Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. А. Алхутов, L_p -разрешимость задачи Дирихле для уравнения теплопроводности в нецилиндрических областях, *Матем. сб.*, 2002, том 193, номер 9, 3–40

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm677>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 12:47:12

УДК 517.946

Ю. А. Алхутов

 L_p -разрешимость задачи Дирихле для уравнения теплопроводности в нецилиндрических областях

Рассматривается задача Дирихле для уравнения теплопроводности в ограниченных и неограниченных областях типа параболоида с изолированными характеристическими точками на границе. Найдены необходимые и достаточные условия на вес, обеспечивающие однозначную разрешимость задачи в весовых L_p -пространствах Соболева. В частности, установлен критерий разрешимости задачи в классическом соболевском пространстве $W_{p,0}^{2,1}$ для случая, когда область является шаром.

Библиография: 13 названий.

§ 1. Введение

Настоящая работа посвящена L_p -разрешимости задачи Дирихле для уравнения теплопроводности в нецилиндрических областях с характеристическими точками на границе. Начало изучению параболических уравнений в таких областях положено И. Г. Петровским. Им найдены необходимые и достаточные условия на порядок касания граничной поверхности гиперплоскостью $t = \text{const}$ для разрешимости по Перрону задачи Дирихле для уравнения теплопроводности [1]. Позже эти результаты были обобщены Е. М. Ландисом [2] и L. C. Evans и R. F. Gariepy [3] на области произвольной структуры. Разрешимость первой краевой задачи для параболических уравнений высокого порядка в соболевских пространствах исследована В. П. Михайловым [4].

Случай общих краевых задач в нецилиндрических областях специального вида рассмотрен В. А. Кондратьевым [5]. Им изучены асимптотика и разрешимость в L_2 -пространствах со степенным весом.

В данной работе первая краевая задача исследуется в весовых L_p -пространствах с весами более общего вида, чем в [5]. Предлагаемый подход достаточно прозрачен и позволяет найти необходимое и достаточное условие однозначной L_p -разрешимости краевой задачи для определенного класса нецилиндрических областей, в число которых входит и шар. Отметим, что близкий по формулировке результат о классической разрешимости первой краевой задачи для оператора теплопроводности в шаре в пространстве функций, имеющих вторые непрерывные производные по t и x вплоть до границы, ранее получен Н. В. Крыловым в [6].

Прежде чем переходить к более детальному изложению, приведем используемые определения и обозначения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00114) и Минобразования РФ (грант № E00-1.0-129).

Всюду далее E_{n+1} и E_n означают евклидовы пространства точек $(t, x) = (t, x_1, \dots, x_n)$ и $x = (x_1, \dots, x_n)$ соответственно, $\Gamma(\Omega)$ – параболическую границу области $\Omega \subset E_{n+1}$, а $L = \Delta - \partial/\partial t$ – оператор теплопроводности.

Будем рассматривать области типа параболоида

$$\Omega = \left\{ (t, x) : \frac{x}{\sqrt{t}} \in D, t > 0 \right\},$$

где D – ограниченная область в E_n класса C^2 . Область Ω называем P^+ -областью с основанием D . Аналогично определяется P^- -область

$$\Omega = \left\{ (t, x) : \frac{x}{\sqrt{-t}} \in D, t < 0 \right\},$$

получающаяся из P^+ -области зеркальным отражением относительно гиперплоскости $t = 0$. Таким образом, P^+ -, P^- -области имеют изолированную характеристическую точку, совпадающую с началом координат.

Разрешимость задачи Дирихле для оператора теплопроводности изучается в описанных выше областях Ω и областях $\Omega_T = \{(t, x) : (t, x) \in \Omega, |t| < T\}$, $T > 0$, в весовых соболевских пространствах, которые мы сейчас введем.

Рассмотрим соболевские пространства $W_1(\Omega_T)$ и $W_2(\Omega_T)$, состоящие из функций, которые для любого $\delta \in (0, T)$ суммируемы в усеченных областях $\Omega_T^\delta = \Omega_T \setminus \overline{\Omega}_\delta$ вместе с обобщенными производными вплоть до второго порядка по x , первой производной по t и имеют нулевой след на $\Gamma(\Omega_T) \setminus \overline{\Omega}_\delta$ и $(\partial\Omega \setminus \overline{\Omega}_\delta) \cap \overline{\Omega}_T$ соответственно.

Пусть четный и положительный почти всюду на $(-\infty, \infty)$ вес $\omega(t)$ локально суммируем на $(0, \infty)$. Для $p > 1$ определим весовое пространство

$$H_\omega^{2,p}(\Omega_T) = \left\{ u : u \in W_1(\Omega_T), \sum_{|m|+2m_0=2} |D_x^m D_t^{m_0} u|^p \omega(t) \in L_1(\Omega_T) \right\}$$

с нормой

$$\|u\|_{H_\omega^{2,p}(\Omega_T)} = \left(\int_{\Omega_T} \sum_{|m|+2m_0=2} |D_x^m D_t^{m_0} u|^p \omega(t) dx dt \right)^{1/p} \quad (1.1)$$

и пространство $H_\omega^{0,p}(\Omega_T)$ измеримых в Ω_T функций с нормой

$$\|u\|_{H_\omega^{0,p}(\Omega_T)} = \left(\int_{\Omega_T} |u|^p \omega(t) dx dt \right)^{1/p}.$$

Пространства $H_\omega^{2,p}(\Omega)$ и $H_\omega^{0,p}(\Omega)$ определяются аналогично. Например, $u \in H_\omega^{2,p}(\Omega)$, если $u \in W_2(\Omega_T)$ для любого $T > 0$ и функция $u(t, x)$ имеет конечную норму $\|u\|_{H_\omega^{2,p}(\Omega)}$.

В настоящей работе важную роль играют веса, удовлетворяющие условию

$$\sup_{0 < r < T} \sup_{I \subset (r/2, r)} \left(\frac{1}{|I|} \int_I \omega(\tau) d\tau \right) \left(\frac{1}{|I|} \int_I (\omega(\tau))^{-1/(p-1)} d\tau \right)^{p-1} < \infty, \quad (1.2)$$

где I – интервал длины $|I|$. В частности, это условие выполнено для степенного веса $\omega(t) = |t|^\alpha$ с любым показателем степени $\alpha \in (-\infty, \infty)$. Нетрудно показать, что из (1.2) вытекает полнота пространства $H_{\omega}^{2,p}(\Omega_T)$. Одним из следствий (1.2) являются неравенства

$$\int_I \omega(t) dt \leq C \int_{I^*} \omega(t) dt, \quad (1.3)$$

$$\int_I (\omega(t))^{-1/(p-1)} dt \leq C \int_{I^*} (\omega(t))^{-1/(p-1)} dt, \quad (1.4)$$

в которых I^* – концентрический к $I \subset (r/2, r) \subset (0, T)$ интервал вдвое меньшей длины, а постоянная C не зависит от I и r . Данные соотношения принято называть *условиями удвоения* (см. п. 1.2).

Ограничение (1.2) является аналогом A_p -условия Макенхаупта, которое для веса $\omega(t)$, определенного на всей числовой прямой $\mathbb{R}^1$, записывается в виде

$$\sup_{I \subset \mathbb{R}^1} \left(\frac{1}{|I|} \int_I \omega(\tau) d\tau \right) \left(\frac{1}{|I|} \int_I (\omega(\tau))^{-1/(p-1)} d\tau \right)^{p-1} < \infty. \quad (1.5)$$

Такие веса изучены в работах [7], [8]. В частности, условие (1.5) необходимо и достаточно для ограниченности максимального оператора Харди в пространстве $L_p(E_{n+1})$ с весом $\omega(t)$.

В формулировке результатов участвуют собственные числа ν и μ следующих задач:

$$\sum_{i=1}^n \left(\exp\left(\frac{|\xi|^2}{4}\right) v_{\xi_i} \right)_{\xi_i} + \nu \exp\left(\frac{|\xi|^2}{4}\right) v = 0 \text{ в } D, \quad v|_{\partial D} = 0, \quad (1.6)$$

$$\sum_{i=1}^n \left(\exp\left(-\frac{|\xi|^2}{4}\right) \tilde{v}_{\xi_i} \right)_{\xi_i} + \mu \exp\left(-\frac{|\xi|^2}{4}\right) \tilde{v} = 0 \text{ в } D, \quad \tilde{v}|_{\partial D} = 0, \quad (1.7)$$

где D – основание области Ω . Задачи (1.6) и (1.7) появляются при использовании метода Фурье. Например, в P^+ -области автомодельная замена переменных $\xi_i = x_i/\sqrt{t}$, $i = 1, \dots, n$, $\eta = \ln t$ отображает Ω в цилиндр $(-\infty, \infty) \times D$, и при разделении переменных ξ и η возникает задача (1.6). В дальнейшем полагаем

$$b_k = \frac{n}{2} - p\nu_k, \quad a_k = \frac{n}{2} + p\mu_k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1.8)$$

где μ_k и ν_k – собственные числа упомянутых выше задач, занумерованные без учета их кратности. Отметим соотношение

$$\frac{n}{2} + \mu_k = \nu_k, \quad (1.9)$$

вытекающее из того, что соответствующие собственные функции связаны очевидным равенством $\tilde{v}(\xi) = v(\xi) \exp(|\xi|^2/4)$.

В случае конечной области на разрешимость задачи

$$Lu = f \text{ в } \Omega_T, \quad f \in H_{\omega}^{0,p}(\Omega_T), \quad u \in H_{\omega}^{2,p}(\Omega_T), \quad 0 < T < \infty, \quad (1.10)$$

в которой уравнение для оператора теплопроводности L понимается почти всюду относительно лебеговой меры в E_{n+1} , оказывают влияние первые собственные числа задач (1.6), (1.7) и кроме (1.2) нужно еще выполнение условий

$$\sup_{t \in (0, T)} \left(\int_t^T \omega(\tau) \tau^{b_1 - p} d\tau \right) \left(\int_0^t (\omega(\tau) \tau^{b_1})^{-1/(p-1)} d\tau \right)^{p-1} < \infty, \quad (1.11)$$

$$\sup_{t \in (0, T)} \left(\int_0^t \omega(\tau) \tau^{a_1 - p} d\tau \right) \left(\int_t^T (\omega(\tau) \tau^{a_1})^{-1/(p-1)} d\tau \right)^{p-1} < \infty. \quad (1.12)$$

Соотношения такого вида появились в работе [9] при обобщении неравенств Харди для функций одной переменной (см. теорему 3.1).

ТЕОРЕМА 1. *Если в P^+ -области относительно весовой функции $\omega(t)$ выполнены условия (1.2) и (1.11), а в P^- -области – условия (1.2) и (1.12), то задача (1.10) однозначно разрешима в соответствующей области и для ее решения справедлива оценка*

$$\|u\|_{H_{\omega}^{2,p}(\Omega_T)} \leq C \|f\|_{H_{\omega}^{0,p}(\Omega_T)}, \quad (1.13)$$

в которой постоянная C не зависит от u и f .

В следующих двух теоремах решается вопрос о необходимости условий (1.11), (1.12) и (1.2) для однозначной разрешимости задачи (1.10). Основную роль в доказательстве играет коэрцитивная оценка (1.13), которая предполагается выполненной с постоянной C , не зависящей от u и f .

ТЕОРЕМА 2. *Если задача (1.10) однозначно разрешима для любой функции $f \in H_{\omega}^{0,p}(\Omega_T)$ вместе с соответствующей коэрцитивной оценкой (1.13), то в P^+ -области вес $\omega(t)$ удовлетворяет условию (1.11), а в P^- -области – условию (1.12).*

Для степенного веса $\omega(t) = |t|^\alpha$ необходимое и достаточное условие однозначной разрешимости задачи (1.10) вместе с оценкой (1.13) имеет вид

$$\begin{aligned} \alpha &\in (-\infty, p - b_1 - 1) \text{ в } P^+\text{-области,} \\ \alpha &\in (p - a_1 - 1, \infty) \text{ в } P^-\text{-области.} \end{aligned}$$

В доказательстве необходимости условия (1.2) используются ограничения (1.3) и (1.4).

ТЕОРЕМА 3. Если задача (1.10) однозначно разрешима в P^+ -области (соответственно в P^- -области) для любой функции $f \in H_{\omega}^{0,p}(\Omega_T)$ вместе с коэрцитивной оценкой (1.13) и для веса выполнено неравенство (1.4) (соответственно (1.3)), то $\omega(t)$ удовлетворяет условию (1.2).

Ограничения (1.3) и (1.4) излишни, если существуют P^+ -область $\Omega^{(1)}$ и P^- -область $\Omega^{(2)}$ такие, что требуемая в теореме 3 разрешимость задачи (1.10) имеет место одновременно в областях $\Omega_T^{(1)}$ и $\Omega_T^{(2)}$.

Перейдем к задаче в неограниченной области

$$Lu = f \text{ в } \Omega, \quad f \in H_{\omega}^{0,p}(\Omega), \quad u \in H_{\omega}^{2,p}(\Omega). \quad (1.14)$$

Уравнение в (1.14), как и ранее, понимается почти всюду относительно лебеговой меры в E_{n+1} . Условие (1.2) преобразуется в соотношение

$$\sup_{0 < r < \infty} \sup_{I \subset (r/2, r)} \left(\frac{1}{|I|} \int_I \omega(\tau) d\tau \right) \left(\frac{1}{|I|} \int_I (\omega(\tau))^{-1/(p-1)} d\tau \right)^{p-1} < \infty. \quad (1.15)$$

В отличие от случая конечной области здесь в формулировке результатов участвуют уже все собственные числа задач (1.6), (1.7) и соответствующие условия имеют вид

$$\sup_{t \in (0, \infty)} \left(\int_t^\infty \omega(\tau) \tau^{b_{k+1}-p} d\tau \right) \left(\int_0^t (\omega(\tau) \tau^{b_{k+1}})^{-1/(p-1)} d\tau \right)^{p-1} < \infty, \quad (1.16)$$

$$\sup_{t \in (0, \infty)} \left(\int_0^t \omega(\tau) \tau^{b_k-p} d\tau \right) \left(\int_t^\infty (\omega(\tau) \tau^{b_k})^{-1/(p-1)} d\tau \right)^{p-1} < \infty, \quad (1.17)$$

$$\sup_{t \in (0, \infty)} \left(\int_0^t \omega(\tau) \tau^{a_{k+1}-p} d\tau \right) \left(\int_t^\infty (\omega(\tau) \tau^{a_{k+1}})^{-1/(p-1)} d\tau \right)^{p-1} < \infty, \quad (1.18)$$

$$\sup_{t \in (0, \infty)} \left(\int_t^\infty \omega(\tau) \tau^{a_k-p} d\tau \right) \left(\int_0^t (\omega(\tau) \tau^{a_k})^{-1/(p-1)} d\tau \right)^{p-1} < \infty. \quad (1.19)$$

В следующей теореме дополнительно предполагается, что вес $\omega(t)$ удовлетворяет соотношению (1.15).

ТЕОРЕМА 4. Если выполнено условие (1.16) при $k = 0$ или одновременно оба условия (1.16), (1.17) для некоторого натурального k , то задача (1.14) однозначно разрешима в P^+ -области и для ее решения справедлива оценка

$$\|u\|_{H_{\omega}^{2,p}(\Omega)} \leq C(n, p, D, \omega) \|f\|_{H_{\omega}^{0,p}(\Omega)}. \quad (1.20)$$

Аналогично, если выполнено условие (1.18) при $k = 0$ или одновременно оба условия (1.18), (1.19) для некоторого натурального k , то задача (1.14) однозначно разрешима в P^- -области вместе с соответствующей оценкой (1.20).

В доказательстве необходимости условий (1.16)–(1.19) нам не удалось обойтись без следующего дополнительного ограничения: существуют положительные постоянные C_1, C_2 и γ такие, что

$$C_1 t^\gamma \leq \int_t^{2t} \omega(\tau) d\tau \leq C_2 t^{-\gamma} \quad \text{при } t \in (0, 1]. \quad (1.21)$$

Данные неравенства являются следствием условия удвоения (1.3), которое заведомо выполнено для веса из (1.15) на интервалах $I \subset (r/2, r) \subset (0, \infty)$.

В следующей теореме предполагается, что в (1.21) для P^- -области имеет место оценка сверху, а для P^+ -области – оценка снизу.

ТЕОРЕМА 5. Пусть задача (1.14) однозначно разрешима для любой функции $f \in H_{\omega}^{0,p}(\Omega)$ вместе с соответствующей коэрцитивной оценкой (1.20) и для $\omega(t)$ выполнены неравенства (1.21). Тогда в P^+ -области вес $\omega(t)$ удовлетворяет либо условию (1.16) при $k = 0$, либо одновременно обоим условиям (1.16), (1.17) для некоторого $k = 1, 2, \dots$, а в P^- -области – либо условию (1.18) при $k = 0$, либо одновременно обоим условиям (1.18), (1.19) для некоторого $k = 1, 2, \dots$.

Из теорем 4 и 5 следует, что в случае степенного веса $\omega(t) = |t|^\alpha$ для разрешимости задачи (1.14) вместе с оценкой (1.20) необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{aligned} \alpha &\neq p - b_k - 1, \quad k = 1, 2, \dots, \quad \text{в } P^+\text{-области,} \\ \alpha &\neq p - a_k - 1, \quad k = 1, 2, \dots, \quad \text{в } P^-\text{-области.} \end{aligned}$$

Для $p = 2$ эти условия на показатель α ранее получены в [5].

В отличие от задачи для конечной области доказательство необходимости (1.15) использует только условие (1.3).

ТЕОРЕМА 6. Если задача (1.14) однозначно разрешима в P^+ -области или P^- -области для любой функции $f \in H_{\omega}^{0,p}(\Omega)$ вместе с соответствующей коэрцитивной оценкой (1.20) и относительно веса выполнено неравенство (1.3) для интервалов $I \subset (r/2, r) \subset (0, \infty)$, то $\omega(t)$ удовлетворяет условию (1.15).

Основу доказательства сформулированных теорем составляют точные оценки функции Грина задачи Дирихле в P^+ -, P^- -областях вблизи характеристической точки и на бесконечности.

Рассмотрим задачу Дирихле в открытом шаре $B_R \subset E_{n+1}$ радиуса R

$$Lu = f \quad \text{в } B_R, \quad f \in L_p(B_R), \quad u \in W_{p,0}^{2,1}(B_R), \quad (1.22)$$

где под $W_{p,0}^{2,1}(B_R)$, $p > 1$, как обычно, понимается пополнение по норме

$$\|u\|_{W_{p,0}^{2,1}(B_R)} = \left(\int_{B_R} \sum_{2m_0 + |m|=2} |D_x^m D_t^{m_0} u|^p dx dt \right)^{1/p}$$

множества гладких в замыкании B_R функций, равных нулю на ∂B_R .

Через $\mu(R)$ обозначим первое собственное число задачи (1.7) для случая, когда область D совпадает с n -мерным шаром $Q_{2R} \subset E_n$ радиуса $2R$ с центром в начале координат, и положим $d = (p - n/2 - 1)/p$.

ТЕОРЕМА 7. *Решение задачи (1.22) единственно и для разрешимости вместе с коэрцитивной оценкой*

$$\|u\|_{W_{p,0}^{2,1}(B_R)} \leq C(n, p, R) \|f\|_{L_p(B_R)} \quad (1.23)$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $\mu(R) > d$.

Из этой теоремы следует, что при $p \in (1, (n+2)/2]$ задача (1.22) однозначно разрешима в шаре любого радиуса.

Доказательство этой теоремы основано на применении предыдущих результатов, поскольку в окрестности своих характеристических точек шар устроен как P^- - или P^+ -область.

Отметим, что критерии разрешимости задачи (1.22) для разных параболических операторов L с постоянными коэффициентами не совпадают. В частности, для оператора вида $L = \Delta - \alpha \cdot \partial/\partial t$, $\alpha > 0$, необходимое и достаточное условие разрешимости задачи (1.22) состоит в выполнении условия $\mu(\alpha R) > d$. Подобное свойство параболических уравнений в нецилиндрических областях впервые было отмечено И. Г. Петровским.

Автор выражает благодарность А. К. Гушину и В. В. Жикову за обсуждение результатов и ценные замечания.

§ 2. Вспомогательные оценки в усеченных областях

2.1. Некоторые следствия условий (1.2) и (1.15). Сначала рассмотрим вес $\omega(t)$, для которого A_p -условие Макенхаупта

$$\sup_{I \subset J} \left(\frac{1}{|I|} \int_I \omega(\tau) d\tau \right) \left(\frac{1}{|I|} \int_I (\omega(\tau))^{-1/(p-1)} d\tau \right)^{p-1} = M < \infty \quad (2.1)$$

выполнено на интервале J . Хорошо известно [8], что в этом случае функции $\omega(t)$ и $(\omega(t))^{-1/(p-1)}$ удовлетворяют свойству удвоения: для произвольного интервала $I \subset J$ и концентрического ему интервала I^* , вдвое меньшей длины, имеют место неравенства (1.3) и (1.4) с постоянной C , зависящей только от точной верхней грани M в (2.1).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Если выполнено условие (1.15), то справедливо неравенство*

$$\begin{aligned} & \sup_{0 < r < \infty} \sup_{I \subset (r/3, r)} \left(\frac{1}{|I|} \int_I \omega(\tau) d\tau \right) \left(\frac{1}{|I|} \int_I (\omega(\tau))^{-1/(p-1)} d\tau \right)^{p-1} \\ & \leq C \sup_{0 < r < \infty} \sup_{I \subset (r/2, r)} \left(\frac{1}{|I|} \int_I \omega(\tau) d\tau \right) \left(\frac{1}{|I|} \int_I (\omega(\tau))^{-1/(p-1)} d\tau \right)^{p-1}, \quad (2.2) \end{aligned}$$

в котором постоянная C зависит только от точной верхней грани в (1.15).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каков бы ни был интервал $I \subset (r/3, r)$ длины $|I| \leq r/3$ найдется ρ , для которого $I \subset (\rho/2, \rho) \subset (r/3, r)$. В качестве ρ можно выбрать $2r/3 + 2a$ с соответствующим значением $a \in [0, r/6]$. Следовательно, для таких интервалов точная верхняя грань в левой части (2.2) не превосходит точной верхней грани в правой части, и неравенство (2.2) остается проверить на интервалах $I \subset (r/3, r)$ длины $|I| > r/3$. Поэтому достаточно показать, что

$$\int_{r/3}^r \omega(\tau) d\tau \leq C \int_{r/2}^r \omega(\tau) d\tau, \quad \int_{r/3}^r (\omega(\tau))^{-1/(p-1)} d\tau \leq C \int_{r/2}^r (\omega(\tau))^{-1/(p-1)} d\tau.$$

Данные неравенства легко вытекают из условий удвоения (1.3), (1.4). Предложение доказано.

Аналогичные рассуждения применимы и к оценке снизу для выражения в левой части неравенства (2.2). Поэтому можно утверждать, что для любого $0 < \alpha \leq 1/2$

$$\begin{aligned} & \sup_{0 < r < \infty} \sup_{I \subset (\alpha r, r)} \left(\frac{1}{|I|} \int_I \omega(\tau) d\tau \right) \left(\frac{1}{|I|} \int_I (\omega(\tau))^{-1/(p-1)} d\tau \right)^{p-1} \\ & \leq C \sup_{0 < r < \infty} \sup_{I \subset (r/2, r)} \left(\frac{1}{|I|} \int_I \omega(\tau) d\tau \right) \left(\frac{1}{|I|} \int_I (\omega(\tau))^{-1/(p-1)} d\tau \right)^{p-1} \end{aligned} \quad (2.3)$$

с постоянной C , зависящей только от α и точной верхней грани в условии (1.15). В частности, отсюда следует, что

$$\sup_{I \subset (\delta, T)} \left(\frac{1}{|I|} \int_I \omega(\tau) d\tau \right) \left(\frac{1}{|I|} \int_I (\omega(\tau))^{-1/(p-1)} d\tau \right)^{p-1} < \infty \quad (2.4)$$

для любых $0 < \delta < T < \infty$. Если выполнено условие (1.2), то, как и выше, можно показать, что (2.4) имеет место для любого $\delta \in (0, T)$.

В дальнейшем используется обозначение $\Omega_T^\delta = \Omega_T \setminus \overline{\Omega}_\delta$ из §1. Для четного на $(-T, T)$ веса $\omega(t)$, суммируемого вне окрестности начала координат, нам потребуется аналог пространства $H_\omega^{2,p}(\Omega_T)$ в усеченной области Ω_T^δ . Прежде чем его ввести, обозначим через $W_{1,0}^{2,1}(\Omega_T^\delta)$ соболевское пространство, состоящее из функций, которые суммируемы в Ω_T^δ вместе с обобщенными производными вплоть до второго порядка по x , первой производной по t и имеют нулевой след на $\Gamma(\Omega_T^\delta)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Пространство $H_\omega^{2,p}(\Omega_T^\delta)$ означает множество функций $u \in W_{1,0}^{2,1}(\Omega_T^\delta)$, имеющих конечную норму (1.1).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Если вес $\omega(t)$ удовлетворяет условию (1.2), то гладкие в замыкании Ω_T^δ функции плотны в $H_\omega^{2,p}(\Omega_T^\delta)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Продолжим $\omega(t)$ четным образом с интервала (δ, T) на интервал $(\delta, 2T - \delta)$, а затем по периодичности на всю числовую прямую. Из (2.4)

следует, что продолженная функция $\omega(t)$ удовлетворяет A_p -условию Макенхаупта (1.5). Через $\mathcal{B}$ обозначим цилиндры, образованные прямым произведением интервалов оси t длины r^2 , $0 < r < \infty$, на n -мерные шары из E_n радиуса r . Из (1.5) следует, что

$$\sup_{\mathcal{B}} \left(\frac{1}{|\mathcal{B}|} \int_{\mathcal{B}} \omega(t) dx dt \right) \left(\frac{1}{|\mathcal{B}|} \int_{\mathcal{B}} (\omega(t))^{-1/(p-1)} dx dt \right)^{p-1} < \infty, \quad (2.5)$$

где $|\mathcal{B}|$ — лебегова мера $\mathcal{B}$. Для локально суммируемой в E_{n+1} функции $f(t, x)$ определим максимальную функцию вида

$$M(f)(t, x) = \sup_{\mathcal{B} \ni (t, x)} \frac{1}{|\mathcal{B}|} \int_{\mathcal{B}} |f(\tau, y)| dy d\tau.$$

Известно [10], что из (2.5) следует неравенство

$$\int_{E_{n+1}} (M(f)(t, x))^p \omega(t) dx dt \leq C \int_{E_{n+1}} |f(t, x)|^p \omega(t) dx dt \quad (2.6)$$

с постоянной C , не зависящей от f . Схема доказательства плотности гладких в замыкании области функций в соболевских пространствах (см., например, [11; теорема 1.1.6/2]), основанная на разбиении единицы, позволяет ограничиться рассмотрением случая, когда $u \in H_{\omega}^{2,p}(\Omega_T^{\delta})$ имеет компактный носитель в Ω_T^{δ} . Для такой функции, продолженной нулем вне Ω_T^{δ} , определим усреднение

$$u_{\varepsilon}(t, x) = \varepsilon^{-n-2} \int_{E_{n+1}} \varphi\left(\frac{t-\tau}{\varepsilon^2}, \frac{x-y}{\varepsilon}\right) u(\tau, y) dy d\tau,$$

где $\varphi(t, x) \in C_0^{\infty}(B_1)$ — неотрицательная, радиально-симметричная функция с носителем в шаре единичного радиуса с центром в начале координат, интеграл от которой по B_1 равен единице. Для локально суммируемой в E_{n+1} функции $f(t, x)$ выполнено неравенство $f_{\varepsilon}(t, x) \leq \text{const } M(f)(t, x)$, из которого вытекает

$$\sum_{|m|+2m_0=2} |D_x^m D_t^{m_0} u_{\varepsilon}(t, x)|^p \leq \text{const} \sum_{|m|+2m_0=2} (M(D_x^m D_t^{m_0} u)(t, x))^p.$$

Поскольку $f_{\varepsilon}(t, x) \rightarrow f(t, x)$ почти всюду при $\varepsilon \rightarrow 0$, то из (2.6) и теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла следует, что $u_{\varepsilon} \rightarrow u$ в $H_{\omega}^{2,p}(\Omega_T^{\delta})$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Предложение доказано.

Сформулируем теперь результат о весовой L_p -разрешимости задачи Дирихле для равномерно параболического в цилиндре $\Pi = G \times (a, b)$ оператора

$$\mathcal{L}u = \sum_{i,k=1}^n a_{ik}(t, x) u_{x_i x_k} + \sum_{i=1}^n a_i(t, x) u_{x_i} - u_t \quad (2.7)$$

с непрерывными в $\bar{\Pi}$ коэффициентами, предполагая, что основание цилиндра G является ограниченной областью с границей класса C^2 . Ниже пространство $H_{\omega}^{2,p}(\Pi)$ понимается так же, как и для усеченной области Ω_T^{δ} (см. определение 2.1).

ТЕОРЕМА 2.1. Если вес $\omega(t)$ удовлетворяет условию (2.1) на интервале $J = (a, b)$, то задача

$$\mathcal{L}u = f \text{ в } \Pi, \quad f \in H_{\omega}^{0,p}(\Pi), \quad u \in H_{\omega}^{2,p}(\Pi),$$

однозначно разрешима и для ее решения выполнена оценка

$$\|u\|_{H_{\omega}^{2,p}(\Pi)} \leq C(\mathcal{L}, G, M, n, p) \|f\|_{H_{\omega}^{0,p}(\Pi)}. \quad (2.8)$$

Данное утверждение является следствием результата о весовой L_p -ограниченности параболического сингулярного интеграла в слое $\{(t, x) : a < t < b\}$, вытекающего из работы [8] и известного метода замораживания коэффициентов [12].

2.2. Весовые оценки в усеченных P^- - и P^+ -областях Ω . Рассмотрим задачу Дирихле

$$\mathcal{L}u = f \text{ в } \Omega_T^{\delta}, \quad f \in H_{\omega}^{0,p}(\Omega_T^{\delta}), \quad u \in H_{\omega}^{2,p}(\Omega_T^{\delta}), \quad (2.9)$$

для равномерно параболического оператора (2.7) с непрерывными в $\bar{\Omega}_T$ коэффициентами в случаях P^+ - или P^- -области Ω .

ЛЕММА 2.1. Если вес $\omega(t)$ удовлетворяет условию (1.2), то задача (2.9) однозначно разрешима и для ее решения выполнена оценка

$$\|u\|_{H_{\omega}^{2,p}(\Omega_T^{\delta})} \leq C(\|f\|_{H_{\omega}^{0,p}(\Omega_T^{\delta})} + \|u\|_{H_{\omega_p}^{0,p}(\Omega_T^{\delta})}), \quad (2.10)$$

в которой $\omega_p(t) = \omega(t)|t|^{-p}$, а постоянная C не зависит от u и δ . Если $\mathcal{L}$ совпадает с оператором теплопроводности L , а вес удовлетворяет условию (1.15), то постоянная C не зависит еще и от T .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала отметим, что если вес удовлетворяет условию (1.2), то его можно доопределить на $(0, \infty)$ так, чтобы было выполнено соотношение (1.15). Для этого достаточно четно продолжить $\omega(t)$ с интервала $(T/2, T)$ на интервал $(T, 3T/2)$, а затем с $(T/2, 3T/2)$ на полупрямую $(3T/2, \infty)$ по периодичности. Поэтому, не ограничивая в общности, будем считать, что $\omega(t)$ удовлетворяет условию (1.15). Пусть Ω является P^- -областью. Сделаем замену переменных

$$\xi_i = \frac{x_i}{\sqrt{-t}}, \quad i = 1, \dots, n, \quad \eta = -\ln(-t), \quad (2.11)$$

после которой Ω_T^{δ} преобразуется в цилиндр $\Pi_T^{\delta} = D \times (\ln T^{-1}, \ln \delta^{-1})$, а $\mathcal{L}$ перейдет в равномерно параболический оператор

$$\tilde{\mathcal{L}}\tilde{u} = \exp(\eta) \left(\sum_{i,j=1}^n \tilde{a}_{ij}(\xi, \eta) \tilde{u}_{\xi_i \xi_j} + \sum_{i=1}^n \left(\tilde{a}_i(\xi, \eta) - \frac{\xi_i}{2} \right) \tilde{u}_{\xi_i} - \tilde{u}_{\eta} \right)$$

с непрерывными в замыкании Π_T^{δ} коэффициентами

$$\tilde{a}_{ij}(\xi, \eta) = a_{ij}(\xi e^{-\eta/2}, e^{-\eta}), \quad \tilde{a}_i(\xi, \eta) = a_i(\xi e^{-\eta/2}, e^{-\eta}) e^{-\eta/2}. \quad (2.12)$$

Преобразованной задаче

$$\mathcal{L}\tilde{u} = \tilde{f} \text{ в } \Pi_T^\delta, \quad \tilde{f} \in H_{\tilde{\omega}}^{0,p}(\Pi_T^\delta), \quad \tilde{u} \in H_{\tilde{\omega}}^{2,p}(\Pi_T^\delta), \quad (2.13)$$

отвечает вес $\tilde{\omega}(\eta) = \omega(e^{-\eta})$. Из неравенства (2.3) для $\alpha = e^{-2}$ вытекает, что условие (1.15) в новых переменных можно записать в виде

$$\sup_{-\infty < \eta < \infty} \sup_{I \subset (\eta, \eta+2)} \left(\frac{1}{|I|} \int_I \tilde{\omega}(\tau) d\tau \right) \left(\frac{1}{|I|} \int_I (\tilde{\omega}(\tau))^{1/(p-1)} d\tau \right)^{p-1} < \infty. \quad (2.14)$$

В силу (2.4)

$$\sup_{I \subset (\ln T^{-1}, \ln \delta^{-1})} \left(\frac{1}{|I|} \int_I \tilde{\omega}(\tau) d\tau \right) \left(\frac{1}{|I|} \int_I (\tilde{\omega}(\tau))^{1/(p-1)} d\tau \right)^{p-1} < \infty$$

и из теоремы 2.1 следует однозначная разрешимость задачи (2.13). Так как преобразование (2.11) невырождено, то однозначно разрешима и задача (2.9).

Для вывода (2.10) продолжим коэффициенты $\tilde{a}_{ij}$ и $\tilde{a}_i$ оператора $\mathcal{L}$ по непрерывности на все пространство E_{n+1} с сохранением условия эллиптичности матрицы $\{\tilde{a}_{ij}\}$ и рассмотрим в цилиндре $\Pi^\delta = D \times (-\infty, \ln \delta^{-1})$ вспомогательный оператор

$$\mathbb{L}\tilde{u} = \sum_{i,j=1}^n \tilde{a}_{ij}(\xi, \eta) \tilde{u}_{\xi_i \xi_j} + \sum_{i=1}^n \tilde{a}_i(\xi, \eta) \tilde{u}_{\xi_i} - \tilde{u}_\eta. \quad (2.15)$$

Решение $\tilde{u}(\eta, \xi)$ задачи (2.13), доопределенное нулем при $\eta < \ln T^{-1}$, удовлетворяет уравнению

$$\mathbb{L}\tilde{u} = \exp(-\eta) \tilde{f} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \xi_i \tilde{u}_{\xi_i} \text{ в } \Pi^\delta. \quad (2.16)$$

Воспользуемся коэрцитивной оценкой (2.8) из теоремы 2.1 для оператора $\mathbb{L}$ в цилиндрах $\Pi_k = D \times (k-1, k+1) \cap \Pi^\delta$, $\Pi_k \cap \Pi_T^\delta \neq \emptyset$, с целыми индексами k . Чтобы учесть якобиан перехода от переменных (η, ξ) к (t, x) , будем применять ее для веса

$$\tilde{w}(\eta) = \exp\left(-\frac{n+2-2p}{2}\eta\right) \tilde{\omega}(\eta),$$

который согласно (2.14) удовлетворяет условию

$$\sup_{-\infty < \eta < \infty} \sup_{I \subset (\eta, \eta+2)} \left(\frac{1}{|I|} \int_I \tilde{w}(\tau) d\tau \right) \left(\frac{1}{|I|} \int_I (\tilde{w}(\tau))^{1/(p-1)} d\tau \right)^{p-1} = M_0 < \infty. \quad (2.17)$$

В результате, обозначив $\Pi'_k = D \times (k, k+1)$, после умножения $\tilde{u}(\eta, \xi)$ на срезающую функцию переменной η , равную единице в $[k, k+1]$, получим

$$\|\tilde{u}\|_{H_{\tilde{w}}^{2,p}(\Pi'_k)}^p \leq C (\|\mathbb{L}\tilde{u}\|_{H_{\tilde{w}}^{0,p}(\Pi_k)}^p + \|\tilde{u}\|_{H_{\tilde{w}}^{0,p}(\Pi_k)}^p), \quad k = k_T, k_T + 1, \dots, k_\delta, \quad (2.18)$$

где индексы k_T и k_δ соответствуют тем цилиндрам Π'_k , чьи замыкания содержат соответственно нижнюю и верхнюю крышки цилиндра Π_T^δ .

Постоянная C в (2.18) не зависит от k при $k > k_0(\mathcal{L}, M_0, D, n, p)$. Действительно, согласно (2.12) колебание коэффициентов $\tilde{a}_{ij}$ в Π_k и $\max |\tilde{a}_i|$ в $\overline{\Pi}_k$ стремятся к нулю при $k \rightarrow +\infty$. Так как для параболических операторов с постоянными коэффициентами соответствующая постоянная C в (2.18) не зависит от k , то нужное утверждение вытекает из метода замораживания коэффициентов.

В качестве C в (2.18) выберем точную верхнюю грань всех постоянных C для номеров $k \geq k_T$. Ввиду отмеченного выше свойства эта постоянная не зависит от δ . Суммируя неравенства (2.18) по $k = k_T, \dots, k_\delta$ и используя (2.16), в исходных переменных (t, x) будем иметь

$$\|u\|_{H_{\omega}^{2,p}(\Omega_T^\delta)} \leq C(\|f\|_{H_{\omega}^{0,p}(\Omega_T^\delta)} + \|\nabla_x u\|_{H_{\omega_{p/2}}^{0,p}(\Omega_T^\delta)} + \|u\|_{H_{\omega_p}^{0,p}(\Omega_T^\delta)}),$$

где $\omega_{p/2}(t) = \omega(t)|t|^{-p/2}$, $\omega_p(t) = \omega(t)|t|^{-p}$. Для доказательства (2.10) осталось применить интерполяционное неравенство

$$\|\nabla_x u\|_{H_{\omega_{p/2}}^{0,p}(\Omega_T^\delta)} \leq C(\varepsilon)\|u\|_{H_{\omega}^{2,p}(\Omega_T^\delta)} + \varepsilon\|u\|_{H_{\omega_p}^{0,p}(\Omega_T^\delta)}.$$

Если Ω является P^+ -областью, то в доказательстве аналогичной оценки нужно вместо (2.11) совершить замену $\xi_i = x_i/\sqrt{t}$, $i = 1, \dots, n$, $\eta = \ln t$ и повторить предыдущие рассуждения.

В случае, когда $\mathcal{L}$ совпадает с оператором теплопроводности L , вспомогательный оператор (2.15) также совпадает с L . Поэтому константа C в коэрцитивной оценке (2.18) зависит только от n, p, D и M_0 из (2.17). Отсюда вытекает независимость от T постоянной C в (2.10). Лемма доказана.

Приведем важный частный случай оценки (2.10), предварительно условившись в безвесовом случае $\omega(t) \equiv 1$ обозначать пространство $H_{\omega}^{2,p}(\Omega_T^\delta)$ через $W_{p,0}^{2,1}(\Omega_T^\delta)$.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Задача

$$\mathcal{L}u = f \text{ в } \Omega_T^\delta, \quad f \in L_p(\Omega_T^\delta), \quad u \in W_{p,0}^{2,1}(\Omega_T^\delta), \quad (2.19)$$

однозначно разрешима для любого $1 < p < \infty$, и ее решение удовлетворяет неравенству

$$\|u\|_{W_{p,0}^{2,1}(\Omega_T^\delta)} \leq C(\|f\|_{L_p(\Omega_T^\delta)} + \|u\|_{H_{\rho}^{0,p}(\Omega_T^\delta)}), \quad (2.20)$$

в котором $\rho(t) = |t|^{-p}$, а постоянная C не зависит от u и δ .

2.3. Оценки в усеченном шаре. Перейдем к выводу L_p -оценок в $(n+1)$ -мерном усеченном шаре радиуса R с центром в начале координат. Положим

$$B_R(\delta) = B_R \cap \{(t, x) : -R + \delta < t < R - \delta\}, \quad 0 < \delta < R, \quad (2.21)$$

и рассмотрим задачу Дирихле для оператора теплопроводности

$$Lu = f \text{ в } B_R(\delta), \quad f \in L_p(B_R(\delta)), \quad u \in W_{p,0}^{2,1}(B_R(\delta)). \quad (2.22)$$

Пространство $W_{p,0}^{2,1}(B_R(\delta))$ определяется аналогично пространству $W_{p,0}^{2,1}(\Omega_T^\delta)$.

ЛЕММА 2.2. *Задача (2.22) однозначно разрешима, и ее решение удовлетворяет неравенству*

$$\|u\|_{W_{p,0}^{2,1}(B_R(\delta))} \leq C(\|f\|_{L_p(B_R(\delta))} + \|u\|_{H_\sigma^{0,p}(B_R(\delta))}), \quad (2.23)$$

в котором $\sigma(t) = (R - |t|)^{-p}$, а постоянная C не зависит от u , f и δ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. После невырожденной в $B_R(\delta)$ замены переменных

$$y_i = \left(\frac{2R}{R-t}\right)^{1/2} x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \tau = t + R, \quad (2.24)$$

которая преобразует $B_R(\delta)$ в усеченную P^+ -область

$$\tilde{B}_R(\delta) = \Omega \cap \{(\tau, y) : \delta < \tau < 2R - \delta\}, \quad \text{где } \Omega = \{(\tau, y) : |y|^2 < 2R\tau\}, \quad (2.25)$$

а оператор теплопроводности в оператор

$$\mathcal{L}\tilde{u} = \frac{2R}{2R-\tau} \left(\Delta \tilde{u} - \frac{1}{4R} \sum_{i=1}^n y_i \tilde{u}_{y_i} \right) - \tilde{u}_\tau,$$

задача (2.22) в новых переменных примет вид

$$\mathcal{L}\tilde{u} = \tilde{f} \text{ в } \tilde{B}_R(\delta), \quad \tilde{f} \in L_p(\tilde{B}_R(\delta)), \quad \tilde{u} \in W_{p,0}^{2,1}(\tilde{B}_R(\delta)). \quad (2.26)$$

Так как оператор $\mathcal{L}$ равномерно параболичесен в $\tilde{B}_R(\delta)$ и его коэффициенты непрерывны в замыкании $\tilde{B}_R(\delta)$, то по лемме 2.1 преобразованная задача (2.26) однозначно разрешима. Поэтому в силу невырожденности замены (2.24) однозначно разрешима и задача (2.22).

При выводе оценки (2.23), которая нас интересует только для малых $\delta > 0$, будем предполагать $\delta < R/2$. Сначала заметим, что

$$\|u\|_{W_{p,0}^{2,1}(B_R^{(1)}(\delta))} \leq C(\|f\|_{L_p(B_R^{(1)}(\delta))} + \|u\|_{H_\sigma^{0,p}(B_R^{(1)}(\delta))}) \quad (2.27)$$

в усеченном шаре

$$B_R^{(1)}(\delta) = B_R \cap \left\{ (t, x) : -R + \delta < t < \frac{R}{2} \right\}.$$

В самом деле, замена переменных (2.24) преобразует $B_R^{(1)}(\delta)$ в

$$\Omega_{3R/2}^\delta = \Omega \cap \left\{ (\tau, y) : \delta < \tau < \frac{3R}{2} \right\} \quad (2.28)$$

(см. (2.25)) и соответствующий якобиан для $(t, x) \in B_R^{(1)}(\delta)$ не зависит от δ . Поэтому если в области $\Omega_{3R/2}^\delta$ применить к решению $\tilde{u}$ преобразованной задачи (2.26) оценку (2.20), то в исходных переменных (t, x) получим

$$\|u\|_{W_{p,0}^{2,1}(B_R^{(1)}(\delta))} \leq C(\|f\|_{L_p(B_R^{(1)}(\delta))} + \|\nabla_x u\|_{H_{\sigma_1}^{0,p}(B_R^{(1)}(\delta))} + \|u\|_{H_{\sigma}^{0,p}(B_R^{(1)}(\delta))}),$$

где $\sigma_1(t) = (R-t)^{-p/2}$. Теперь (2.27) вытекает из интерполяционного неравенства

$$\|\nabla_x u\|_{H_{\sigma_1}^{0,p}(B_R^{(1)}(\delta))} \leq C(\varepsilon)\|u\|_{H_{\sigma}^{0,p}(B_R^{(1)}(\delta))} + \varepsilon\|u\|_{W_{p,0}^{2,1}(B_R^{(1)}(\delta))}.$$

Для доказательства аналогичной оценки в оставшейся части усеченного шара (2.21) сделаем замену переменных

$$y_i = \left(\frac{2R}{R+t}\right)^{1/2} x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \tau = t - R,$$

сохранив за соответствующими образами предыдущие обозначения. При такой замене $B_R(\delta)$ преобразуется в усеченную P^- -область $\tilde{B}_R(\delta)$, симметричную (2.25) относительно гиперплоскости $\{(\tau, y) : \tau = 0\}$, а оператор теплопроводности перейдет в оператор $\mathcal{L}$ вида

$$\mathcal{L}\tilde{u} = \frac{2R}{2R+\tau} \left(\Delta\tilde{u} + \frac{1}{4R} \sum_{i=1}^n y_i \tilde{u}_{y_i} \right) - \tilde{u}_\tau.$$

Как и ранее, рассмотрим решение $\tilde{u}$ преобразованной задачи (2.26) в области $\Omega_{3R/2}^\delta$, симметричной (2.28) и являющейся образом усеченного шара

$$B_R^{(2)}(\delta) = B_R \cap \left\{ (t, x) : -\frac{R}{2} < t < R - \delta \right\}.$$

Поскольку $\tilde{u}$ уже не удовлетворяет однородному краевому условию на $\Gamma(\Omega_{3R/2}^\delta)$, то на этот раз воспользуемся оценкой

$$\|\tilde{u}\|_{W_{p,0}^{2,1}(\Omega_R^\delta)} \leq C(\|\tilde{f}\|_{L_p(\Omega_{3R/2}^\delta)} + \|\tilde{u}\|_{H_{\rho}^{0,p}(\Omega_{3R/2}^\delta)}), \quad \rho(\tau) = |\tau|^{-p},$$

которая получается из (2.20) умножением $\tilde{u}$ на срезающую функцию. В результате придем к соотношению

$$\|u\|_{W_{p,0}^{2,1}(B_R^{(3)}(\delta))} \leq C(\|f\|_{L_p(B_R^{(2)}(\delta))} + \|u\|_{H_{\sigma}^{0,p}(B_R^{(2)}(\delta))}), \quad (2.29)$$

в котором $B_R^{(3)}(\delta) = B_R \cap \{(t, x) : 0 < t < R - \delta\}$. Сопоставляя теперь (2.27) и (2.29), получаем требуемое неравенство (2.23). Лемма доказана.

§ 3. Оценки функции Грина

3.1. Поточечные оценки функции Грина. Оценка весовых L_p -норм функции u в правых частях (2.10) и (2.23) связана с исследованием функции Грина $G(t, \tau, x, y)$ задачи Дирихле для оператора теплопроводности в области Ω . Положим $F(t, x) = \chi(t)t^{-n/2} \exp(-|x|^2/(4t))$, где $\chi(t)$ — характеристическая функция положительной полупрямой, $H(t, x) = |t|^{-n/2} \exp(|x|^2/(4t))$ и напомним, что ν_1 и μ_1 означают первые собственные числа задач (1.6) и (1.7) соответственно.

ЛЕММА 3.1. *Функция Грина удовлетворяет в $\Omega \times \Omega$ неравенствам*

$$G(t, \tau, x, y) \leq \begin{cases} C(n)F(t - \tau, x - y) & \text{при } t < 2\tau; \\ C(n, \Omega)\tau^{-n/2+\nu_1}t^{-\nu_1} & \text{при } t \geq 2\tau \end{cases} \quad (3.1)$$

в P^+ -области Ω и неравенствам

$$G(t, \tau, x, y) \leq \begin{cases} C(n)F(t - \tau, x - y) & \text{при } \tau > 2t; \\ C(n, \Omega)|\tau|^{-n/2-\mu_1}|t|^{\mu_1} & \text{при } \tau \leq 2t \end{cases} \quad (3.2)$$

в P^- -области Ω .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Ω является P^+ -областью. Достаточно рассмотреть только случай $t \geq 2\tau$, так как иначе требуемая оценка следует из определения функции Грина. Из общей теории самосопряженных операторов известно, что спектр задачи (1.6) дискретен, собственные числа $\{\nu'_i\}$, $i = 1, 2, \dots$, занумерованные с учетом их кратности, положительны, а нормированная система соответствующих собственных функций $v_i(\xi)$ образует ортогональный базис в пространстве $L_2(D)$ с весом $\exp(|\xi|^2/4)$.

Вычислим для фиксированных $(\tau, y) \in \Omega$ и $t > \tau$ коэффициенты Фурье $g_i(\tau, y, t)$ функции $G(t, \tau, x, y)$ переменной x в области $D(t) = \{x : x/\sqrt{t} \in D\}$ по системе собственных функций $\{v_i(x/\sqrt{t})\}$:

$$g_i(\tau, y, t) = \int_{D(t)} H(t, x) v_i\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) G(t, \tau, x, y) dx.$$

Функция $g_i(\tau, y, t)$ по переменным (τ, y) является решением задачи

$$L^* g_i = 0 \text{ в } \Omega \cap \{(\tau, y) : 0 < \tau < t\}, \quad g_i|_{\partial\Omega} = 0, \quad g_i|_{\tau=t} = H(t, y) v_i\left(\frac{y}{\sqrt{t}}\right)$$

для сопряженного оператора $L^* = \Delta_y + \partial/\partial\tau$. По принципу максимума решение этой задачи единственно и непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что

$$g_i(\tau, y, t) = H(\tau, y) \tau^{\nu'_i} t^{-\nu'_i} v_i\left(\frac{y}{\sqrt{\tau}}\right).$$

Таким образом, в $D(t)$ имеет место равенство

$$G(t, \tau, x, y) = H(\tau, y) \sum_{i=1}^{\infty} t^{-\nu'_i} \tau^{\nu'_i} v_i\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) v_i\left(\frac{y}{\sqrt{\tau}}\right), \quad t > \tau, \quad (3.3)$$

в пространстве L_2 с весом $\exp(|x|^2/(4t))$. Далее, как хорошо известно из теории интегральных уравнений, ряд $\sum_{i=1}^{\infty} (\nu'_i)^{-q} v_i^2(\xi)$ для $q \geq q(n)$ сходится равномерно на $\overline{D}$ (основании Ω), и его сумма оценивается сверху постоянной, зависящей только от n и D . Поскольку $\sup_i (\nu'_i)^q 2^{-\nu'_i} = C(n, D) < \infty$, то при $t \geq 2\tau$ из неравенства Коши следует, что

$$G(t, \tau, x, y) \leq C(n, D) \tau^{-n/2+\nu_1} t^{-\nu_1} \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (\nu'_i)^{-q} v_i^2\left(\frac{y}{\sqrt{\tau}}\right)} \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (\nu'_i)^{-q} v_i^2\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)}.$$

Отсюда вытекают и равномерная сходимости на $\overline{D}(t)$ ряда (3.3), и требуемая оценка (3.1). Неравенство (3.2) доказывается аналогично. Лемма доказана.

Ниже μ'_i означают собственные числа задачи (1.7), занумерованные с учетом их кратности, а $\tilde{v}_i(\xi)$ — соответствующие им собственные функции.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. *Классическое решение однородной задачи*

$$Lw = 0 \text{ в } \Omega, \quad w|_{\partial\Omega} = 0, \quad (3.4)$$

непрерывное вплоть до $\partial\Omega \setminus \{0, 0\}$, имеет вид

$$w(t, x) = \begin{cases} \sum_i c_i t^{-\nu'_i} v_i\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) & \text{в } P^+ \text{-области;} \\ \sum_i c_i (-t)^{\mu'_i} \tilde{v}_i\left(\frac{x}{\sqrt{-t}}\right) & \text{в } P^- \text{-области} \end{cases} \quad (3.5)$$

и удовлетворяет неравенствам

$$\int_{D(t)} |w(t, x)|^p dx \geq \begin{cases} C(n, D) t^{n/2} \left(\sum_i 2^{-2\nu'_i} c_i^2 t^{-2\nu'_i} \right)^{p/2} & \text{в } P^+ \text{-области;} \\ C(n, D) |t|^{n/2} \left(\sum_i 2^{-2\mu'_i} c_i^2 |t|^{2\mu'_i} \right)^{p/2} & \text{в } P^- \text{-области.} \end{cases} \quad (3.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим случай P^+ -области. Пользуясь интегральным представлением решения задачи (3.4)

$$w(t, x) = \int_{D(\tau)} G(t, \tau, x, y) w(\tau, y) dy, \quad t \geq 2\tau, \quad (3.7)$$

в силу (3.3) придем к соотношению (3.5). Независимость от τ коэффициентов c_i в (3.5) вытекает из того, что собственные функции $v_i(\xi)$ образуют ортогональный базис в пространстве $L_2(D)$ с весом $\exp(|\xi|^2/4)$. Для вывода (3.6) запишем (3.7) в виде

$$w(2t, x) = \int_{D(t)} G(2t, t, x, y) w(t, y) dy.$$

Из оценки (3.1) и неравенства Гёльдера следует

$$|w(2t, x)|^2 \leq C(n, D)t^{-n/p} \left(\int_{D(t)} |w(t, x)|^p dx \right)^{2/p}.$$

Умножив обе части этого соотношения на $\exp(|x|^2/(8t))$, проинтегрируем его по множеству $D(2t)$. Теперь (3.6) следует из полученного представления (3.5) и отмеченного выше свойства ортогональности собственных функций $v_i(\xi)$. Точно так же рассматривается случай P^- -области. Следствие доказано.

Мы будем применять оценку функции Грина и в несколько ином виде. Пусть ν_k и $\mu_k, k = 1, 2, \dots$, означают собственные числа задач (1.6) и (1.7), занумерованные без учета их кратности. Положим

$$G_k(t, \tau, x, y) = G(t, \tau, x, y) - H(\tau, y) \sum_{\nu'_i \leq \nu_k} t^{-\nu'_i} \tau^{\nu'_i} v_i\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) v_i\left(\frac{y}{\sqrt{\tau}}\right) \quad (3.8)$$

для P^+ -области Ω и

$$G_k(t, \tau, x, y) = G(t, \tau, x, y) - H(\tau, y) \sum_{\mu'_i \leq \mu_k} (-t)^{\mu'_i} (-\tau)^{-\mu'_i} \tilde{v}_i\left(\frac{x}{\sqrt{-t}}\right) \tilde{v}_i\left(\frac{y}{\sqrt{-\tau}}\right)$$

для P^- -области Ω . Повторяя рассуждения леммы 3.1, получаем, что в P^+ -области выполнены неравенства

$$|G_k(t, \tau, x, y)| \leq \begin{cases} C(n)F(t - \tau, x - y) & \text{при } t < 2\tau; \\ C(n, \Omega)\tau^{-n/2+\nu_{k+1}}t^{-\nu_{k+1}} & \text{при } t \geq 2\tau, \end{cases} \quad (3.9)$$

а в P^- -области – неравенства

$$|G_k(t, \tau, x, y)| \leq \begin{cases} C(n)F(t - \tau, x - y) & \text{при } \tau > 2t; \\ C(n, \Omega)|\tau|^{-n/2-\mu_{k+1}}|t|^{\mu_{k+1}} & \text{при } \tau \leq 2t. \end{cases}$$

Другим следствием леммы 3.1 являются оценки функции Грина открытого $(n+1)$ -мерного шара B_R радиуса R . Нас будет интересовать поведение функции Грина в окрестности характеристической точки. Поместим эту точку в начало координат. Обозначим через μ первое собственное число задачи (1.7) для случая, когда D совпадает с n -мерным шаром $Q_{2R} \subset E_n$ радиуса $2R$ с центром в начале координат.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. *Функция Грина шара B_R удовлетворяет в $B_R \times B_R$ неравенствам*

$$G(t, \tau, x, y) \leq \begin{cases} C(n)F(t - \tau, x - y) & \text{при } \tau > 2t; \\ C(n, R)|\tau|^{-n/2-\mu}|t|^\mu & \text{при } \tau \leq 2t, \end{cases} \quad (3.10)$$

если центр B_R расположен в точке $(-R, 0)$, и неравенствам

$$G(t, \tau, x, y) \leq \begin{cases} C(n)F(t - \tau, x - y) & \text{при } t < 2\tau; \\ C(n, R)\tau^\mu t^{-n/2-\mu} & \text{при } t \geq 2\tau, \end{cases} \quad (3.11)$$

если центр B_R расположен в точке $(R, 0)$.

Для доказательства (3.10) достаточно заметить, что B_R содержится в параболоиде $\Omega = \{(t, x) : |x|^2 < -2Rt\}$, который является P^- -областью с основанием Q_{2R} . По принципу максимума функция Грина шара B_R не превосходит в $B_R \times B_R$ функции Грина параболоида Ω и остается воспользоваться оценкой (3.2). Аналогично устанавливается (3.11). В этом случае B_R содержится в P^+ -области $\{(t, x) : |x|^2 < 2Rt\}$ с тем же основанием Q_{2R} и наряду с (3.2) нужно применить соотношение (1.9), связывающее первые собственные числа задач (1.6) и (1.7).

3.2. L_p -оценки функции Грина. В дальнейшем используется следующий результат работы [9].

ТЕОРЕМА 3.1. *Для справедливости неравенства Харди*

$$\int_0^T \left| \int_t^T g(\tau) d\tau \right|^p w_0(t) dt \leq C \int_0^T |g(t)|^p w(t) dt, \quad p > 1, \quad (3.12)$$

с весами $w_0 \geq 0$, $w \geq 0$ и постоянной C , не зависящей от g , необходимо и достаточно выполнение условия

$$\sup_{t \in (0, T)} \left(\int_0^t w_0(\tau) d\tau \right) \left(\int_t^T (w(\tau))^{-1/(p-1)} d\tau \right)^{p-1} < \infty. \quad (3.13)$$

Аналогично, для справедливости двойственного неравенства

$$\int_0^T \left| \int_0^t g(\tau) d\tau \right|^p w_0(t) dt \leq C \int_0^T |g(t)|^p w(t) dt, \quad p > 1, \quad (3.14)$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\sup_{t \in (0, T)} \left(\int_t^T w_0(\tau) d\tau \right) \left(\int_0^t (w(\tau))^{-1/(p-1)} d\tau \right)^{p-1} < \infty.$$

В следующем утверждении $G(t, \tau, x, y)$ означает функцию Грина P^+ - или P^- -области Ω , а Ω_T^δ имеет тот же смысл, что и в §2.

ЛЕММА 3.2. *Если $\omega(t)$ удовлетворяет условиям (1.2), (1.11) в P^+ -области и условиям (1.2), (1.12) в P^- -области, то для любой функции $f \in H_{\omega}^{0,p}(\Omega_T^\delta)$ справедливо неравенство*

$$\int_{\Omega_T^\delta} \left| \int_{\Omega_T^\delta} G(t, \tau, x, y) f(\tau, y) dy d\tau \right|^p \omega(t) |t|^{-p} dx dt \leq C \int_{\Omega_T^\delta} |f(t, x)|^p \omega(t) dx dt \quad (3.15)$$

с постоянной C , не зависящей от f и δ . При выполнении условия (1.15) и одного из соответствующих условий (1.16) или (1.18), взятых при $k = 0$, постоянная C не зависит также и от T .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим P^+ -область Ω . Продолжим функцию $f(t, x)$ нулем в Ω_δ и без ограничения общности будем считать $f \geq 0$ в Ω , $f \in C^\infty(\overline{\Omega}_T^\delta)$. Разобьем Ω_T на множества $A_1(t) = \{(\tau, y) : \tau \leq t/2\} \cap \Omega_T$, $A_2(t) = \Omega_T \setminus A_1(t)$ и, обозначив

$$I_i(t, x) = \int_{A_i(t)} G(t, \tau, x, y) f(\tau, y) dy d\tau, \quad J_i = \int_{\Omega_T} I_i^p(t, x) \omega(t) t^{-p} dx dt, \quad i = 1, 2,$$

заметим, что

$$\int_{\Omega_T^\delta} \left(\int_{\Omega_T^\delta} G(t, \tau, x, y) f(\tau, y) dy d\tau \right)^p \omega(t) t^{-p} dx dt \leq \text{const} (J_1 + J_2). \quad (3.16)$$

Согласно оценке (3.1)

$$I_1(t, x) \leq C t^{-\nu_1} \int_{A_1(t)} f(\tau, y) \tau^{-n/2+\nu_1} dy d\tau$$

и по неравенству Гёльдера

$$J_1 \leq C \int_0^T \left(\int_0^t \left(\int_{D(\tau)} f^p(\tau, y) dy \right)^{1/p} \tau^{-b/p} d\tau \right)^p \omega(t) t^{b-p} dt,$$

где $D(\tau)$ – сечение Ω гиперплоскостью $\{(t, x) : t = \tau\}$, $b = n/2 - p\nu_1$. Применяя к интегралу в правой части неравенство Харди (3.14) для весов $w_0(t) = \omega(t) t^{b-p}$, $w(t) = \omega(t) t^b$, в силу условия (1.11) придем к оценке

$$J_1 \leq C \int_{\Omega_T} f^p(t, x) \omega(t) dx dt.$$

На множестве $A_2(t)$ функция Грина не превосходит $C(n)F(t - \tau, x - y)$ (см. (3.1)) и вновь по неравенству Гёльдера

$$\begin{aligned} I_2^p(t, x) &\leq C \left(\int_{A_2(t)} F(t - \tau, x - y) f^p(\tau, y) \omega(\tau) dy d\tau \right) \\ &\quad \times \left(\int_{A_2(t)} F(t - \tau, x - y) (\omega(\tau))^{-1/(p-1)} dy d\tau \right)^{p-1}. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\int_{E_n} F(t - \tau, x - y) dy = \text{const} \quad \text{при} \quad t > \tau,$$

будем иметь

$$\begin{aligned} J_2 &\leq C \int_0^T \left(\int_{t/2}^t h(\tau) \omega(\tau) d\tau \right) \left(\int_{t/2}^t (\omega(z))^{-1/(p-1)} dz \right)^{p-1} \omega(t) t^{-p} dt \\ &\leq C \int_0^T \left(\int_{t/2}^t h(\tau) \omega(\tau) d\tau \right) \left(\int_{t/2}^t (\omega(z) z^b)^{-1/(p-1)} dz \right)^{p-1} \omega(t) t^{b-p} dt, \quad (3.17) \end{aligned}$$

где

$$h(\tau) = \int_{D(\tau)} f^p(\tau, y) dy. \quad (3.18)$$

Проверим неравенство

$$\int_0^t (\omega(z)z^b)^{-1/(p-1)} dz \leq C \int_0^{t/2} (\omega(z)z^b)^{-1/(p-1)} dz \quad (3.19)$$

с постоянной C , не зависящей от t . В силу условия удвоения (1.4)

$$\int_{t/4}^t (\omega(z))^{-1/(p-1)} dz \leq C \int_{t/4}^{t/2} (\omega(z))^{-1/(p-1)} dz$$

и после умножения обеих частей этого неравенства на $t^{-b/(p-1)}$ придем к (3.19). Из (3.17) и (3.19) следует

$$\begin{aligned} J_2 &\leq C \int_0^T \left(\int_{t/2}^t h(\tau) \omega(\tau) \left(\int_0^\tau (\omega(z)z^b)^{-1/(p-1)} dz \right)^{p-1} d\tau \right) \omega(t) t^{b-p} dt \\ &\leq C \int_0^T \left(\int_0^t h(\tau) \omega(\tau) \left(\int_0^\tau (\omega(z)z^b)^{-1/(p-1)} dz \right)^{p-1} d\tau \right) \omega(t) t^{b-p} dt. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям (напомним, что $h(\tau) = 0$ при $\tau \in [0, \delta]$), из условия (1.11) получаем

$$\begin{aligned} J_2 &\leq C \int_0^T h(t) \omega(t) \left(\int_t^T \omega(\tau) \tau^{b-p} d\tau \right) \left(\int_0^t (\omega(\tau) \tau^b)^{-1/(p-1)} d\tau \right)^{p-1} dt \\ &\leq C \int_0^T h(t) \omega(t) dt = C \int_{\Omega_T} f^p(t, x) \omega(t) dx dt. \end{aligned}$$

Для завершения доказательства (3.15) осталось подставить в (3.16) найденные соотношения для J_1 и J_2 . Если выполнены условия (1.15) и (1.16) (при $k = 0$), то для каждого конечного T точная верхняя грань в (1.2) и (1.11) не зависит от T . Поэтому от T не зависит и константа C в (3.15).

Вывод соответствующего утверждения в P^- -области аналогичен приведенному выше. Отличие состоит лишь в том, что необходимо использовать оценку функции Грина (3.2) и неравенство Харди (3.12). Лемма доказана.

Отметим одно простое следствие соотношений (1.17) и (1.19).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Если условие (1.17) (соответственно условие (1.19)) выполнено для $k = l$, где $l = 2, 3, \dots$, то это же условие выполнено для всех номеров $k = 1, \dots, l - 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть имеет место (1.19). Достаточно показать, что для любых $T > 0$ и $0 < t < T$

$$\begin{aligned} & \left(\int_t^T \omega(\tau) \tau^{a_{k-1}-p} d\tau \right) \left(\int_0^t (\omega(\tau) \tau^{a_{k-1}})^{-1/(p-1)} d\tau \right)^{p-1} \\ & \leq \left(\int_t^T \omega(\tau) \tau^{a_k-p} d\tau \right) \left(\int_0^t (\omega(\tau) \tau^{a_k})^{-1/(p-1)} d\tau \right)^{p-1}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Полагая $\gamma = p(\mu_k - \mu_{k-1})$, получаем

$$\left(\int_0^t (\omega(\tau) \tau^{a_{k-1}})^{-1/(p-1)} d\tau \right)^{p-1} \leq t^\gamma \left(\int_0^t (\omega(\tau) \tau^{a_k})^{-1/(p-1)} d\tau \right)^{p-1}$$

и, поскольку

$$t^\gamma \int_t^T \omega(\tau) \tau^{a_{k-1}-p} d\tau \leq \int_t^T \omega(\tau) \tau^{a_k-p} d\tau,$$

приходим к (3.20). Аналогично рассматривается и случай (1.17).

Ниже используются обозначения п. 3.1. Для $f \in H_\omega^{0,p}(\Omega)$ и $i = 1, 2, \dots$ определим постоянные

$$c_i = \begin{cases} \int_{\Omega^\delta} f(\tau, y) H(\tau, y) \tau^{\nu'_i} v_i \left(\frac{y}{\sqrt{\tau}} \right) dy d\tau & \text{в } P^+\text{-области } \Omega; \\ \int_{\Omega_T} f(\tau, y) H(\tau, y) (-\tau)^{-\mu'_i} \tilde{v}_i \left(\frac{y}{\sqrt{-\tau}} \right) dy d\tau & \text{в } P^-\text{-области } \Omega, \end{cases} \quad (3.21)$$

где $\Omega^\delta = \Omega \setminus \bar{\Omega}_\delta$. Из неравенства Гёльдера и предложения 3.1 следует, что если $\nu'_i \leq \nu_k$, $\mu'_i \leq \mu_k$ и в P^+ -области выполнено условие (1.17), а в P^- -области – условие (1.19), то константы в (3.21) конечны. Положив для натурального k

$$z_k(t, x) = \begin{cases} \sum_{\nu'_i \leq \nu_k} c_i t^{-\nu'_i} v_i \left(\frac{x}{\sqrt{t}} \right) & \text{в } P^+\text{-области } \Omega; \\ \sum_{\mu'_i \leq \mu_k} c_i (-t)^{\mu'_i} \tilde{v}_i \left(\frac{x}{\sqrt{-t}} \right) & \text{в } P^-\text{-области } \Omega, \end{cases} \quad (3.22)$$

где c_i – постоянные из (3.21), заметим, что функции $z_k(t, x)$ являются решениями однородного уравнения теплопроводности (каждая в соответствующей области) и обращаются в нуль на $\partial\Omega \setminus \{0, 0\}$. В следующем утверждении для $f \in H_\omega^{0,p}(\Omega)$ полагается

$$G(f)(t, x) = \int_{\Omega_T^\delta} G(t, \tau, x, y) f(\tau, y) dy d\tau.$$

ЛЕММА 3.3. Если $\omega(t)$ удовлетворяет условиям (1.15)–(1.17) в P^+ -области и условиям (1.15), (1.18), (1.19) в P^- -области, то справедливо неравенство

$$\int_{\Omega_T^\delta} |G(f)(t, x) - z_k(t, x)|^p \omega(t) |t|^{-p} dx dt \leq C \int_\Omega |f(t, x)|^p \omega(t) dx dt \quad (3.23)$$

с постоянной C , не зависящей от f , T и δ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим P^+ -область Ω . Не ограничивая общности, будем считать $f \geq 0$, $f(t, x) = 0$ в Ω_δ , $f \in C^\infty(\overline{\Omega}^\delta)$ и, положив $A_1(t) = \{(\tau, y) : \tau \leq t/2\} \cap \Omega_T$, $A_2(t) = \Omega_T \setminus A_1(t)$, обозначим

$$\begin{aligned} I_1(t, x) &= \int_{A_1(t)} G(t, \tau, x, y) f(\tau, y) dy d\tau - z_k(t, x), \\ I_2(t, x) &= \int_{A_2(t)} G(t, \tau, x, y) f(\tau, y) dy d\tau, \\ J_i &= \int_{\Omega} I_i^p(t, x) \omega(t) t^{-p} dx dt, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Ясно, что

$$\int_{\Omega_T^\delta} \left| \int_{\Omega_T^\delta} G(t, \tau, x, y) f(\tau, y) dy d\tau - z_k(t, x) \right|^p \omega(t) t^{-p} dx dt \leq \text{const} (J_1 + J_2). \quad (3.24)$$

Из явного вида постоянных c_i в (3.21), участвующих в определении $z_k(t, x)$ (см. (3.22)), и равенства (3.3) вытекает

$$\begin{aligned} I_1(t, x) &\leq \left| \sum_{\nu'_i \leq \nu_k} t^{-\nu'_i} v_i\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \int_t^\infty \left(\int_{D(\tau)} f(\tau, y) H(\tau, y) v_i\left(\frac{y}{\sqrt{\tau}}\right) dy \right) \tau^{\nu'_i} d\tau \right| \\ &\quad + \left| \sum_{\nu'_i \leq \nu_k} t^{-\nu'_i} v_i\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \int_{t/2}^t \left(\int_{D(\tau)} f(\tau, y) H(\tau, y) v_i\left(\frac{y}{\sqrt{\tau}}\right) dy \right) \tau^{\nu'_i} d\tau \right| \\ &\quad + \int_0^{t/2} \int_{D(\tau)} |G_k(t, \tau, x, y)| f(\tau, y) dy d\tau, \end{aligned}$$

где $G_k(t, \tau, x, y)$ определена в (3.8). Пусть $h(\tau)$ имеет тот же смысл, что и в (3.18). Так как $H(\tau, y) \leq C(n, D) \tau^{-n/2}$ на $D(\tau)$ и собственные функции $v_i(\xi)$ ограничены, то из неравенства Гёльдера и оценки (3.9) будем иметь

$$\begin{aligned} J_1 &\leq C \sum_{i=1}^k \int_0^\infty \left(\int_t^\infty h^{1/p}(\tau) \tau^{-b_i/p} d\tau \right)^p \omega(t) t^{b_i-p} dt \\ &\quad + C \int_0^\infty \left(\int_{t/2}^t h(\tau) \omega(\tau) d\tau \right) \left(\int_{t/2}^t (\omega(z))^{-1/(p-1)} dz \right)^{p-1} \omega(t) t^{-p} dt \\ &\quad + C \int_0^\infty \left(\int_0^t h^{1/p}(\tau) \tau^{-b_{k+1}/p} d\tau \right)^p \omega(t) t^{b_{k+1}-p} dt. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Интегралы в первом слагаемом в правой части (3.25) оцениваются по неравенству Харди (3.12) (при $T = \infty$) для весов $w_0(t) = \omega(t) t^{b_i-p}$, $w(t) = \omega(t) t^{b_i}$, $i = 1, 2, \dots, k$, которые в силу (1.17) и предложения 3.1 удовлетворяют условию (3.13). При оценке второго и третьего слагаемых используется условие (1.18). Третье слагаемое оценивается по неравенству Харди (3.14) (при $T = \infty$) для весов

$w_0(t) = \omega(t)t^{b_{k+1}-p}$ и $w(t) = \omega(t)t^{b_{k+1}}$, оценка второго слагаемого осуществляется аналогично интегралу из (3.17). В итоге имеем

$$J_1 \leq C \int_{\Omega^\delta} f^p(t, x) \omega(t) dx dt.$$

Вывод такого же неравенства для J_2 основан на предположении (1.16) и повторяет рассуждения леммы 3.2. В результате, с учетом (3.24), приходим к требуемому утверждению (3.23). Аналогично устанавливается и оценка в P^- -области. Лемма доказана.

Приведем еще L_p -оценку в усеченном шаре $B_R(\delta)$ (см. (2.21)), обозначив через $G(t, \tau, x, y)$ функцию Грина шара B_R с центром в начале координат. Положим $d = (p - n/2 - 1)/p$ и напомним, что $\mu = \mu(R)$ означает первое собственное число задачи (1.7) для случая, когда D совпадает с n -мерным шаром $Q_{2R} \subset E_n$ радиуса $2R$ с центром в начале координат.

ЛЕММА 3.4. *Если выполнено условие $\mu(R) > d$, то для любой функции $f \in L_p(B_R(\delta))$ справедливо неравенство*

$$\int_{B_R(\delta)} \left| \int_{B_R(\delta)} G(t, \tau, x, y) f(\tau, y) dy d\tau \right|^p (R - |t|)^{-p} dx dt \leq C \int_{B_R(\delta)} |f(t, x)|^p dx dt \quad (3.26)$$

с постоянной C , не зависящей от f и δ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположение $\mu(R) > d$ влечет выполнение условий (1.11) и (1.12) относительно весовой функции $\omega(t) \equiv 1$. Это нетрудно проверить, основываясь на соотношении (1.9), взятым при $k = 1$.

Для доказательства (3.26) перенесем центр шара B_R в точку $(-R, 0)$ и воспользуемся оценкой (3.10). Рассуждая так же, как при доказательстве леммы 3.2, приходим к неравенству (3.15), в котором $\omega(t) \equiv 1$, а все интегралы берутся по усеченному шару $B_R(\delta)$. В исходных координатах будем иметь

$$\int_{B_R(\delta)} \left| \int_{B_R(\delta)} G(t, \tau, x, y) f(\tau, y) dy d\tau \right|^p \omega_1(t) dx dt \leq C \int_{B_R(\delta)} |f(t, x)|^p dx dt,$$

где $\omega_1(t) = (R - t)^{-p}$ при $0 \leq t < R$ и $\omega_1(t) = R^{-p}$ при $-R \leq t < 0$. Аналогично получается оценка с весом $\omega_2(t) = R^{-p}$ при $0 \leq t \leq R$ и $\omega_2(t) = (R - |t|)^{-p}$ при $-R < t < 0$. Из этих двух соотношений легко вытекает (3.26). Лемма доказана.

§ 4. Доказательства основных утверждений

Сначала приведем одно вспомогательное утверждение. Ниже $W_q^{2,1}(\Omega_T^\delta)$, $q \geq 1$, означает соболевское пространство, состоящее из функций, L_q -суммируемых в Ω_T^δ вместе с обобщенными производными вплоть до второго порядка по x и первой производной по t .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Решение задачи*

$$Lu = f \text{ в } \Omega_T, \quad f \in L_\infty(\Omega_T), \quad u \in H_\omega^{2,p}(\Omega_T), \quad (4.1)$$

принадлежит пространству $W_q^{2,1}(\Omega_T^\delta)$ для любых $1 < q < \infty$ и $\delta \in (0, T)$. В частности, решение непрерывно в замыкании Ω_T^δ , а если $f(t, x) = 0$, то $u \in C^\infty(\Omega_T^\delta)$.

Согласно определению $H_\omega^{2,p}(\Omega_T)$ решение задачи (4.1) принадлежит пространству $W_1^{1,1}(\Omega_T^\delta)$ и имеет нулевой след на боковой поверхности Ω_T^δ . Поэтому для вывода требуемого утверждения достаточно воспользоваться стандартными рассуждениями (см., например, [12]), которые применяются в доказательстве повышенной гладкости решений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Рассмотрим для P^+ -или P^- -области Ω вспомогательную задачу

$$Lu = f \text{ в } \Omega_T^\delta, \quad f \in H_\omega^{0,p}(\Omega_T), \quad u \in H_\omega^{2,p}(\Omega_T^\delta), \quad (4.2)$$

в усеченной области Ω_T^δ (см. §2) с той же правой частью f , что и в (1.10). Однозначная разрешимость этой задачи вытекает из леммы 2.1. Основу последующих рассуждений составляет оценка

$$\|u\|_{H_\omega^{2,p}(\Omega_T^\delta)} \leq C \|f\|_{H_\omega^{0,p}(\Omega_T^\delta)} \quad (4.3)$$

с постоянной C , не зависящей от f и δ . Для вывода (4.3) достаточно (считая f гладкой в $\overline{\Omega}_T$) записать интегральное представление решения с помощью функции Грина

$$u(t, x) = - \int_{\Omega_T^\delta} G(t, \tau, x, y) f(\tau, y) dy d\tau$$

и воспользоваться для $u(t, x)$ неравенствами (2.10) и (3.15).

Шаг 1: Ω есть P^+ -область. Исходя из (4.2), определим последовательность задач

$$Lu_l = f \text{ в } \Omega_{T_l}^{\delta_l}, \quad f \in H_\omega^{0,p}(\Omega_T), \quad u_l \in H_\omega^{2,p}(\Omega_{T_l}^{\delta_l}),$$

где $\delta_l \rightarrow +0$ при $l \rightarrow \infty$. Положив $f_l = f$ в $\Omega_{T_l}^{\delta_l}$ и $f_l = 0$ в Ω_{δ_l} , продолжим u_l нулем в Ω_{δ_l} . Тогда функции u_l станут решениями задач

$$Lu_l = f_l \text{ в } \Omega_T, \quad f_l \in H_\omega^{0,p}(\Omega_T), \quad u_l \in H_\omega^{2,p}(\Omega_T), \quad (4.4)$$

и согласно (4.3) придем к неравенствам

$$\|u_l\|_{H_\omega^{2,p}(\Omega_T)} \leq C \|f_l\|_{H_\omega^{0,p}(\Omega_T)}, \quad \|u_{l_1} - u_{l_2}\|_{H_\omega^{2,p}(\Omega_T)} \leq C \|f_{l_1} - f_{l_2}\|_{H_\omega^{0,p}(\Omega_T)}, \quad (4.5)$$

в которых постоянная C не зависит от l и f . Так как $f_l \rightarrow f$ в $H_\omega^{0,p}(\Omega_T)$ при $l \rightarrow \infty$, то из (4.5) следует и разрешимость задачи (1.10), и оценка (1.13) для ее решения.

Для доказательства единственности в P^+ -области сначала заметим, что условие (1.11) влечет расходимость в нуле интеграла

$$\int_0^\infty \omega(\tau) \tau^{b_1-p} d\tau = \infty. \quad (4.6)$$

Действительно, по неравенству Гёльдера

$$t^p \leq \int_t^{2t} \omega(\tau) \tau^{b_1} d\tau \left(\int_t^{2t} (\omega(\tau) \tau^{b_1})^{-1/(p-1)} d\tau \right)^{p-1}, \quad 0 < t < \frac{T}{2},$$

и из (1.11) вытекает соотношение

$$\int_t^{2t} \omega(\tau) \tau^{b_1-p} d\tau \geq C \left(\int_t^{2t} (\omega(\tau) \tau^{b_1})^{-1/(p-1)} d\tau \right)^{1-p},$$

приводящее к (4.6). Будем пользоваться неравенством

$$\int_{D(t)} |u(t, x)|^p dx \leq C(n, p, D) t^p \int_{D(t)} \left| \sum_{|m|=2} D_x^m u(t, x) \right|^p dx, \quad u \in H_{\omega}^{2,p}(\Omega_T), \quad (4.7)$$

справедливым для почти всех $t \in (0, T)$. Оно следует из определения пространства $H_{\omega}^{2,p}(\Omega_T)$, абсолютной непрерывности лебеговой меры числовой прямой относительно меры $d\mu = \omega(t) dt$ и строения области Ω , сечение $D(t)$ которой гиперплоскостью $\{(\tau, x) : \tau = t\}$ является гомотетией D (основания Ω) с коэффициентом $\sqrt{t}$. В частности,

$$\|u\|_{H_{\omega_p}^{0,p}(\Omega_T)} \leq C(n, p, D) \|u\|_{H_{\omega}^{2,p}(\Omega_T)}, \quad (4.8)$$

где $\omega_p(t) = \omega(t)t^{-p}$. Через $w \in H_{\omega}^{2,p}(\Omega_T)$ обозначим решение однородной задачи (1.10) и покажем, что $w(t, x) \equiv 0$ в Ω_T . Согласно предложению 4.1 функция $w(t, x)$ совпадает с классическим решением задачи (3.4). Поэтому из (3.6) и расходимости интеграла (4.6) следует, что все коэффициенты c_i в разложении (3.5) для $w(t, x)$ по собственным функциям задачи (1.6) равны нулю, что и доказывает требуемое утверждение.

Шаг 2: Ω есть P^- -область. По лемме 2.1 в Ω_T существует единственная функция, которая для любого $\delta \in (0, T)$ совпадает в Ω_T^δ с решением задачи (4.2). Поскольку постоянная C в (4.3) не зависит от δ , эта функция удовлетворяет неравенству (1.13) и является решением задачи (1.10). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Из доказательства теоремы 1 вытекает, что условие (4.6) влечет единственность решения задачи (1.10).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Сначала покажем необходимость условия (1.11).

Шаг 1: Ω есть P^+ -область. Выберем произвольную неотрицательную, ограниченную на $[0, T]$ функцию $g(t)$, равную нулю в окрестности начала координат, и положим

$$u(t, x) = t^{-\nu_1} v\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \int_0^t g(\tau) \tau^{\nu_1} d\tau, \quad (t, x) \in \Omega_T, \quad (4.9)$$

где ν_1 — первое собственное число задачи (1.6), а $v(\xi)$ — соответствующая ему собственная функция. Ясно, что $u(t, x)$ обращается в нуль на $\partial\Omega$ и, как показывает

непосредственная проверка, удовлетворяет уравнению $Lu = -g(t)v(x/\sqrt{t})$. Принадлежность границы ∂D (основания D) классу C^2 обеспечивает L_p -суммируемость в D производных второго порядка собственной функции $v(\xi)$ с любой степенью $1 < p < \infty$ (см. [12]). Поэтому благодаря выбору $g(t)$ функция $u(t, x)$ принадлежит пространству $H_{\omega}^{2,p}(\Omega_T)$ и является единственным (по предположению теоремы) решением задачи (1.10) с правой частью $f(t, x) = -g(t)v(x/\sqrt{t})$, $f \in H_{\omega}^{0,p}(\Omega_T)$.

Коэрситивная оценка (1.13) для $u(t, x)$ с учетом явного представления (4.9) приводит к соотношению

$$\int_0^T \left(\int_0^t g(\tau) \tau^{\nu_1} d\tau \right)^p \omega(t) t^{b_1-p} dt \leq C \int_0^T g^p(t) \omega(t) t^{n/2} dt,$$

в котором $b_1 = n/2 - p\nu_1$, а C не зависит от g . В частности, для любого $r \in (0, T)$

$$\left(\int_r^T \omega(\tau) \tau^{b_1-p} d\tau \right) \left(\int_0^r g(\tau) \tau^{\nu_1} d\tau \right)^p \leq C \int_0^T g^p(\tau) \omega(\tau) \tau^{n/2} d\tau. \quad (4.10)$$

Выбирая здесь $g(t) = (\omega(t)t^{n/2-\nu_1} + \varepsilon)^{-1/(p-1)} t^{-\nu_1}$ при $t \in (\delta, r)$ и $g(t) = 0$ в остальных точках отрезка $[0, T]$, получаем

$$\left(\int_r^T \omega(\tau) \tau^{b_1-p} d\tau \right) \left(\int_{\delta}^r (\omega(\tau) \tau^{b_1} + \varepsilon \tau^{-\nu_1(p-1)})^{-1/(p-1)} d\tau \right)^{p-1} \leq C$$

с той же постоянной C , что и в (4.10). После перехода к пределу сначала при $\varepsilon \rightarrow 0$, а затем при $\delta \rightarrow 0$ будем иметь

$$\left(\int_r^T \omega(\tau) \tau^{b_1-p} d\tau \right) \left(\int_0^r (\omega(\tau) \tau^{b_1})^{-1/(p-1)} d\tau \right)^{p-1} \leq C,$$

и (1.11) вытекает из произвольности $r \in (0, T)$.

Шаг 2: Ω есть P^- -область. На этот раз вместо (4.9) положим

$$u(t, x) = (-t)^{\mu_1} \tilde{v}\left(\frac{x}{\sqrt{-t}}\right) \int_{-t}^T g(\tau) \tau^{-\mu_1} d\tau, \quad (t, x) \in \Omega_T, \quad (4.11)$$

где $g(t) \geq 0$ – ограниченная на $[0, T]$ функция, μ_1 – первое собственное число задачи (1.7), а $\tilde{v}(\xi)$ – соответствующая ему собственная функция. Непосредственная проверка показывает, что в усеченных областях Ω_T^{δ} функция $u(t, x)$ для любого $p > 1$ является решением задачи

$$Lu = f \text{ в } \Omega_T^{\delta}, \quad f \in L_{\infty}(\Omega_T), \quad u \in W_{p,0}^{2,1}(\Omega_T^{\delta}),$$

с правой частью $f(t, x) = -g(-t)\tilde{v}(x/\sqrt{-t})$. По следствию 2.1 решение этой задачи единственно, и в силу предложения 4.1 функция $u(t, x)$ совпадает с решением

задачи (1.10), существование и единственность которой предполагается условием теоремы. Из коэрцитивной оценки (1.13) получим

$$\int_0^T \left(\int_t^T g(\tau) \tau^{-\mu_1} d\tau \right)^p \omega(t) t^{a_1-p} dt \leq C \int_0^T g(t)^p \omega(t) t^{n/2} dt, \quad (4.12)$$

где $a_1 = n/2 + p\mu_1$. Теперь (1.12) вытекает из необходимого условия справедливости неравенства Харди (4.12) (см. теорему 3.1). Теорема доказана.

Для доказательства необходимости условия (1.2) нам потребуются вспомогательные построения, которые мы сейчас приведем.

Пусть Q_{ρ_0} означает какой-либо n -мерный шар наибольшего радиуса, лежащий в D — основании P^+ - или P^- -области Ω . Зафиксируем произвольную точку $y_0 \in \partial Q_{\rho_0} \cap \partial D$ и определим совокупность $\mathcal{Q}$ всех шаров $Q_\rho \subset Q_{\rho_0}$, $0 < \rho \leq \rho_0$, имеющих y_0 своей граничной точкой. Каждому шару $Q_\rho \subset \mathcal{Q}$ будем сопоставлять P^+ - или P^- -область $\Omega(\rho) \subset \Omega$ с основанием Q_ρ .

Через μ_ρ и ν_ρ будем обозначать первые собственные числа задач (1.6) и (1.7) соответственно в шаре $Q_\rho \subset \mathcal{Q}$. Имеют место оценки

$$C_1(n, D) \rho^{-2} \leq \nu_\rho \leq C_2(n, D) \rho^{-2}, \quad C_1(n, D) \rho^{-2} \leq \mu_\rho \leq C_2(n, D) \rho^{-2}. \quad (4.13)$$

Оценка снизу вытекает из неравенства Фридрихса

$$\int_{Q_\rho} |\varphi(\xi)|^2 d\xi \leq C(n, p) \rho^2 \int_{Q_\rho} |\nabla \varphi(\xi)|^2 d\xi, \quad \varphi \in C_0^\infty(Q_\rho),$$

а для оценки сверху достаточно заметить, что функция $w(\xi) = \rho - |\xi - \xi_0|$, где ξ_0 — центр шара Q_ρ , удовлетворяет неравенству

$$\int_{Q_\rho} w^2(\xi) d\xi \geq C(n, p) \rho^2 \int_{Q_\rho} |\nabla w(\xi)|^2 d\xi.$$

ЛЕММА 4.1. Для любой функции $u \in H_{\omega}^{2,p}(\Omega_T)$ выполнено неравенство

$$\int_{\Omega_T(\rho)} |u(t, x)|^p \omega(t) |t|^{-p} dx dt \leq C(n, p, D) \rho^{2p} \int_{\Omega_T} \sum_{|m|=2} |D_x^m u(t, x)|^p \omega(t) dx dt. \quad (4.14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $D(t)$ — сечение Ω гиперплоскостью $\{(\tau, y) : \tau = t\}$. Из определения $H_{\omega}^{2,p}(\Omega_T)$ и абсолютной непрерывности лебеговой меры числовой прямой относительно меры $d\mu = \omega(t)dt$ следует, что $u(t, x)$ для почти всех $t \in [0, T]$ принадлежит соболевскому пространству $W_{2,0}^2(D(t))$ функций, суммируемых в $D(t)$ вместе с обобщенными производными по x вплоть до второго порядка и имеющих нулевой след на $\partial D(t)$. Поэтому требуемое утверждение сводится к доказательству неравенства

$$|t|^{-p} \int_{Q_{\rho\sqrt{|t|}}} |\varphi(x)|^p dx \leq C(n, p, D) \rho^{2p} \int_{D(t)} \sum_{|m|=2} |D_x^m \varphi(x)|^p dx, \quad \varphi \in W_{2,0}^2(D(t)).$$

Поскольку $D(t)$ является гомотетией области D (основания Ω) с коэффициентом гомотетии $\sqrt{|t|}$, то достаточно показать, что для гладких в $\overline{D}$ функций $\varphi(x)$, равных нулю на ∂D , имеет место неравенство

$$\int_{Q_\rho} |\varphi(x)|^p dx \leq C(n, p, D) \rho^{2p} \int_D \sum_{|m|=2} |D_x^m \varphi(x)|^p dx. \quad (4.15)$$

Если $n > 1$, то из интегрального представления для $\varphi(x)$ (см. [11; теорема 1.6.2/1]) вытекает

$$|\nabla \varphi(x)| \leq C(n) \int_D \sum_{|m|=2} |D_y^m \varphi(y)| |x - y|^{1-n} dy.$$

Поэтому

$$\int_{Q_{2\rho}} |\nabla \varphi(x)|^p dx \leq C(n, p, D) \rho^p \int_D \sum_{|m|=2} |D_x^m \varphi(x)|^p dx$$

и из теоремы вложения (см., например, [11])

$$\int_{Q_{2\rho}} |\varphi(x)|^p dx \leq C(n, p, D) \rho^p \int_D |\nabla \varphi(x)|^p dx$$

приходим к (4.15). Если $n = 1$ и $D = (a, b)$, то этот же результат легко получить, воспользовавшись представлением

$$\varphi(x) = - \int_a^b g(x, \xi) \varphi''(\xi) d\xi$$

через функцию Грина $g(x, \xi)$ уравнения $y''(x) = f(x)$ с краевыми условиями $y(a) = y(b) = 0$. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Пусть Ω есть P^+ -область. Через $\chi_\rho(t, x)$ обозначим характеристическую функцию определенной выше P^+ -области $\Omega(\rho)$ с основанием $Q_\rho \subset \mathcal{Q}$ и положим

$$f(t, x) = -v_\rho\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) g(t) \chi_\rho(t, x), \quad (4.16)$$

где $v_\rho(\xi)$ — первая собственная функция задачи (1.6) в шаре Q_ρ , а $g(t) \geq 0$ — произвольная ограниченная на $(0, T)$ функция с носителем в интервале $(r/4, r) \subset (0, T)$. Ясно, что $f \in H_{\omega}^{0,p}(\Omega_T)$. По предположению теоремы задача (1.10) с такой правой частью однозначно разрешима вместе с коэрцитивной оценкой (1.13), которую в силу неравенства (4.14) и явного вида $f(t, x)$ можно записать в виде

$$\int_{r/4}^r \int_{Q_{\rho\sqrt{t}}} |u(t, x)|^p \omega(t) t^{-p} dx dt \leq C \rho^{2p} \|v_\rho\|_{L_p(Q_\rho)}^p \int_{r/4}^r g^p(t) \omega(t) t^{n/2} dt, \quad (4.17)$$

где C не зависит от g, ρ и r . Согласно выбору $f(t, x)$ и предположению о единственности решения задачи (1.10) функция $u(t, x)$ обращается в нуль в окрестности начала координат, а значит, по предложению 4.1 ограничена в Ω_T . Так как $f(t, x) \leq 0$, то по принципу максимума $u(t, x) \geq 0$ в Ω_T .

Для оценки снизу интеграла в левой части (4.17) рассмотрим функцию

$$w(t, x) = t^{-\nu_\rho} v_\rho \left(\frac{x}{\sqrt{t}} \right) \int_0^t g(\tau) \tau^{\nu_\rho} d\tau, \quad (4.18)$$

где $v_\rho(\xi)$ и $g(t)$ имеют тот же смысл, что и в (4.16), а ν_ρ — первое собственное число задачи (1.6) в шаре Q_ρ . Функция $w(t, x)$ является неотрицательным, ограниченным в $\Omega_T(\rho)$ решением задачи

$$Lw = f \text{ в } \Omega(\rho), \quad w|_{\partial\Omega(\rho)} = 0 \quad (4.19)$$

с правой частью $f(t, x)$ из (4.16). По принципу максимума $w(t, x) \leq u(t, x)$ в $\Omega_T(\rho)$, и из (4.17) приходим к соотношению

$$\int_{r/4}^r \left(\int_0^t g(\tau) \tau^{\nu_\rho} d\tau \right)^p \omega(t) t^{b_\rho - p} dt \leq C \rho^{2p} \int_{r/4}^r g^p(t) \omega(t) t^{n/2} dt, \quad (4.20)$$

где $b_\rho = n/2 - p\nu_\rho$, а C не зависит от ρ .

Для доказательства (1.2) покажем, что для любого интервала $(t_0 - l, t_0 + l) \subset (r/2, r)$ выполнено неравенство

$$\left(\int_{t_0-l}^{t_0+l} \omega(\tau) d\tau \right) \left(\int_{t_0-l}^{t_0+l} (\omega(\tau))^{-1/(p-1)} d\tau \right)^{p-1} \leq Cl^p \quad (4.21)$$

с постоянной C , не зависящей от t_0, r и l . Пусть носитель функции $g(t)$ находится на отрезке $[t_0 - 3l/2, t_0 - l]$, который, как нетрудно видеть, содержится в $(r/4, r)$. Из (4.20) вытекает

$$\left(\int_{t_0-l}^{t_0+l} \omega(\tau) \tau^{b_\rho - p} d\tau \right) \left(\int_{t_0-3l/2}^{t_0-l} g(\tau) \tau^{\nu_\rho} d\tau \right)^p \leq C \rho^{2p} \int_{t_0-3l/2}^{t_0-l} g^p(\tau) \omega(\tau) \tau^{n/2} d\tau.$$

Выбрав $g(\tau) = (\omega(\tau) \tau^{n/2 - \nu_\rho} + \varepsilon)^{-1/(p-1)}$ при $\tau \in [t_0 - 3l/2, t_0 - l]$ и $g(\tau) = 0$ при $\tau \notin [t_0 - 3l/2, t_0 - l]$, получаем

$$\left(\int_{t_0-l}^{t_0+l} \omega(\tau) \tau^{b_\rho - p} d\tau \right) \left(\int_{t_0-3l/2}^{t_0-l} (\omega(\tau) \tau^{b_\rho} + \varepsilon \tau^{-\nu_\rho(p-1)})^{-1/(p-1)} d\tau \right)^{p-1} \leq C \rho^{2p},$$

что после перехода к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ дает

$$\left(\int_{t_0-l}^{t_0+l} \omega(\tau) \tau^{b_\rho - p} d\tau \right) \left(\int_{t_0-3l/2}^{t_0-l} (\omega(\tau) \tau^{b_\rho})^{-1/(p-1)} d\tau \right)^{p-1} \leq C \rho^{2p}. \quad (4.22)$$

Определим $\rho \in (0, 1]$, положив

$$\rho = \begin{cases} \rho_0 \left(\frac{4l}{r} \right)^{1/2}, & \text{если } \rho_0 \leq 1; \\ \left(\frac{4l}{r} \right)^{1/2}, & \text{если } \rho_0 > 1. \end{cases} \quad (4.23)$$

В силу оценок (4.13) первого собственного числа ν_ρ

$$C_1 t_0^{\nu_\rho} \leq \tau^{\nu_\rho} \leq C_2 t_0^{\nu_\rho}, \quad C_1 t_0^{-\nu_\rho} \leq \tau^{-\nu_\rho} \leq C_2 t_0^{-\nu_\rho} \quad \text{при } \tau \in \left(t_0 + l, t_0 - \frac{3l}{2} \right),$$

где C_1, C_2 — положительные постоянные, не зависящие от t_0, l и ρ . Поэтому (4.22) приводит к неравенству

$$\left(\int_{t_0-l}^{t_0+l} \omega(\tau) d\tau \right) \left(\int_{t_0-3l/2}^{t_0-l} (\omega(\tau))^{-1/(p-1)} d\tau \right)^{p-1} \leq Cl^p. \quad (4.24)$$

По условию удвоения (1.4)

$$\int_{t_0-l}^{t_0+l} (\omega(\tau))^{-1/(p-1)} d\tau \leq C \int_{t_0-3l/2}^{t_0-l} (\omega(\tau))^{-1/(p-1)} d\tau,$$

что вместе с (4.24) влечет требуемое соотношение (4.21). Аналогичными рассуждениями теорема доказывается и в P^- -области. В этом случае вместо (4.24) можно получить неравенство

$$\left(\int_{t_0-3l/2}^{t_0-l} \omega(\tau) d\tau \right) \left(\int_{t_0-l}^{t_0+l} (\omega(\tau))^{-1/(p-1)} d\tau \right)^{p-1} \leq Cl^p, \quad (4.25)$$

и (4.21) следует уже из условия удвоения (1.3). Если условия (1.3), (1.4) заменить предположением, что требуемая в теореме разрешимость задачи (1.10) имеет место одновременно в каких-либо P^+ - и P^- -областях, то из (4.24) и неравенства Гёльдера вытекает

$$\int_{t_0-l}^{t_0+l} \omega(\tau) d\tau \leq Cl^p \left(\int_{t_0-3l/2}^{t_0-l} (\omega(\tau))^{-1/(p-1)} d\tau \right)^{1-p} \leq C \int_{t_0-3l/2}^{t_0-l} \omega(\tau) d\tau,$$

и из (4.25) вновь приходим к (4.21). Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Ограничимся рассмотрением P^+ -области. В каждой из конечных областей Ω_T построим ту же последовательность задач, что и в (4.4).

Шаг 1. Предположим, что выполнено условие (1.16) при $k = 0$. Воспользуемся произволом в выборе T . Поскольку $u_l = 0$ в Ω_{δ_l} , существует единственная функция v_l , определенная в Ω , которая для любого $0 < T < \infty$ совпадает в Ω_T с решением u_l задачи (4.4). Так как постоянная C в (4.5) не зависит от T , то v_l является решением задачи

$$Lv_l = f \text{ в } \Omega, \quad f_l \in H_{\omega}^{0,p}(\Omega), \quad v_l \in H_{\omega}^{2,p}(\Omega), \quad (4.26)$$

и удовлетворяет неравенствам

$$\|v_l\|_{H_{\omega}^{2,p}(\Omega)} \leq C \|f_l\|_{H_{\omega}^{0,p}(\Omega)}, \quad \|v_{l_1} - v_{l_2}\|_{H_{\omega}^{2,p}(\Omega)} \leq C \|f_{l_1} - f_{l_2}\|_{H_{\omega}^{0,p}(\Omega)}. \quad (4.27)$$

Константы в этих неравенствах не зависят от l , что влечет существование решения задачи (1.14) вместе с соответствующей оценкой (1.20). Единственность решения следует из замечания 4.1.

Шаг 2. Пусть одновременно выполнены оба условия (1.16) и (1.17). Через $z_{k,l}(t, x)$ обозначим функцию, определенную в (3.22), в которой постоянные c_i из (3.21) выбраны для $\delta = \delta_l$, $f = f_l$, и положим $\tilde{u}_l(t, x) = u_l(t, x) - z_{k,l}(t, x)$. В силу предположений (1.16) и (1.17) функция $\tilde{u}_l(t, x)$ является решением задачи

$$L\tilde{u}_l = f_l \text{ в } \Omega_T, \quad f_l \in H_{\omega}^{0,p}(\Omega_T), \quad \tilde{u}_l \in H_{\omega}^{2,p}(\Omega_T).$$

Решение этой задачи с предписанным выше значением для $\tilde{u}_l(t, x)$ в Ω_{δ_l} единственно. Умножим $\tilde{u}_l(t, x)$ на срезающую функцию $\eta \in C^{\infty}[0, T]$ такую, что $\eta(t) = 0$ при $t \in (0, \delta)$, $\eta(t) = 1$ при $t \in [2\delta, T]$, $0 < \delta < T/2$, и $|\eta'(t)| \leq \text{const } \delta^{-1}$. Тогда $L\tilde{u}_l = \eta f_l - \eta' \tilde{u}_l$ и в силу оценок (2.10), (3.23)

$$\|\tilde{u}_l\|_{H_{\omega}^{2,p}(\Omega_T^{2\delta})} \leq C (\|f_l\|_{H_{\omega}^{0,p}(\Omega_T)} + \|u_l(t, x) - z_{k,l}\|_{H_{\omega}^{0,p}(\Omega_T^{\delta})}) \leq C \|f_l\|_{H_{\omega}^{0,p}(\Omega)}.$$

Постоянная C здесь не зависит от δ , l и T . Поэтому существует единственная функция v_l , являющаяся решением задачи (4.26), которая для любого $0 < T < \infty$ совпадает в Ω_T с $\tilde{u}_l$ и удовлетворяет неравенствам (4.27). Отсюда следует разрешимость задачи (1.14) вместе с оценкой (1.20).

Покажем единственность решения. Заметим, что условие (1.16) влечет расходимость в нуле интеграла от функции $\omega(\tau)\tau^{b_{k+1}-p}$, а условие (1.17) – расходимость на бесконечности интеграла от $\omega(\tau)\tau^{b_k-p}$. Это нетрудно показать, применяя соображения, использованные при выводе (4.6) из (1.11). Таким образом (см. (1.8)),

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \omega(\tau) \tau^{b_m-p} d\tau &= \infty, & m = k+1, \dots, \\ \int_0^{\infty} \omega(\tau) \tau^{b_m-p} d\tau &= \infty, & m = 1, \dots, k. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Пусть $w \in H_{\omega}^{0,p}(\Omega)$ – решение однородной задачи (1.14). В силу предложения 4.1 функция $w(t, x)$ совпадает с классическим решением задачи (3.4). Ввиду неравенств (3.6), (4.8) и расходимости интегралов (4.28) все коэффициенты c_i в разложении (3.5) для $w(t, x)$ по собственным функциям задачи (1.6) равны нулю, что и доказывает единственность решения. Существование и единственность решения задачи (1.14) в P^- -области устанавливаются аналогичными рассуждениями. Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Проведем рассуждения в P^+ -области. Пусть правая часть $f \in H_{\omega}^{0,p}(\Omega)$ уравнения в (1.14) равна нулю в $\Omega \setminus \Omega_T$. В этом случае согласно предположению теоремы решение $u(t, x)$ задачи (1.14) удовлетворяет неравенству

$$\|u\|_{H_{\omega}^{2,p}(\Omega_T)} \leq C \|f\|_{H_{\omega}^{0,p}(\Omega_T)} \quad (4.29)$$

с постоянной C , не зависящей от u , T и f .

Сначала предположим, что выполнено условие (4.6), которое по замечанию 4.1 обеспечивает единственность решения задачи (1.10) в области Ω_T . Решение этой задачи – функция $u(t, x)$. Из неравенства (4.29) и уже доказанной теоремы 2 вытекает соотношение (1.11), в котором точная верхняя грань не зависит от T . Отсюда следует условие (1.16) при $k = 0$.

Если условие (4.6) не выполнено, то в силу ограничения (1.21) существует натуральное k , для которого

$$\int_0^{\infty} \omega(\tau) \tau^{b_k - p} d\tau < \infty, \quad \int_0^{\infty} \omega(\tau) \tau^{b_{k+1} - p} d\tau = \infty. \quad (4.30)$$

Рассмотрим задачу (1.14) с правой частью $f(t, x) = g(t) v_k(x/\sqrt{t})$, где $v_k(\xi)$ – какая-либо собственная функция задачи (1.6), соответствующая k -му собственному значению ν_k , а $g(t)$ – неотрицательная ограниченная функция с носителем на $[0, T]$. Из сходимости первого интеграла в (4.30) следует, что $f \in H_{\omega}^{0,p}(\Omega)$, а решение, как нетрудно проверить, задается формулой

$$u(t, x) = \begin{cases} t^{-\nu_k} v_k\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \int_t^T g(\tau) \tau^{\nu_k} d\tau, & \text{если } (t, x) \in \Omega_T; \\ 0, & \text{если } (t, x) \in \Omega \setminus \Omega_T. \end{cases}$$

Коэрцитивная оценка (4.29) влечет неравенство

$$\int_0^T \left(\int_t^T g(\tau) \tau^{\nu_k} d\tau \right)^p \omega(t) t^{b_k - p} dt \leq C \int_0^T g^p(t) t^{n/2} \omega(t) dt.$$

Пользуясь теоремой 3.1, приходим к соотношению

$$\sup_{t \in (0, T)} \left(\int_0^t \omega(\tau) \tau^{b_k - p} d\tau \right) \left(\int_t^T (\omega(\tau) \tau^{b_k})^{-1/(p-1)} d\tau \right)^{p-1} < C,$$

которое в силу независимости C от T приводит к требуемому условию (1.17).

Осталось показать выполнение (1.16). Для этого рассмотрим еще одну задачу (1.14), но уже с правой частью $f(t, x) = -g(t)v_{k+1}(x/\sqrt{t})$. Здесь $v_{k+1}(\xi)$ — какая-либо собственная функция из (1.6), соответствующая $(k+1)$ -му собственному числу ν_{k+1} , а $g(t)$ — использованная выше функция, равная нулю в окрестности начала координат. Решение этой задачи имеет вид

$$u(t, x) = t^{-\nu_{k+1}} v_{k+1} \left(\frac{x}{\sqrt{t}} \right) \int_0^t g(\tau) \tau^{-\nu_{k+1}} d\tau + w(t, x), \quad (4.31)$$

где $w(t, x)$ удовлетворяет однородному уравнению $Lw = 0$ и имеет нулевой след на $\partial\Omega$. Покажем, что $w(t, x) \equiv 0$. Действительно, первое слагаемое в (4.31) равно нулю в окрестности начала координат. Поэтому $w \in H_{\omega}^{2,p}(\Omega_T)$ и из неравенств (3.6), (4.8) и расходимости в нуле интегралов в (4.30) следует, что в разложении (3.5) для $w(t, x)$ участвуют только слагаемые, соответствующие собственным значениям $\nu'_i \leq \nu_k$. То есть $w(t, x) = \sum_{\nu'_i \leq \nu_k} c_i t^{-\nu'_i} v_i(x/\sqrt{t})$ и

$$\int_{D(t)} |w(t, x)|^p dx \geq C(n, D) t^{n/2} \left(\sum_{\nu'_i \leq \nu_k} 2^{-2\nu'_i} c_i^2 t^{-2\nu'_i} \right)^{p/2}.$$

Таким образом, в силу обращения $g(t)$ в нуль при $t > T$ и неравенств $\nu_{k+1} > \nu_i$, $i = 1, 2, \dots, k$, для решения (4.31) выполнена оценка

$$\int_{D(t)} |u(t, x)|^p dx \geq C t^{n/2} \left(\sum_{\nu'_i \leq \nu_k} c_i^2 2^{-2\nu'_i} t^{-2\nu'_i} \right)^{p/2}, \quad t \geq 2T.$$

Как уже отмечалось выше, условие (1.17) влечет расходимость на бесконечности интегралов в (4.28). Отсюда согласно (4.7) вытекает равенство нулю оставшихся коэффициентов c_i в разложении $w(t, x)$. Далее, из представления (4.31), в котором $w(t, x) \equiv 0$, и коэрцитивной оценки (4.29) следует неравенство

$$\int_0^T \left(\int_0^t g(\tau) \tau^{\nu_{k+1}} d\tau \right)^p \omega(t) t^{b_{k+1}-p} dt \leq C \int_0^T g(t) t^{n/2} \omega(t) dt.$$

Действуя как в доказательстве теоремы 2 при выводе условия (1.11), будем иметь

$$\sup_{t \in (0, T)} \left(\int_t^T \omega(\tau) \tau^{b_{k+1}-p} d\tau \right) \left(\int_0^t (\omega(\tau) \tau^{b_{k+1}})^{-1/(p-1)} d\tau \right)^{p-1} < \infty.$$

Поскольку точная верхняя грань здесь не зависит от T , приходим к искомому соотношению (1.16). Требуемое утверждение в P^- -области Ω получается аналогичными рассуждениями. Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6. Вновь ограничимся рассмотрением задачи (1.14) в P^+ -области Ω и будем придерживаться обозначений, использованных при доказательстве теоремы 3. По теореме 5 вес $\omega(t)$ удовлетворяет либо условию (1.16) при $k = 0$, либо одновременно двум условиям (1.16) и (1.17) для некоторого натурального k .

Пусть выполнено условие (1.16) при $k = 0$, обеспечивающее единственность решения задачи (1.10). Повторив рассуждения теоремы 3 в конечной области Ω_T , в силу произвольности T придем к неравенству (4.24) для интервалов $(t_0 - l, t_0 + l) \subset (r/2, r) \subset (0, \infty)$. Из условия удвоения (1.3) следует, что

$$\left(\int_{t_0-3l/2}^{t_0-l} \omega(\tau) d\tau \right) \left(\int_{t_0-3l/2}^{t_0-l} (\omega(\tau))^{-1/(p-1)} d\tau \right)^{p-1} \leqslant Cl^p. \quad (4.32)$$

В частности, это неравенство справедливо для произвольного интервала $(t_0 - 3l/2, t_0 - l) \subset (5\rho/7, \rho)$, где $\rho = 7r/8$, и (4.32) можно записать в виде

$$\sup_{0 < \rho < \infty} \sup_{I \subset (5\rho/7, \rho)} \left(\frac{1}{|I|} \int_I \omega(\tau) d\tau \right) \left(\frac{1}{|I|} \int_I (\omega(\tau))^{-1/(p-1)} d\tau \right)^{p-1} < \infty.$$

Отсюда (1.15) выводится тем же способом, каким соотношение (2.3) было получено из условия (1.15) (см. предложение 2.1).

Предположим теперь, что для некоторого натурального k выполнены оба условия (1.16) и (1.17). Рассмотрим задачу (1.14) с правой частью $f(t, x)$ из (4.16). Пользуясь условиями (1.16), (1.17), предположением о единственности, финитностью $f(t, x)$ и равенством (3.3) для функции Грина, нетрудно показать, что решение имеет вид

$$u(t, x) = G(f)(t, x) + \sum_{\nu'_i \leqslant \nu_k} c_i t^{-\nu'_i} v_i \left(\frac{x}{\sqrt{t}} \right),$$

где

$$G(f)(t, x) = - \int_{\Omega} G(t, \tau, x, y) f(\tau, y) dy d\tau, \quad c_i = \int_{\Omega} f(\tau, y) H(\tau, y) \tau^{\nu'_i} dy d\tau,$$

а $H(\tau, y)$ имеет тот же смысл, что и в (3.3). Исходя из явного вида $f(t, x)$, в силу (4.14) и коэрцитивной оценки (1.20) придем к неравенству (4.17), из которого будем иметь

$$\begin{aligned} \int_{r/4}^r \int_{Q_{\rho\sqrt{t}}} |G(f)(t, x)|^p dx dt &\leqslant C \rho^{2p} \|v_{\rho}\|_{L_p(Q_{\rho})}^p \int_{r/4}^r g^p(t) \omega(t) t^{n/2} dt \\ &+ C \sum_{\nu'_i \leqslant \nu_k} |c_i|^p \|v_i\|_{L_p(Q_{\rho})}^p \int_{r/4}^r \omega(t) t^{b'_i - p} dt, \end{aligned} \quad (4.33)$$

где $b'_i = n/2 - p\nu'_i$. По неравенству Гёльдера

$$|c_i|^p \leqslant \rho^{n(p-1)} \|v_{\rho}\|_{L_p(Q_{\rho})}^p \left(\int_{r/4}^r (\omega(t) t^{b'_i})^{-1/(p-1)} dt \right)^{p-1} \int_{r/4}^r g^p(t) \omega(t) t^{n/2} dt. \quad (4.34)$$

Прежде чем подставить это соотношение в (4.33), приведем вспомогательные оценки слагаемых, участвующих в (4.33) и (4.34). Сначала заметим, что

$$\left(\int_{r/4}^r \omega(t) t^{b'_i - p} dt \right) \left(\int_{r/4}^r (\omega(t) t^{b'_i})^{-1/(p-1)} dt \right)^{p-1} \leq C. \quad (4.35)$$

Действительно, по условию удвоения (1.3)

$$\int_{r/4}^r \omega(t) dt \leq C \int_{r/8}^{r/4} \omega(t) dt$$

и левая часть в (4.35) мажорируется выражением

$$\sup_{r \in (0, \infty)} \left(\int_0^{r/4} \omega(t) t^{b'_i - p} dt \right) \left(\int_{r/4}^\infty (\omega(t) t^{b'_i})^{-1/(p-1)} dt \right)^{p-1}.$$

Так как константы $b'_i = n/2 - p\nu'_i$ для номеров i , удовлетворяющих неравенству $\nu'_i \leq \nu_k$, могут принимать только значения b_j , $j = 1, 2, \dots, k$, то конечность точной верхней грани следует из условия (1.17) и предложения 3.1. Далее, граница ∂D принадлежит классу C^2 . Поэтому собственные функции $v_i(\xi)$ липшицевы (см., например, [12]), а поскольку шары $Q_\rho \subset D$ и область D имеют общую граничную точку и $v(\xi) = 0$ на ∂D ,

$$\|v_i\|_{L_p(Q_\rho)}^p \leq C \rho^{n(p+1)}. \quad (4.36)$$

Учитывая теперь в (4.33) соотношения (4.34)–(4.36) для $\rho \in (0, 1]$ и пользуясь очевидным неравенством $\rho^{2np+p-n} \leq \rho^{2p}$, получаем

$$\int_{r/4}^r \int_{Q_{\rho\sqrt{t}}} |G(f)(t, x)|^p dx dt \leq C \rho^{2p} \|v_\rho\|_{L_p(Q_\rho)}^p \int_{r/4}^r g^p(t) \omega(t) t^{n/2} dt. \quad (4.37)$$

Для оценки снизу интеграла в левой части (4.37) отметим, что неотрицательная, ограниченная в Ω_r функция $\tilde{u}(t, x) = -G(f)(t, x)$ удовлетворяет уравнению $Lu = f$ в Ω . Рассмотрим ограниченную в $\Omega_r(\rho)$ функцию $w(t, x) \geq 0$, определенную в (4.18), которая удовлетворяет такому же уравнению (4.19) в $\Omega(\rho) \subset \Omega$. Так как $w(t, x) = 0$ на $\partial\Omega(\rho)$, то по принципу максимума $\tilde{u}(t, x) \geq w(t, x)$ и из (4.37) приходим к неравенству (4.20). Рассуждая, как при доказательстве теоремы 3, получаем соотношение (4.24) для интервалов $(t_0 - l, t_0 + l) \subset (r/2, r)$. Теперь доказательство завершается, как в случае выполнения условия (1.16) при $k = 0$. Аналогичным способом теорема устанавливается и в P^- -области. Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7. *Шаг 1: единственность решения.* Перенесем центр шара B_R в точку $(R, 0)$ и запишем интегральное представление решения $w \in W_{p,0}^{2,1}(B_R)$ однородной задачи через функцию Грина шара B_R

$$w(t, x) = \int_{B_R(\tau)} G(t, \tau, x, y) w(\tau, y) dy, \quad (t, x) \in B_R, \quad t > \tau,$$

где $B_R(\tau)$ — сечение B_R гиперплоскостью $\{(t, x) : t = \tau\}$. Применяя для $G(t, \tau, x, y)$ при $t \geq 2\tau$ оценку (3.11), получаем

$$|w(t, x)| \leq C t^{-n/2-\mu} \tau^\mu \int_{B_R(\tau)} |w(\tau, y)| dy, \quad t \geq 2\tau.$$

Так как n -мерная мера Лебега $B_R(\tau)$ не превосходит $\text{const } \tau^{n/2}$, то по неравенству Гёльдера

$$|w(t, x)|^p \tau^{n/2-p(n/2+\mu+1)} \leq C t^{-p(n/2+\mu)} \tau^{-p} \int_{B_R(\tau)} |w(\tau, y)|^p dy, \quad t \geq 2\tau.$$

Зафиксируем (t, x) и проинтегрируем это неравенство по τ на интервале $(\delta, t/2)$. В результате будем иметь

$$|w(t, x)|^p \int_{\delta}^{t/2} \tau^\gamma d\tau \leq C t^{-p(n/2+\mu)} \int_{B_R} |w(\tau, y)|^p \tau^{-p} dy d\tau,$$

где $\gamma = n/2 - p(n/2 + \mu + 1)$. Из неравенства

$$\int_{B_R} |w(\tau, y)|^p \tau^{-p} dy d\tau \leq C \|w\|_{W_{p,0}^{2,1}(B_R)}$$

вытекает соотношение

$$|w(t, x)|^p \leq C \left(\int_{\delta}^{t/2} \tau^\gamma d\tau \right)^{-1} t^{-p(n/2+\mu)} \|w\|_{W_{p,0}^{2,1}(B_R)}.$$

Далее, $\gamma < -1$ и интеграл от функции τ^γ расходится в нуле. Следовательно, постоянную δ можно выбрать так, что $|w(t, x)| < \varepsilon$ для заданного $\varepsilon > 0$. Таким образом, $w \equiv 0$ в B_R в силу произвольности ε и $(t, x) \in B_R$. Единственность доказана.

Шаг 2: достаточность условия $\mu(R) > d$. Доказательство разрешимости задачи (1.22) в шаре B_R при выполнении условия $\mu(R) > d$ во многом сходно с доказательством теоремы 1. Поместим центр шара в начало координат и для $\delta_k \rightarrow +0$ при $k \rightarrow \infty$ определим в B_R последовательность функций f_k , равных нулю при $t < -R + \delta_k$ и совпадающих при $t > -R + \delta_k$ с правой частью f уравнения в (1.22). Рассмотрим в усеченных шарах $B_R(\delta_m)$ (см. (2.21)) вспомогательные задачи

$$Lu_{k,m} = f_k \text{ в } B_R(\delta_m), \quad u_{k,m} \in W_{p,0}^{2,1}(B_R(\delta_m)), \quad m \geq k,$$

однозначная разрешимость которых установлена в лемме 2.2. Пользуясь интегральным представлением решений $u_{k,m}$ через функцию Грина и неравенствами (2.23) и (3.26), придем к оценке

$$\|u_{k,m}\|_{W_{p,0}^{2,1}(B_R(\delta_m))} \leq C \|f_k\|_{L_p(B_R(\delta_m))} \quad (4.38)$$

с постоянной C , не зависящей от k и m .

Функция $u_{k,m}$, продолженная нулем при $t < -R + \delta_m$, удовлетворяет уравнению $Lu_{k,m} = f_k$ уже в усеченном шаре $B_R \cap \{(t, x) : t < R - \delta_m\}$. Поэтому ввиду произвольности $m \geq k$ из (4.38) следует существование решений задач

$$Lu_k = f_k \text{ в } B_R, \quad u_k \in W_{p,0}^{2,1}(B_R),$$

вместе с оценками

$$\|u_k\|_{W_{p,0}^{2,1}(B_R)} \leq C \|f_k\|_{L_p(B_R)}, \quad \|u_{k_1} - u_{k_2}\|_{W_{p,0}^{2,1}(B_R)} \leq C \|f_{k_1} - f_{k_2}\|_{L_p(B_R)},$$

в которых C не зависит от k . Отсюда с помощью стандартных рассуждений вытекают разрешимость задачи (1.22) и неравенство (1.23). Достаточность доказана.

Шаг 3: необходимость условия $\mu(R) > d$. Не ограничивая общности, будем считать, что центр шара B_R находится в точке $(-R, 0)$. Рассуждения основаны на построении в B_R аналога функции (4.11), использованной при доказательстве теоремы 2.

Пусть $\tilde{v}(\xi)$ – первая собственная функция задачи (1.7), соответствующая собственному числу $\mu(R) = \mu$.

Так как $\tilde{v}(\xi) = 0$ на ∂Q_{2R} , то, совершая в E_n гомотетию вида

$$\xi_i = \xi_i(t, x) = \left(\frac{-2R}{(2R+t)t} \right)^{1/2} x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

которая для каждого $t \in (-2R, 0)$ осуществляет взаимно однозначное соответствие между Q_{2R} и сечением шара B_R гиперплоскостью $\{(\tau, y) : \tau = t\}$, получаем $(-t)^\mu \tilde{v}(\xi(t, x)) = 0$ на $\partial B_R \setminus \{(-2R, 0)\}$.

Положим теперь

$$u(t, x) = (-t)^\mu \tilde{v}(\xi(t, x)) \int_{-t}^R g(\tau) \tau^{-\mu} d\tau, \quad (t, x) \in B_R, \quad (4.39)$$

где $g(t) \in L_p([0, 2R])$, $g(t) = 0$ на $(R, 2R)$.

Функция $u(t, x)$ принадлежит соболевскому пространству $W_{p,0}^{2,1}$ в каждом из усеченных шаров $B_R \cap \{(t, x) : t < -\delta\}$, $0 < \delta < 2R$, и удовлетворяет уравнению

$$Lu = \frac{(-t)^\mu}{2R+t} \left(\int_{-t}^R g(\tau) \tau^{-\mu} d\tau \right) \left(\sum_{i=1}^n \xi_i \tilde{v}_{\xi_i} - \mu \tilde{v} \right) - g(-t) \tilde{v} = f(t, x).$$

Поскольку $f(t, x) = 0$ в той части B_R , где $t < -R$, после несложного подсчета получаем

$$\|f\|_{L_p(B_R)} \leq C \int_0^R |g(t)|^p t^{n/2} dt. \quad (4.40)$$

Следовательно, $f \in L_p(B_R)$ и согласно предположению задача (1.22) имеет единственное решение, для которого выполнена оценка (1.23). Ясно, что этим решением является функция (4.39). Из оценок (1.23) и (4.40) следует неравенство

$$\int_0^R \left| \int_t^R g(\tau) d\tau \right|^p t^{a-p} dt \leq C \int_0^R |g(t)|^p t^{n/2} dt,$$

в котором $a = n/2 + p\mu$, а постоянная C не зависит от g . Отсюда по теореме 3.1 придем к соотношению

$$\sup_{t \in (0, R)} \left(\int_0^t \tau^{a-p} d\tau \right) \left(\int_t^R \tau^{-a/(p-1)} d\tau \right)^{p-1} < \infty,$$

эквивалентному условию теоремы $\mu(R) > d$. Необходимость доказана. Теорема доказана.

Список литературы

1. Петровский И. Г. О решении первой краевой задачи для уравнения теплопроводности // Уч. записки МГУ. 1934. № 2. С. 55–59.
2. Ландис Е. М. Необходимое и достаточное условие регулярности граничной точки для уравнения теплопроводности // Докл. АН СССР. 1969. Т. 185. № 3. С. 517–520.
3. Evans L. C., Gariepy R. F. Wiener's criterion for the heat equation // Arch. Ration. Mech. Anal. 1982. V. 78. № 4. P. 293–314.
4. Михайлов В. П. О задаче Дирихле для параболического уравнения. I // Матем. сб. 1963. Т. 61. № 1. С. 40–64.
5. Кондратьев В. А. Краевые задачи для параболических уравнений в замкнутых областях // Труды ММО. 1966. Т. 15. С. 400–451.
6. Крылов Н. В. Гладкость функции выигрыша для управляемого диффузионного процесса в области // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1989. Т. 52. № 1. С. 66–96.
7. Muckenhoupt B. Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function // Trans. Amer. Math. Soc. 1972. V. 165. P. 207–226.
8. Coifman R. R., Fefferman C. Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals // Studia Math. 1974. V. 51. P. 241–250.
9. Muckenhoupt B. Hardy's inequality with weights // Studia Math. 1972. V. 44. № 1. P. 31–38.
10. Stein E. M. Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals. Princeton: Princeton Univ. Press, 1993.
11. Мазья В. Г. Пространства Соболева. Л.: Изд-во ЛГУ, 1985.
12. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уралцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
13. Ладыженская О. А., Уралцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1964.

Владимирский государственный
педагогический университет

Поступила в редакцию
14.06.2001