Общероссийский математический портал

М. И. Дьяченко, К. С. Казарян, О множествах сходимости и расходимости кратных ортогональных рядов, *Матем. сб.*, 2002, том 193, номер 9, 41–62

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm678>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 14:33:09

УДК 517.51

М. И. Дьяченко, К. С. Казарян

О множествах сходимости и расходимости кратных ортогональных рядов

В статье изучаются кратные ряды Фурье по равномерно ограниченным ортонормированным системам (ОНС). Получены следующие результаты.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — полная ортонормированная система на $[0, 1]$, равномерно ограниченная числом M на $[0, 1]$, $m \geq 2$ и $\Phi(m) = \{\varphi_n(\mathbf{x})\}_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^m}$, где $\varphi_n(\mathbf{x}) = \varphi_{n_1}(x_1) \cdots \varphi_{n_m}(x_m)$. Тогда существует функция $f(\mathbf{x}) \in L([0, 1]^m)$ такая, что ее ряд Фурье по системе $\Phi(m)$ расходится по кубам на некотором измеримом множестве $\mathcal{H} \subset [0, 1]^m$ с $\mu_m(\mathcal{H}) \geq 1 - (1 - 1/M^2)^m$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $M > 1$, натуральное $m \geq 2$ и произвольное измеримое множество $E \subset [0, 1]$ таково, что $\mu(E) = 1 - 1/M^2$. Тогда существует равномерно ограниченная числом M полная ортонормированная система Φ на $[0, 1]$ такая, что кратный ряд Фурье любой функции $f(\mathbf{x}) \in L([0, 1]^m)$ по системе $\Phi(m)$ сходится по кубам к $f(\mathbf{x})$ п.в. на E^m .

Окончательные результаты в этом направлении получены и для неполных равномерно ограниченных ОНС.

Библиография: 10 названий.

§ 1. Введение

Расходящиеся ряды Фурье по тригонометрической и другим ортогональным системам изучались многими авторами. Здесь следует упомянуть Фату, Лузина, Колмогорова, Марцинкевича, Меньшова, Харди, Рогозинского, Стейна, Кахана, Ульянова, Тандори, Шишпа и многих других. Подробный обзор этих результатов можно найти в работах [1], [2]. Наиболее известной здесь является теорема Колмогорова [3], который доказал существование почти всюду расходящегося тригонометрического ряда Фурье (вскоре Колмогоров построил и всюду расходящийся тригонометрический ряд Фурье, но поскольку мы будем рассматривать общие ортогональные ряды, нас прежде всего интересуют результаты о сходимости и расходимости почти всюду).

В теории общих ортогональных рядов одной из наиболее значительных представляется теорема Бочкарева [4], который доказал в 1975 г., что для любой равномерно ограниченной ортонормированной системы (ОНС) существует интегрируемая функция, у которой ряд Фурье по данной ортонормированной системе расходится на множестве положительной меры. Несколько лет назад один из авторов [5]

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 00-01-00042), фонда SAV Государственного секретариата образования, культуры и спорта Испании (грант № 2000-0002) и BFM (грант № 2001-0189).

доказал, что для любого измеримого подмножества $[0, 1]$ с мерой меньше единицы существует полная равномерно ограниченная ортонормированная система такая, что любой ряд Фурье–Лебега по этой системе сходится почти всюду на заданном множестве. Решая проблему, поставленную Алексичем [6], Казарян и Ульянов [7] усилили этот результат, доказав, что у такой системы функции Лебега можно сделать неограниченными в каждой точке.

Целью настоящей работы является обобщение на многомерный случай следующих двух теорем, доказанных одним из авторов [8].

ТЕОРЕМА А. Пусть $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – ортонормированная система на $[0, 1]$, равномерно ограниченная числом $M \geq 1$. Тогда существует функция $f(x) \in L([0, 1])$ такая, что ее ряд Фурье по этой системе расходится в каждой точке некоторого измеримого множества E с $\mu(E) \geq 1/M^2$.

ТЕОРЕМА В. Пусть $M > 1$ и измеримое множество $E \subset [0, 1]$ с $\mu(E) = 1 - 1/M^2$. Тогда на $[0, 1]$ существует равномерно ограниченная числом M полная ортонормированная система $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что ряд Фурье любой функции $f \in L([0, 1])$ по системе Φ сходится к f почти всюду на E .

Перед тем как формулировать полученные результаты, мы хотим сделать несколько замечаний, связанных со сформулированными выше теоремами. Утверждение теоремы А остается верным и для комплекснозначных функций, а потому, если мы запишем тригонометрическую систему в комплексной форме, мы можем вывести из нее теорему Колмогорова. Легко заметить, что в одномерном случае точная оценка снизу меры множества расходимости рядов Фурье одинакова для классов равномерно ограниченных полных ОНС и равномерно ограниченных ОНС. Как мы покажем ниже, в многомерном случае ситуация иная. Другой новый эффект в многомерном случае связан с множествами положительной меры, на которых ряды Фурье–Лебега по некоторым полным равномерно ограниченным ОНС могут сходиться почти всюду. Согласно теореме В в одномерном случае для любого измеримого множества неполной меры существует соответствующая равномерно ограниченная полная ОНС, для которой данное множество обладает желаемым свойством. Как мы покажем ниже, для многомерного случая здесь также иная ситуация.

Пусть $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – ортонормированная система на $[0, 1]$. Тогда для $m \geq 2$ через $\Phi(m) = \{\varphi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})\}_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^m}$, где $\varphi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = \varphi_{n_1}(x_1) \cdots \varphi_{n_m}(x_m)$, обозначим так называемую *систему-произведение* от Φ . Если Φ полна, то очевидно, что $\Phi(m)$ является полной ортонормированной системой на $[0, 1]^m$.

Для любой $f(x) \in L([0, 1]^m)$ рассмотрим ее разложение по системе $\Phi(m)$, т.е. *m -кратный ряд*

$$\sum_{\mathbf{n}=1}^{\infty} a_{\mathbf{n}}(f) \varphi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) \equiv \sum_{n_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{n_m=1}^{\infty} a_{\mathbf{n}}(f) \varphi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}), \quad (1)$$

где

$$a_{\mathbf{n}}(f) = \int_{[0,1]^m} f(\mathbf{t}) \varphi_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}) d\mathbf{t}, \quad \mathbf{n} \in \mathbb{N}^m.$$

Хорошо известно, что в многомерном случае можно рассматривать различные частичные суммы ряда (1) и результаты для разных частичных сумм существенно различаются. Мы будем изучать так называемые *кубические частичные суммы*, т. е.

$$\begin{aligned} S_{\mathbf{N}}(f)(\mathbf{x}) &= S_{N, \dots, N}(f)(x_1, \dots, x_m) = \sum_{\mathbf{n}=1}^{\mathbf{N}} a_{\mathbf{n}}(f) \varphi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) \\ &\equiv \sum_{n_1=1}^N \cdots \sum_{n_m=1}^N a_{\mathbf{n}}(f) \varphi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

где N – натуральное число. Если в определенном смысле существует (или не существует)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_{\mathbf{N}}(f)(\mathbf{x}),$$

мы будем говорить, что ряд (1) *сходится* (или *расходится*) *по кубам* в том же самом смысле.

Мы будем изучать кратные ряды Фурье для ОНС $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ на $[0, 1]$ такой, что существует постоянная M , для которой

$$|\varphi_n(x)| \leq M \quad \forall x \in [a, b], \quad n = 1, 2, \dots \quad (2)$$

В §3 будет доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – полная ортонормированная система на $[0, 1]$, удовлетворяющая условию (2), $m \geq 2$ и $\Phi(m)$ – это соответствующая система-произведение. Тогда существует функция $f(\mathbf{x}) \in L([0, 1]^m)$ такая, что ее ряд Фурье по системе $\Phi(m)$ расходится по кубам на некотором измеримом множестве $\mathcal{H} \subset [0, 1]^m$ с $\mu_m(\mathcal{H}) \geq 1 - (1 - 1/M^2)^m$.

Если функция g определена на некотором множестве G , то мы будем использовать следующее обозначение:

$$\text{supp } g = \{x \in G : g(x) \neq 0\}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Утверждение теоремы 1 остается верным, если заменить требование полноты системы Φ на нижеследующее.

Существует функция g , принадлежащая замыканию в $L_2([0, 1])$ системы Φ , и такая, что $\mu(\text{supp } g) = 1$.

В отличие от одномерного случая, для кратных рядов, если система Φ не полна, справедлива

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – ортонормированная система на $[0, 1]$, удовлетворяющая условию (2). Пусть $m \geq 2$, а $\Phi(m)$ – это соответствующая система-произведение. Тогда существует функция $f(\mathbf{x}) \in L([0, 1]^m)$

такая, что ее ряд Фурье по системе $\Phi(t)$ расходится по кубам на некотором измеримом множестве $\mathcal{H}_0 \subset [0, 1]^m$ с $\mu_m(\mathcal{H}_0) \geq 1/M^{2m}$.

Следующий пример показывает, что оценка меры множества расходимости в теореме 2 не может быть улучшена. Для заданного $M > 1$ определим ортонормированную систему Ψ . Пусть

$$\psi_n(t) = \begin{cases} M W_n(M^2 t), & t \in [0, M^{-2}); \\ 0, & t \in [M^{-2}, 1], \end{cases}$$

где $\{W_n(x)\}_{n=1}^\infty$ — система Уолша.

Очевидно, что ряд Фурье любой интегрируемой функции по системе $\Psi(t)$ сходится по кубам на множестве $[0, 1]^m \setminus [0, M^{-2})^m$ и $\mu_m([0, 1]^m \setminus [0, M^{-2})^m) = 1 - 1/M^{2m}$.

Доказательство точности оценки меры множества расходимости в теореме 1 является более сложной задачей. Удачным обстоятельством является то, что пример, построенный в [8] для одномерного случая, может быть использован и в многомерной ситуации. В §4 мы установим следующий результат.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $M > 1$, натуральное $m \geq 2$ и произвольное измеримое множество $E \subset [0, 1]^m$ таково, что $\mu(E) = 1 - 1/M^2$. Тогда существует равномерно ограниченная числом M полная ортонормированная система Φ на $[0, 1]^m$ такая, что кратный ряд Фурье любой функции $f(\mathbf{x}) \in L([0, 1]^m)$ по системе $\Phi(t)$ сходится по кубам к $f(\mathbf{x})$ п.в. на E^m .

Хотим подчеркнуть разницу между описанием множеств сходимости в одномерном и многомерном случаях. Вначале дадим точное определение множества сходимости.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^\infty$ — ортонормированная система на $[0, 1]$ и $m \geq 2$. Скажем, что измеримое множество $G \subseteq [0, 1]^m$ является *множеством сходимости для системы-произведения* $\Phi(m)$, если для любой интегрируемой функции $f(\mathbf{x}) \in L([0, 1]^m)$ кубические частичные суммы ее кратного ряда Фурье по системе $\Phi(m)$ сходятся п.в. на множестве G .

Согласно теореме В в одномерном случае любое множество меры $1 - 1/M^2$ является множеством сходимости для некоторой полной ортонормированной системы, равномерно ограниченной постоянной M .

Из доказательства теоремы 1 легко выводится следующее утверждение о множествах сходимости.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если измеримое множество $G \subseteq [0, 1]^m$ является множеством сходимости для системы-произведения $\Phi(m)$, где $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^\infty$ — полная ортонормированная система на $[0, 1]$, удовлетворяющая условию (2), то проекция множества G на любую ось X_j , $1 \leq j \leq m$, имеет меру не большую, чем $1 - 1/M^2$.

В частности, справедлив такой результат.

СЛЕДСТВИЕ 1. Для любого $m \geq 2$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует множество $E \subset [0, 1]^m$ с $\mu(E) = \varepsilon$ такое, что для любой полной равномерно ограниченной ортонормированной системы Φ существует функция $f(\mathbf{x}) \in L([0, 1]^m)$

такая, что ее ряд Фурье по системе-произведению $\Phi(t)$ расходится по кубам на некотором измеримом множестве $E_1 \subset E$ с $\mu(E_1) > 0$.

Можно изучать этот же вопрос для кратных систем, полученных из различных ортонормированных систем, определенных на одном и том же отрезке $[a, b]$. Пусть нам заданы m различных ортонормированных систем $\Phi_i = \{\varphi_n^{(i)}(x)\}_{n=1}^\infty$, $1 \leq i \leq m$, и для каждой $f(x) \in L([a, b]^m)$ мы рассматриваем ее разложение по системе $\Phi_1 \times \cdots \times \Phi_m$, т.е. m -кратный ряд

$$\sum_{\mathbf{n}=1}^\infty a_{\mathbf{n}}(f) \varphi_{n_1}^{(1)}(x_1) \cdots \varphi_{n_m}^{(m)}(x_m) \equiv \sum_{n_1=1}^\infty \cdots \sum_{n_m=1}^\infty a_{\mathbf{n}}(f) \varphi_{n_1}^{(1)} \cdots \varphi_{n_m}^{(m)}(x_m),$$

где

$$a_{\mathbf{n}}(f) = \int_{[a,b]^m} f(t_1, \dots, t_m) \varphi_{n_1}^{(1)}(t_1) \cdots \varphi_{n_m}^{(m)}(t_m) dt_1 \cdots dt_m, \quad \mathbf{n} \in \mathbb{N}^m.$$

Наш метод применим и к этому случаю. Мы ограничимся только формулировкой полученного результата, поскольку доказательство отличается от доказательства теорем 1 и 2 лишь небольшими техническими деталями.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\Phi_i = \{\varphi_n^{(i)}(x)\}_{n=1}^\infty$, $1 \leq i \leq m$, – ортонормированные системы на $[0, 1]$ такие, что Φ_i , $1 \leq i \leq k \leq m$, полны при $0 \leq k \leq m$ (если $k = 0$, то мы считаем, что ни одна из этих систем не полна), и пусть

$$|\varphi_n^{(i)}(x)| \leq M_i \text{ п.в. на } [0, 1] \quad \forall n \geq 1, \quad 1 \leq i \leq m.$$

Тогда существует функция $f(\mathbf{x}) \in L([0, 1]^m)$ такая, что ее ряд Фурье по системе $\Phi_1 \times \cdots \times \Phi_m$ расходится по кубам на некотором измеримом множестве $\mathcal{H} \subset [0, 1]^m$ с $\mu_m(\mathcal{H}) \geq (1 - \prod_{i=1}^k (1 - 1/M_i^2)) \prod_{i=k+1}^m 1/M_i^2$.

§ 2. Предварительные результаты и определения

Нам понадобится следующий вспомогательный результат, доказанный в [8].

ЛЕММА А. Пусть $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^\infty$ – ортонормированная система на $[0, 1]$, удовлетворяющая условию (2). Тогда для любого натурального N и для любого $\alpha \in (0, 1)$ найдутся измеримое множество $T(N, \alpha) \subseteq [0, 1]$ и $\gamma > 0$ такие, что $T(N, \alpha) \supseteq T(N, \beta)$ для $0 < \alpha \leq \beta < 1$, $\mu(T(N, \alpha)) > (1 - \alpha)/M^2$, и для любого $t \in T(N, \alpha)$ существуют множество $E_\alpha^N(t) \subseteq [0, 1]^N$ с $\mu(E_\alpha^N(t)) \geq \gamma$ и последовательность натуральных чисел $\{m_k(t)\}_{k=1}^\infty$, где $Nk \leq m_k(t) \leq N(k+1)$ при всех k , такие, что для любых $(x_1, \dots, x_N) \in E_\alpha^N(t)$

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \sum_{n=kN}^{m_k(t)} \varphi_n(t) \varphi_n(x_i) \geq C_\alpha N \ln N,$$

где $C_\alpha > 0$ зависит только от α и M .

Действительные и натуральные числа будут обозначаться $\mathbb{R}$ и $\mathbb{N}$ соответственно. В дальнейшем мы будем обозначать через $\chi_E(\mathbf{x})$ характеристическую функцию множества E . Мера Лебега на $\mathbb{R}$ будет обозначаться через μ , а на $\mathbb{R}^m$, $m \geq 2$, – через μ_m . Мы также будем пользоваться следующими обозначениями:

$$\begin{aligned}\Omega^j(E) &= \{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in [0, 1]^m : x_i \in [0, 1], i \neq j, \text{ и } x_j \in E\}, \\ \Omega_F^j(E) &= \{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in [0, 1]^m : x_i \in F, i \neq j, \text{ и } x_j \in E\},\end{aligned}$$

где $1 \leq j \leq m$ и $E, F \subset [0, 1]$ – измеримые множества.

Для того чтобы получить точные оценки мер множеств расходимости, нам потребуется резонансная теорема, аналогичная теореме Сакса (см. [9]). Мы дадим полное доказательство этого результата. Более того, мы докажем резонансную теорему для F -пространств, поскольку надеемся продолжить изучение сходных вопросов для пространств, отличных от L_1 .

Квазинормой (или *нормой Фреше*) на линейном пространстве X называется действительная функция $\|\cdot\|$ на X такая, что

$$\begin{aligned}\|x\| &\geq 0 \text{ и } \|x\| = 0 \text{ тогда и только тогда, когда } x = 0; \\ \|x + y\| &\leq \|x\| + \|y\|; \\ \| - x\| &= \|x\|, \quad \lim_{\beta_n \rightarrow 0} \|\beta_n x\| = 0, \quad \lim_{\|x_n\| \rightarrow 0} \|\beta x_n\| = 0,\end{aligned}$$

где через β обозначен скаляр. Полное квазинормированное линейное пространство называется F -пространством (или *пространством Фреше*) [10].

Пусть (X, Σ, μ) – измеримое пространство с σ -аддитивной конечной мерой μ , и пусть метрическое пространство, порожденное (X, Σ, μ) , сепарабельно. Обозначим через $L_X^0(d\mu)$ пространство измеримых конечных почти всюду относительно меры μ (μ -п.в.) функций, заданных на X с квазинормой

$$\|f\|_{L_X^0(d\mu)} := \int_X \frac{|f(t)|}{1 + |f(t)|} d\mu(t).$$

ЛЕММА В. Пусть $\mathbf{F}$ – произвольное F -пространство и $S_n(\cdot) : \mathbf{F} \rightarrow L_X^0(d\mu)$ – последовательность линейных непрерывных операторов такая, что для некоторого подмножества второй категории F^0 пространства $\mathbf{F}$ и для некоторого положительного числа $\alpha > 0$ имеем

$$\mu\left(\left\{t \in X : \sup_{n \in \mathbb{N}} |S_n(x)(t)| < +\infty\right\}\right) \geq \alpha \quad (\text{a})$$

для всех $x \in F^0$.

Тогда для любого $0 < \varepsilon < \alpha$ существует измеримое множество $X_\varepsilon \subset X$ с $\mu(X_\varepsilon) \geq \alpha - \varepsilon$ такое, что $\forall x \in \mathbf{F}$ имеем

$$\mu\left(\left\{t \in X_\varepsilon : \sup_{n \in \mathbb{N}} |S_n(x)(t)| < +\infty\right\}\right) = \mu(X_\varepsilon). \quad (\text{b})$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{E_n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность элементов (X, Σ, μ) , плотная в метрическом пространстве, порожденном (X, Σ, μ) , т.е. для любого $\epsilon > 0$ и $\forall E \in \Sigma$ существует число $n = n(\epsilon, E)$, для которого

$$\mu(E \triangle E_n) < \epsilon.$$

Положим $E_0 = \emptyset$. Более того, мы будем предполагать, что множество $\{E_n\}_{n=1}^\infty$ остается плотным после удаления из него любого конечного подмножества.

Если обозначить

$$G(x) = \{t \in X : \sup_{n \in \mathbb{N}} |S_n(x)(t)| < +\infty\},$$

где $x \in \mathbf{F}$, то из (а) вытекает, что

$$\mu(G(x)) \geq \alpha \quad \forall x \in F_0.$$

Положим

$$G_l(x) = \{t \in X : \sup_{n \in \mathbb{N}} |S_n(x)(t)| \leq l\}$$

при $l \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbf{F}$ и заметим, что для любого фиксированного $x \in \mathbf{F}$ $\{G_l(x)\}_{l=1}^\infty$ является возрастающей последовательностью измеримых множеств такой, что $\bigcup_{l \in \mathbb{N}} G_l(x) = G(x)$.

Из условия (а) вытекает, что для любого $x \in F_0$ и для любого $l \in \mathbb{N}$, большего, чем некоторое $l(x)$, мера множества G_l может быть оценена снизу следующим образом

$$\mu(G_l) \geq \alpha - \frac{\varepsilon}{4}.$$

Определим отображение $M: \mathbf{F} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$, полагая $M(x, l) = 0$, если $1 \leq l \leq l(x)$, а при $l > l(x)$ $M(x, l)$ — это номер множества из $\{E_n\}_{n=1}^\infty$ такого, что

$$\mu(E_M \triangle G_l(x)) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Получаем, что для всех $x \in F_0$ и $l > l(x)$ мера множества $E_{M(x,l)}$ может быть оценена снизу следующим образом

$$\mu(E_{M(x,l)}) \geq \alpha - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Через N_0 обозначим образ отображения M . Из непрерывности операторов S_n следует, что множества

$$F_{k,l} := \left\{ x \in \mathbf{F} : \mu(E_k \triangle G_l(x)) \leq \frac{\varepsilon}{2} \right\}$$

замкнуты для всех $k, l \in \mathbb{N}$. Далее, из (а) имеем

$$F_0 \subset \bigcup_{k \in N_0; l \in \mathbb{N}} F_{k,l},$$

следовательно, некоторое F_{k_1, l_1} содержит шар B положительного радиуса. То есть

$$M(x, l_1) = k_1 \quad \forall x \in B.$$

Таким образом, имеем

$$\mu(E_{k_1}) \geq \alpha - \frac{\varepsilon}{2},$$

и для всех $x \in \mathbf{F}$

$$\mu(E_{k_1} \setminus \{t \in X : \sup_{n \in \mathbb{N}} |S_n(x)(t)| < \infty\}) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Положим $X_1 = E_{k_1}$ и рассмотрим следующую последовательность непрерывных операторов $S_n^1(\cdot) : \mathbf{F} \rightarrow L_{X_1}^0(d\mu)$, где для любых $x \in \mathbf{F}$ и $t \in X_1$

$$S_n^1(x)(t) := S_n(x)(t).$$

Повторив приведенное выше доказательство для последовательности операторов S_n^1 , $n \in \mathbb{N}$, с $\varepsilon/2$ вместо ε , получаем множество $E_{k_2} \subset X_1 \subset X$ такое, что

$$\mu(E_{k_2}) \geq \alpha - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{4},$$

и для всех $x \in \mathbf{F}$ имеем

$$\mu(E_{k_2} \setminus \{t \in X_1 : \sup_{n \in \mathbb{N}} |S_n(x)(t)| < \infty\}) \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Повторяя это рассуждение m раз, получаем множество $E_{k_m} \subset X_{m-1} \subset X_{m-2} \subset \dots \subset X$ такое, что

$$\mu(E_{k_m}) \geq \alpha - \varepsilon \sum_{i=1}^m 2^{-i},$$

и для всех $x \in \mathbf{F}$ будем иметь

$$\mu(E_{k_m} \setminus \{t \in X_{m-1} : \sup_{n \in \mathbb{N}} |S_n(x)(t)| < \infty\}) \leq \frac{\varepsilon}{2^m}.$$

Тогда множество

$$X_\varepsilon = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} E_{k_m}$$

удовлетворяет условию

$$\mu(X_\varepsilon) \geq \alpha - \varepsilon,$$

и для всех $x \in \mathbf{F}$ имеем

$$\mu(X_\varepsilon \setminus \{t \in X_\varepsilon : \sup_{n \in \mathbb{N}} |S_n(x)(t)| < \infty\}) = 0.$$

Доказательство леммы закончено.

ОБЩАЯ РЕЗОНАНСНАЯ ТЕОРЕМА. Пусть $\mathbf{F}$ – произвольное F -пространство и $S_n(\cdot): \mathbf{F} \rightarrow L_X^0(d\mu)$ – последовательность линейных непрерывных операторов, где (X, Σ, μ) – измеримое пространство с σ -аддитивной конечной положительной мерой μ , и метрическое пространство, порожденное (X, Σ, μ) , сепарабельно.

Тогда существует измеримое множество $Y \subset X$ такое, что $\forall x \in \mathbf{F}$

$$\mu\left(\left\{t \in Y : \sup_{n \in \mathbb{N}} |S_n(x)(t)| < +\infty\right\}\right) = \mu(Y)$$

и

$$\mu\left(\left\{t \in X \setminus Y : \sup_{n \in \mathbb{N}} |S_n(x)(t)| = +\infty\right\}\right) = \mu(X \setminus Y)$$

за исключением, быть может, $x \in F^1$, где F^1 – множество первой категории в $\mathbf{F}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Получим утверждение теоремы, используя лемму В. Пусть $\alpha_0 > 0$ – верхняя грань чисел $\alpha > 0$, для которых выполнено условие (а). Выбрав $\varepsilon_k = 2^{-k}\alpha_0$ и применив лемму В для каждого ε_k , получим множества $\{X_k\}_{k=1}^\infty$, $\mu(X_k) \geq \alpha_0 - \varepsilon_k$, такие, что

$$\mu\left(\left\{t \in X_k : \sup_{n \in \mathbb{N}} |S_n(x)(t)| < +\infty\right\}\right) = \mu(X_k) \geq \alpha_0 - \varepsilon_k.$$

Тогда множество $Y = \bigcup_{k=1}^\infty X_k$ будет удовлетворять условиям теоремы. Если допустим, что найдется множество F^2 второй категории в $\mathbf{F}$ такое, что

$$\mu\left(\left\{t \in X \setminus Y : \sup_{n \in \mathbb{N}} |S_n(x)(t)| < +\infty\right\}\right) > 0$$

для всех $x \in F^2$, то получим, что существуют множество второй категории $F^3 \subset F^2$ и $\alpha_1 > 0$, для которых

$$\mu\left(\left\{t \in X \setminus Y : \sup_{n \in \mathbb{N}} |S_n(x)(t)| < +\infty\right\}\right) \geq \alpha_1.$$

Но это противоречит определению числа α_0 . Таким образом, утверждение общей резонансной теоремы верно. Всюду ниже, для краткости, при ссылках будем называть ее теоремой резонанса.

В §4 мы будем использовать некоторые свойства системы Хаара. Функции Хаара определяются следующим образом: для всех $t \in [0, 1]$ положим

$$h_1(t) = 1,$$

при $k = 0, 1, 2, \dots, j = 1, 2, \dots, 2^k$

$$h_k^{(j)}(t) = \begin{cases} 2^{k/2}, & \text{если } \frac{2j-2}{2^{k+1}} < t < \frac{2j-1}{2^{k+1}}; \\ -2^{k/2}, & \text{если } \frac{2j-1}{2^{k+1}} < t < \frac{2j}{2^{k+1}}; \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$h_n = h_k^{(j)}$ при $n = 2^k + j$. Замыкание носителя функции Хаара h_n будем обозначать через Δ_n . Пусть $\{r_n(t)\}_{n=1}^\infty$ – система Радемахера:

$$r_n(t) = \operatorname{sgn}(\sin(2^n \pi t)).$$

Всюду ниже через C будем обозначать положительные абсолютные постоянные, через $C(m)$ – положительные постоянные, зависящие лишь от m , и т. д.

§3. Расходимость на множестве максимальной меры

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Доказательство теоремы 1 базируется на двух леммах.

ЛЕММА 1. Пусть $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – равномерно ограниченная полная ортонормированная система на $[0, 1]$. Предположим также, что существуют измеримое множество $G_0 \subseteq [0, 1]$, $\mu(G_0) > 0$, и положительные числа $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$ такие, что для любого натурального N найдется измеримое множество

$$T_N \subseteq G_0, \quad \mu(T_N) \geq \gamma_1,$$

такое, что для каждого $t \in T_N$ существуют измеримое множество $E^N(t) \subseteq [0, 1]^N$ с $\mu_N(E^N(t)) \geq \gamma_2$ и последовательность натуральных чисел $\{m_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$, где $Nk \leq m_k(t) \leq N(k+1)$ при всех k , такие, что если $(x_1, \dots, x_N) \in E^N(t)$, то

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \sum_{n=kN}^{m_k(t)} \varphi_n(t) \varphi_n(x_i) \geq CN \ln N, \quad (3)$$

где $C > 0$ – абсолютная постоянная.

Тогда существует измеримое множество $E \subseteq G_0$, $\mu(E) \geq \gamma_1 \gamma_2$, такое, что для любого j , $1 \leq j \leq m$, найдется функция $f(\mathbf{x}) \in L([0, 1]^m)$, у которой кубические частичные суммы ряда Фурье по системе $\Phi(m)$ неограниченно расходятся п.в. на $\Omega^j(E)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Заметим, что поскольку $\chi_{[0,1]}(x) \in L_2([0, 1])$, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x), \quad c_n = \int_0^1 \varphi_n(t) dt,$$

сходится в метрике L_2 и по мере к $\chi_{[0,1]}$. Следовательно, некоторая последовательность частичных сумм этого ряда сходится почти всюду. Это означает, что существуют последовательность множеств $\{F_p\}_{p=1}^{\infty} \subseteq [0, 1]$ и возрастающая последовательность натуральных чисел $\{\nu_p\}_{p=1}^{\infty}$ такие, что

$$F_1 \subseteq F_2 \subseteq \dots, \quad \mu(F_p) > 1 - \frac{1}{p}, \quad (4)$$

и для любого $t \in F_p$ имеем

$$|1 - Q_{\nu_p}(t)| = \left| 1 - \sum_{n=1}^{\nu_p} c_n \varphi_n(t) \right| < \frac{1}{p}. \quad (5)$$

Пусть $E_0 \subset [0, 1]$ – множество всех точек $x \in [0, 1]$ таких, что любая $x \in E_0$ является точкой Лебега для всех функций системы $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$. Очевидно, имеем $\mu(E_0) = 1$.

Для каждого N обозначим

$$\alpha_n(x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi_n(x_i). \quad (6)$$

Тогда из теоремы Фубини и из (3) и (6) легко получаем, что для любого $0 < \beta < 1$ существуют $(x_1, \dots, x_N)$, где $x_i \in E_0$ для всех i , $1 \leq i \leq N$, множество $G_N \subseteq T_N \subseteq G_0$ и натуральное число $q(N, \beta)$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\mu(G_N) \geq \beta \gamma_1 \gamma_2;$$

для любого $t \in G_N$ и для некоторой последовательности натуральных чисел $\{m_k(t)\}_{k=1}^{q(N, \beta)}$, где $Nk \leq m_k(t) \leq N(k+1)$ при всех k , имеем

$$\max_{1 \leq k \leq q(N, \beta)} \sum_{n=kN}^{m_k(t)} \alpha_n(x_1, \dots, x_N) \varphi_n(t) \geq \frac{C}{2} \ln N.$$

Мы должны построить функцию m переменных, удовлетворяющую условиям леммы 1. С этой целью мы индуктивно определим возрастающую последовательность натуральных чисел $\{N_r\}_{r=1}^{\infty}$ и последовательность положительных чисел $\{\delta_r\}_{r=1}^{\infty}$ следующим образом.

Возьмем N_1 таким, что

$$N_1 > \nu_1, \quad \frac{C}{8} \ln N_1 > 2.$$

Для числа N_1 найдем $(x_1^1, \dots, x_{N_1}^1)$, где $x_i^1 \in E_0$ для всех i , $1 \leq i \leq N_1$, множество

$$\mathcal{G}_1 := G_{N_1} \subseteq G_0, \quad \mu(\mathcal{G}_1) \geq \frac{1}{2} \gamma_1 \gamma_2,$$

и $q_1 := q(N_1, 1/2)$ такие, что для любого $t \in \mathcal{G}_1$ и для некоторой последовательности натуральных чисел $\{m_k^{(1)}(t)\}_{k=1}^{q_1}$ с $N_1 k \leq m_k^{(1)}(t) \leq N_1(k+1)$ при всех k имеем

$$\max_{1 \leq k \leq q_1} \sum_{n=kN_1}^{m_k^{(1)}(t)} \alpha_n(x_1^1, \dots, x_{N_1}^1) \varphi_n(t) \geq \frac{C}{2} \ln N_1. \quad (7)$$

Затем подберем $\delta_1 > 0$ так, чтобы

$$(2M(q_1 + 1)N_1)^{2m} \delta_1 \leq 1, \quad \delta_1 < \frac{1}{2},$$

где

$$M = \sup_n \|\varphi_n\|_{\infty}, \quad (8)$$

и для всех $l \in [1, N_1(q_1 + 1)]$ и всех x_i^1 , $1 \leq i \leq N_1$, выполнялась оценка

$$\left| \frac{1}{\mu(I_i^1)} \int_{I_i^1} \varphi_l(t) dt - \varphi_l(x_i^1) \right| < \frac{C \ln N_1}{4N_1(q_1 + 1)M}, \quad (9)$$

где $I_i^1 = (x_i^1 - \delta_1, x_i^1 + \delta_1) \cap [0, 1]$. Если обозначим

$$f_1(x) = \frac{1}{N_1} \sum_{i=1}^{N_1} \frac{1}{\mu(I_i^1)} \chi_{I_i^1}(x),$$

то будем иметь $\|f_1\|_1 = 1$ и (см. (7), (9))

$$\max_{N_1 \leq s \leq N_1(q_1 + 1)} \sum_{n=N_1}^s c_n(f_1) \varphi_n(t) \geq \frac{C}{8} \ln N, \quad t \in \mathcal{G}_1. \quad (10)$$

Предположим, что мы уже выбрали $\delta_1, \dots, \delta_r$ и $N_1, \dots, N_r$.

Заметим, что функция

$$f_r(x) = \frac{1}{N_1} \sum_{i=1}^{N_r} \frac{1}{\mu(I_i^r)} \chi_{I_i^r}(x) \in L_\infty([0, 1]) \subset L_2([0, 1])$$

и что

$$\|f_r\|_1 = 1.$$

Это значит, что ряд Фурье функции f_r сходится к ней в метрике L_2 и, следовательно, в метрике L_1 . Тогда мы можем выбрать N_{r+1} так, чтобы

$$N_{r+1} > N_r(q_r + 1) := N'_r, \quad N_{r+1} > \nu_{r+1}; \quad (11)$$

$$\|P_r(x)\|_1 \equiv \left\| \sum_{n=1}^{N_{r+1}-1} c_n(f_r) \varphi_n(x) \right\|_1 \leq 2 \quad (12)$$

и

$$\frac{C \delta_r}{8} \ln N_{r+1} > 2^r. \quad (13)$$

Для номера N_{r+1} найдем $(x_1^{r+1}, \dots, x_{N_{r+1}}^{r+1})$, где $x_i^{r+1} \in E_0$ для всех i , $1 \leq i \leq N_{r+1}$, множество

$$\mathcal{G}_{r+1} := G_{N_{r+1}} \subseteq G_0, \quad \mu(\mathcal{G}_{r+1}) \geq \frac{r}{r+1} \gamma_1 \gamma_2,$$

и $q_{r+1} := q(N_{r+1}, r/(r+1))$ такие, что для любого $t \in \mathcal{G}_{r+1}$ и для некоторой последовательности натуральных чисел $\{m_k^{(r+1)}(t)\}_{k=1}^{q_{r+1}}$ с $N_{r+1}k \leq m_k^{(r+1)}(t) \leq N_{r+1}(k+1)$ при всех k имеем

$$\max_{1 \leq k \leq q_{r+1}} \sum_{n=N_{r+1}k}^{m_k^{(r+1)}(t)} \alpha_n(x_1^{r+1}, \dots, x_{N_{r+1}}^{r+1}) \varphi_n(t) \geq \frac{C}{2} \ln N_{r+1}. \quad (14)$$

После этого найдем $\delta_{r+1} > 0$ такое, что

$$(2M N'_{r+1})^{2m} \delta_{r+1} \leq 1, \quad \delta_{r+1} < \frac{\delta_r}{2} \quad (15)$$

и для всех $l \in [1, N'_{r+1}]$ и всех x_i^{r+1} , $1 \leq i \leq N_{r+1}$, выполнено

$$\left| \frac{1}{\mu(I_i^{r+1})} \int_{I_i^{r+1}} \varphi_l(t) dt - \varphi_l(x_i^{r+1}) \right| < \frac{C \ln N_{r+1}}{4N'_{r+1}M}, \quad (16)$$

где $I_i^{r+1} = (x_i^{r+1} - \delta_{r+1}, x_i^{r+1} + \delta_{r+1}) \cap [0, 1]$.

Если обозначим

$$f_{r+1}(x) = \frac{1}{N_{r+1}} \sum_{i=1}^{N_{r+1}} \frac{1}{\mu(I_i^{r+1})} \chi_{I_i^{r+1}}(x),$$

то будем иметь $\|f_{r+1}\|_1 = 1$ и (см. (14), (16))

$$\max_{N_{r+1} \leq s \leq N'_{r+1}} \sum_{n=N_{r+1}}^s c_n(f_{r+1}) \varphi_n(t) \geq \frac{C}{8} \ln N_{r+1}, \quad t \in \mathcal{G}_{r+1}. \quad (17)$$

Теперь определим функцию m переменных

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_m) = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{k-1} P_k(x_j) \prod_{l \neq j} Q_{\nu_k}(x_l), \quad (18)$$

где $\delta_0 = 1$. Поскольку $Q_{\nu_s}(t)$ является частичной суммой ряда Фурье функции $\chi_{[0,1]} \in L_2([0,1])$, то

$$\|Q_{\nu_s}\|_1 \leq \|Q_{\nu_s}\|_2 \leq 1 \quad (19)$$

для всех s . Из (12), (15) и (19) следует, что

$$\left\| \delta_{k-1} P_k(x_j) \prod_{l \neq j} Q_{\nu_k}(x_l) \right\|_{L_1([0,1]^m)} \leq 2\delta_{k-1} < 2^{2-k},$$

откуда, в свою очередь, вытекает, что ряд (18) сходится в $L_1([0,1]^m)$. Итак, функция $f(\mathbf{x})$ определена корректно.

Пусть теперь

$$E = \lim_{r \rightarrow \infty} \sup \mathcal{G}_r = \bigcap_{p=1}^{\infty} \bigcup_{r=p}^{\infty} \mathcal{G}_r \subseteq G_0$$

и

$$F = \lim_{p \rightarrow \infty} \sup F_p.$$

Из (4), очевидно, вытекает, что $\mu(F) = 1$ и

$$\mu(E) = \lim_{p \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{r=p}^{\infty} \mathcal{G}_r\right) \geq \gamma_1 \gamma_2.$$

Если мы докажем, что кубические частичные суммы ряда Фурье функции f по системе $\Phi(m)$ неограниченно расходятся п.в. на $\Omega^j(E)$, доказательство леммы 1 будет закончено.

Положим $\mathbf{N}_i - \mathbf{1} = \underbrace{(N_i - 1, N_i - 1, \dots, N_i - 1)}_m$ и $\mathbf{N}'_i = \underbrace{(N'_i, N'_i, \dots, N'_i)}_m$ (см. (11)) при $i = 1, 2, \dots$. Обозначим также $\mathbf{s} = \underbrace{(s, s, \dots, s)}_m$ и будем писать $\mathbf{N}_i \leq \mathbf{s} \leq \mathbf{N}'_i$, если $N_i \leq s \leq N'_i$.

Пусть

$$\psi_r(x_1, \dots, x_m) = \delta_{r-1} P_r(x_j) \prod_{l \neq j} Q_{\nu_r}(x_l).$$

Тогда из (11) и (12) следует, что для любого $\mathbf{x} \in [0, 1]^m$

$$\begin{aligned} & \max_{\mathbf{N}_r \leq \mathbf{s} \leq \mathbf{N}'_r} |S_{\mathbf{s}}(\psi_r)(\mathbf{x}) - S_{\mathbf{N}_r - \mathbf{1}}(\psi_r)(\mathbf{x})| \\ &= \max_{\mathbf{N}_r \leq \mathbf{s} \leq \mathbf{N}'_r} \delta_{r-1} \left| \sum_{n=N_r}^s c_n(P_r) \varphi_n(x_j) \prod_{l \neq j} Q_{\nu_r}(x_l) \right| \\ &= \max_{\mathbf{N}_r \leq \mathbf{s} \leq \mathbf{N}'_r} \delta_{r-1} \left| \sum_{n=N_r}^s c_n(f_r) \varphi_n(x_j) \prod_{l \neq j} Q_{\nu_r}(x_l) \right|. \end{aligned}$$

Из (10), (5), (17) и (13) получаем, что

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \max_{\mathbf{N}_r \leq \mathbf{s} \leq \mathbf{N}'_r} |S_{\mathbf{s}}(\psi_r)(\mathbf{x}) - S_{\mathbf{N}_r - \mathbf{1}}(\psi_r)(\mathbf{x})| = +\infty \text{ п.в. на } \Omega^j(E). \quad (20)$$

С другой стороны, из (8), (12), (5), (11) и (15) вытекает, что

$$\begin{aligned} & \max_{\mathbf{x} \in [0, 1]^m} \max_{\mathbf{N}_r < \mathbf{s} \leq \mathbf{N}'_r} |S_{\mathbf{s}}(f - \psi_r)(\mathbf{x}) - S_{\mathbf{N}_r - \mathbf{1}}(f - \psi_r)(\mathbf{x})| \\ & \leq 2 \sum_{k=r+1}^{\infty} \delta_{k-1} M^{2m} (N'_r)^m \leq N_r'^{-m} \sum_{k=r}^{\infty} 2^{r+1-k} \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Поэтому из (20) получаем утверждение леммы 1.

Из леммы А, леммы 1 и теоремы резонанса мы немедленно получаем следующий результат.

ЛЕММА 2. Пусть $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — полная ортонормированная система на $[0, 1]$, удовлетворяющая условию (2). Тогда для любого j , $1 \leq j \leq m$, и для любого $\alpha \in (0, 1)$ существуют измеримое множество $E_{\alpha}^j \subset [0, 1]$, $\mu(E_{\alpha}^j) \geq (1 - \alpha)/M^2$, и функция $f(\mathbf{x}) \in L([0, 1]^m)$ такие, что кубические частичные суммы ряда Фурье функции f по системе $\Phi(m)$ неограниченно расходятся п.в. на $\Omega^j(E_{\alpha}^j)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Если утверждение леммы неверно, то по лемме В существуют $j_0, 1 \leq j_0 \leq m$, и множество $H_0 \subset [0, 1]$, $\mu(H_0) > 1 - (1 - \alpha)/M^2$, такие, что $\forall F \subset H_0, \mu(F) > 0$, множество $\Omega^{j_0}(F)$ не будет множеством неограниченной расходимости ни для одной функции $f(\mathbf{x}) \in L([0, 1]^m)$. Применяя лемму А и лемму 1, приходим к противоречию. Итак, лемма 2 доказана.

Применяя еще раз теорему резонанса, выводим из леммы 2, что существует функция $f(\mathbf{x}) \in L([0, 1]^m)$ такая, что кубические частичные суммы ее ряда Фурье по системе $\Phi(m)$ неограниченно расходятся п.в. на множестве $\bigcup_{\alpha} \bigcup_{j=1}^m \Omega^j(E_{\alpha})$. Пусть $H_j = \bigcup_{\alpha} \Omega^j(E_{\alpha})$. Ясно, что

$$\mu_m(H_j) \geq \frac{1}{M^2}.$$

Мы получили, что

$$\mu_m\left([0, 1]^m \setminus \bigcup_{j=1}^m \Omega^j(H_j)\right) = \mu_m\left(\prod_{j=1}^m ([0, 1] \setminus H_j)\right) \leq \left(1 - \frac{1}{M^2}\right)^m,$$

поэтому

$$\mu_m(H) \geq 1 - \left(1 - \frac{1}{M^2}\right)^m.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Доказательство теоремы 2 базируется на следующем утверждении.

ЛЕММА 3. Пусть $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — ортонормированная система на $[0, 1]$, удовлетворяющая условию (2). Предположим, что существуют измеримое множество $G_0 \subseteq [0, 1]$, $\mu(G_0) > 0$, и некоторые положительные числа $\gamma_1 > 0, \gamma_2 > 0$ такие, что для любого натурального N найдется измеримое множество

$$T_N \subseteq [0, 1], \quad \mu(T_N) \geq \gamma_1,$$

такое, что для любого $t \in T_N$ существуют множество $E^N(t) \subseteq [0, 1]^N$ с $\mu_N(E^N(t)) \geq \gamma_2$ и последовательность натуральных чисел $\{m_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$, где $Nk \leq m_k(t) \leq N(k+1)$ при всех k , такие, что если $(x_1, \dots, x_N) \in E^N(t)$, то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup \sum_{i=1}^N \sum_{n=kN}^{m_k(t)} \varphi_n(t) \varphi_n(x_i) \geq CN \ln N,$$

где $C > 0$ — абсолютная постоянная.

Тогда существует измеримое множество $E \subset G_0$, $\mu(E) \geq \gamma_1 \gamma_2$, такое, что для любого $l \in \mathbb{N}$ для $F^* = \{t \in [0, 1] : \varphi_l \neq 0\}$ существует функция $f_0(\mathbf{x}) \in L([0, 1]^m)$, кубические частичные суммы ряда Фурье которой по системе $\Phi(m)$ неограниченно расходятся п.в. на множестве $\Omega_{F^*}^1(E)$.

Доказательство леммы 3. Заметим, что, не ограничивая общности, мы можем предполагать, что $l = 1$.

Предположим, что так же, как и при доказательстве леммы 1, мы построили последовательности чисел $\{N_r\}_{r=1}^\infty$, функций $\{f_r\}_{r=1}^\infty$ с нормами в $L([0, 1])$, равными единице, полиномов $\{P_r\}_{r=1}^\infty$ и положительных чисел $\{\delta_r\}_{r=1}^\infty$, для которых выполняются условия (11)–(17). В данном случае последовательность $\{\nu_p\}_{p=1}^\infty$ отсутствует, поэтому формально считаем, что в упомянутых выше условиях $\nu_p = 0$ для всех $p \in \mathbb{N}$. Определим функцию m переменных

$$f_0(\mathbf{x}) = f_0(x_1, \dots, x_m) = \sum_{k=1}^\infty \delta_{k-1} P_k(x_1) \prod_{j=2}^m \varphi_1(x_j). \quad (21)$$

Из (12) и (15) сразу получаем, что ряд (21) сходится в $L_1([0, 1]^m)$. Таким образом, $f_0(\mathbf{x})$ определена корректно.

Пусть

$$F_r^* = \{t \in [0, 1] : |\varphi_1(t)| \geq 2^{-r/(2m)}\}, \quad (22)$$

тогда

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{[0,1]} |\varphi_1(t)|^2 dt = \int_{F_r^*} |\varphi_1(t)|^2 dt + \int_{[0,1] \setminus F_r^*} |\varphi_1(t)|^2 dt \\ &\leq M^2 \mu(F_r^*) + 2^{-r/m}. \end{aligned}$$

Итак, $\liminf_{r \rightarrow \infty} \mu(F_r^*) \geq 1/M^2$ и

$$\mu(F^*) \geq \frac{1}{M^2}, \quad F^* = \limsup_r F_r^*. \quad (23)$$

Пусть

$$\psi_r^*(x_1, \dots, x_m) = \delta_{r-1} P_r(x_1) \prod_{j=2}^m \varphi_1(x_j).$$

Тогда получаем, что для любых $\mathbf{x} \in [0, 1]^m$ и $\mathbf{N}_r \leq \mathbf{s} \leq \mathbf{N}'_r$

$$\begin{aligned} S_{\mathbf{s}}(f_0)(\mathbf{x}) - S_{\mathbf{N}_r-1}(f_0)(\mathbf{x}) &= S_{\mathbf{s}}(\psi_r^*)(\mathbf{x}) - S_{\mathbf{N}_r-1}(\psi_r^*)(\mathbf{x}) \\ &+ S_{\mathbf{s}}(f_0 - \psi_r^*)(\mathbf{x}) - S_{\mathbf{N}_r-1}(f_0 - \psi_r^*)(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

С другой стороны, имеем

$$\begin{aligned} &\max_{\mathbf{N}_r \leq \mathbf{s} \leq \mathbf{N}'_r} |S_{\mathbf{s}}(\psi_r^*)(\mathbf{x}) - S_{\mathbf{N}_r-1}(\psi_r^*)(\mathbf{x})| \\ &= \max_{N_r \leq s \leq N'_r} \delta_{r-1} \left| \sum_{n=N_r}^s c_n(P_r) \varphi_n(x_j) \prod_{j=2}^m \varphi_1(x_j) \right|. \end{aligned}$$

Поэтому из (10), (17) и (13) получаем

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \max_{\mathbf{N}_r \leq \mathbf{s} \leq \mathbf{N}'_r} |S_{\mathbf{s}}(\psi_r^*)(\mathbf{x}) - S_{\mathbf{N}_r-1}(\psi_r^*)(\mathbf{x})| \geq \limsup_{r \rightarrow \infty} 2^{r/2} = +\infty$$

п.в. на $\Omega_{F*}^1(E)$. Так же, как при доказательстве леммы 1, мы показываем, что

$$\max_{\mathbf{x} \in [0,1]^m} \max_{N_r \leq s \leq N'_r} |S_s(f_0 - \psi_r)(\mathbf{x}) - S_{N_r-1}(f_0 - \psi_r)(\mathbf{x})| \rightarrow 0 \quad \text{при } r \rightarrow \infty.$$

Это завершает доказательство леммы 3.

Теперь, используя лемму 3, мы можем вывести утверждение теоремы 2 таким же образом, как мы установили теорему 1 с помощью леммы 1. Из леммы А, леммы 3 и леммы В мы получаем, что для любого $\alpha \in (0, 1)$ существуют измеримое множество

$$E_\alpha \subset [0, 1], \quad \mu(E_\alpha) \geq \frac{1 - \alpha}{M^2}, \quad (24)$$

и функция $f(\mathbf{x}) \in L([0, 1]^m)$ такие, что кубические частичные суммы ряда Фурье функции $f(\mathbf{x})$ по системе $\Phi(m)$ расходятся п.в. на $\Omega_{F*}^1(E_\alpha)$. Действительно, если это не так, то по лемме В существует множество $H_1 \subset [0, 1]$, $\mu(H_1) > 1 - (1 - \alpha)/M^2$, такое, что $\forall H \subset H_1$, $\mu(H) > 0$, множество $\Omega_{F*}^1(H)$ не является множеством неограниченной расходимости ни для одной функции $f(\mathbf{x}) \in L([0, 1]^m)$. Применяя теорему резонанса и лемму 3, приходим к противоречию.

Затем, применяя лемму В еще раз, мы устанавливаем существование функции $f(\mathbf{x}) \in L([0, 1]^m)$ такой, что кубические частичные суммы ее ряда Фурье по системе $\Phi(m)$ расходятся п.в. на множестве $\mathcal{H}_0 = \bigcup_\alpha \Omega_{F*}^1(E_\alpha)$. Из (22)–(24) вытекает, что $\mu_m(\mathcal{H}_0) \geq M^{-2m}$. Доказательство теоремы 2 завершено.

§ 4. Множества сходимости для равномерно ограниченных полных ортонормированных систем

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Не ограничивая общности, будем предполагать, что $E = [0, 1 - 1/M^2]$, поскольку в общем случае, используя функцию $\xi(x) = \mu((0, x) \cap E)$, можем свести ситуацию к рассматриваемой с помощью сохраняющего меру отображения множества E на отрезок $[0, \mu(E)]$.

Как и в работе [8], для простоты мы ограничимся рассмотрением случая, когда $M = \sqrt{2}$. Интересующихся этим вопросом более подробно мы отсылаем к статье [8], где дано определение системы $\{\eta_n\}_{n=1}^\infty$. Чтобы не перегружать работу излишними деталями, приводить его здесь мы не будем. Выделим только те свойства системы $\{\eta_n\}_{n=1}^\infty$, которые позволят нам доказать теорему 3. Для этого нам потребуются следующие обозначения:

$$\bar{h}_n(x) = \begin{cases} \sqrt{2} h_n(2x), & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]; \\ 0, & x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right], \end{cases}$$

$$\bar{\bar{h}}_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]; \\ \sqrt{2} h_n(2x - 1), & x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Система $\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$ построена так, что для некоторой возрастающей последовательности чисел $\{l_j\}_{j=0}^{\infty}$, $l_0 = 1$, существуют числа $1 \leq \kappa_n < 2^n$ такие, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\kappa_n}{2^n} = 1$$

и для $n = 2, 3, \dots$, $1 \leq j \leq \kappa_n$, $1 \leq j \leq 2^{2n}$, $1 \leq \nu \leq 2^{n+3}$ имеем

$$\eta_{l_{n-1}+(j-1)2^{3n+3}+(i-1)2^{n+3}+\nu}(x) = 2^{-n}2^{-(n+3)/2}\bar{h}_n^{(j)}(x), \quad x \in A_n,$$

где

$$A_n = \bigcup_{j=1}^{\kappa_n} \Delta_n^{(j)}, \quad \Delta_n^{(j)} = \text{supp } \bar{h}_n^{(j)}.$$

Кроме того, для любого $x \in (0, 1/2)$ существует $n_x \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $f \in L([0, 1])$ и $\forall n \geq n_x$ имеем

$$S_{l_n}(f, x) = \sum_{k=1}^{l_n} a_k(f) \eta_k(x) = \sum_{i=1}^{2^n} b_i(f) \bar{h}_i(x), \quad (25)$$

где

$$a_k(f) = \int_0^1 f(t) \eta_k(t) dt, \quad b_i(f) = \int_0^1 f(t) \bar{h}_i(t) dt. \quad (26)$$

Если положим

$$k_n(j) = l_{n-1} + (j-1)2^{3n+3},$$

то для всех $n = 2, 3, \dots$, $1 \leq j \leq \kappa_n$ получим, что (см. (25), (26))

$$\sum_{k=1}^{k_n(j)+1} a_k(f) \eta_k(x) = \sum_{l=1}^{2^{n-1}} b_l(f) \bar{h}_l(x) + \sum_{i=1}^j b_i^n(f) \bar{h}_i^n(x), \quad x \in A_n. \quad (27)$$

Отметим, что $A_n \subset A_{n+1} \subset \dots \rightarrow (0, 1/2)$, за исключением счетного множества. Кроме того,

$$\eta_k(x) = 0, \quad x \in A_n, \quad k_n(j) < k \leq l_n.$$

При этом получаем, что если $x \in A_n$, то можно взять $n_x \leq n$.

Хорошо известно, что кубические частичные суммы m -кратного ряда Фурье–Хаара сходятся почти всюду. Поэтому в нашем случае кубические частичные суммы $S_{\mathbf{k}_n(j)}(f; \mathbf{x})$, где $\mathbf{k}_n(j) = (k_n(j), \dots, k_n(j))$, ряда Фурье функции $f(\mathbf{x})$ по системе-произведению системы $\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$ будут сходиться п.в. на множестве $[0, 1/2]^m$.

Теперь рассмотрим частичные суммы $S_{\mathbf{l}}(f; \mathbf{x})$, где $\mathbf{l} = (l, \dots, l)$ и $k_n(j) < l \leq l_n$. В наших дальнейших рассуждениях мы можем предполагать, что числа n и j фиксированы, и для простоты не будем использовать их в следующих обозначениях. Пусть $\Upsilon = \text{supp } \bar{h}_n^{(j)}$, $\Upsilon^* = \text{supp } \bar{\bar{h}}_n^{(j)}$ и для любого $x \in A_n$, $x \notin \Upsilon$, через $\Delta(x)$ обозначим наибольший двоичный интервал, содержащий x , на котором все функции из правой части равенства (27) постоянны.

Частичные суммы ряда Фурье интегрируемой функции ϕ по системе $\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$ также обладают следующим свойством: для всех $n = 2, 3, \dots$, $1 \leq j \leq \kappa_n$, $1 \leq i \leq 2^{2n}$ имеем

$$S_{k_n(j)+i2^{2n}}(\phi, x) - S_{k_n(j)+(i-1)2^{2n}}(\phi, x) = \int_0^1 \phi(t) g_{ji}^{(n)}(t) dt g_{ji}^{(n)}(x),$$

где

$$g_{ji}^{(n)}(x) = 2^{-n} \bar{h}_n^{(j)}(x) + 2^{-n} \sum_{l=2}^{2^{2n}} h_l(i2^{-n} - 2^{-n-1}) \bar{\bar{h}}_n^{(j)}(x) r_{N_n+l}(x),$$

r_{N_n+l} — соответствующая функция Радемахера и N_n — некоторое натуральное число. В [8] было показано, что для $x \in A_n$ выполняется неравенство

$$\left| \sum_{i=1}^l \int_0^1 \phi(t) g_{ji}^{(n)}(t) dt g_{ji}^{(n)}(x) \right| \leq 6(\mu(\Upsilon^*))^{-1} \int_{\Upsilon^*} |\phi(t)| dt \chi_{\Upsilon}(x).$$

Поэтому

$$|S_{k_n(j)+i2^{2n}}(\phi, x) - S_{k_n(j)}(\phi, x)| \leq 6(\mu(\Upsilon^*))^{-1} \int_{\Upsilon^*} |\phi(t)| dt \chi_{\Upsilon}(x). \quad (28)$$

Наконец, в [8] было также установлено, что для всех $n = 2, 3, \dots$, $1 \leq j \leq \kappa_n$, $1 \leq i \leq 2^{2n}$, $1 \leq \nu \leq 2^{n+3}$ и $x \in A_n$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} & |S_{k_n(j)+(i-1)2^{2n}+\nu}(\phi, x) - S_{k_n(j)+(i-1)2^{2n}}(\phi, x)| \\ & \leq 2^{-3n/2+1} \int_0^{1/2} |\phi(t) \bar{h}_n^{(j)}(t)| dt + 6 \int_{1/2}^1 |\phi(t)| dt \leq 6\|\phi\|_1. \end{aligned} \quad (29)$$

Используя условия (27)–(29), мы можем утверждать, что при всех $l, k_n(j) < l \leq l_n$, имеем

$$S_l(\phi, x) = \lambda_l(x), \quad x \in \Upsilon, \quad (30)$$

где

$$\frac{1}{6} |\lambda_l(x)| \leq \left(\frac{1}{\mu(\Upsilon)} \int_{\Upsilon} |\phi(t)| dt + \frac{1}{\mu(\Upsilon^*)} \int_{\Upsilon^*} |\phi(t)| dt + \|\phi\|_1 \right) \chi_{\Upsilon}(x)(x), \quad (31)$$

и

$$S_l(\phi, x) = \frac{1}{\mu(\Delta(x))} \int_{\Delta(x)} \phi(t) dt, \quad x \in A_n, \quad x \notin \Upsilon. \quad (32)$$

Последняя формула сразу вытекает из (27) и леммы Шаудера о частичных суммах рядов Фурье–Хаара.

Пусть $S_N(f; \mathbf{x})$ — кубическая частичная сумма ряда Фурье функции $f \in L([0, 1]^m)$ по m -кратной системе-произведению системы $\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$. Если обозначим $\mathbf{l} = (l, \dots, l) \in \mathbb{N}^m$, где $k_n(j) < l \leq l_n$, то получим

$$S_{\mathbf{l}}(f; \mathbf{x}) = \int_{[0,1]^m} f(\mathbf{t}) \prod_{p=1}^m D_l(x_p, t_p) dt_1 \cdots dt_m, \quad (33)$$

где

$$D_l(x, t) = \sum_{k=1}^l \eta_k(x) \eta_k(t).$$

Поэтому если $\mathbf{x} \in [A_n]^m$ и $x_\nu \notin \Upsilon$ для всех $1 \leq \nu \leq m$, где $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$, то (см. (32))

$$S_1(f; \mathbf{x}) = \frac{1}{\mu_m(\Delta(\mathbf{x}))} \int_{\Delta(\mathbf{x})} f(\mathbf{t}) d\mathbf{t},$$

где

$$\Delta(\mathbf{x}) = \prod_{p=1}^m \Delta(x_p).$$

В противном случае, пусть $\{i_\nu\}_{\nu=1}^q$ — это индексы, для которых $x_{i_\nu} \in \Upsilon$ и $x_i \notin \Upsilon$, если $i \neq i_\nu$, $1 \leq \nu \leq q$. Очевидно, не ограничивая общности, мы можем считать, что $i_\nu = \nu$, $1 \leq \nu \leq q$. Обозначим

$$\Delta^{(q)}(\mathbf{x}) = \prod_{p=q+1}^m \Delta(x_p)$$

и

$${}^q f(t_1, \dots, t_q, x_{q+1}, \dots, x_m) = \frac{1}{\mu_{m-q}(\Delta^{(q)}(\mathbf{x}))} \int_{\Delta^{(q)}(\mathbf{x})} f(\mathbf{t}) dt_{q+1} \cdots dt_m. \quad (34)$$

Тогда из (33) и (27) получаем

$$S_1(f; \mathbf{x}) = \int_{[0,1]^q} {}^q f(t_1, \dots, t_q, x_{q+1}, \dots, x_m) \prod_{p=1}^q D_l(x_p, t_p) dt_1 \cdots dt_q.$$

Применим к предыдущему интегралу теорему Фубини и затем последовательно воспользуемся равенством (30) и неравенством (31). Тогда

$$|S_1(f; \mathbf{x})| \leq 6^m \sum_{\omega} \sum_{\sigma} \frac{1}{\mu_{c_{\omega'}}(\Delta_{\omega'\sigma}(\mathbf{x}))} \int_{\Delta_{\omega'\sigma}(\mathbf{x})} {}^q f_{\omega}(\mathbf{t}_{\omega'}, x_{q+1}, \dots, x_m) d\mathbf{t}_{\omega'}. \quad (35)$$

Первая сумма берется по всевозможным подмножествам $\omega \subset \{1, 2, \dots, q\}$, $c_{\omega'} = \text{Card } \omega'$, $\omega' = \{1, 2, \dots, q\} \setminus \omega$; вторая сумма берется по всем векторам из $\mathbb{R}^{c_{\omega'}}$ с координатами 0, 1, $\mathbf{t}_{\omega'} = (t_{\nu_1}, \dots, t_{\nu_{c_{\omega'}}})$, где $\omega' = (\nu_1, \dots, \nu_{c_{\omega'}})$; $\Delta_{\omega'\sigma}(\mathbf{x}) = \prod_{p=1}^{c_{\omega'}} \Upsilon_{\sigma_p}$, где $\Upsilon_{\sigma_p} = \Upsilon$ при $\sigma_p = 0$ и $\Upsilon_{\sigma_p} = \Upsilon^*$ при $\sigma_p = 1$, $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_{c_{\omega'}})$; и, наконец,

$${}^q f_{\omega}(\mathbf{t}_{\omega'}, x_{q+1}, \dots, x_m) = \int_{[0,1]^{c_{\omega}}} |{}^q f(t_1, \dots, t_q, x_{q+1}, \dots, x_m)| d\mathbf{t}_{\omega}.$$

Замечая, что из (34), (35) следует, что $\Delta_{\omega'\sigma}(\mathbf{x}) \times \Delta^{(q)}(\mathbf{x})$ является параллелепипедом со сторонами, длины которых могут относиться как 1 : 1, 1 : 2 или 2 : 1, получаем

$$|S_1(f; \mathbf{x})| \leq (12)^m \sum_{\omega} \sum_{\sigma} M_{m-c_{\omega}}({}^q f_{\omega}; \mathbf{y}_{\omega'}, x_{q+1}, \dots, x_m),$$

где $M_k(F, \mathbf{u})$ – стандартная максимальная функция, взятая по кубам со сторонами, параллельными осям координат в $[0, 1]^k$; $y_{\nu_i} = x_{\nu_i}$, если $\sigma_{\nu_i} = 0$, и $y_{\nu_i} = x_{\nu_i} + 1/2$, если $\sigma_{\nu_i} = 1$. Хорошо известно, что максимальная функция $M_k(F, \mathbf{u})$ имеет слабый тип $(1, 1)$. Отсюда сразу получаем, что

$$\mu_m\left(\left\{\mathbf{x} \in [A_n]^m : \sup_{N \geq l_n} |S_N(f; \mathbf{x})| > \lambda\right\}\right) \leq \frac{C(m)}{\lambda} \|f\|_1. \quad (36)$$

Теперь мы можем закончить доказательство теоремы 3 стандартным образом. Для любого $r \geq 1$ найдем m -кратный полином Хаара

$$P_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^m P_r(x_i)$$

такой, что если $\xi_r(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - P_{\mathbf{r}}(\mathbf{x})$, то $\|\xi_r\|_1 \leq 1/r^4$. Пусть $E_r = \{\mathbf{x} \in [A_n]^m : |\xi_r(\mathbf{x})| > 1/r^2\}$ и $G_r = \{\mathbf{x} \in [A_n]^m : \sup_{N \geq l_n} |S_N(\xi_r; \mathbf{x})| > 1/r^2\}$. Тогда из (36) вытекает, что $\mu(G_r) \leq C(m)/r^2$, а из неравенства Чебышёва – $\mu(E_r) \leq 1/r^2$. Следовательно, если

$$E = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{r=k}^{\infty} (E_r \cup G_r),$$

то $\mu_m(E) = 0$.

Пусть теперь некоторое $\mathbf{x} \in [A_n]^m \setminus E$ и $\varepsilon > 0$. Тогда найдем k_0 такое, что

$$\mathbf{x} \notin \bigcup_{r=k_0}^{\infty} (E_r \cup G_r).$$

Затем, найдем $r > k_0$ такое, что $(C(m) + 1)/r^2 < \varepsilon$. Пусть также $R_1(r)$ таково, что для $N > R_1(r)$ имеем $S_N(P_{\mathbf{r}}; \mathbf{x}) = P_{\mathbf{r}}(\mathbf{x})$. Тогда для $N \geq \max\{l_n, R_1(r)\}$ получаем

$$|S_N(f; \mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| \leq |S_N(\xi_r; \mathbf{x})| + |\xi_r(\mathbf{x})| \leq \frac{C(m)}{r^2} + \frac{1}{r^2} < \varepsilon.$$

Итак, ряд Фурье функции $f(\mathbf{x})$ по системе $\Phi(m)$ сходится по кубам п.в. на $[A_n]^m$. Доказательство теоремы 3 закончено.

Список литературы

1. *Ульянов П. Л.* О работах Н. Н. Лузина по метрической теории функций // УМН. 1985. Т. 40. № 3. С. 15–70.
2. *Ульянов П. Л.* А. Н. Колмогоров и расходящиеся ряды Фурье // УМН. 1983. Т. 38. № 4. С. 51–90.
3. *Kolmogoroff A.* Une serie de Fourier–Lebesgue divergente presque partout // Fund. Math. 1923. V. 4. P. 324–328.
4. *Бочкарев С. В.* Расходящийся на множестве положительной меры ряд Фурье для произвольной ограниченной ортонормированной системы // Матем. сб. 1975. Т. 98 (140). № 3 (11). С. 436–439.
5. *Казарян К. С.* О некоторых вопросах теории ортогональных рядов // Матем. сб. 1982. Т. 119 (161). № 2. С. 278–294.
6. *Alexits G.* Konvergenzprobleme der Orthogonalreihen. Budapest: Verlag der Ungarischen Akademie der Wissenschaften, 1960.
7. *Казарян К. С., Ульянов П. Л.* О проблеме Алексича относительно расходимости ортогональных рядов Фурье // Докл. АН СССР. 1991. Т. 316. С. 542–546.
8. *Казарян К. С.* Расходящиеся ортогональные ряды Фурье // Матем. сб. 1991. Т. 182. № 7. С. 985–1008.
9. *Качмаж С., Штейнгауз Г.* Теория ортогональных рядов. М.: Физматлит, 1958.
10. *Иосида К.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова; Поступила в редакцию
Universidad Autonoma de Madrid, Spain, 26.02.2002
Институт Математики НАН Армении