} |\Lambda Q_n| + \mathcal{V}(Q_n) \\ &< \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha\lambda^n}} + B_3 \right) B_2 B_4 \beta\varkappa^n + \mathcal{V}(Q_n). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Серии неравенств (2.31) и (2.32) влекут требуемую оценку.

ЗАМЕЧАНИЕ 9. В формулировке леммы 8 и в только что приведенных выкладках не сказано ни слова о ветвях отображения F_n вида F^0 . Ввиду леммы 5 для таких ветвей оценки аналогичны.

Отмеченное сравнение скоростей означает, что внутри интервала $\mathfrak{E}_n$ существует множество, состоящее из интервалов $\mathfrak{E}_{n+1}$ и находящееся в биективном соответствии с множеством $\mathfrak{p}_{n+1}$. Объединение интервалов $\mathfrak{E}_{n+1}$ есть часть множества $\mathfrak{D}_{n+1}$, расположенная в интервале $\mathfrak{E}_n$. Интервалы $\mathfrak{E}_{n+1}$ называются *составляющими* интервалами множества $\mathfrak{D}_{n+1}$.

Зафиксируем интервал $\mathfrak{E}_{n+1} = (b'_{n+1}, b''_{n+1})$. Когда b меняется в пределах $\mathfrak{E}_{n+1}$, критическое значение $S(1)$ остается относительно далеко от λ -интервалов (см.

свойство (h_{4n})) и пробегает при этом определенный интервал $\varkappa_{n+1}$ глубины $n+1$ из множества $\mathfrak{p}_{n+1}$.

Так как отображение F_{n+1} уже определено на элементах множества $\mathfrak{k}_n$, осталось его задать внутри интервала λ_n и λ -интервалов, лежащих вне λ_n . Выберем интервал λ_{n+1} вида $(S(1), \tilde{y}_{n+1})$, удовлетворяющий оценке (2.22) с $i = n+1$ для любого $b \in \mathfrak{E}_{n+1}$. Делается это на основании следующих свойств λ -интервалов (подчеркнем, что речь идет о λ -интервалах, фигурирующих в конструкции перед шагом $n+1$):

- (h_{1n}) если ξ является одним из λ -интервалов, то ξ отображается с помощью динамически заданного (т.е. являющегося итерацией отображения S) диффеоморфизма f на определенный интервал δ_l , $l \leq n-1$, причем f продолжаем до диффеоморфизма на интервал δ_{l-3} и, стало быть, определены интервалы $\xi' \subset \xi'' \subset \xi'''$ (см. обсуждение стартового шага конструкции);
- (h_{2n}) для любого λ -интервала ξ такого, что $\xi \cap (S(1), p) \neq \emptyset$, имеем включение $\xi''' \subset (S(1), p)$;
- (h_{3n}) для любых двух λ -интервалов ξ_1 и ξ_2 либо $\xi_1' \cap \xi_2' = \emptyset$, либо один из интервалов ξ_1' , ξ_2' содержится в другом; если ξ является одним из λ -интервалов, то $\xi' \subset \lambda_n$, как только $\xi' \cap \lambda_n \neq \emptyset$.

Зафиксируем $b = b''_{n+1}$, положим $y'_{n+1} = \frac{3}{2}\alpha\lambda^{n+1}$ и рассмотрим интервал $(S(1), S(1) + y'_{n+1})$. Заметим, что справа от точки $S(1) + y'_{n+1}$ не может оказаться ни интервалов глубины $n+1$, ни прообразов δ -интервалов шага n (свойство (b_{4n})). Существуют две возможности: или $S(1) + y'_{n+1} \in \xi'$ для некоторого λ -интервала ξ , или $S(1) + y'_{n+1} \in \Lambda Q_l$, $0 \leq l \leq n$, причем согласно свойству (h_{3n}) можно считать, что интервал ξ' является максимальным. В первом случае в качестве $\tilde{y}_{n+1}$ возьмем правую граничную точку ξ' . Вследствие свойства (h_{2n}) имеем оценку $|(\xi'' \setminus \xi')^-| < \frac{3}{2}\alpha\lambda^{n+1}$, где $(\xi'' \setminus \xi')^-$ обозначает левую компоненту связности множества $\xi'' \setminus \xi'$. Принимая во внимание первое из неравенств в (2.23) и (2.30), запишем

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}\alpha\lambda^{n+1} + |\xi'| &= \frac{3}{2}\alpha\lambda^{n+1} + |(\xi'' \setminus \xi')^-| \frac{|\xi'|}{|(\xi'' \setminus \xi')^-|} \\ &< \frac{3}{2}\alpha\lambda^{n+1} + 10\sqrt{\lambda}\tau_2 \frac{3}{2}\alpha\lambda^{n+1} < 2\alpha\lambda^{n+1}. \end{aligned}$$

Во втором случае в качестве $\tilde{y}_{n+1}$ возьмем правую граничную точку интервала $\Lambda = \Lambda Q_l$. Предположим, что $l \geq [(n+1)\omega] - 1$, где $\omega = \log \lambda (\log \varkappa)^{-1}$ и символ $[x]$ обозначает целую часть числа x . Тогда $|\Lambda| < 2^{-1}\alpha\lambda^{n+1}$, что проверяется непосредственно с использованием оценки (2.19) и неравенства $|\Lambda| < \beta\varkappa^l$. Поэтому $\frac{3}{2}\alpha\lambda^{n+1} + |\Lambda| \leq 2\alpha\lambda^{n+1}$, что и требовалось. Нетрудно видеть, что свойства (h_{1n}) – (h_{3n}) при композиции в любой интервал, кроме $\varkappa_n$, выживаю. Если $l < [(n+1)\omega] - 1$, то сделаем композицию отображения G_l в интервал Λ , после чего снова оказываемся в рамках двух возможностей и т.д. Таким образом, после конечного числа композиций удастся осуществить выбор интервала λ_{n+1} , состоящего целиком из элементов множества $\mathfrak{n}_n$ и λ -интервалов, а также удовлетворяющего верхней оценке в (2.22). Проверка нижней оценки осуществляется с помощью леммы 6, условия (2.15) и(или) утверждения (i) леммы 8 и неравенства $\varkappa_{n+1} < \beta\varkappa^{n+1}$ в точности так же, как при выборе интервала λ_0 . Отметим, что каждая из упомянутых композиций сопровождается соответствующей модификацией множества $\mathfrak{n}_n$ и отображения Z_n .

Прежде чем перейти к определению отображения F_{n+1} , введем некоторые обозначения. Как было отмечено, ветви отображения F_n различаются как по времени их создания, так и по расположению их интервалов определения. Это отражено в обозначениях. Для любых $k \in \{1, \dots, n\}$, $p \in \{k, \dots, n\}$ через F_p^k обозначается каждая из ветвей отображения F_n , заданных внутри множества $\lambda_{k-1} \setminus \lambda_k$ и построенных на шаге p (т.е. определенных на интервалах множества $\mathfrak{k}_p \setminus \mathfrak{k}_{p-1}$). Для любого $p \in \{0, 1, \dots, n\}$ символом F_p^0 обозначается каждая из ветвей, определенных внутри интервалов Λ_0 и созданных (в результате заполнения) на шаге p . С учетом этих замечаний имеем

$$\mathfrak{k}_n = \{\Lambda : \Lambda = \Lambda F^0, \Lambda = \Lambda F_p^k, k = 0, 1, \dots, n, p = k, \dots, n\}.$$

Отметим, что каждая ветвь отображения F_n вида Q_l , $1 \leq l \leq n$, появилась в результате взятия композиции либо на шаге l , либо позднее, скажем, на шаге k , $k \gg l$, при выборе интервала λ_k . В первом случае $\Lambda Q_l \subset (\Lambda_{M+1} \cup \Lambda_M) \cap S(I)$, во втором случае $\Lambda Q_l \subset \lambda_{k-1}$, поэтому всегда $\Lambda Q_l \subset \lambda_{P_2}$ для некоторого $P_2 \geq P_1$. Действительно, благодаря выбору начальных параметров $(\Lambda_{M+1} \cup \Lambda_M) \cap S(I) \subset \lambda_{P_1}$; по этой же причине на шагах i , $i = 1, 2, \dots, P_1$, интервал λ_i строится без участия композиций, поэтому $k > P_1$. Из сказанного вытекает, что на всех шагах конструкции все λ -интервалы (а стало быть, и ветви, получаемые с помощью заполнений) расположены либо внутри интервалов Λ_0 , либо внутри λ_{P_2} . Считаем, что число P_2 с такими свойствами выбрано максимальным.

В соответствии с введенной символикой будем обозначать через F_{n+1}^{n+1} каждую из ветвей отображения Z_n , определенную внутри множества $\lambda_n \setminus \lambda_{n+1}$. Пусть ξ представляет собой один из λ -интервалов, лежащих внутри множества $\lambda_{k-1} \setminus \lambda_k$, $k \in \{P_2 + 1, \dots, n + 1\}$, и $f: \xi \rightarrow \delta_t$ — соответствующий диффеоморфизм, $t \leq n - 1$. Сделаем *заполнение* интервала ξ , т.е. рассмотрим всевозможные композиции вида $R \circ f$, где R является ветвью отображения G_{t+1} , определенной внутри множества $\delta_t \setminus \delta_{t+1}$. При этом ξ перестает быть λ -интервалом, а ими становятся прообразы $f^{-1}(\eta) \subset \xi$ δ -интервалов η шага $t + 1$, расположенных внутри δ_t . Каждая из упомянутых композиций для всевозможных $\xi \subset \lambda_{k-1} \setminus \lambda_k$ будет обозначаться через F_{n+1}^k . Полностью аналогично предыдущему сделаем заполнение всех λ -интервалов, лежащих внутри объединения всех Λ_0 , и каждую из полученных ветвей обозначим через F_{n+1}^0 .

Добавив диффеоморфизмы F_{n+1}^k , $k = 0, P_2 + 1, \dots, n + 1$, к имеющимся ветвям отображения F_n , получим отображение F_{n+1} . Таким образом,

$$\mathfrak{k}_{n+1} = \mathfrak{k}_n \cup \{\Lambda : \Lambda = \Lambda F_{n+1}^k, k = 0, P_2 + 1, \dots, n + 1\}.$$

Покажем, что построенные на этом шаге ветви накрываемы. Простые вычисления, основанные на свойстве (b_{4n}) и условии (2.19), говорят о том, что все ветви отображения Z_n , определенные внутри множества $\lambda_n \setminus \lambda_{n+1}$, накрываемы. Обратимся к ветвям, полученным в результате заполнений. Рассмотрим одну из таких ветвей $F = F_{n+1}^k: \Lambda \rightarrow I$. Напомним, что $G_k = F_k \circ S$ для любого $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, и предположим, что ветви отображения F_n в окрестности λ_n обладают следующим свойством:

(b_{5n}) для любой ветви $F_n^n: J \rightarrow I$ отображения F_n интервал $\hat{J}$ содержится в λ_{n-2} .

Заметим, что $F = F_{t+1}^{t+1} \circ S \circ f$ для некоторых $t \leq n-1$ и f , где диффеоморфизм f отображает λ -интервал ξ на интервал δ_t и при этом продолжается до диффеоморфизма на δ_{t-3} . Стало быть, ветвь F накрываема в соответствии со свойствами $(b_{5(t+1)})$ и (h_{2n}) , а также со свойством накрываемости F_{t+1}^{t+1} , причем $\hat{\Lambda} \subset \xi'$. Предположим, что $k = n+1$. Тогда $\xi' \subset \lambda_n \setminus \lambda_{n+1}$, откуда делаем вывод, что для F выполнено и условие $(b_{5(n+1)})$.

Положим $G_{n+1} = F_{n+1} \circ S$, $\delta_{n+1} = S^{-1}(\lambda_{n+1})$. Из сказанного ясно, что отображение G_{n+1} удовлетворяет требованию (vi). Дополнение к $\text{dom}(G_{n+1})$ представляет собой объединение δ -интервалов шага $n+1$, образующих множество $\mathfrak{m}_{n+1}$. Все эти интервалы, кроме центрального δ_{n+1} , являются прообразами λ -интервалов под действием S . Интервал δ_{n+1} удовлетворяет оценкам (2.23) с $i = n+1$.

Оставшаяся часть этого пункта посвящена приготовлениям к шагу $n+2$. Проверим, что построенные на шаге $n+1$ ветви отображения F_{n+1} удовлетворяют соответствующим оценкам леммы 8 ($n+1$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЙ (ii) и (iii) ЛЕММЫ 8 ($n+1$). (iii) Зафиксируем какую-либо из ветвей F_{n+1}^0 . Найдется такой диффеоморфизм H_0 , что $F_{n+1}^0 = F \circ S \circ H_0$, где F представляет собой одну из ветвей F_{n+1-P}^t , $t \in \{\min(P_2+1, n+1-P), \dots, n+1-P\}$. Это можно проверить по индукции, стартуя, к примеру, с $n = P$. Используя формулу (2.7), оценку (2.22), условие (2.13) и утверждение (ii) леммы 8 (n), запишем

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(F_{n+1}^0) &< (\mathcal{V}(F) + 1 + \varepsilon) \frac{1}{2(1-\varepsilon)\sqrt{\alpha\lambda^t}} \frac{\tau}{|I|} C_1 + B_3 - 1 - \varepsilon \\ &< \frac{B_1}{\sqrt{\lambda^{n+1-P-t}}} B_2 C_1 \frac{1}{\sqrt{\alpha\lambda^t}} + B_3 - 1 - \varepsilon < \frac{1}{\sqrt{\alpha\lambda^{n+1}}} + B_3 - 1 - \varepsilon, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

(ii) В соответствии с предположениями индукции (b_1) и (b_3) глубины диффеоморфизмов, построенных после шага n , подчинены следующим ограничениям:

(b_6) предположим, что диффеоморфизм Q_l , $1 \leq l \leq n$, является ветвью одного из отображений F_n или Z_n и $\Lambda Q_l \subset \lambda_{k-1} \setminus \lambda_k$, $k \in \{P_2+1, \dots, n+1\}$; тогда $l \leq [\omega k]$.

Поясним это. Не ограничивая общности (см. обсуждение выбора интервала λ_{n+1}), можно считать, что Q_l был создан на шаге l в результате композиции в критический интервал глубины $l-1$. Принимая во внимание оценку в $(b_{4(l-1)})$ и неравенство (2.22), получаем, что $\alpha\lambda^k < \beta\lambda^{l-2}$. Учитывая условие (2.19), отсюда непосредственно выводим оценку на l .

Рассмотрим одну из ветвей $F = F_{n+1}^k$, $k \in \{\min(P_2+1, n+1), \dots, n+1\}$. Существуют три возможности: либо $F = H_m$, $m \in \{n_0, \dots, M-1\}$, либо $F = Q_l$, либо F получено в результате заполнения некоторого λ -интервала ξ . В первом случае требуемая оценка обеспечивается леммой 5. Во втором случае вследствие леммы 8 (n) и неравенств (2.16), (2.17) получаем $\mathcal{V}(F) < B_1 A_1 < B_1 \lambda^{-\frac{n-k}{2}} - 1 - \varepsilon$.

Предположим, что ветвь F возникла в результате заполнения интервала ξ . Одним из свойств излагаемой конструкции является наличие числа $l < k$ и интервала $\tilde{\xi} \supset \xi$ таких, что $\tilde{\xi}$ появился как прообраз δ -интервала шага $l-1$ в результате композиции отображения G_{l-1} в определенный интервал глубины $l-1$. Основываясь на этом, с помощью индукции по $n \geq k$ при фиксированном k можно проверить, что

найдется диффеоморфизм Q_{l-1} такой, что $F_{n+1}^k = U \circ S \circ Q_{l-1}$, где U представляет собой одну из ветвей $F_{n+1-k+l}^t$, $t \in \{0, \min(P_2 + 1, n + 1 - k + l), \dots, n + 1 - k + l\}$. Отметим, что в силу (b_6) $n + 1 - k + l < n + 1$, и мы можем использовать оценки леммы 8 (n).

В случае $t = 0$ оценим

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(F) &< (\mathcal{V}(U) + 1 + \varepsilon) \frac{B_4}{2(1-\varepsilon)} \frac{\tau}{|I|} |\Lambda Q_{l-1}| + \mathcal{V}(Q_{l-1}) \\ &< \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha \lambda^{n+1-k+l}}} + B_3 \right) B_2 B_4 \beta \varkappa^{l-1} + B_1 A_1 = \mathcal{B}_2. \end{aligned}$$

С учетом (2.18) неравенство

$$\mathcal{B}_2 < \frac{B_1}{\sqrt{\lambda^{n+1-k}}} - 1 - \varepsilon$$

вытекает из соотношения $B_1(A_1 + A_3 + A_4) < C_4$ (см. (2.16)).

Если $t \neq 0$, то тем же способом (опираясь при этом на оценку (2.22)) получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(F) &< (\mathcal{V}(U) + 1 + \varepsilon) \frac{1}{2(1-\varepsilon)\sqrt{\alpha \lambda^t}} \frac{\tau}{|I|} |\Lambda Q_{l-1}| + \mathcal{V}(Q_{l-1}) \\ &< \frac{B_1}{\sqrt{\lambda^{n+1-k+l-t}}} \frac{B_2 \beta}{\sqrt{\alpha \lambda^t}} \varkappa^{l-1} + B_1 A_1 < \frac{B_1}{\sqrt{\lambda^{n+1-k}}} - 1 - \varepsilon, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СВОЙСТВ $(b_{5(n+1)})$, $(h_{1(n+1)})$ – $(h_{3(n+1)})$.

$(b_{5(n+1)})$ Диффеоморфизмы F_{n+1}^{n+1} , не являющиеся ветвями отображения Z_n , уже обсуждались. Пусть $F = F_{n+1}^{n+1}$ есть ветвь Z_n , не удовлетворяющая требованию $(b_{5(n+1)})$, l – глубина F , $l \ll n$. Сделаем композицию отображения G_l в ΛF . Каждую из образовавшихся при этом ветвей обозначим также через F_{n+1}^{n+1} . Благодаря сделанному выбору параметров предварительной конструкции новые ветви F_{n+1}^{n+1} будут обладать свойством $(b_{5(n+1)})$. Отметим, что с этого момента символ F_{n+1}^{n+1} не используется для обозначения F .

$(h_{3(n+1)})$ Введем следующие обозначения. Пусть ξ – интервал, $f: \xi \rightarrow \delta_t$ – диффеоморфизм. Положим $\xi_p = \xi_p(\xi) = f^{-1}(\delta_{t+1})$ и для каждого δ -интервала η шага $t + 1$, отличного от δ_{t+1} и такого, что $\eta \subset \delta_t$, обозначим через $\xi_s = \xi_s(\xi)$ прообраз $f^{-1}(\eta)$.

Рассмотрим λ -интервалы, которые заполнялись на шаге $n + 1$. Подчеркнем, что они не пересекаются и обладают свойством (h_{3n}) . Зафиксируем один из таких интервалов ξ , отображаемый с помощью диффеоморфизма f на, скажем, интервал δ_{l-1} , $l \leq n$. На этапе заполнения ξ образовались новые λ -интервалы ξ_p и ξ_s . Очевидно, интервал ξ'_p определен и равен ξ . Согласно свойству (h_{3l}) и динамической связи между δ - и λ -интервалами имеем $f(\xi) = \delta_{l-1} \supset \eta'$ для любого δ -интервала $\eta \subset \delta_{l-1}$ шага l . Стало быть, интервалы ξ'_s тоже определены и $\xi'_s \subset \xi'_p$. Отсюда нетрудно вывести $(h_{3(n+1)})$, принимая во внимание соответствующие детали выбора интервала λ_{n+1} .

$(h_{1(n+1)})$, $(h_{2(n+1)})$ Заметим, что свойство (h_{1n}) (с учетом (h_{2n})) влечет соответствующее свойство продолжаемости для δ -интервалов шага n . Примем очередное предположение индукции:

(h_{4n}) для любого δ -интервала ξ шага n выполнены включения $\xi' \subset \mathfrak{M}_{n-1}$, $\xi'' \subset \mathfrak{M}_{n-2}$ и $\xi''' \subset \mathfrak{M}_{n-3}$.

Из этого предположения вытекает, в частности, что для любого δ -интервала ξ шага n такого, что $\xi \subset \delta_{n-1}$, справедливы включения $\xi'' \subset \delta_{n-2}$ и $\xi''' \subset \delta_{n-3}$. Действуя как при доказательстве предыдущего свойства, можно показать, что для любого λ -интервала ξ , заполняемого на шаге $n+1$, и для каждого интервала ξ_s интервалы ξ_s'' и ξ_s''' определены и

$$\xi_s'' \subset \xi_p'' = \xi', \quad \xi_s''' \subset \xi_p''' = \xi''. \quad (2.33)$$

Это, в частности, доказывает свойство $(h_{1(n+1)})$ для λ -интервалов, полученных в результате заполнений.

Что касается включений в $(h_{2(n+1)})$, они очевидны для всех λ -интервалов, полученных в результате заполнений (вследствие (2.33) и свойства (h_{2n})), а также для всех остальных λ -интервалов, кроме тех, которые лежат внутри $\varkappa_n$. Пусть ξ есть λ -интервал такой, что $\xi \subset \varkappa_n$, $\xi \cap (S(1), p) \neq \emptyset$. Тогда найдется δ -интервал $\eta \in \mathfrak{M}_n$ такой, что $R_n(\xi) = \eta$. В силу (h_{4n}) имеем $\xi''' = (R_n)^{-1}(\eta''') \subset (R_n)^{-1}(\mathfrak{M}_{n-3})$. Учитывая соответствующие детали выбора интервала $\mathfrak{E}_{n+1}$, получаем, что $\xi''' \subset S(I)$.

Установим свойство $(h_{4(n+1)})$. Отметим, что с помощью отображения S (см. свойство (h_{2n})) включения (2.33) можно трансформировать в соответствующие соотношения для δ -интервалов. Объединяя это с (h_{4n}) , выводим утверждаемое в $(h_{4(n+1)})$ для всех δ -интервалов шага $n+1$, лежащих вне множества δ_n . Непосредственным вычислением с использованием неравенств (2.22), (2.23), (2.30) проверяется, что для любого λ -интервала ξ такого, что $\xi \subset \lambda_n \setminus \lambda_{n+1}$, имеем $\xi_p''' \subset \lambda_{n-1}$. Это позволяет завершить доказательство для остальных δ -интервалов.

Заметим, что отображения F_{n+1} и G_{n+1} зависят непрерывно от b на интервале $\mathfrak{E}_{n+1}$.

2.5. Оценки мер в фазовом пространстве. В этом пункте устанавливаются свойство (г) отображения G и свойство (v) последовательности множеств $\mathfrak{I}_n$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Условие суммируемости. Заметим, что для любого n каждая ветвь $U: \Lambda \rightarrow I$ отображений F_n или Z_n имеет вид $H_{i_j} \circ S|_I \circ \dots \circ S|_I \circ H_{i_1}$. Обозначим $\mathcal{H}(U) = \mathcal{H}(\Lambda) = j$. Оценки времени возвращаемости индуцированного отображения G основаны на следующей лемме.

ЛЕММА 9. Пусть U есть либо диффеоморфизм глубины k , $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, либо одна из ветвей F_k^t , $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $k \in \{t, t+1, \dots\}$. Тогда

$$\mathcal{H}(U) < L2^k,$$

где число $L = L(E)$ введено в п. 2.3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как для любого диффеоморфизма H_0 имеем $\mathcal{H}(H_0) \leq L-1$, требуемые оценки выполняются на первых шагах конструкции. Предположим, что они проверены при $k \leq n$, $t \leq n$. Тогда, к примеру, задавшись одним из диффеоморфизмов F_{n+1}^k , $k \leq n$, и пользуясь тем, что $F_{n+1}^k = U \circ S \circ Q_{l-1}$ для подходящих $l < k$, Q_l и ветви $U = F_{n+1-k+l}^t$, можно записать

$$\mathcal{H}(F_{n+1}^k) = \mathcal{H}(U \circ S \circ Q_{l-1}) = \mathcal{H}(U) + \mathcal{H}(Q_{l-1}) \leq L2^{n+1-k+l} + L2^{l-1} \leq L2^{n+1}.$$

Действуя аналогично в отношении остальных ветвей, создаваемых на шаге $n + 1$, и диффеоморфизмов глубины $n + 1$, можно вывести искомые оценки при $k = n + 1$, $t \leq n + 1$ и, тем самым, доказать лемму по индукции.

Заметим, что любая ветвь $U: \Delta \rightarrow I$ отображения G имеет вид $T_{i_j} \circ \dots \circ T_{i_1}$, и полагаем $\mathcal{T}(U) = \mathcal{T}(\Delta) = j$. Каждую из ветвей отображения G вида $F_n^k \circ S$ будем обозначать через G_n^k . Ясно, что $\mathcal{T}(G_n^k) = \mathcal{H}(F_n^k)$ и справедливо включение $\Delta G_n^k \subset \delta_{k-1} \setminus \delta_k$. Для доказательства сходимости ряда в условии (г) на отображение G достаточно установить ограниченность последовательности

$$\mathcal{S}(n) = \sum_{\Delta \in \mathcal{I}_n \setminus \mathcal{I}_0} |\Delta| \mathcal{T}(\Delta), \quad n \in \mathbb{N},$$

ибо множество $\mathcal{I}_0$ конечно и при $b \neq 2$ отображение T имеет конечное число ветвей. Имеем $\mathcal{S}(n) = \mathcal{S}_1(n) + \mathcal{S}_2(n)$, где

$$\mathcal{S}_1(n) = \sum_{\Delta \in \mathcal{I}_n \setminus \mathcal{I}_0, \Delta \subset \bigcup \Delta_0} |\Delta| \mathcal{T}(\Delta), \quad \mathcal{S}_2(n) = \sum_{k=1}^n \sum_{\Delta \in \mathcal{I}_n \setminus \mathcal{I}_0, \Delta \subset \delta_{k-1} \setminus \delta_k} |\Delta| \mathcal{T}(\Delta).$$

Нетрудно видеть (используя соответствующее свойство для ветвей F_k^0), что для любой ветви G_k^0 найдутся определенные диффеоморфизм T_0 (см. п. 2.3) и ветвь G_{k-P}^t , $t \in \{\min(P_2 + 1, k - P), \dots, k - P\}$, такие, что $G_k^0 = G_{k-P}^t \circ T_0$. Учитывая это, можно показать, что $\mathcal{S}_1(n) < \text{const} \cdot \mathcal{S}_2(n - P)$, где константа зависит только от параметров предварительной конструкции. Стало быть, достаточно рассмотреть последовательность $\mathcal{S}_2(n)$, $n \in \mathbb{N}$. Запишем

$$\mathcal{S}_2(n) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=k}^n \sum_{G_j^k} |\Delta G_j^k| \mathcal{T}(G_j^k). \quad (2.34)$$

Одним из свойств конструкции, изложенной в п. 2.4, является то, что ветви отображения G , построенные на шаге j , $j \geq 1$, определены внутри множества $\mathfrak{M}_{j-1}$. Поэтому существенной для дальнейшего является следующая лемма.

ЛЕММА 10. Для любого $k \geq 1$ и для любого $j \geq k$

$$\left| \bigcup_{\xi \in \mathfrak{m}_j, \xi \subset \delta_{k-1} \setminus \delta_k} \xi \right| < 2\sqrt{\lambda}(4\tau_2\sqrt{\lambda})^{j-k} |\delta_{k-1} \setminus \delta_k|. \quad (2.35_{kj})$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенства (2.35_{kk}), $k \geq 1$, доказываются по индукции в том же духе, как это делается в [2; лемма 2], с учетом соотношений (2.14), (2.30) и свойства (h_{3n}) . В качестве пояснения добавим лишь, что, во-первых, если ξ есть λ - или δ -интервал и $f: \xi \rightarrow \delta_l$ есть соответствующий диффеоморфизм, из неравенств (2.35_{(l+1)(l+1)}) и (2.23) вытекает, что

$$|\xi_p| + \sum |\xi_s| < 4\tau_2\sqrt{\lambda}|\xi|. \quad (2.36)$$

Во-вторых, предположим, что $\xi \subset \lambda_n$. Легко показать, опираясь на свойства (b_{5k}) , $k < n$, что диффеоморфизмы и λ -интервалы, построенные внутри $\xi' \setminus \xi$, получаются

заполнением интервала ξ' , в частности находятся в биективном соответствии с ветвями отображения G_l , определенными внутри множества $\delta_{l-1} \setminus \delta_l$, и δ -интервалами шага l . Поэтому суммарную меру λ -интервалов в $\xi' \setminus \xi$ также можно оценивать, исходя из неравенства (2.35_{ll}).

Учитывая сказанное, неравенства (2.35_{kj}) доказываются индукцией по j при фиксированном k .

С помощью лемм 9, 10, неравенств (2.14), (2.22) и выражения (2.34) оценим

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_2(n) &< \sum_{k=1}^n \left(L 2^k |\delta_{k-1} \setminus \delta_k| + \sum_{j=k+1}^n L 2^j 2\sqrt{\lambda} (4\tau_2 \sqrt{\lambda})^{j-1-k} |\delta_{k-1} \setminus \delta_k| \right) \\ &< L \sum_{k=1}^n 2^k |\delta_{k-1}| \left(1 + \sum_{j=1}^{n-k} 2^j 2\sqrt{\lambda} (4\tau_2 \sqrt{\lambda})^{j-1} \right) \\ &< \text{const} \sum_{k=1}^n 2^k \sqrt{2\alpha\lambda^k} (1 + \varepsilon) < \text{const}, \end{aligned}$$

принимая во внимание выбор λ (условие (2.30)).

Асимптотика мер множеств $\mathfrak{M}_n$. Из неравенства (2.36) с учетом условия (2.30) выводится следующий результат.

ЛЕММА 11. Для любого n справедлива оценка

$$|\mathfrak{M}_n| < 10^{-n} |\mathfrak{M}_0|.$$

2.6. Оценки меры в пространстве параметра b . Напомним, что на шаге $n+1$ зафиксирован составляющий интервал $\mathfrak{E}_n$ множества $\mathfrak{D}_n$ такой, что при изменении параметра b в пределах $\mathfrak{E}_n$ критическое значение $S(1)$ с почти единичной скоростью пробегает интервал $\mathfrak{X}_n$ глубины n . При этом часть множества $\mathfrak{D}_{n+1}$ в интервале $\mathfrak{E}_n$ состоит из тех b , при которых точка $S(1)$ лежит внутри относительно неподвижных интервалов глубины $n+1$, в совокупности составляющих семейство $\mathfrak{p}_{n+1}$. Стало быть, мы находимся в рамках ситуации, описываемой следующей леммой.

ЛЕММА 12. Рассмотрим дифференцируемые действительные функции ζ , ϕ_i , ψ_i , $i = 1, \dots, j$, такие, что для некоторых малых положительных чисел ε_1 , ε_2 и ε_3 справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \phi_1 < \psi_1 \leq \phi_2 < \psi_2 \leq \dots \leq \phi_j < \psi_j, \quad 1 - \varepsilon_1 < |\zeta'| < 1 + \varepsilon_1, \\ \max_{i=1, \dots, j} \max(|\phi'_i|, |\psi'_i|) < \varepsilon_2, \quad \max_{i=1, \dots, j} \frac{|(\psi_i - \phi_i)'|}{|\psi_i - \phi_i|} < \varepsilon_3. \end{aligned}$$

Определим числа x'_i , x''_i , $i = 1, \dots, j$, с помощью уравнений $\zeta(x'_i) = \phi_i(x'_i)$, $\zeta(x''_i) = \psi_i(x''_i)$. Тогда для любого $x \in [x'_1, x''_j]$ имеем

$$\sum_{i=1}^j |x''_i - x'_i| \leq \frac{\sum_{i=1}^j |\psi_i(x) - \phi_i(x)|}{(1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2)(1 - \varepsilon_3 |x''_j - x'_1|)}$$

при условии, что $\varepsilon_3 |x''_j - x'_1| < 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 10. Эта лемма неявно, хотя и в ином ключе, использовалась в [2; с. 69].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 12. Нетрудно показать, что в условиях леммы для каждого i и для любых $x \in [x'_1, x''_j]$, $y \in [x'_1, x''_j]$

$$\frac{|\psi_i(x) - \phi_i(x)|}{|\psi_i(y) - \phi_i(y)|} \leq \frac{1}{1 - \varepsilon_3 |x''_j - x'_1|}.$$

Опираясь на эти оценки и учитывая определение точек x'_i , x''_i , путем несложных преобразований получаем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^j |x''_i - x'_i| &\leq (1 - \varepsilon_1)^{-1} \left(\sum_{i=1}^j |\psi_i(x''_i) - \psi_i(x'_i)| + \sum_{i=1}^j |\psi_i(x'_i) - \phi_i(x'_i)| \right) \\ &\leq (1 - \varepsilon_1)^{-1} \left(\varepsilon_2 \sum_{i=1}^j |x''_i - x'_i| + \frac{1}{1 - \varepsilon_3 |x''_j - x'_1|} \sum_{i=1}^j |\psi_i(x) - \phi_i(x)| \right) \end{aligned}$$

для любого $x \in [x'_1, x''_j]$. Разрешая полученное неравенство относительно числа $\sum_{i=1}^j |x''_i - x'_i|$, завершаем доказательство.

Чтобы задействовать лемму 12 при оценивании $|\mathfrak{E}_n \setminus \mathfrak{D}_{n+1}|$, надо уметь контролировать скорости λ -интервалов. Для интервала $\xi = (y', y'')$, зависящего от параметра b , обозначим

$$\mathcal{V}(\xi) = \max(|\partial_b y'|, |\partial_b y''|), \quad \mathcal{R}(\xi) = \frac{|\partial_b |\xi||}{|\xi|}.$$

Скорости $\mathcal{V}$ описываются леммой 8 с учетом того, что скорости точек p и p^{-1} пренебрежимо малы. Оценивание приведенных скоростей $\mathcal{R}$ осуществляется индуктивно (лемма 15). При этом оказывается нужным знание того, как функция λ -интервала $\mathcal{R}(\cdot)$ ведет себя относительно преобразований этих интервалов. Пусть интервал ξ отображается на другой интервал η с помощью диффеоморфизма F , зависящего от параметра b . Тогда нетрудно проверить, что

$$\mathcal{R}(\xi) < \mathcal{R}(F) + \tau(F, \xi) \mathcal{R}(\eta) + \tau(F, \xi) \mu(F, \xi) \mathcal{V}(\eta), \quad (2.37)$$

где число

$$\mathcal{R}(F) = \sup_{x \in \eta} \left| \frac{\partial_b \partial F^{-1}(b, x)}{\partial F^{-1}(b, x)} \right|,$$

вообще говоря, характеризует приведенную скорость интервала определения F (по поводу обозначения $\mu(F, \xi)$ см. п. 2.1). Совместное использование одного символа $\mathcal{R}$ для обозначения разных величин целесообразно, ибо эти величины, по сути дела, выражают одно и то же. То же самое справедливо и в отношении символа $\mathcal{V}$.

Сказанное является преамбулой к следующей формулировке. Положим

$$\begin{aligned} D_1 &= \sup_{x \in I} |\partial^2 S(x)| > 1, \quad D_2 = \sup_{H_0} \mathcal{R}(H_0), \quad D_3 = D_2 + C_5, \\ D_4 &= B_1 \left(\frac{D_1 B_4^2}{(2(1 - \varepsilon))^2} + \frac{\mu B_4}{2(1 - \varepsilon)} \right), \end{aligned}$$

где C_5 есть константа из леммы 5, $\mu = \mu(I, \hat{I})$ (см. замечание 6).

ЛЕММА 13. Для любых чисел $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $t = 1, \dots, k$ справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} \max\left(\sup_{Q_k} \mathcal{R}(Q_k), \sup_{F_k^t} \mathcal{R}(F_k^t)\right) &< D_3 2^k + 2D_4 \sum_{i=0}^{k-1} 2^{k-1-i} \left(\frac{1}{\alpha\lambda^i} + B_3\right) + 2\varepsilon \sum_{i=0}^{k-1} 2^i, \\ \sup_{F_k^0} \mathcal{R}(F_k^0) &< D_3 2^k + D_4 \sum_{i=0}^k 2^{k-i} \left(\frac{1}{\alpha\lambda^i} + B_3\right) + \varepsilon \sum_{i=0}^k 2^i. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что оценки леммы верны для $k \leq n$, и установим их для $k = n + 1$. Рассмотрим композицию $W = V \circ S \circ U$, где U и V суть диффеоморфизмы на I , определенные внутри интервала $(0, p)$, и предположим, что $\Lambda V \subset S(I)$. Используя формулы (2.9), (2.8) и (2.7) (чтобы посчитать $\partial_b((V \circ S)^{-1})(x)$), запишем

$$\begin{aligned} \frac{\partial_b \partial W^{-1}(x)}{\partial W^{-1}(x)} &= \frac{\partial_b \partial U^{-1}(U(y))}{\partial U^{-1}(U(y))} + \frac{\partial^2 U}{\partial U^2} \left(\frac{\partial_b V}{\partial V} \frac{1}{\partial S} + \frac{\partial_b S}{\partial S} \right) \\ &\quad + \frac{\partial^2 S}{\partial S^2} \partial_b S - \frac{\partial_b \partial S}{\partial S} + \frac{\partial^2 S}{\partial S^2} \frac{\partial_b V}{\partial V} + \frac{\partial_b \partial V^{-1}(x)}{\partial V^{-1}(x)}, \end{aligned} \quad (2.38)$$

где $x = W(y)$ и аргументами U , S и V являются y , $U(y)$ и $S \circ U(y)$ соответственно. Таким образом, если диффеоморфизм U продолжаемый, то, учитывая замечание 8, имеем

$$\mathcal{R}(W) \leq \mathcal{R}(U) + \mathcal{R}(V) + (\mathcal{V}(V) + 1 + \varepsilon) \left(D_1 \sup \frac{1}{\partial S^2} + \mu \sup \frac{1}{|\partial S|} \right) + \varepsilon. \quad (2.39)$$

Нетрудно видеть, что третье слагаемое в правой части (2.39), которое обозначим через $\mathcal{C}(V)$, зависит только от диффеоморфизма V . Предположим, что $V = F_j^i$, $i \geq 1$, и оценим

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(V) &< \frac{B_1}{\sqrt{\lambda^{j-i}}} \left(\frac{D_1}{(2(1-\varepsilon))^2 \alpha \lambda^i} + \frac{\mu}{2(1-\varepsilon) \sqrt{\alpha \lambda^i}} \right) \\ &< \frac{1}{\alpha \lambda^j} D_4 < \left(\frac{1}{\alpha \lambda^j} + B_3 \right) D_4, \end{aligned} \quad (2.40)$$

учитывая оценки леммы 8, неравенство $i \leq j$ и тот факт, что число $\alpha \lambda^i$, вообще говоря, очень мало. Аналогично, если $V = F_j^0$, то

$$\mathcal{C}(V) < \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha \lambda^j}} + B_3 \right) \left(\frac{D_1 B_4^2}{(2(1-\varepsilon))^2} + \frac{\mu B_4}{2(1-\varepsilon)} \right) < \left(\frac{1}{\alpha \lambda^j} + B_3 \right) D_4. \quad (2.41)$$

Зафиксируем диффеоморфизм Q_{n+1} и вспомним, что $Q_{n+1} = F \circ S \circ Q_n$ для определенного диффеоморфизма Q_n и подходящей ветви F отображения F_n . Заметим, что для любого фиксированного $t \in \{0, 1, \dots, n\}$ мажоранта для $\mathcal{R}(F_k^t)$ в

формулировке леммы является наибольшей при $k = n$. Поэтому предположим, что $F = F_n^0$, и, используя соотношения (2.39) и (2.41), запишем

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(Q_{n+1}) &< D_3 2^n + 2D_4 \sum_{i=0}^{n-1} 2^{n-1-i} \left(\frac{1}{\alpha \lambda^i} + B_3 \right) + 2\varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} 2^i \\ &\quad + D_3 2^n + D_4 \sum_{i=0}^n 2^{n-i} \left(\frac{1}{\alpha \lambda^i} + B_3 \right) + \varepsilon \sum_{i=0}^n 2^i + \left(\frac{1}{\alpha \lambda^n} + B_3 \right) D_4 + \varepsilon \\ &= D_3 2^{n+1} + D_4 \left(\sum_{i=0}^{n-1} 2^{n-i} \left(\frac{1}{\alpha \lambda^i} + B_3 \right) + \left(\frac{1}{\alpha \lambda^n} + B_3 \right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=0}^n 2^{n-i} \left(\frac{1}{\alpha \lambda^i} + B_3 \right) \right) + \varepsilon \left(\sum_{i=1}^n 2^i + 1 + \sum_{i=0}^n 2^i \right), \end{aligned}$$

что и требовалось. Оценка в случае, когда $F = F_n^t$, $t \in \{1, \dots, n\}$, аналогична и основывается на неравенстве (2.40).

Оценки леммы для ветвей F_{n+1}^t , $t = 0, 1, \dots, n+1$, проводятся теми же самыми средствами.

Следующая лемма используется в доказательстве леммы 15.

ЛЕММА 14. *Для любого $n \geq -(P+3)$ имеем*

$$\mathcal{R}(\delta_n) < \frac{1}{(1-\varepsilon)^2 \alpha \lambda^n}, \quad \mathcal{V}(\delta_n) < \frac{1}{(1-\varepsilon) \sqrt{\alpha \lambda^n}}.$$

Этот вычислительный факт является прямым следствием замечания 8, неравенств (2.14), (2.22) и леммы 8.

Перед формулировкой следующей леммы договоримся обозначать символом ξ_n^k (или η_n^k) каждый из λ -интервалов, фигурирующий в конструкции после шага n и расположенный внутри множества $\lambda_{k-1} \setminus \lambda_k$, $k = P_2 + 1, \dots, n$. Рассмотрим один из λ -интервалов ξ . Вследствие свойства (h_{1n}) при подходящем n интервалы ξ и ξ' находятся в поле действия принципа Кёбе с константой, скажем, τ_3 . Предположим, что параметры P и P_1 удовлетворяют условиям

$$\tau_3 2^{1-P} < 1, \quad \tau_3 2^{1-(1-\omega)P_1} < 1, \quad (2.42)$$

увеличив их в случае надобности. Положим

$$D_5 = 4D_4 \tau_3 > D_4 \quad (2.43)$$

и обратимся к доказательству следующей леммы.

ЛЕММА 15. *Предположим, что ξ есть λ -интервал после шага k . Тогда*

$$\mathcal{R}(\xi) < D_3 2^k + D_5 \sum_{i=0}^k 2^{k-i} \left(\frac{1}{\alpha \lambda^i} + B_3 \right) + \varepsilon \sum_{i=0}^k 2^i.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что утверждаемое в лемме доказано для $k \leq n$, и выведем требуемую оценку при $k = n + 1$. Рассмотрим λ -интервал ξ . Для него существуют четыре возможности. Именно найдутся диффеоморфизм $F = F_\xi$ и число j такие, что либо $F(\xi) = \delta_j$, либо $(S \circ F)(\xi) = \eta$ для некоторого интервала $\eta = \eta_j^t$, $t \in \{0, P_2 + 1, \dots, j\}$. Если ξ есть один из интервалов ξ_{n+1}^0 , то $F = H_0$, $j = n + 1 - P$, $t > 0$. В противном случае, когда $\xi = \xi_{n+1}^m$, $m \in \{P_2 + 1, \dots, n + 1\}$, имеем $F = Q_{l-1}$, $j = n + 1 - m + l$, где $l \leq m - 1$. Фигурирующий здесь образ интервала ξ будем обозначать через η_ξ .

Предположим, что некоторая композиция $S \circ F$, где F есть продолжаемый диффеоморфизм, отображает λ -интервал ξ_1 на λ -интервал ξ_2 . Используя формулу

$$\frac{\partial^2 (S \circ F)}{\partial (S \circ F)^2} = \frac{\partial^2 S}{\partial S^2} + \frac{1}{\partial S} \frac{\partial^2 F}{\partial F^2},$$

оценку (2.37), выражения (2.9), (2.8) и замечание 8, получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\xi_1) &\leq \mathcal{R}(F) + \tau_3 \mathcal{R}(\xi_2) \\ &+ (\tau_3 \mathcal{V}(\xi_2) + 1 + \varepsilon) \left(D_1 \sup \frac{1}{\partial S^2} + \mu \sup \frac{1}{|\partial S|} \right) + \varepsilon. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Нетрудно видеть, что третье слагаемое в правой части (2.44), которое обозначим через $\mathcal{C}(\xi_2)$, зависит только от ξ_2 . Заметим, что для любых t, j , $t \leq j$, граница любого из интервалов ξ_j^t состоит из граничных точек прилегающих интервалов ΛF_j^t . Это означает, что к оцениванию $\mathcal{V}(\xi_j^t)$ применимы соответствующие неравенства леммы 8 (j). Учитывая это замечание и действуя как в доказательстве леммы 13, можно показать, что

$$\sup_{\xi_j^t} \mathcal{C}(\xi_j^t) < \left(\frac{1}{\alpha \lambda^j} + B_3 \right) D_5. \quad (2.45)$$

Предположим, что $\xi = \xi_{n+1}^m$, $\eta_\xi = \eta = \eta_{n+1-m+l}^t$, $F_\xi = Q_{l-1}$. Используя соотношения (2.44) и (2.45) с $\xi_1 = \xi$, $\xi_2 = \eta$ и $F = Q_{l-1}$, лемму 13, а также предположение индукции, оценим

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\xi) &\leq D_3 2^{l-1} + 2D_4 \sum_{i=0}^{l-2} 2^{l-2-i} \left(\frac{1}{\alpha \lambda^i} + B_3 \right) + 2\varepsilon \sum_{i=0}^{l-2} 2^i \\ &+ \tau_3 D_3 2^{n+1-m+l} + \tau_3 D_5 \sum_{i=0}^{n+1-m+l} 2^{n+1-m+l-i} \left(\frac{1}{\alpha \lambda^i} + B_3 \right) \\ &+ \tau_3 \varepsilon \sum_{i=0}^{n+1-m+l} 2^i + \left(\frac{1}{\alpha \lambda^{n+1-m+l}} + B_3 \right) D_5 + \varepsilon = \mathcal{W}. \end{aligned}$$

Ввиду второго из условий в (2.42) и свойства (b_6) заметим, что $\tau_3 2^{1-m+l} \leq 1$. Отсюда

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &\leq D_3 (2^{l-1} + \tau_3 2^{1-m+l} 2^n) + D_5 \left(\sum_{i=0}^{n-2} 2^{n-1-i} \left(\frac{1}{\alpha \lambda^i} + B_3 \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{\alpha \lambda^n} + B_3 \right) + \tau_3 2^{1-m+l} \sum_{i=0}^n 2^{n-i} \left(\frac{1}{\alpha \lambda^i} + B_3 \right) \right) \\ &\quad + \varepsilon \left(\sum_{i=1}^{n-1} 2^i + 1 + \tau_3 2^{1-m+l} \sum_{i=m-l-1}^n 2^i \right), \end{aligned}$$

что приводит к требуемой оценке.

Случай, когда $\xi = \xi_{n+1}^0$, $\eta_\xi = \eta_{n+1-P}^t$, $F_\xi = H_0$, рассматривается в той же самой манере с учетом первого из условий в (2.42). Если же $\eta_\xi = \delta_j$, то вывод искомым соотношений упрощается и сводится к непосредственному применению неравенства (2.37) и леммы 14.

Вспомним, что множество $\mathfrak{E}_n \setminus \mathfrak{D}_{n+1}$ состоит (mod 0) из тех значений параметра b , при которых $S(1) \in (R_n)^{-1}(\mathfrak{M}_{n-3})$. Соединяя леммы 13–15 и оценку (2.44), получаем

$$\sup_{b \in \mathfrak{E}_n} \sup_{\xi \in \mathfrak{m}_{n-3}} \mathcal{R}((R_n)^{-1}(\xi)) \leq D_6 \lambda^{-n},$$

где константа D_6 зависит от чисел ε , τ_3 , B_3 , D_3 , D_4 , D_5 , α . Дополнительно к условиям (2.17)–(2.19) предположим, что для любого $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\beta \varkappa^n D_6 \lambda^{-n} < \frac{1}{10}. \quad (2.46)$$

Отметим, что вследствие замечания 8, леммы 8 (n) и неравенства (2.17) выполнены посылки леммы 6 с $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-1}$, согласно которой справедливо неравенство

$$\frac{5}{6} |\varkappa_n(b)| \leq |\mathfrak{E}_n| \leq \frac{5}{4} |\varkappa_n(b)| \leq \frac{5}{4} \beta \varkappa^n \quad (2.47)$$

для любой из граничных точек b интервала $\mathfrak{E}_n$.

Принимая во внимание соотношения (2.46) и (2.47), оценку меры множества $\mathfrak{E}_n \setminus \mathfrak{D}_{n+1}$ можно провести исходя из леммы 12 с $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-1}$ при условии, что $\varepsilon_3 |x_j'' - x_1'| \leq 8^{-1}$. В результате получаем, что для любого n и для любого составляющего интервала $\mathfrak{E}_n = (b'_n, b''_n)$ множества $\mathfrak{D}_n$

$$\begin{aligned} \frac{|\mathfrak{E}_n \setminus \mathfrak{D}_{n+1}|}{|\mathfrak{E}_n|} &\leq \frac{10}{7} \frac{|(R_n)^{-1}(\mathfrak{M}_{n-3})(b'_n)|}{|\mathfrak{E}_n|} \leq \frac{10}{7} \frac{\tau |\mathfrak{M}_{n-3}(b'_n)| |\varkappa_n(b'_n)|}{|I| |\mathfrak{E}_n|} \\ &\leq \frac{10 \cdot 6}{7 \cdot 5} \frac{\tau 10^{-n+3} |\mathfrak{M}_0| |\mathfrak{E}_n|}{|I| |\mathfrak{E}_n|} \leq D_7 10^{-n} |\mathfrak{M}_0| \end{aligned} \quad (2.48)$$

(см. лемму 11).

Как показано в работе [9], $|\mathfrak{M}_0| \leq \text{const} |\delta_0|$ с константой, зависящей от свойств растяжения отображения T при $b = 2$. С учетом оценок (2.14) и (2.22) это влечет, что $|\mathfrak{M}_0| \leq \text{const} \sqrt{\alpha}$. Сделанное замечание и неравенство (2.48) говорят об экспоненциальном убывании мер множеств $\mathfrak{D}_n \setminus \mathfrak{D}_{n+1}$ (свойство (viii) последовательности $\mathfrak{D}_n$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) и влекут существование константы D_8 , не зависящей от числа α и такой, что для любого интервала $\mathfrak{E}_0$

$$\frac{|\mathfrak{G}(\alpha) \cap \mathfrak{E}_0|}{|\mathfrak{E}_0|} \geq 1 - D_8 \sqrt{\alpha}.$$

С помощью лемм 4–6 неравенства в п. (iii) леммы 3 трансформируются в оценки мер интервалов $\mathfrak{E}_0$. Благодаря последним нижняя плотность множества $\mathfrak{G}(\alpha)$ в точке $b = 2$ может быть сделана сколь угодно близкой к единице за счет выбора α . Тем самым, доказано утверждение о точке плотности в теореме 3.

2.7. Построение множества $\mathfrak{S}_1$. Зафиксируем α . Отметим, что для каждого n множество $\mathfrak{D}_n$ зависит от c . Будем называть *элементарными* непустые множества вида

$$\{(c, b) \in \mathbb{R}^2 : c' \leq c < c'', b \in \mathfrak{E}_n(c)\}, \quad (2.49)$$

где для любого c множество $\mathfrak{E}_n(c)$ является составляющим интервалом множества $\mathfrak{D}_n(c)$, гладко зависящим от c , $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Если $\mathfrak{A}$ есть элементарное множество вида (2.49), то любое из множеств $\{c\} \times \mathfrak{E}_n(c)$ называется *слоем* множества $\mathfrak{A}$, в то время как полуинтервал $[c', c'')$ называется *проекцией* множества $\mathfrak{A}$ и обозначается через $\mathcal{P}(\mathfrak{A})$. Для произвольного $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и любой пары (c, b) такой, что $c_3 \leq c$, $b \in \mathfrak{D}_n(c)$, обозначим через $\mathfrak{B}_{n,c,b}$ множество $\{c\} \times \mathfrak{E}_n$, где $\mathfrak{E}_n$ есть составляющий интервал множества $\mathfrak{D}_n(c)$, содержащий b .

Множество

$$\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}_1(\alpha) = \bigcup_{c \geq c_3} \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : b \in \mathfrak{E}_c(\alpha), a = c(2 - b)^{-3}\}$$

измеримо как счетное пересечение множеств

$$\bigcup_{c \geq c_3} \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : b \in \mathfrak{D}_n(c), a = c(2 - b)^{-3}\}$$

с учетом следующего факта.

ЛЕММА 16. *Для любых $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $c \in [c_3, \infty)$ и $b \in \mathfrak{D}_n(c)$ существует элементарное множество $\mathfrak{A}$ такое, что множество $\mathfrak{B}_{n,c,b}$ является одним из слоев $\mathfrak{A}$.*

Действительно, тогда каждое из множеств $\{(c, b) \in \mathbb{R}^2 : c_3 \leq c, b \in \mathfrak{D}_n(c)\}$ измеримо как не более чем счетное объединение классов эквивалентности по следующему отношению. Две пары (c', b') и (c'', b'') считаются эквивалентными, если существует элементарное множество $\mathfrak{A}$ такое, что множества $\mathfrak{B}_{n,c',b'}$ и $\mathfrak{B}_{n,c'',b''}$ являются слоями $\mathfrak{A}$ (разумеется, это отношение зависит от n).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 16. Сперва отметим, что любая итерация отображения S представляет собой рациональную функцию переменных c, b и x . Поэтому y является алгебраической функцией переменных c, b , коль скоро y есть граничная точка одного из интервалов множеств $\mathfrak{f}_n$ или $\mathfrak{n}_n$. Аналогично, если в этих условиях при фиксированном c число b определяется уравнением $S(1) = y$, то b связано алгебраической зависимостью с c .

Ясно, что лемма выполняется при $n = 0$, причем в качестве элементарных множеств, фигурирующих в ее формулировке, можно взять множества вида $\{(c, b) \in \mathbb{R}^2 : c_3 \leq c, b \in \mathfrak{E}_0(c)\}$. Если $\mathfrak{A}$ есть одно из таких множеств, то все ветви отображения $\overline{H}$ меняются непрерывно в зависимости от $(c, b) \in \mathfrak{A}$. Доказательство леммы проведем с помощью индукции по n . При этом будем опираться на то, что для любого $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ интервалы фазового пространства, введенные в рассмотрение к шагу $n + 1$, в определенном смысле регулярно зависят от c, b . Это означает, что в формулировке леммы можно дополнительно считать, что

- (b_{7n}) каждый интервал множества $\mathfrak{f}_n$ или $\mathfrak{n}_n$ гладко зависит от $(c, b) \in \mathfrak{A}$;
- (h_{5n}) интервал λ_n , а также каждый из λ -интервалов ξ вместе со своим расширением ξ' зависят гладко от $(c, b) \in \mathfrak{A}$.

С этого момента зададимся числом c , $c_3 \leq c$. В дополнение к сказанному в п. 2.4 уточним некоторые детали выбора интервалов λ_i , $i = -P-3, \dots, -1, 0$. Зафиксируем составляющий интервал $\mathfrak{E}_0 = (b'_0(c), b''_0(c))$ и число $i \in \{-P-3, \dots, -1, 0\}$, положим $b = b'_0(c)$ и допустим, что $\frac{3}{2}\alpha\lambda^i = y_m$ для некоторого m , $m > m_0$. По соображениям алгебраичности существует элементарное множество $\mathfrak{A}$ со слоем $\{c\} \times \mathfrak{E}_0$ такое, что имеем альтернативу: либо $\frac{3}{2}\alpha\lambda^i = y_m$ для любого $c' \in \mathcal{P}(\mathfrak{A})$, либо для любого $c' \in \mathcal{P}(\mathfrak{A})$, $c \neq c'$, имеем $\frac{3}{2}\alpha\lambda^i \neq y_m$ (здесь имеется в виду, что $b = b'_0(c')$). В первом случае $n_i = m$, во втором случае полагаем $n_i = m$, если $\frac{3}{2}\alpha\lambda^i < y_m$, $c' > c$, и, напротив, $n_i = m-1$, если $\frac{3}{2}\alpha\lambda^i > y_m$, $c' > c$. Нетрудно убедиться, что после сделанных оговорок выполнены свойства (b_{7n}) и (h_{5n}) при $n = 0$.

Зафиксируем $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и предположим, что лемма и свойства (b_{7k}) и (h_{5k}) установлены для $k \leq n$. Зададимся числом b , $b \in \mathfrak{D}_{n+1}(c)$, и пусть $\mathfrak{E}_n$ есть составляющий интервал множества $\mathfrak{D}_n(c)$, содержащий b . Согласно предположению индукции найдется элементарное множество, скажем $\mathfrak{A}$, такое, что множество $\{c\} \times \mathfrak{E}_n$ является слоем $\mathfrak{A}$ и справедливы свойства (b_{7n}) и (h_{5n}) . Заметим, что когда при фиксированном $c' \in \mathcal{P}(\mathfrak{A})$ пара (c', b) изменяется в пределах соответствующего слоя множества $\mathfrak{A}$, критическое значение $S(1)$ пробегает критический интервал $\varkappa_n(c')$, гладко зависящий от (c', b) вследствие свойства (b_{7n}) . Не ограничивая общности, можно считать, что и остальные критические интервалы гладко зависят от (c', b) , пока находимся в пределах $\mathfrak{A}$. Принимая во внимание это, а также свойства (b_{7n}) и $(b_{7(n-3)})$, делаем вывод, что интервалы глубины $n+1$, создаваемые на шаге $n+1$, и интервалы множества $\mathfrak{p}_{n+1}$ обладают свойством гладкости в (b_{7n}) . Соответственно новые λ -интервалы удовлетворяют требованию (h_{5n}) . Отметим, что использование в этом месте свойства $(b_{7(n-3)})$ оправдывается тем обстоятельством, что последовательность $\mathfrak{D}_n$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, убывает. Действительно, тогда можно считать, что элементарные множества, построенные в доказательстве леммы 16 на предыдущих шагах, обладают соответствующим свойством вложенности.

В силу очевидных аналитических соображений из сказанного выводится лемма 16 для точек множества $\{c\} \times (\mathfrak{D}_{n+1}(c) \cap \mathfrak{E}_n)$, причем все элементарные множества $\mathfrak{A}'$, при этом возникающие, имеют ту же проекцию, что и множество $\mathfrak{A}$.

Остается проверить свойства $(b_{7(n+1)})$ и $(h_{5(n+1)})$. Отметим, что первое из них уже фактически обсуждалось в отношении интервалов глубины $n+1$. Зафиксируем одно из множеств $\mathfrak{A}'$. Выполняя на основании свойств (b_{7n}) и (h_{5n}) выбор точки $\tilde{y}_{n+1}$, получаем интервал λ_{n+1} , гладко зависящий от параметров на элементарном множестве $\mathfrak{A}'' \subset \mathfrak{A}'$, в соответствии с $(h_{5(n+1)})$. При этом, вообще говоря, проекция $\mathcal{P}(\mathfrak{A}'')$ может оказаться собственным подынтервалом $\mathcal{P}(\mathfrak{A}')$. Рассмотрим интервалы множества $\mathfrak{k}_{n+1} \setminus \mathfrak{k}_n$, расположенные внутри множества $\lambda_n \setminus \lambda_{n+1}$. Кроме интервалов множества $\mathfrak{n}_n$, сформированного к шагу $n+1$ (которые автоматически удовлетворяют требованию $(b_{7(n+1)})$ в силу (b_{7n})), внутри множества $\lambda_n \setminus \lambda_{n+1}$ расположены как интервалы, полученные в результате заполнений, так и интервалы, возникающие за счет взятия дополнительных композиций при выборе интервала λ_{n+1} . Последние, очевидно, обладают свойством $(b_{7(n+1)})$, если эти композиции делать согласованно для всех $c' \in \mathcal{P}(\mathfrak{A}')$. Если ξ есть λ -интервал, заполняемый на шаге $n+1$, и ξ отображается на δ_l , $l < n-1$, под действием диффеоморфизма f , то по соображениям непрерывности (свойство (h_{5l})) число l одно и то же для любого $c' \in \mathcal{P}(\mathfrak{A}')$. Учитывая свойства (b_{7l}) (для интервалов мно-

жества $\mathfrak{n}_l$) и $(b_{7(l+1)})$ (для интервалов множества $\mathfrak{k}_l$), делаем вывод, что интервалы множества $\mathfrak{k}_{n+1}$, получаемые в результате заполнения интервала ξ , обладают свойством $(b_{7(n+1)})$. Новые λ -интервалы внутри ξ и интервалы $\widehat{\xi}_s$ гладко зависят от параметров вследствие $(h_{5(l+1)})$. Интервал $\widehat{\xi}_p$ совпадает с ξ и, стало быть, тоже ведет себя регулярно по c, b на множестве $\mathfrak{A}'$. Для λ -интервалов, расположенных вне λ_n , рассуждения полностью аналогичны. Лемма доказана.

§ 3. Доказательство теоремы 2

3.1. Определение функций a_i . Заметим, что d представляет собой минимальное значение $r_{a,d}(1)$ функции $r_{a,d}$ и что для любого d

$$\partial_a r_{a,d}(x) > 0, \quad \lim_{a \rightarrow \infty} r_{a,d}(x) = \infty, \quad x \neq 1. \quad (3.1)$$

Зафиксируем $d < 1$ и будем, монотонно и непрерывно меняя параметр a от a_0 до ∞ , следить за поведением графика функции $r_{a,d}$. При этом встретим ряд примечательных значений параметра a , которые будут соответствовать бифуркациям между теми или иными типами поведения соответствующей динамической системы и определять искомые функции. Опишем эти значения.

Из того, что $r_{a,d}(1) = d < 1$, $r_{a,d}(0) = d + a/2 > 0$, и из соображений непрерывности и монотонности вытекает существование единственной неподвижной точки $p_1 = p_1(a, d)$ отображения $r_{a,d}$ на интервале $(0, 1)$, причем для любого d

$$\lim_{a \rightarrow \infty} p_1(a, d) = 1, \quad \partial_a r_{a,d}(p_1) < 0, \quad \lim_{a \rightarrow \infty} \partial_a r_{a,d}(p_1) = -\infty. \quad (3.2)$$

Кроме того,

$$\lim_{a \rightarrow a_0} p_1(a, d) = \max(d, 0), \quad \lim_{a \rightarrow a_0} \partial_a r_{a,d}(p_1) = -a_0. \quad (3.3)$$

Функция a_1 . Зафиксируем $d \in (-1/2, 1)$ и определим функцию $a_1: (-1/2, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ следующим образом. Предположим, что

$$\partial_a p_1 > 0, \quad \partial_a (\partial_a r_{a,d}(p_1(a, d))) < 0. \quad (3.4)$$

Тогда из соотношений (3.3) и (3.4) и неравенства $0 \leq a_0 < 1$ вытекает существование единственного значения $a_1 = a_1(d) \in (a_0, \infty)$ такого, что $\partial_a r_{a_1,d}(p_1) = -1$. Функция a_1 описывает бифуркацию удвоения периода. При этом имеем

$$r_{a_1,d}^2(1) \leq 1. \quad (3.5)$$

Действительно, при $|\partial_a r_{a,d}(p_1)| < 1$ критическая точка $x = 1$ должна принадлежать области притяжения точки p_1 (см. [1; с. 1028]), стало быть, $r_{a,d}^2(x) < x$ на интервале $(p_1, 1)$.

Функция a_2 . Определим функции $a_{2i}: (-\infty, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2$. Их графики в плоскости $\{(a, d)\}$ соответствуют ситуации, когда вторая или третья итерация одной из критических точек попадает в отталкивающую неподвижную точку p_1 . По определению для любого $d < 1$ $a_{21} = a_{21}(d)$ ($a_{22} = a_{22}(d)$) представляет собой единственное число из интервала (a_0, ∞) такое, что

$$r_{a,d}^2(1) = \frac{1}{p_1} \quad (3.6)$$

$$\left(r_{a,d}(-1) = \frac{1}{p_1} \right). \quad (3.7)$$

Это определение корректно, так как при изменении a от a_0 до ∞ $r_{a,d}(-1)$ строго возрастает (см. оценку (3.1)) от $\max(d, -d)$ до $+\infty$ и $r_{a,d}^2(1) = r_{a,d}(d)$ (соответственно $1/p_1$) изменяется монотонно от d до $+\infty$ (соответственно от $1/d$ до 1) в случае, когда $0 \leq d < 1$, и от некоторого $r_{a_0,d}(d)$ до $+\infty$ (соответственно от $+\infty$ до 1), если $d < 0$. Из соотношений (3.1), (3.5), (3.6) вытекает, что для любого $d \in (-1/2, 1)$ $a_1(d) < a_{21}(d)$. Так как при $d = -1$ $r_{a,d}^2(1) = r_{a,d}(-1)$, то имеем $a_{21}(-1) = a_{22}(-1)$. Кроме того, можно показать, что

$$\lim_{d \rightarrow 1-0} a_{21}(d) = \lim_{d \rightarrow -\infty} a_{22}(d) = +\infty.$$

Поэтому график функции $a_2: (-\infty, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, определяемой равенством

$$a_2(d) = \begin{cases} a_{21}(d), & d \in (-1, 1), \\ a_{22}(d), & d \leq -1, \end{cases} \quad (3.8)$$

разбивает параметрическую плоскость на две односвязные области.

Функция a_3 . Для любого $d < 1$ из соотношений (3.1) и дифференцируемости $r_{a,d}$ следует наличие единственного числа $a' = a'(d) > a_0$ такого, что график функции $r_{a',d}$ касается диагонали в точке (q, q) , $q = q(d) \in (1, +\infty)$. Это означает, что когда значение параметра a изменяется вблизи a' , возникают две неподвижные точки $p_2 = p_2(a, d)$ и $p_3 = p_3(a, d)$ отображения $r_{a,d}$ такие, что $1 < p_2 < p_3$, причем

$$\partial_a p_2(a, d) < 0, \quad \partial r_{a,d}(p_2) > 1 > \partial r_{a,d}(p_3) > 0. \quad (3.9)$$

График функции a_3 представляет собой множество решений уравнения

$$r_{a,d}^2(1) = p_2(a, d). \quad (3.10)$$

Ясно, что равенство (3.10) влечет условие $d > 0$. Действительно, в противном случае это равенство невозможно, ибо $r_{a,d}^2(1) = r_{a,d}(d) \geq r_{a,d}(0) > r_{a,d}(x)$ для любого $x > 1$. Пусть $d \in (0, 1)$. Возможны два случая: либо

$$r_{a',d}^2(1) \leq q(d), \quad (3.11)$$

либо, напротив, $r_{a',d}^2(1) > q(d)$. Сравнение производных $\partial_a r_{a',d}^2(1)$ и $\partial_a p_2(a, d)$ (см. оценки (3.1) и (3.9)) говорит о том, что неравенство (3.11) эквивалентно существованию решения уравнения (3.10), причем решение единственно. Обозначим его через $a_3 = a_3(d) > 0$.

ЛЕММА 17. *Найдется $d' \in (0, 1)$ такое, что решением неравенства (3.11) служит множество $[d', 1)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что решение уравнения

$$r_{a',d}^2(1) = q(d)$$

на интервале $(0, 1)$ существует, единственно и приближенно равно 0.317183. Это легко установить, решая с помощью соответствующей программы эквивалентную систему соотношений

$$r_{a',d}(d) = q, \quad \partial r_{a',d}(q) = 1, \quad r_{a',d}(q) = q.$$

Обозначим решение через d' . Остается выяснить знак выражения $r_{a',d}^2(1) - q(d)$ на интервале $(d', 1)$. Для этого зафиксируем $a = a'(d')$ и будем менять с единичной скоростью параметр d от d' до 1. При этом очевидно, что для значений d , близких к d' , выполнено $r_{a',d}^2(1) > p_2(a, d)$, так как при рассматриваемой деформации в начальный момент d' точки p_2 и p_3 движутся в разных направлениях с бесконечной скоростью. Заметим, что $\lim_{d \rightarrow 1-0} r_{a',d}^2(1) = 1$ и $p_2(a, d) \geq p_2(a, 1) > 1$ на интервале $(d', 1)$, поэтому соображения непрерывности влекут наличие решения d_0 уравнения (3.10) на интервале $(d', 1)$. Так как d_0 есть решение неравенства (3.11), то лемма доказана.

Таким образом, функция a_3 определена на промежутке $[d', 1)$. Заметим, что для любых $d < 1$ и $a \geq a'(d)$ имеем

$$1/p_1 < p_2 \quad (3.12)$$

в силу возрастания $r_{a,b}$ на промежутке $[1, +\infty)$ и свойства (7) функции $s_{a,b}$. Поэтому для любого $d \in (d', 1)$ выполнено неравенство $a_2(d) < a_3(d)$. Это очевидно, если $a_2 < a'$, и вытекает из неравенства (3.12) и определения функции a_{22} в противном случае.

Проверим неравенства (3.4). Так как $0 < p_1 < 1$ и $p_1 = r_{a,d}(p_1) > r_{a,d}(1) = d$, то имеем

$$\partial_a p_1(a, d) = \frac{1-p}{2a(1-p) + 4p(p-d) + 2(1+p^2)} \Big|_{p=p_1(a,d)} > 0.$$

Обозначив $\varrho(x) = \frac{1}{2} \frac{(1-x)^2}{1+x^2}$, запишем

$$\partial_a (\partial r_{a,d}(p_1(a, d))) = \varrho'(p) + a\varrho''(p) \frac{\varrho(p)}{1-a\varrho'(p)} \Big|_{p=p_1(a,d)}.$$

С учетом последней формулы и того, что $\varrho'(p_1) < 0$, второе из неравенств (3.4) будет вытекать из соотношения $\varrho''\varrho < (\varrho')^2$ на интервале $(0, 1)$, которое проверяется непосредственно.

3.2. Доказательство теоремы 2. Утверждение (iii) теоремы доказано в работе [1].

Утверждение (iv). Для определенности пусть $d < -1$. В этом случае при $a > a_2(d)$ имеем $r_{a,d}(1) < -1$ и $r_{a,d}(-1) > 1/p_1$. Это означает, что на отрезке $J = [p_1, p_1^{-1}]$ функция $r_{a,d}^2$ имеет две точки максимума x_1, x_2 и точку локального минимума $x = 1$, причем $x_1 < 1 < x_2$ и $r_{a,d}^2([p_1, x_1]) = r_{a,d}^2([x_2, p_1^{-1}]) = [p_1, r_{a,d}(-1)] \supset J$. Стало быть, отображение $r_{a,d}^2$ обладает подковой (см. [6]), что и требовалось доказать. Случай $d \in [-1, 1)$ рассматривается аналогично.

Утверждение (v). Зафиксируем $\bar{d} \in (d', 1)$, положим $\bar{a} = a_3(\bar{d})$, введем обозначение $d(a, \bar{d})$ для выражения

$$\bar{d}^{-1} - \frac{a}{2} \frac{(1-\bar{d})^2}{1+\bar{d}^2}$$

и рассмотрим луч $\mathfrak{K}_{\bar{d}} = \{(a, d) \in \mathbb{R} : a \leq \bar{a}, d = d(a, \bar{d})\}$. Для любой пары $(a, d) \in \mathfrak{K}_{\bar{d}}$ отрезок $J_{\bar{d}} = [\bar{d}, \bar{d}^{-1}]$ инвариантен относительно $r_{a,d}$, причем $\bar{d}^{-1}$ — неподвижная точка $r_{a,d}$ (отталкивающая при a , близких к $\bar{a}$), $\bar{d}$ — ее прообраз (все

сказанное вытекает из равенств (1.1), (1.2) и свойства (6) функции $s_{a,b}$. Непосредственно проверяется, что для любого $0 < a \leq \bar{a}$ отображение $r_{a,d(a,\bar{a})}: J_{\bar{a}} \rightarrow J_{\bar{a}}$ аффинно сопряжено с отображением $w_a: [0, \bar{d}^{-1} - \bar{d}] \rightarrow [0, \bar{d}^{-1} - \bar{d}]$, определяемым по формуле

$$w_a(x) = a \left(\frac{1}{2} \frac{(1 - \bar{d})^2}{1 + \bar{d}^2} - \frac{1}{2} \frac{(1 - \bar{d}^{-1} + x)^2}{1 + (\bar{d}^{-1} - x)^2} \right), \quad (3.13)$$

с помощью преобразования $x \mapsto \bar{d}^{-1} - x$, $x \in [0, \bar{d}^{-1} - \bar{d}]$. Так как свойство отрицательности шварциана выживает при аффинной замене переменной, то в данной ситуации применим результат работы [12; теорема 2.2] и существует множество положительной лебеговой меры $\mathfrak{U}_{\bar{a}} \in \mathbb{R}$ такое, что для любого $a \in \mathfrak{U}_{\bar{a}}$ отображение $r_{a,d(a,\bar{a})}$ имеет к.а.н.и. меру, причем число $\bar{a}$ является левосторонней точкой плотности множества $\mathfrak{U}_{\bar{a}}$. Тогда

$$\mathfrak{S}_2 = \bigcup_{\bar{d} \in (d', 1)} \{(a, d) \in \mathbb{R}^2 : a \in \mathfrak{U}_{\bar{d}}, d = d(a, \bar{d})\}$$

(ср. с соответствующим местом в доказательстве теоремы 1).

3.3. Выражения для функций a_i . В заключительной части статьи будут проделаны некоторые полезные вычисления.

Функция a_1 . Воспроизведем соответствующие формулы из [1]. Из определения a_1 вытекает, что равенство $a = a_1(d)$ эквивалентно системе соотношений

$$r_{a,d}(p) = p, \quad \partial r_{a,d}(p) = -1, \quad p > 0.$$

Исключая p , находим

$$d = p - a \varrho(p), \quad a > 1, \quad (3.14)$$

где

$$p = \left(\frac{-a - 2 + \sqrt{a(8+a)}}{2} \right)^{1/2}.$$

Функция a_2 . Нетрудно установить путем нескольких преобразований, что условие $a = a_{22}(d)$ эквивалентно системе соотношений

$$a = \frac{2}{p} \frac{1-p}{1+p} (1+p^2), \quad d = \frac{1}{p} - \frac{2}{p} \frac{1-p}{1+p} (1+p^2), \quad 0 < p < 1, \quad (3.15)$$

причем $p = p_1(a, d)$. В соответствии с равенством (3.8) остается выяснить, при каких p $d(p) \leq -1$.

ЛЕММА 18. *Функция $p_1(d) = p_1(a_{22}(d), d)$ строго возрастает от 0 до 1 на интервале $(-\infty, 1)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, тогда либо $p_1(d)$ убывает, либо существуют d_1 и d_2 , $d_1 < d_2$, такие, что $p_1(d_1) = p_1(d_2) = p$. Первое невозможно, ибо $p_1(1 - 0) = 1$. Второе ведет к противоречию. Пусть $r_i = r_{a_{22}(d_i), d_i}|_{[-1, 1]}$, $i = 1, 2$. Тогда функции r_i удовлетворяют условиям

$$r_1(1) < r_2(1), \quad r_1(-1) = r_2(-1) = p^{-1}, \quad r_1(p) = r_2(p) = p, \quad r'_1 = Cr'_2, \quad C > 0,$$

которые несовместимы.

Решая уравнение $d(p) = -1$, находим единственное $p' \approx 0.258056$ такое, что формулы (3.15) при $0 < p \leq p'$ представляют собой параметрическое представление сужения $a_2|_{(-\infty, -1]}$.

Функция a_3 . Заметим, что равенство $a = a_3(d)$ эквивалентно тому, что $r_{a, d}(d) = d^{-1}$, $d \in (d', 1)$ (см. свойство (7) функции $s_{a, b}$). Решая это уравнение, находим

$$a_3(d) = \frac{2}{d} \frac{1+d}{1-d} (1+d^2), \quad d \in (d', 1). \quad (3.16)$$

Список литературы

1. O'Cairbre F., O'Farrell A. G., O'Reilly A. Bistability, bifurcation and chaos in a laser system // Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. 1995. V. 5. №4. P. 1021–1031.
2. Jakobson M. Absolutely continuous invariant measures for one-parameter families of one-dimensional maps // Comm. Math. Phys. 1981. V. 81. P. 39–88.
3. Costa M. J. Chaotic behaviour of one-dimensional saddle-node horseshoes // Preprint CMA, 2001.
4. Homburg A. J., Young T. Jakobson's theorem near saddle-node bifurcations // Preprint, 2001.
5. Aaronson J. An introduction to infinite ergodic theory. Providence: Amer. Math. Soc., 1997. (Math. Surveys Monogr. V. 50.)
6. Katok A., Hasselblatt B. Introduction to the modern theory of dynamical systems. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995.
7. Benedicks M., Carleson L. The dynamics of the Hénon map // Ann. of Math. (2). 1991. V. 133. №1. P. 73–169.
8. Jakobson M., Świątek G. Metric properties of non-renormalizable S -unimodal maps. I. Induced expansion and invariant measures // Ergodic Theory Dynam. Systems. 1994. V. 14. №4. P. 721–755.
9. Jakobson M. Uniformly scaled Markov partitions for unimodal maps // J. Math. Sci. (New York). 1999. V. 95. №5. P. 2583–2608.
10. Ахалая Ш. И., Степин А. М. Об инвариантных мерах несжимающих отображений // Сообщения АН Грузии. 1980. Т. 100. №3. С. 549–552.
11. Young L.-S. Recurrence times and rates of mixing // Preprint, 1997.
12. Якобсон М. В. Эргодическая теория одномерных отображений // Итоги науки и техники. Соврем. пробл. матем. Фундам. напр. Т. 2. М.: ВИНТИ, 1985. С. 204–226.

Московский государственный
авиационный институт
E-mail: chakvetadze@mtu-net.ru

Поступила в редакцию
01.11.2001