Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Русак, А. П. Старовойтов, Аппроксимации Паде для целых функций с регулярно убывающими коэффициентами Тейлора, *Матем. сб.*, 2002, том 193, номер 9, 63–92

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm679>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 15:49:16

УДК 517.51+517.53

В. Н. Русак, А. П. Старовойтов

Аппроксимации Паде для целых функций с регулярно убывающими коэффициентами Тейлора

Для некоторого класса целых функций установлена асимптотика определителей Адамара $D_{n,m}$ при $0 \leq m \leq m(n) \rightarrow \infty$ и $n \rightarrow \infty$. Это позволило исследовать поведение параболических последовательностей таблиц Паде и Чебышёва для многих известных целых функций. Основной результат работы состоит в том, что для некоторых последовательностей $\{(n, m(n))\}$ в определенных классах целых функций (с регулярными коэффициентами Тейлора) аппроксимации Паде $\{\pi_{n,m(n)}\}$, которые являются локально наилучшими рациональными аппроксимациями, приближают заданную функцию равномерно на компакте $D = \{z : |z| \leq 1\}$ со скоростью, асимптотически равной наилучшей.

Библиография: 25 названий.

§ 1. Введение

Каждой функции f , аналитической в области $G \supset D = \{z : |z| \leq 1\}$ и заданной рядом Тейлора

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n, \quad (1.1)$$

поставим в соответствие две таблицы

$$[\pi_{n,m}(\cdot; f)]_{n,m=0}^{\infty}, \quad [r_{n,m}^*(\cdot; f)]_{n,m=0}^{\infty} \quad (1.2)$$

рациональных функций. Первая (таблица Паде) состоит из функций $\pi_{n,m}(z) = \pi_{n,m}(z; f) = P_{n,m}(z)/Q_{m,n}(z)$, $\deg P_{n,m} \leq n$, $\deg Q_{m,n} \leq m$, однозначно определяемых из соотношений (см. [1; § 1.1, теорема 1.1.1])

$$(Q_{m,n}f - P_{n,m})(z) = O(z^{n+m+1}), \quad z \rightarrow 0.$$

Элементами второй (таблицы Чебышёва) являются рациональные дроби $r_{n,m}^*(z) = r_{n,m}^*(z; f)$ наилучшего равномерного приближения f в классе $\mathcal{R}_{n,m}$ (всех рациональных функций, числитель которых имеет степень не выше n , а знаменатель – не выше m), которые определяются из равенств

$$R_{n,m}(f) = R_{n,m}(f; D) := \inf\{\|f - r\| : r \in \mathcal{R}_{n,m}\} = \|f - r_{n,m}^*\|,$$

где $\|g\| = \sup\{|g(z)| : z \in D\}^1$.

¹Если рациональная функция наилучшего приближения не единственна, то в качестве $r_{n,m}^*$ возьмем одну из таких функций.

для функции f , заданной рядом (1.1), при фиксированном $m = 0, 1, 2, \dots$ и $n \rightarrow \infty$ справедливы соотношения (1.3). Следовательно, для заданного класса целых функций (ему, в частности, принадлежит экспонента) отмеченное выше свойство нулевых строк таблиц Паде и Чебышёва сохраняется и для других строк этих таблиц. В случае, когда f — одна из функций $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, аналогичный результат получен В. К. Дзядьком [2] для главной диагонали.

Метод, примененный в [13] для нахождения асимптотики определителя $D_{n,m}$, основан на тождестве

$$D_{n,m+1}D_{n,m-1} = D_{n+1,m}D_{n-1,m} - D_{n,m}^2,$$

являющемся следствием теоремы Сильвестра (см. [1; гл. 1, (4.11)]). С помощью его в [13] доказана следующая эквивалентность²

$$D_{n,m} \sim (-1)^{m(m+1)/2} f_n^m \prod_{j=1}^{m-1} (1 - q_n^j)^{m-j},$$

из которой следует, что в (1.3) при $n \rightarrow \infty$

$$\left| \frac{D_{n+1,m+1}}{D_{n,m}} \right| \sim \left| f_{n+1} \left(\frac{f_{n+1}}{f_n} \right)^m \prod_{j=1}^m (1 - q_{n+1}^j) \right|.$$

Последнее соотношение позволило найти скорость сходимости строк таблиц (1.2) некоторых функций, в частности, функции Миттаг-Леффлера

$$M(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(1 + n/\lambda)}, \quad \lambda > 0,$$

и

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n!)^{1/\lambda}}, \quad \lambda > 0.$$

Вместе с тем в [14] при близких к (1.4) условиях, а именно,

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{q}{n^\alpha} \left(1 + \sum_{k=1}^{m_0} \frac{b_k}{n^k} + O(n^{-m_0-1}) \right), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1.5)$$

где $\alpha > 0$, соотношения (1.3) доказаны при всех $0 \leq m \leq m_0$. В этой работе найден точный порядок убывания определителей Адамара $D_{n,m}$ при фиксированном m и $n \rightarrow \infty$ и поэтому полностью решен вопрос о скорости сходимости строк таблиц

²Появление множителя $(-1)^{m(m-1)/2}$ в правой части обусловлено различием в определении $D_{n,m}$.

Паде и Чебышёва для функций из данного класса: если коэффициенты Тейлора $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ функции (1.1) удовлетворяют условиям (1.5), то в (1.3)

$$\left| \frac{D_{n+1,m+1}}{D_{n,m}} \right| \sim m! |f_{n+1}| \left(\frac{\alpha|q|}{n^{\alpha+1}} \right)^m.$$

Предложенный в [14] метод дает возможность исследовать и функции вида

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{l_n}, \quad (1.6)$$

где l_n – некоторая арифметическая прогрессия, а коэффициенты $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ удовлетворяют условиям (1.5). К таким функциям относятся большинство известных функций анализа и, в частности, рассмотренные в [13] функции $M(z)$, $G(z)$.

В данной работе нас будут интересовать целые функции, для которых соотношения (1.3) имеют место при $m = m(n) \rightarrow \infty$ и $n \rightarrow \infty$. Основной результат работы состоит в том, что для некоторых последовательностей $\{(n, m(n))\}$ в определенных классах целых функций (с регулярными коэффициентами Тейлора) аппроксимации Паде $\{\pi_{n,m(n)}\}$, которые являются локально наилучшими рациональными аппроксимациями, приближают заданную функцию равномерно на компакте D со скоростью, асимптотически равной наилучшей.

Как уже было замечено, главной проблемой такого рода исследований является нахождение асимптотики определителей Адамара $D_{n,m}$. Поскольку порядок этого определителя равен m , то в этом случае с ростом n растет и порядок $D_{n,m}$, что значительно усложняет нахождение его асимптотики.

Для экспоненты определителя Адамара $D_{n,m}$ вычислены точно (см. [1; гл. 1, § 1.2, (2.6)]) для любых m и n . В работе [16] (см. также [13]) при следующих ограничениях:

$$\left| \frac{(f_{n-1}f_n)}{f_n^2} \right| < \rho^2, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1.7)$$

где $0 < \rho < \rho_0 = 0.4559\dots$, показано, что для $n, m \in \mathbb{N}$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} |f_n|^m \leq |D_{n,m}| \leq \left(\frac{3}{2}\right)^{m-1} |f_n|^m, \quad (1.8)$$

и с помощью (1.8) для таких функций соотношение (1.3) установлено в случае $0 \leq m \leq m(n) = 1.4n$ и $n \rightarrow \infty$. Доказательство (1.8) в [16] опирается на то, что при “жестких” ограничениях (1.7) (экспонента им не удовлетворяет) вычисление определителя $D_{n,m}$ сводится к вычислению определителя матрицы с доминирующей главной диагональю.

Прежде чем перейти к формулировкам основных результатов статьи (они анонсированы в [17]–[19]), отметим, что начало данным исследованиям положено в [20].

Через $\mathcal{A}_\beta^\alpha(q)$, $\alpha \in \mathbb{N}$, $\beta \geq 1$, $q \in \mathbb{C}$, обозначим множество всех функций f , представимых в виде (1.1), коэффициенты $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ которых не равны нулю и удовлетворяют следующим ограничениям: для любого j , $1 \leq j \leq m(n)$, где

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(m(n))^{2+\beta}}{n} = 0, \quad (1.9)$$

существует такая последовательность комплексных чисел $\{b_k^{(j)}\}_{k=1}^{\infty}$, что

$$|b_k^{(j)}| \leq (cj^{\beta})^k, \quad c = \text{const}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1.10)$$

и при $n \geq n_0$ ³

$$\frac{f_{n+j}}{f_n} = \left(\frac{q}{n^{\alpha}}\right)^j \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k^{(j)}}{n^k}\right). \quad (1.11)$$

Справедливы следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1.1. Если $f \in \mathcal{A}_{\beta}^{\alpha}(q)$, $\alpha \in \mathbb{N}$, $\beta \geq 1$, $q \in \mathbb{C}$, и выполняется условие (1.9), то для каждого m , $0 \leq m \leq m(n)$, при $n \rightarrow \infty$

$$D_{n,m} \sim (-q)^{m(m-1)/2} \prod_{k=0}^{m-1} f_{n-k} \prod_{1 \leq i < j \leq m} \left(\frac{1}{(n+1-j)^{\alpha}} - \frac{1}{(n+1-i)^{\alpha}} \right). \quad (1.12)$$

ТЕОРЕМА 1.2. Если $f \in \mathcal{A}_{\beta}^{\alpha}(q)$, $\alpha \in \mathbb{N}$, $\beta \geq 1$, $q \in \mathbb{C}$, и выполняется условие (1.9), то для каждого m , $0 \leq m \leq m(n)$, при $n \rightarrow \infty$

$$R_{n,m}(f) \sim \|f - \pi_{n,m}(\cdot; f)\| \sim \left| \frac{D_{n+1,m+1}}{D_{n,m}} \right| \sim m! |f_{n+1}| \left(\frac{\alpha|q|}{n^{\alpha+1}} \right)^m. \quad (1.13)$$

ТЕОРЕМА 1.3. Если функция g представима в виде (1.6), где $l_n = l_0 + dn$, $d \in \mathbb{N}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, – арифметическая прогрессия, а $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ являются коэффициентами Тейлора некоторой функции $f \in \mathcal{A}_{\beta}^{\alpha}(q)$, $\alpha \in \mathbb{N}$, $\beta \geq 1$, $q \in \mathbb{C}$, и выполняется условие (1.9), то для каждого m , $0 \leq m \leq m(n)$, при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} R_{l_n+i, dm+j}(g) &\sim \|g - \pi_{l_n+i, dm+j}(\cdot; g)\| \sim \left| \frac{D_{n+1, m+1}}{D_{n, m}} \right| \\ &\sim m! |f_{n+1}| \left(\frac{\alpha|q|}{n^{\alpha+1}} \right)^m, \end{aligned} \quad (1.14)$$

где $0 \leq i + j \leq d - 1$.

Анализ теорем 1.1–1.3 показывает, что при увеличении β класс функций $\mathcal{A}_{\beta}^{\alpha}(q)$ расширяется, однако сужается множество последовательностей элементов таблиц Паде и Чебышёва, для которых имеют место эквивалентности (1.12)–(1.14). Для $\beta = 2$ теоремы 1.1–1.3 в неявном виде анонсированы в [20]. При больших β коэффициенты $\{b_k^{(j)}\}_{k=1}^{\infty}$ могут расти быстро. В этом случае по своему определению класс $\mathcal{A}_{\beta}^{\alpha}(q)$ близок к классу функций, исследованному в [14], а последовательности элементов таблиц (1.2), для которых имеют место эквивалентности (1.12)–(1.14), близки к строкам.

³Подчеркнем, что последовательность $\{b_k^{(j)}\}_{k=1}^{\infty}$ определяется только значением j и не зависит от n , а c – абсолютная константа, причем одна и та же для всех j .

Условия, определяющие класс $\mathcal{A}_\beta^\alpha(q)$, можно интерпретировать следующим образом. Положив в (1.11) $j = 1$, получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = 0.$$

Отсюда следует, что $\mathcal{A}_\beta^\alpha(q)$ состоит из целых функций. Условие (1.11) задает скорость убывания коэффициентов Тейлора и вместе с (1.10) является некоторым условием регулярности (правильности) убывания коэффициентов Тейлора функции f . Дело в том, и это хорошо известно, что высокая скорость убывания коэффициентов степенного ряда не гарантирует даже сходимости аппроксимаций Паде к сумме этого ряда (см. [1; гл. 6, § 6.1]). При исследовании строк таблицы Паде в условиях регулярности (1.4), (1.5) сравниваются соседние коэффициенты. В нашем случае для исследования поведения $\pi_{n,m}(\cdot; f)$ при $m \leq m(n) \rightarrow \infty$ и $n \rightarrow \infty$ потребовалось сравнивать одновременно $j \leq m(n)$ последовательных коэффициентов степенного ряда, определяющего функцию f .

В § 5 будет показано, что проверку условий (1.9)–(1.11) можно существенно упростить, что позволило установить соотношения (1.3) при $m \rightarrow \infty$ и $n \rightarrow \infty$ для многих известных целых функций.

§ 2. Определители Коши для системы функций

Рассмотрим m степенных рядов

$$f_i(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(i)} z^k, \quad i = \overline{1, m}, \quad (2.1)$$

сходящихся в круге $D_\rho = \{z : |z| < \rho\}$, и $z_j \in D_\rho, j = \overline{1, m}$. Тогда определитель

$$|f_i(z_j)|_{i,j=1}^m = \begin{vmatrix} f_1(z_1) & f_1(z_2) & \dots & f_1(z_m) \\ f_2(z_1) & f_2(z_2) & \dots & f_2(z_m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_m(z_1) & f_m(z_2) & \dots & f_m(z_m) \end{vmatrix}$$

будем называть *определителем Коши для системы функций* $\{f_i\}_{i=1}^m$.

В этом параграфе при некоторых ограничениях на коэффициенты степенных рядов (2.1) и числа $\{z_j\}_{j=1}^m$ найдена асимптотика определителей Коши. При этом существенную роль играет следующая лемма (см. [21; гл. 7, § 6, лемма (6.A)], [22; гл. 1, § 1.2, теорема 1.2.1]).

ЛЕММА 2.1 (Коши–Хуа Ло-кен). *Справедливо равенство*

$$|f_i(z_j)|_{i,j=1}^m = \sum_{k_1 > k_2 > \dots > k_m \geq 0} |a_{k_j}^{(i)}|_{i,j=1}^m |z_i^{k_j}|_{i,j=1}^m,$$

где k_i – целые числа.

Предположим, что степенные ряды (2.1) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} f_{m-1}(z) &= z^{\alpha(m-1)} + \sum_{k > \alpha(m-1)} a_k^{(m-1)} z^k; \\ f_{m-2}(z) &= z^{\alpha(m-2)} + \sum_{k > \alpha(m-2)} a_k^{(m-2)} z^k; \\ &\dots\dots\dots \\ f_1(z) &= z^\alpha + \sum_{k > \alpha} a_k^{(1)} z^k; \\ f_0(z) &= 1, \quad \alpha \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Тогда систему (2.2) кратко можно записать так:

$$f_{m-i}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(m-i)} z^k, \quad i = \overline{1, m},$$

где

$$\begin{cases} a_k^{(i)} = 0, & 1 \leq i \leq m-1, \quad k < \alpha i; \\ a_{\alpha i}^{(i)} = 1, & 1 \leq i \leq m-1; \\ a_0^{(0)} = 1, \quad a_k^{(0)} = 0, & k \geq 1. \end{cases} \tag{2.3}$$

Будем считать также, что остальные коэффициенты степенных рядов (2.2) подчинены следующим ограничениям:

$$|a_k^{(i)}| \leq (ci^\beta)^{k-\alpha i}, \quad c = \text{const}, \quad k > \alpha i, \quad 1 \leq i \leq m-1. \tag{2.4}$$

Для $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$, $\lambda_j \in D_\rho$, $j = \overline{1, m}$, рассмотрим соответствующий определитель Коши

$$\Delta_m(\vec{\lambda}) := |f_{m-i}(\lambda_j)|_{i,j=1}^m.$$

ТЕОРЕМА 2.1. Если $c_1, c_2 > 0$, $\beta \geq 1$,

$$\frac{1}{c_1 n + c_2 m} \leq \lambda_j \leq \frac{1}{c_1 n - c_2 m}, \quad j = \overline{1, m}, \tag{2.5}$$

и выполняется условие (1.9), то для каждого m , $0 \leq m \leq m(n)$, при $n \rightarrow \infty$

$$\Delta_m(\vec{\lambda}) \sim W_m(\vec{\lambda}^\alpha),$$

где

$$W_m(\vec{\lambda}) = |\lambda_j^{m-i}|_{i,j=1}^m = \prod_{1 \leq i < j \leq m} (\lambda_i - \lambda_j)$$

– определитель Вандермонда порядка m от переменных $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, а $\vec{\lambda}^\alpha = (\lambda_1^\alpha, \lambda_2^\alpha, \dots, \lambda_m^\alpha)$.

Доказательству теоремы предположим ряд вспомогательных утверждений. Для этого введем дополнительные обозначения:

$$\begin{aligned} \vec{k} &= (k_1, k_2, \dots, k_m), \quad k_i - \text{целые числа}; \\ k_{\alpha, i} &= \alpha(m-i), \quad i = \overline{1, m}; \\ \vec{k}_\alpha &= (k_{\alpha, 1}, k_{\alpha, 2}, \dots, k_{\alpha, m}). \end{aligned}$$

Далее, если r – целое неотрицательное число, то через $\mathbb{K}_r(m)$ обозначим множество всех таких $\vec{k} = (k_1, k_2, \dots, k_m)$, что

- 1) k_i – целые числа и $k_1 > k_2 > \dots > k_m \geq 0$;
- 2) $k_i \geq \alpha(m-i) = k_{\alpha, i}$, $i = \overline{1, m}$;
- 3) $k_1 + k_2 + \dots + k_m = \alpha m(m-1)/2 + r$.

Для $k_1 > k_2 > \dots > k_m \geq 0$ рассмотрим функцию

$$V_m(\vec{k}; \vec{\lambda}) := \frac{|\lambda_j^{k_i}|_{i,j=1}^m}{W_m(\vec{\lambda})}. \quad (2.6)$$

ЛЕММА 2.2. Функция $V_m(\vec{k}; \vec{\lambda})$ есть симметрический однородный многочлен переменных $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ порядка $k_1 + k_2 + \dots + k_m - m(m-1)/2$ с положительными коэффициентами.

Данная лемма принадлежит С. Н. Бернштейну (доказательство см. в [23; ст. 51, гл. 2]).

ЛЕММА 2.3. Пусть $P_i(z)$, $i = \overline{1, m}$, – многочлены, $\lambda \in \mathbb{C}$. Тогда

$$\lim_{\lambda_j \rightarrow \lambda, j=\overline{1, m}} \frac{|P_i(\lambda_j)|_{i,j=1}^m}{W_m(\vec{\lambda})} = \frac{(-1)^{m(m-1)/2} |P_i^{(j-1)}(\lambda)|_{i,j=1}^m}{1! 2! \dots (m-1)!}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, считаем $\lambda = 0$. По теореме Тейлора

$$P_i(z) = P_i(0) + \frac{P_i^{(1)}(0)}{1!} z + \frac{P_i^{(2)}(0)}{2!} z^2 + \dots.$$

Применяя лемму Коши–Хуа Ло-кена, получаем

$$|P_i(\lambda_j)|_{i,j=1}^m = \sum_{k_1 > k_2 > \dots > k_m \geq 0} |\lambda_i^{k_j}|_{i,j=1}^m \left| \frac{P_i^{(k_j)}(0)}{k_j!} \right|_{i,j=1}^m.$$

Следовательно,

$$\frac{|P_i(\lambda_j)|_{i,j=1}^m}{W_m(\vec{\lambda})} = \sum_{k_1 > k_2 > \dots > k_m \geq 0} \left| \frac{P_i^{(k_j)}(0)}{k_j!} \right|_{i,j=1}^m \frac{|\lambda_i^{k_j}|_{i,j=1}^m}{W_m(\vec{\lambda})}.$$

По лемме 2.2 $|\lambda_j^{k_i}|_{i,j=1}^m / W_m(\vec{\lambda})$ – однородный многочлен от переменных $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ порядка $k_1 + k_2 + \dots + k_m - m(m-1)/2$. Поэтому при $k_1 + k_2 + \dots + k_m > m(m-1)/2$

$$\lim_{\lambda_j \rightarrow 0, j=\overline{1, m}} \frac{|\lambda_i^{k_j}|_{i,j=1}^m}{W_m(\vec{\lambda})} = 0.$$

Поскольку система

$$\begin{cases} k_1 > k_2 > \dots > k_m \geq 0, \\ k_1 + k_2 + \dots + k_m \leq \frac{m(m-1)}{2} \end{cases}$$

в целых числах имеет единственное решение $k_j = m-j$, $j = \overline{1, m}$, то

$$\lim_{\lambda_j \rightarrow 0, j=\overline{1, m}} \frac{|\lambda_i^{k_j}|_{i,j=1}^m}{W_m(\vec{\lambda})} = \left| \frac{P_i^{(m-j)}(0)}{(m-j)!} \right|_{i,j=1}^m = \frac{(-1)^{m(m-1)/2} |P_i^{(j-1)}(0)|_{i,j=1}^m}{1! 2! \dots (m-1)!}.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 2.4. Пусть r – целое неотрицательное число. Тогда число решений диофантова уравнения

$$i_1 + i_2 + \dots + i_m = r \quad (2.7)$$

в целых неотрицательных числах равно

$$C_{m+r-1}^r = C_{r+m-1}^{m-1} = \frac{(m+r-1)!}{r!(m-1)!}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из решения Эйлера “задачи на размен денег” следует (см. [24; отдел первый, гл. 1, § 1, решение задачи 9]), что число решений диофантова уравнения (2.7) равно коэффициенту A_r степенного ряда

$$\frac{1}{(1-\xi)^m} = \sum_{r=0}^{\infty} A_r \xi^r, \quad |\xi| < 1.$$

Остается заметить, что

$$A_r = C_{m+r-1}^r = C_{r+m-1}^{m-1} = \frac{(m+r-1)!}{r!(m-1)!}.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 2.5. Для $\vec{k} \in \mathbb{K}_r(m)$ справедливо неравенство

$$\frac{W_m(\vec{k})}{W_m(\vec{k}_\alpha)} \leq (3m)^r. \quad (2.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем с помощью индукции по r . Если $r = 0$, то $\mathbb{K}_0(m)$ состоит из единственного элемента $\vec{k}_\alpha$. В этом случае (2.8) обращается в равенство. Пусть (2.8) верно для $r - 1$, где $r \geq 1$. Возьмем любой $\vec{k} \in \mathbb{K}_r(m)$. Тогда существует индекс ν , $1 \leq \nu \leq m$, такой, что

$$\vec{k}' = (k_1, \dots, k_{\nu-1}, k_\nu - 1, k_{\nu+1}, \dots, k_m) \in \mathbb{K}_{r-1}(m).$$

Пусть $k'_i = k_i$ при $i \neq \nu$ и $k'_\nu = k_\nu - 1$. Тогда

$$\begin{aligned} 0 \leq W_m(\vec{k}) &= \prod_{1 \leq i < j \leq m} (k_i - k_j) \\ &= W_m(\vec{k}') \frac{k_\nu - k_{\nu+1}}{k'_\nu - k'_{\nu+1}} \frac{k_\nu - k_{\nu+2}}{k'_\nu - k'_{\nu+2}} \dots \frac{k_\nu - k_m}{k'_\nu - k'_m} \\ &\quad \times \frac{k_1 - k_\nu}{k'_1 - k'_\nu} \frac{k_2 - k_\nu}{k'_2 - k'_\nu} \dots \frac{k_{\nu-1} - k_\nu}{k'_{\nu-1} - k'_\nu} \\ &\leq W_m(\vec{k}') \frac{k_\nu - k_{\nu+1}}{k'_\nu - k'_{\nu+1}} \frac{k_\nu - k_{\nu+2}}{k'_\nu - k'_{\nu+2}} \dots \frac{k_\nu - k_m}{k'_\nu - k'_m}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

так как

$$\frac{k_i - k_\nu}{k'_i - k'_\nu} \leq 1,$$

если $i \leq \nu - 1$. По определению

$$\begin{aligned} \frac{k_\nu - k_{\nu+1}}{k'_\nu - k'_{\nu+1}} &= \frac{k'_\nu + 1 - k'_{\nu+1}}{k'_\nu - k'_{\nu+1}} = 1 + \frac{1}{k'_\nu - k'_{\nu+1}}, \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{k_\nu - k_m}{k'_\nu - k'_m} &= \frac{k'_\nu + 1 - k'_m}{k'_\nu - k'_m} = 1 + \frac{1}{k'_\nu - k'_m} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} k'_\nu - k'_{\nu+1} &\geq 1, \\ k'_\nu - k'_{\nu+2} &= (k'_\nu - k'_{\nu+1}) + (k'_{\nu+1} - k'_{\nu+2}) \geq 2, \\ &\dots\dots\dots \\ k'_\nu - k'_m &= (k'_\nu - k'_{\nu+1}) + \dots + (k'_{m-1} - k'_m) \geq m - \nu. \end{aligned}$$

Поэтому, применяя неравенство Коши, получаем

$$\begin{aligned} &\frac{k_\nu - k_{\nu+1}}{k'_\nu - k'_{\nu+1}} \frac{k_\nu - k_{\nu+2}}{k'_\nu - k'_{\nu+2}} \dots \frac{k_\nu - k_m}{k'_\nu - k'_m} \\ &\leq \left(1 + \frac{\frac{1}{k'_\nu - k'_{\nu+1}} + \dots + \frac{1}{k'_\nu - k'_m}}{m - \nu} \right)^{m-\nu} \\ &\leq \left(1 + \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m-\nu}}{m - \nu} \right)^{m-\nu} \leq \left(1 + \frac{1 + \ln(m - \nu)}{m - \nu} \right)^{m-\nu} \\ &= \left(1 + \frac{\ln(e(m - \nu))}{m - \nu} \right)^{m-\nu} \leq e^{\ln(e(m-\nu))} \leq 3m. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Из (2.9), (2.10) и предположения индукции следует, что

$$0 \leq \frac{W_m(\vec{k})}{W_m(\vec{k}_\alpha)} \leq 3m \frac{W_m(\vec{k}')}{W_m(\vec{k}_\alpha)} \leq (3m)(3m)^{r-1} = (3m)^r.$$

Лемма доказана.

Через $|V_m(\vec{k})|$ обозначим сумму всех коэффициентов многочлена Бернштейна $V_m(\vec{k}, \vec{\lambda})$. Непосредственный подсчет показывает, что

$$|V_m(\vec{k}_\alpha)| = \alpha^{m(m-1)/2}. \quad (2.11)$$

ЛЕММА 2.6. Пусть $\vec{k} \in \mathbb{K}_r(m)$. Тогда

$$|V_m(\vec{k})| \leq \alpha^{m(m-1)/2} (3m)^r. \quad (2.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из лемм 2.2 и 2.3 следует, что

$$\begin{aligned}
 |V_m(\vec{k})| &= \lim_{\lambda_i \rightarrow 1, i=1, m} V_m(\vec{k}, \vec{\lambda}) \\
 &= (-1)^{m(m-1)/2} \frac{|\lambda^{k_i}{}^{(j-1)}|_{i,j=1}^m}{1! 2! \dots (m-1)!} \Big|_{\lambda=1} = \frac{(-1)^{m(m-1)/2}}{1! 2! \dots (m-1)!} \\
 &\quad \times \begin{vmatrix} 1 & k_1 & k_1(k_1-1) & \dots & k_1(k_1-1) \dots (k_1-m+2) \\ 1 & k_2 & k_2(k_2-1) & \dots & k_2(k_2-1) \dots (k_2-m+2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & k_m & k_m(k_m-1) & \dots & k_m(k_m-1) \dots (k_m-m+2) \end{vmatrix} \\
 &= (-1)^{m(m-1)/2} \frac{|k_i^{j-1}|_{i,j=1}^m}{1! 2! \dots (m-1)!} = \alpha^{m(m-1)/2} \frac{W_m(\vec{k})}{W_m(\vec{k}_\alpha)}.
 \end{aligned}$$

Теперь (2.12) является следствием неравенства (2.8). Заметим также, что из последних равенств при $\vec{k} = \vec{k}_\alpha$ получим (2.11). Лемма доказана.

ЛЕММА 2.7. Пусть $\vec{k} \in \mathbb{K}_r(m)$, $r \geq 0$, $\beta \geq 1$, числа $\{\lambda_j\}_{j=1}^m$ удовлетворяют неравенствам (2.5) и выполняется условие (1.9), т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(m(n))^{2+\beta}}{n} = 0.$$

Тогда для некоторой постоянной c_3 и m , $0 \leq m \leq m(n)$, при $n \geq n_0$

$$\frac{|\lambda_j^{k_i}|_{i,j=1}^m}{W_m(\vec{\lambda}^\alpha)} \leq \left(\frac{c_3 m}{n} \right)^r. \quad (2.13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначив левую часть (2.13) через $\Omega(m)$, из определения многочленов Бернштейна (2.6) получаем

$$\Omega(m) = \frac{V_m(\vec{k}, \vec{\lambda})}{V_m(\vec{k}_\alpha, \vec{\lambda})}.$$

Согласно лемме Бернштейна $V_m(\vec{k}, \vec{\lambda})$ есть однородный многочлен порядка $k_1 + k_2 + \dots + k_m - m(m-1)/2$ с положительными коэффициентами, а $V_m(\vec{k}_\alpha, \vec{\lambda})$ — однородный многочлен порядка

$$\alpha + 2\alpha + \dots + (m-1)\alpha - \frac{m(m-1)}{2} = \frac{\alpha m(m-1)}{2} - \frac{m(m-1)}{2}$$

с положительными коэффициентами. Поэтому

$$\Omega(m) \leq \frac{|V_m(\vec{k})| \left(\frac{1}{c_1 n - c_2 m} \right)^{k_1 + k_2 + \dots + k_m - m(m-1)/2}}{|V_m(\vec{k}_\alpha)| \left(\frac{1}{c_1 n + c_2 m} \right)^{\alpha m(m-1)/2 - m(m-1)/2}}.$$

Поскольку $\vec{k} \in \mathbb{K}_r(m)$, то

$$k_1 + k_2 + \dots + k_m = \frac{\alpha m(m-1)}{2} + r.$$

Отсюда, из равенства (2.11) и неравенства (2.12) следует, что

$$\Omega(m) \leq \frac{(3m)^r}{(c_1 n - c_2 m)^r} \left(\frac{c_1 n + c_2 m}{c_1 n - c_2 m} \right)^{(\alpha-1)m(m-1)/2} \leq \left(\frac{c_3 m}{n} \right)^r,$$

так как для $\beta \geq 1$ при выполнении условия (1.9) и $n \rightarrow \infty$

$$\left(\frac{c_1 n + c_2 m}{c_1 n - c_2 m} \right)^{(\alpha-1)m(m-1)/2} \sim 1.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 2.8. Для системы функций (2.2) при $\lambda_i \in D_\rho$, $i = \overline{1, m}$, имеет место равенство

$$\Delta_m(\vec{\lambda}) = |f_{m-i}(\lambda_j)|_{i,j=1}^m = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{\vec{k} \in \mathbb{K}_r(m)} A(\vec{k}) |\lambda_j^{k_i}|_{i,j=1}^m,$$

$$\text{где } A(\vec{k}) = |a_{k_j}^{(m-i)}|_{i,j=1}^m.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме Коши–Хуа Ло-кена

$$\Delta_m(\vec{\lambda}) = \sum_{k_1 > k_2 > \dots > k_m \geq 0} A(\vec{k}) |\lambda_j^{k_i}|_{i,j=1}^m.$$

Рассмотрим множество $\mathbb{K}(m) = \bigcup_{r=0}^{\infty} \mathbb{K}_r(m)$. Достаточно показать, что если $\vec{k} = (k_1, k_2, \dots, k_m)$, $k_1 > k_2 > \dots > k_m \geq 0$ и $\vec{k} \notin \mathbb{K}(m)$, то $A(\vec{k}) = 0$.

Предположим, что $\vec{k} = (k_1, k_2, \dots, k_m) \notin \mathbb{K}(m)$. Тогда существует ν , $1 \leq \nu \leq m$, такое, что $k_\nu < \alpha(m - \nu)$. В противном случае все $k_i \geq \alpha(m - \nu)$, $i = \overline{1, m}$, и положив

$$r^* = k_1 + k_2 + \dots + k_m - \frac{\alpha m(m-1)}{2},$$

получим, что $\vec{k} \in \mathbb{K}_{r^*}(m)$. Так как $k_1 > k_2 > \dots > k_m$, то $k_m < k_{m-1} < \dots < k_\nu < \alpha(m - \nu)$. Тогда согласно предположениям (2.3)

$$a_{k_m}^{(m-\nu)} = a_{k_{m-1}}^{(m-\nu)} = \dots = a_{k_\nu}^{(m-\nu)} = 0.$$

Если же $m - j > m - \nu$, то $k_m < k_{m-1} < \dots < k_\nu < \alpha(m - j)$, и тогда по той же причине

$$a_{k_m}^{(m-j)} = a_{k_{m-1}}^{(m-j)} = \dots = a_{k_\nu}^{(m-j)} = 0.$$

В таком случае определитель $A(\vec{k})$ примет вид

$$\begin{vmatrix} a_{k_1}^{(m-1)} & a_{k_2}^{(m-1)} & \dots & a_{k_{\nu-1}}^{(m-1)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{k_1}^{(m-2)} & a_{k_2}^{(m-2)} & \dots & a_{k_{\nu-1}}^{(m-2)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k_1}^{(m-\nu)} & a_{k_2}^{(m-\nu)} & \dots & a_{k_{\nu-1}}^{(m-\nu)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{k_1}^{(m-\nu-1)} & a_{k_2}^{(m-\nu-1)} & \dots & a_{k_{\nu-1}}^{(m-\nu-1)} & a_{k_{\nu}}^{(m-\nu-1)} & a_{k_{\nu+1}}^{(m-\nu-1)} & \dots & a_{k_m}^{(m-\nu-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k_1}^{(0)} & a_{k_2}^{(0)} & \dots & a_{k_{\nu-1}}^{(0)} & a_{k_{\nu}}^{(0)} & a_{k_{\nu+1}}^{(0)} & \dots & a_{k_m}^{(0)} \end{vmatrix}$$

и равен нулю, так как его порядок равен m и в нем имеется прямоугольный блок порядка $\nu \times (m - \nu + 1)$, состоящий из нулей.

Лемма доказана.

ЛЕММА 2.9. Пусть

$$A_r(m) := \sum_{\vec{k} \in \mathbb{K}_r(m)} |A(\vec{k})|.$$

Тогда при выполнении условий (2.3) и (2.4) на коэффициенты степенных рядов (2.2) справедлива оценка

$$A_r(m) \leq (cm^{1+\beta})^r. \quad (2.14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\vec{k} \in \mathbb{K}_r(m)$. По определению

$$A(\vec{k}) = |a_{k_j}^{(m-i)}|_{i,j=1}^m = \sum_{(j_1 j_2 \dots j_m)} \delta_{1,2,\dots,m}^{(j_1 j_2 \dots j_m)} a_{k_{j_1}}^{(m-1)} a_{k_{j_2}}^{(m-2)} \dots a_{k_{j_m}}^{(0)},$$

где сумма распространяется на всевозможные перестановки $(j_1 j_2 \dots j_m)$ чисел $1, 2, \dots, m$, а $\delta_{1,2,\dots,m}^{(j_1 j_2 \dots j_m)}$ равна 1 или -1 в зависимости от того, будет ли перестановка четной или нечетной. Положим для краткости

$$a_{\vec{k}}^{(j_1 j_2 \dots j_m)} = |a_{k_{j_1}}^{(m-1)} a_{k_{j_2}}^{(m-2)} \dots a_{k_{j_m}}^{(0)}|.$$

Тогда

$$A_r(m) \leq \sum_{\vec{k} \in \mathbb{K}_r(m)} \sum_{(j_1 j_2 \dots j_m)} a_{\vec{k}}^{(j_1 j_2 \dots j_m)}. \quad (2.15)$$

Рассмотрим $a_{\vec{k}}^{(j_1 j_2 \dots j_m)}$, где $\vec{k} \in \mathbb{K}_r(m)$. Если существует ν , $1 \leq \nu \leq m$, такое, что $k_{j_\nu} < \alpha(m - \nu)$, то по предположению (2.3) $a_{k_{j_\nu}}^{(m-\nu)} = 0$ и, следовательно,

$$a_{\vec{k}}^{(j_1 j_2 \dots j_m)} = 0.$$

Поэтому в дальнейшем в сумме (2.15) будем рассматривать только те слагаемые $a_{\vec{k}}^{(j_1 j_2 \dots j_m)}$, для которых

$$k_{j_\nu} \geq \alpha(m - \nu), \quad \nu = \overline{1, m}. \quad (2.16)$$

Покажем, что число таких слагаемых не превышает числа решений диофантова уравнения (2.7). Действительно, рассмотрим отображение

$$\Omega: a_{\vec{k}}^{(j_1 j_2 \dots j_m)} \mapsto (I_1, I_2, \dots, I_m),$$

где $I_\nu = k_{j_\nu} - \alpha(m - \nu)$, $\nu = \overline{1, m}$. В силу (2.16) $I_\nu \geq 0$, $\nu = \overline{1, m}$, и

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 + \dots + I_m &= \sum_{\nu=1}^m (k_{j_\nu} - \alpha(m - \nu)) \\ &= k_1 + k_2 + \dots + k_m - \frac{\alpha m(m-1)}{2} = r. \end{aligned}$$

Поэтому достаточно доказать, что Ω – инъекция. Пусть

$$a_{\vec{k}}^{(j_1 j_2 \dots j_m)} \neq a_{\vec{k}'}^{(j'_1 j'_2 \dots j'_m)}, \quad \text{где } \vec{k}, \vec{k}' \in \mathbb{K}_r(m).$$

Тогда

$$|a_{k_{j_1}}^{(m-1)} a_{k_{j_2}}^{(m-2)} \dots a_{k_{j_m}}^{(0)}| \neq |a_{k'_{j'_1}}^{(m-1)} a_{k'_{j'_2}}^{(m-2)} \dots a_{k'_{j'_m}}^{(0)}|$$

и, следовательно,

$$(k_{j_1}, k_{j_2}, \dots, k_{j_m}) \neq (k'_{j'_1}, k'_{j'_2}, \dots, k'_{j'_m}).$$

Поэтому существует индекс ν , $1 \leq \nu \leq m$, такой, что $k_{j_\nu} \neq k'_{j'_\nu}$. Значит, и

$$(I_1, I_2, \dots, I_m) \neq (I'_1, I'_2, \dots, I'_m),$$

так как

$$I_\nu = k_{j_\nu} - \alpha(m - \nu) \neq k'_{j'_\nu} - \alpha(m - \nu) = I'_\nu.$$

С учетом сказанного и леммы 2.4 получаем

$$A_r(m) \leq C_{m+r-1}^r \max_{\vec{k} \in \mathbb{K}_r(m)} \max_{(j_1 j_2 \dots j_m)} |a_{k_{j_1}}^{(m-1)} a_{k_{j_2}}^{(m-2)} \dots a_{k_{j_m}}^{(0)}|. \quad (2.17)$$

Теперь воспользуемся условиями (2.4) на коэффициенты:

$$|a_{k_{j_\nu}}^{(m-\nu)}| \leq (c(m-\nu)^\beta)^{k_{j_\nu} - \alpha(m-\nu)} \leq (cm^\beta)^{k_{j_\nu} - \alpha(m-\nu)}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |a_{k_{j_1}}^{(m-1)} a_{k_{j_2}}^{(m-2)} \dots a_{k_{j_m}}^{(0)}| &\leq (cm^\beta)^{k_{j_1} + k_{j_2} + \dots + k_{j_m} - \alpha(1+2+\dots+m-1)} \\ &= (cm^\beta)^{k_1 + k_2 + \dots + k_m - \alpha m(m-1)/2} = (cm^\beta)^r. \end{aligned}$$

Отсюда и из (2.17), учитывая соотношение

$$C_{m+r-1}^r \leq m^r, \quad (2.18)$$

получаем утверждение леммы.

Лемма доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 2.1. Согласно лемме 2.8

$$\begin{aligned}\Delta_m(\vec{\lambda}) &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{\vec{k} \in \mathbb{K}_r(m)} A(\vec{k}) |\lambda_j^{k_i}|_{i,j=1}^m \\ &= \sum_{\vec{k} \in \mathbb{K}_0(m)} A(\vec{k}) |\lambda_j^{k_i}|_{i,j=1}^m + \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{\vec{k} \in \mathbb{K}_r(m)} A(\vec{k}) |\lambda_j^{k_i}|_{i,j=1}^m.\end{aligned}$$

Множество $\mathbb{K}_0(m)$ состоит из одного элемента $\vec{k}_\alpha$, следовательно, первая сумма равна

$$A(\vec{k}_\alpha) |\lambda_j^{\alpha(m-i)}|_{i,j=1}^m = A(\vec{k}_\alpha) W_m(\vec{\lambda}^\alpha) = W_m(\vec{\lambda}^\alpha)$$

в силу того, что при условии (2.3) на коэффициенты

$$A(\vec{k}_\alpha) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{k_{\alpha,1}}^{(m-2)} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{k_{\alpha,1}}^{(m-3)} & a_{k_{\alpha,2}}^{(m-3)} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k_{\alpha,1}}^{(1)} & a_{k_{\alpha,2}}^{(1)} & a_{k_{\alpha,3}}^{(1)} & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Поэтому

$$\frac{\Delta_m(\vec{\lambda})}{W_m(\vec{\lambda}^\alpha)} = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{\vec{k} \in \mathbb{K}_r(m)} A(\vec{k}) \frac{|\lambda_j^{k_i}|_{i,j=1}^m}{W_m(\vec{\lambda}^\alpha)}.$$

Второе слагаемое правой части по модулю не превышает

$$\sum_{r=1}^{\infty} \left(\left(\sum_{\vec{k} \in \mathbb{K}_r(m)} |A(\vec{k})| \right) \max_{\vec{k} \in \mathbb{K}_r(m)} \frac{|\lambda_j^{k_i}|_{i,j=1}^m}{W_m(\vec{\lambda}^\alpha)} \right).$$

Отсюда на основании лемм 2.7 и 2.9, воспользовавшись неравенствами (2.13), (2.14) и условием (1.9), получаем

$$\left| \frac{\Delta_m(\vec{\lambda})}{W_m(\vec{\lambda}^\alpha)} - 1 \right| \leq \sum_{r=1}^{\infty} \left((cm^{1+\beta})^r \left(\frac{c_3 m}{n} \right)^r \right) = \sum_{r=1}^{\infty} \left(c_4 \frac{m^{2+\beta}}{n} \right)^r = o(1).$$

Теорема 2.1 доказана.

§ 3. Асимптотика определителей Адамара функций из $\mathcal{A}_\beta^\alpha(q)$

Пусть $\pi_{n,m}(z; f) = P_{n,m}(z)/Q_{n,m}(z)$ — аппроксимации Паде функции f , заданной рядом (1.1). Тогда (см. [1; гл. 1, § 1.1, (1.11)])

$$(Q_{n,m}f - P_{n,m})(z) = \sum_{k=1}^{\infty} D_{n,m,k} z^{n+m+k}, \quad (3.1)$$

где

$$D_{n,m,k} = \begin{vmatrix} f_{n-m+1} & f_{n-m+2} & \cdots & f_n & f_{n+1} \\ f_{n-m+2} & f_{n-m+3} & \cdots & f_{n+1} & f_{n+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n & f_{n+1} & \cdots & f_{n+m-1} & f_{n+m} \\ f_{n+k} & f_{n+k+1} & \cdots & f_{n+m+k-1} & f_{n+m+k} \end{vmatrix}. \quad (3.2)$$

Для знаменателя $\pi_{n,m}(\cdot; f)$ (см. [1; гл. 1, § 1.1, (1.8)]) имеет место представление ($f_j = 0$ при $j < 0$)

$$Q_{m,n}(z) = \begin{vmatrix} f_{n-m+1} & f_{n-m+2} & \cdots & f_n & f_{n+1} \\ f_{n-m+2} & f_{n-m+3} & \cdots & f_{n+1} & f_{n+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n & f_{n+1} & \cdots & f_{n+m-1} & f_{n+m} \\ z^m & z^{m-1} & \cdots & z & 1 \end{vmatrix}. \quad (3.3)$$

Через $D_{n,m}^j$ обозначим миноры элементов z^j , $j = \overline{0, m}$, последней строки определителя (3.3). Тогда

$$D_{n,m} = D_{n,m}^0, \quad D_{n+1,m+1} = D_{n,m,1}.$$

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $f \in \mathcal{A}_\beta^\alpha(q)$, $\alpha \in \mathbb{N}$, $\beta \geq 1$, $q \in \mathbb{C}$, и выполняется условие (1.9). Тогда для каждого m , $0 \leq m \leq m(n)$, при $n \rightarrow \infty$

$$D_{n,m} \sim (-q)^{m(m-1)/2} \prod_{k=0}^{m-1} f_{n-k} \prod_{1 \leq i < j \leq m} (\lambda_j^\alpha - \lambda_i^\alpha), \quad (3.4)$$

$$D_{n,m}^j \sim (-q)^{m(m-1)/2} \frac{f_{n+1}}{f_{n-j+1}} \prod_{k=0}^{m-1} f_{n-k} \prod_{1 \leq i < l \leq m} (\lambda_{l,j}^\alpha - \lambda_{i,j}^\alpha), \quad (3.5)$$

где

$$\lambda_{i,j} = \lambda_i = \frac{1}{n+1-i}, \quad i \neq j; \quad \lambda_{j,j} = \frac{1}{n+1}, \quad j = \overline{1, m}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определитель не изменится, если каждый его элемент заменить симметричным относительно второстепенной диагонали. Поэтому

$$\begin{aligned} D_{n,m} &= \begin{vmatrix} f_{n+m-1} & f_{n+m-2} & \cdots & f_n \\ f_{n+m-2} & f_{n+m-3} & \cdots & f_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n+1} & f_n & \cdots & f_{n-m+2} \\ f_n & f_{n-1} & \cdots & f_{n-m+1} \end{vmatrix} \\ &= f_n f_{n-1} \cdots f_{n-m+1} \begin{vmatrix} \frac{f_{n+m-1}}{f_n} & \frac{f_{n+m-2}}{f_{n-1}} & \cdots & \frac{f_n}{f_{n-m+1}} \\ \frac{f_{n+m-2}}{f_n} & \frac{f_{n+m-3}}{f_{n-1}} & \cdots & \frac{f_{n-1}}{f_{n-m+1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{f_{n+1}}{f_n} & \frac{f_n}{f_{n-1}} & \cdots & \frac{f_{n-m+2}}{f_{n-m+1}} \\ \frac{f_n}{f_n} & \frac{f_{n-1}}{f_{n-1}} & \cdots & \frac{f_{n-m+1}}{f_{n-m+1}} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Поскольку $f \in \mathcal{A}_\beta^\alpha(q)$, то из условий (1.11)

$$\frac{f_{n+j}}{f_n} = q^j \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(j)} \frac{1}{n^k}, \quad j = \overline{0, m-1},$$

где

$$\begin{cases} a_0^{(0)} = 1, & a_k^{(0)} = 0, \quad k \geq 1; \\ a_{\alpha j}^{(j)} = 1, & 1 \leq j \leq m-1; \\ a_k^{(j)} = 0, & 0 \leq k < \alpha j, \quad 1 \leq j \leq m-1; \\ a_k^{(j)} = b_{k-\alpha j}^{(j)}, & k \geq \alpha j + 1, \quad 1 \leq j \leq m-1. \end{cases} \quad (3.6)$$

Поэтому, определяя функции $\{f_{m-i}\}_{i=1}^m$ равенствами

$$\begin{aligned} f_{m-1}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(m-1)} z^k, \\ f_{m-2}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(m-2)} z^k, \\ &\dots\dots\dots \\ f_1(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(1)} z^k, \\ f_0(z) &= 1 \end{aligned}$$

и полагая $\lambda_j = 1/(n+1-j)$, $j = \overline{1, m}$, получаем

$$D_{n,m} = q^{m(m-1)/2} \prod_{j=0}^{m-1} f_{n-j} |f_{m-i}(\lambda_j)|_{i,j=1}^m.$$

Из равенств (3.6) и неравенства (1.10) следует, что выполняются все условия теоремы 2.1. Следовательно,

$$\begin{aligned} D_{n,m} &\sim q^{m(m-1)/2} \prod_{j=0}^{m-1} f_{n-j} W_m(\vec{\lambda}^\alpha) \\ &= q^{m(m-1)/2} \prod_{j=0}^{m-1} f_{n-j} \prod_{1 \leq i < j \leq m} (\lambda_i^\alpha - \lambda_j^\alpha) \\ &= (-q)^{m(m-1)/2} \prod_{j=0}^{m-1} f_{n-j} \prod_{1 \leq i < j \leq m} (\lambda_j^\alpha - \lambda_i^\alpha). \end{aligned}$$

Эквивалентность (3.4) доказана, а вместе с ней доказана и теорема 1.1.

Аналогично при $j = \overline{1, m}$ (полужирным шрифтом помечен столбец, который отсутствует)

$$\begin{aligned}
 D_{n,m}^j &= \begin{vmatrix} f_{n-m+1} & f_{n-m+2} & \cdots & \mathbf{f_{n-j+1}} & \cdots & f_n & f_{n+1} \\ f_{n-m+2} & f_{n-m+3} & \cdots & \mathbf{f_{n-j+2}} & \cdots & f_{n+1} & f_{n+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n-1} & f_n & \cdots & \mathbf{f_{n+m-j-1}} & \cdots & f_{n+m-2} & f_{n+m-1} \\ f_n & f_{n+1} & \cdots & \mathbf{f_{n+m-j}} & \cdots & f_{n+m-1} & f_{n+m} \end{vmatrix} \\
 &= (-1)^{j-1} \begin{vmatrix} f_{n-m+1} & f_{n-m+2} & \cdots & f_{n+1} & \cdots & f_n \\ f_{n-m+2} & f_{n-m+3} & \cdots & f_{n+2} & \cdots & f_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n-1} & f_n & \cdots & f_{n+m-1} & \cdots & f_{n+m-2} \\ f_n & f_{n+1} & \cdots & f_{n+m} & \cdots & f_{n+m-1} \end{vmatrix} \\
 &\sim (-1)^{j-1} q^{m(m-1)/2} \frac{f_{n+1}}{f_{n-j+1}} \prod_{k=0}^{m-1} f_{n-k} \prod_{1 \leq i < l \leq m} (\lambda_{i,j}^\alpha - \lambda_{l,j}^\alpha).
 \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая определение чисел $\lambda_{i,j}$, получаем (3.5).

Теорема 3.1 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. При выполнении условий теоремы 3.1 и $z \in D$

$$Q_{m,n}(z) = D_{n,m} \left(1 + O\left(\frac{m}{n^\alpha}\right) \right). \quad (3.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (3.3) следует (см. [1; гл. 1, § 1.1]), что

$$Q_{m,n}(z) = \sum_{j=0}^m D_{n,m}^j (-z)^j = D_{n,m} \left(1 + \sum_{j=1}^m \frac{D_{n,m}^j}{D_{n,m}} (-z)^j \right).$$

С учетом соотношений (3.4) и (3.5) при $j = \overline{1, m}$ и $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{D_{n,m}^j}{D_{n,m}} \right| &\sim \left| \frac{f_{n+1}}{f_{n-j+1}} \right| \prod_{i=1, i \neq j}^m \left| \frac{\lambda_{j,j}^\alpha - \lambda_i^\alpha}{\lambda_j^\alpha - \lambda_i^\alpha} \right| \\
 &= \left| \frac{f_{n+1}}{f_{n-j+1}} \right| \prod_{i=1, i \neq j}^m \left| \frac{\frac{1}{(n+1)^\alpha} - \frac{1}{(n+1-i)^\alpha}}{\frac{1}{(n+1-j)^\alpha} - \frac{1}{(n+1-i)^\alpha}} \right| \\
 &\leq \left| \frac{2q}{(n+1-j)^\alpha} \right|^j \prod_{i=1, i \neq j}^m \left| \frac{\frac{\alpha}{(n+1-m)^{\alpha-1}}}{\frac{\alpha}{(n+1)^{\alpha-1}}} \frac{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1-i}}{\frac{1}{n+1-j} - \frac{1}{n+1-i}} \right| \\
 &\leq C_m^j \left| \frac{2q}{(n+1-j)^\alpha} \right|^j \left| \frac{n+1}{n+1-m} \right|^{(m-1)(\alpha-1)} \leq 2C_m^j \left| \frac{2q}{(n+1-j)^\alpha} \right|^j.
 \end{aligned}$$

Далее, при $j \leq m$ и достаточно больших n

$$\frac{1}{(n-j)^k} = \frac{1}{n^k} \sum_{\nu=0}^{\infty} C_{k+\nu-1}^\nu \left(\frac{j}{n} \right)^\nu \leq \frac{1}{n^k} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{kj}{n} \right)^\nu.$$

Следовательно,

$$\left| \frac{D_{n,m}^j}{D_{n,m}} \right| \leq 2 \sum_{j=1}^m C_m^j \left(\frac{4|q|}{n^\alpha} \right)^j \leq 2 \sum_{j=1}^m \left(\frac{4|q|m}{n^\alpha} \right)^j = O \left(\left(\frac{4|q|m}{n^\alpha} \right)^j \right).$$

Отсюда и следует (3.7).

Следствие доказано.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть $f \in \mathcal{A}_\beta^\alpha(q)$, $\alpha \in \mathbb{N}$, $\beta \geq 1$, $q \in \mathbb{C}$, и выполняется условие (1.9). Тогда для каждого m , $0 \leq m \leq m(n)$, при $n \rightarrow \infty$

$$D_{n,m,k} \sim (-q)^{m(m+1)/2} f_{n+k} \prod_{\nu=0}^{m-1} f_{n-\nu} \prod_{0 \leq i < j \leq m} (\lambda_j^\alpha - \lambda_i^\alpha), \quad (3.8)$$

где

$$\lambda_i = \frac{1}{n+1-i}, \quad i = \overline{1, m}; \quad \lambda_0 = \frac{1}{n+k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $k = 1$ соотношение (3.8) следует из (3.4), так как $D_{n,m,1} = D_{n+1,m+1}$. Применяя элементарные преобразования определителя $D_{n,m,k}$ (см. (3.2)), получаем

$$\begin{aligned} D_{n,m,k} &= f_{n+k} \prod_{\nu=0}^{m-1} f_{n-\nu} \begin{vmatrix} 1 & \frac{f_{n-m+2}}{f_{n-m+1}} & \dots & \frac{f_n}{f_{n-m+1}} & \frac{f_{n+1}}{f_{n-m+1}} \\ 1 & \frac{f_{n-m+3}}{f_{n-m+2}} & \dots & \frac{f_{n+1}}{f_{n-m+2}} & \frac{f_{n+2}}{f_{n-m+2}} \\ \dots & \frac{f_{n-m+2}}{f_{n+1}} & \dots & \frac{f_{n-m+2}}{f_{n+1}} & \frac{f_{n-m+2}}{f_{n+1}} \\ 1 & \frac{f_{n+1}}{f_n} & \dots & \frac{f_{n+m-1}}{f_n} & \frac{f_{n+m}}{f_n} \\ 1 & \frac{f_{n+k+1}}{f_{n+k}} & \dots & \frac{f_{n+m+k-1}}{f_{n+k}} & \frac{f_{n+m+k}}{f_{n+k}} \end{vmatrix} \\ &= f_{n+k} \prod_{\nu=0}^{m-1} f_{n-\nu} \begin{vmatrix} \frac{f_{n+m+k}}{f_{n+k}} & \frac{f_{n+m}}{f_n} & \dots & \frac{f_{n+2}}{f_{n-m+2}} & \frac{f_{n+1}}{f_{n-m+1}} \\ \frac{f_{n+m+k-1}}{f_{n+k}} & \frac{f_{n+m-1}}{f_n} & \dots & \frac{f_{n+1}}{f_{n-m+2}} & \frac{f_n}{f_{n-m+1}} \\ \dots & \frac{f_{n+k}}{f_{n+1}} & \dots & \frac{f_{n-m+2}}{f_{n-m+3}} & \frac{f_{n-m+1}}{f_{n-m+2}} \\ \frac{f_{n+k+1}}{f_{n+k}} & \frac{f_{n+1}}{f_n} & \dots & \frac{f_{n-m+2}}{f_{n-m+3}} & \frac{f_{n-m+1}}{f_{n-m+2}} \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Для вычисления последнего определителя остается применить теорему 2.1.

Теорема 3.2 доказана.

§ 4. Рациональная аппроксимация функций класса $\mathcal{A}_\beta^\alpha(q)$

Результаты предыдущего параграфа позволяют исследовать поведение некоторых последовательностей элементов таблиц (1.2) функций из класса $\mathcal{A}_\beta^\alpha(q)$.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $f \in \mathcal{A}_\beta^\alpha(q)$, $\alpha \in \mathbb{N}$, $\beta \geq 1$, $q \in \mathbb{C}$, и выполняется условие (1.9). Тогда для любых $z \in D$ и m , $0 \leq m \leq m(n)$, при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} f(z) - \pi_{n,m}(z; f) &= \frac{D_{n+1,m+1}}{D_{n,m}} z^{n+m+1} \left(1 + O \left(\frac{m+1}{n^\alpha} \right) \right) \\ &= (-1)^m m! f_{n+1} \left(\frac{\alpha q}{n^{\alpha+1}} \right)^m z^{n+m+1} \left(1 + O \left(\frac{m+1}{n^\alpha} \right) \right). \quad (4.1) \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (3.1) и следствия 3.1 (см. (3.7)) имеем

$$f(z) - \pi_{n,m}(z; f) = \frac{D_{n,m,1}}{D_{n,m}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D_{n,m,k}}{D_{n,m,1}} z^{n+m+1} \left(1 + O\left(\frac{m}{n^\alpha}\right) \right). \quad (4.2)$$

Учитывая (3.4) и (3.8), получаем

$$\frac{D_{n,m,1}}{D_{n,m}} = \frac{D_{n+1,m+1}}{D_{n,m}} = (-q)^m f_{n+1} \prod_{i=1}^m (\lambda_i^\alpha - \lambda_0^\alpha),$$

где $\lambda_i = 1/(n+1-i)$, $i = \overline{0, m}$. Так как

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^m (\lambda_i^\alpha - \lambda_0^\alpha) &= \prod_{i=1}^m \left(\frac{1}{(n+1-i)^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha} \right) \\ &= \prod_{i=1}^m \frac{(n+1)^\alpha - (n+1-i)^\alpha}{(n+1)^\alpha (n+1-i)^\alpha} \sim m! \left(\frac{\alpha n^{\alpha-1}}{n^{2\alpha}} \right)^m = m! \left(\frac{\alpha}{n^{\alpha+1}} \right)^m, \end{aligned}$$

то, окончательно,

$$\frac{D_{n,m,1}}{D_{n,m}} \sim (-1)^m m! f_{n+1} \left(\frac{\alpha q}{n^{\alpha+1}} \right)^m. \quad (4.3)$$

Далее, из (3.8) при $n \geq n_0$ следует

$$\begin{aligned} \left| \frac{D_{n,m,k}}{D_{n,m,1}} \right| &\sim \left| \frac{f_{n+k}}{f_{n+1}} \right| \frac{\prod_{i=1}^m \left(\frac{1}{(n+1-i)^\alpha} - \frac{1}{(n+k)^\alpha} \right)}{\prod_{i=1}^m \left(\frac{1}{(n+1-i)^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha} \right)} \\ &\leq \left| \frac{f_{n+k}}{f_{n+1}} \right| \frac{(m+k-1)!}{m!(k-1)!} \left(\frac{n+1}{n+1-m} \right)^{(\alpha-1)m} \\ &\leq 2C_{m+k-1}^{k-1} \left| \frac{f_{n+k}}{f_{n+1}} \right|. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left| \frac{D_{n,m,k}}{D_{n,m,1}} \right| \leq c \sum_{k=2}^{\infty} C_{m+k-1}^{k-1} \left| \frac{f_{n+k}}{f_{n+1}} \right|.$$

Из условий на коэффициенты ($j = 1$) при $n \geq n_0$

$$\left| \frac{f_{n+1}}{f_n} \right| \leq \frac{2|q|}{n^\alpha}.$$

Тогда для $n \geq n_0$

$$\begin{aligned} \left| \frac{f_{n+k}}{f_{n+1}} \right| &= \left| \frac{f_{n+2}}{f_{n+1}} \right| \left| \frac{f_{n+3}}{f_{n+2}} \right| \dots \left| \frac{f_{n+k}}{f_{n+k-1}} \right| \\ &\leq \frac{2|q|}{(n+1)^\alpha} \frac{2|q|}{(n+2)^\alpha} \dots \frac{2|q|}{(n+k-1)^\alpha} \leq \left(\frac{2|q|}{n^\alpha} \right)^{k-1}. \end{aligned}$$

Из последних трех неравенств и неравенства (2.18) получаем

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left| \frac{D_{n,m,k}}{D_{n,m,1}} \right| \leq c \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{2|q|(m+1)}{n^{\alpha}} \right)^{k-1} = O\left(\frac{m+1}{n^{\alpha}}\right). \quad (4.4)$$

Теперь равенства (4.1) являются следствием соотношений (4.2)–(4.4).

Теорема 4.1 доказана.

Покажем, как с помощью простых соображений класс функций, к которым применима теорема 4.1, можно существенно расширить, рассматривая функции, у которых коэффициенты степенного ряда не обязательно отличны от нуля.

Пусть

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{l_n}, \quad (4.5)$$

где l_n – арифметическая прогрессия, членами которой являются целые неотрицательные числа, а разность $d \in \mathbb{N}$, т.е. $l_n = l_0 + dn$, $n = 0, 1, 2, \dots$. При этом коэффициенты $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ степенного ряда (4.5) не равны нулю и удовлетворяют условиям (1.9)–(1.11). Положим $\xi = z^d$. Следовательно,

$$g(z) = z^{l_0} \sum_{n=0}^{\infty} f_n \xi^n = z^{l_0} f(z^d), \quad (4.6)$$

где $f \in \mathcal{A}_{\beta}^{\alpha}(q)$. Пусть теперь $\pi_{n,m}(\xi; f)$ – аппроксимация Паде порядка (n, m) функции $f(\xi)$, существование которой доказано в §3 (см. [1; гл. 1, §1.4]). Тогда

$$f(\xi) - \pi_{n,m}(\xi; f) = O(\xi^{n+m+1}).$$

Поэтому

$$z^{l_0} f(z^d) - z^{l_0} \pi_{n,m}(z^d; f) = O(z^{d(n+m)+l_0+d}),$$

т.е.

$$g(z) - z^{l_0} \pi_{n,m}(z^d; f) = O(z^{d(n+m)+l_0+d}).$$

Отсюда следует, что

$$\pi_{l_n+i, dm+j}(z; g) = z^{l_0} \pi_{n,m}(z^d; f)$$

при $0 \leq i + j \leq d - 1$. Более того, если $0 \leq i + j \leq d - 1$, то для всех $z \in D$

$$g(z) - \pi_{l_n+i, dm+j}(z; g) = z^{l_0} (f(z^d) - \pi_{n,m}(z^d; f)).$$

С учетом этого замечания для функции (4.5) справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть функция g представима в виде (4.6), где $f \in \mathcal{A}_{\beta}^{\alpha}(q)$, $\alpha \in \mathbb{N}$, $\beta \geq 1$, $q \in \mathbb{C}$, и выполняется условие (1.9). Тогда для любых $z \in D$ и m , $0 \leq m \leq m(n)$, при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} g(z) - \pi_{l_n+i, dm+j}(z; g) &= (-1)^m m! f_{n+1} \left(\frac{\alpha q}{n^{\alpha+1}} \right)^m z^{l_n+dm+d} \left(1 + O\left(\frac{m+1}{n^{\alpha}}\right) \right), \end{aligned} \quad (4.7)$$

где $0 \leq i + j \leq d - 1$.

Следующая лемма принадлежит В. К. Дзядыку (см. [2; лемма 3.1]).

ЛЕММА 4.2. Если аналитическая в односвязной области G и непрерывная на $\overline{G}$ функция φ имеет в G , по крайней мере, $n+1$ нуль, то при произвольном целом $m \geq 0$ справедливо неравенство

$$R_{n,m}(\varphi; \overline{G}) \geq \min_{z \in \partial G} |\varphi(z)|.$$

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть $f \in \mathcal{A}_\beta^\alpha(q)$, $\alpha \in \mathbb{N}$, $\beta \geq 1$, $q \in \mathbb{C}$, и выполняется условие (1.9). Тогда для любого m , $0 \leq m \leq m(n)$, при $n \rightarrow \infty$

$$R_{n,m}(f) \sim \left| \frac{D_{n+1,m+1}}{D_{n,m}} \right| \sim m! |f_{n+1}| \left(\frac{\alpha|q|}{n^{\alpha+1}} \right)^m.$$

ТЕОРЕМА 4.4. Пусть функция g представима в виде (4.6), где $f \in \mathcal{A}_\beta^\alpha(q)$, $\alpha \in \mathbb{N}$, $\beta \geq 1$, $q \in \mathbb{C}$, и выполняется условие (1.9). Тогда для любого m , $0 \leq m \leq m(n)$, при $n \rightarrow \infty$

$$R_{l_n+i, dm+j}(g) \sim \left| \frac{D_{n+1,m+1}}{D_{n,m}} \right| \sim m! |f_{n+1}| \left(\frac{\alpha|q|}{n^{\alpha+1}} \right)^m,$$

где $0 \leq i+j \leq d-1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. При $m=0$ считаем, что $D_{n,0} = 1$, $D_{n+1,1} = f_{n+1}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Интересно то, что правая часть в последнем соотношении не зависит от d . Это обстоятельство объясняет ухудшение (данное явление подробно рассмотрено в следующем параграфе) аппроксимационных свойств элементов таблиц Паде и Чебышёва функции f при усилении лакуарности степенного ряда (1.1).

Остановимся на доказательстве теоремы 4.4. Определим функцию φ , полагая

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= m! f_{n+1} \left(\frac{-\alpha q}{n^{\alpha+1}} \right)^m z^{l_n+dm+d} \left(1 + O\left(\frac{m+1}{n^\alpha} \right) \right) \\ &= \frac{1}{Q_{m,n}(z)} \sum_{k=1}^{\infty} D_{n,m,k} z^{n+m+k}. \end{aligned}$$

Из (3.8) и следствия (3.1) имеем, что при достаточно больших n φ аналитична внутри D , непрерывна на D и имеет в единичном круге $l_n + dm + d$ нулей. Тогда, учитывая, что рациональная функция $z^{l_0} \pi_{n,m}(z^d; f)$ имеет порядок знаменателя не выше dm , а порядок числителя – не выше l_n , на основании равенства (4.7) и леммы 4.1 получаем, что при больших n

$$R_{l_n+i, dm+j}(g) \geq R_{l_n+dm+i, 2dm+j}(\varphi) \geq \min_{|z|=1} |\varphi(z)| \sim m! |f_{n+1}| \left(\frac{\alpha|q|}{n^{\alpha+1}} \right)^m,$$

где $0 \leq i+j \leq d-1$. Теперь остается заметить, что

$$\begin{aligned} R_{l_n+i, dm+j}(g) &\leq \max_{|z|=1} |g(z) - \pi_{l_n+i, dm+j}(z; g)| \\ &\leq \max_{|z|=1} |\varphi(z)| \sim m! |f_{n+1}| \left(\frac{\alpha|q|}{n^{\alpha+1}} \right)^m. \end{aligned}$$

Теорема 4.4 доказана.

Доказательство теоремы 4.3 проводится аналогично. Очевидно также, что теоремы 1.2 и 1.3 являются следствием теорем 4.1–4.4.

В заключение этого параграфа коснемся одной гипотезы В. К. Дзядыка (см. [2]). Известно [7], что аппроксимации Паде $\pi_{2n,2n}(\cdot; e^z)$ в сравнении с многочленами Тейлора $\pi_{4n,0}(\cdot; e^z)$ дают существенный выигрыш в скорости приближения экспоненты. Оценка снизу нормы разности $\sin z - \pi_{2n+1,2n}(z; \sin \xi)$, полученная в [2], показывает, что для синуса аналогичный выигрыш, по крайней мере, в $(4/3)^n$ раз хуже, чем для экспоненты. Более того, В. К. Дзядык замечает, “что если провести точные вычисления при $n = 1, 2, \dots, 9$, то вообще никакого выигрыша не обнаружим, а получим при помощи полиномов Паде $\pi_{2n+1,2n}(z; \sin \xi)$ примерно такую величину приближения функции $\sin z$, как и в случае ее приближения при помощи сумм Тейлора степени $4n + 1$, $n = 1, 2, \dots, 9$ ”. Теоремы 4.1 и 4.2 позволяют внести ясность в эту ситуацию, по крайней мере, в случае, когда последовательность $m(n) \rightarrow \infty$ и удовлетворяет условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(m(n))^4}{n} = 0. \quad (4.8)$$

Действительно, в следующем параграфе будет показано, что экспонента принадлежит классу $\mathcal{A}_2^1(1)$, а

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z f(z^2),$$

где $f \in \mathcal{A}_2^2(1/4)$. Поэтому, применяя теорему 4.2 ($f_n = 1/(2n+1)!$) и формулу Стирлинга, при $n \rightarrow \infty$ получаем

$$\begin{aligned} \frac{\|\sin z - \pi_{2n+1,2m}(z; \sin \xi)\|}{\|\sin z - \pi_{2n+2m+1,0}(z; \sin \xi)\|} &\sim m! \left| \frac{f_{n+1}}{f_{n+m+1}} \right| \left(\frac{1}{2n^3} \right)^m \\ &\sim m! (4n^2)^m \left(\frac{1}{2n^3} \right)^m \sim m! \left(\frac{2}{n} \right)^m \sim \sqrt{2\pi m} \left(\frac{2}{e} \frac{m}{n} \right)^m. \end{aligned}$$

Аналогично, воспользовавшись теоремой 4.1 при $n \rightarrow \infty$, будем иметь (см. также [7])

$$\begin{aligned} \frac{\|e^z - \pi_{2n+1,2m}(z; e^\xi)\|}{\|e^z - \pi_{2(n+m)+1,0}(z; e^\xi)\|} &\sim (2m)! \left| \frac{f_{2n+2}}{f_{2(n+m+1)}} \right| \left(\frac{1}{(2n+1)^2} \right)^{2m} \\ &\sim (2m)! (2n+2)^{2m} \frac{1}{(2n+1)^{4m}} \sim (2m)! \left(\frac{1}{2n} \right)^{2m} \sim \sqrt{4\pi m} \left(\frac{1}{e} \frac{m}{n} \right)^{2m}. \end{aligned}$$

Таким образом, аппроксимации Паде в сравнении с суммами Тейлора и для $\sin z$ дают значительный выигрыш в скорости аппроксимации. Правда, этот выигрыш в $(2en/m)^m / \sqrt{2}$ раз меньше, чем для экспоненты. В следующем параграфе будет показано, что данное явление имеет место и для других известных целых функций.

§ 5. Поведение параболических последовательностей элементов таблиц Паде и Чебышёва для индивидуальных функций

В этом параграфе покажем, что проверку условий (1.10), (1.11) для многих элементарных функций, часто встречающихся в анализе и его приложениях, можно существенно упростить. Как правило, коэффициенты Тейлора известных функций удовлетворяют следующим ограничениям: существует такая последовательность комплексных чисел $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$, что при $n \geq n_0$

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{q}{n^\alpha} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{n^k} \right), \quad (5.1)$$

где α — фиксированное натуральное число, $q \in \mathbb{C}$ и

$$|b_k| \leq M^k, \quad M = \text{const}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.2)$$

Множество всех функций f вида (1.1), для которых существует такая последовательность $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$, что справедливы соотношения (5.1), (5.2), обозначим через $\mathcal{A}(\alpha, q)$.

ТЕОРЕМА 5.1. Если $\alpha \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{C}$, то $\mathcal{A}(\alpha, q) \subset \mathcal{A}_2^\alpha(q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $f \in \mathcal{A}(\alpha, q)$. Необходимо показать, что для любого $j \leq m(n)$ и последовательности $m(n)$, удовлетворяющей условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(m(n))^4}{n} = 0,$$

существует последовательность комплексных чисел $\{b_{k,j}\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что

$$|b_{k,j}| \leq (cj^2)^k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

и при $n \geq n_0$

$$\frac{f_{n+j}}{f_n} = \left(\frac{q}{n^\alpha} \right)^j \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_{k,j}}{n^k} \right).$$

Далее нам понадобится следующая лемма, которая является следствием формулы, связывающей коэффициенты степенных рядов при их перемножении.

ЛЕММА 5.1. Пусть

$$\begin{aligned} f(n) &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{n^k}, & |\alpha_k| &\leq M_1^k, \quad k = 1, 2, \dots; \\ g(n) &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{n^k}, & |\beta_k| &\leq M_2^k, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Тогда

$$f(n)g(n) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k}{n^k}, \quad |\gamma_k| \leq (M_1 + M_2)^k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Продолжим доказательство теоремы 5.1. В силу условий (5.1)

$$\frac{f_{n+j+1}}{f_{n+j}} = \frac{q}{(n+j)^\alpha} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{(n+j)^k} \right). \quad (5.3)$$

При $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$ и $\alpha \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{(1-z)^\alpha} = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_{\alpha+\nu-1}^k z^\nu.$$

Поэтому

$$\frac{1}{(n+j)^\alpha} = \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k C_{\alpha+k-1}^k \left(\frac{j}{n} \right)^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{n^k},$$

где в силу неравенства (2.18)

$$|\alpha_k| = |C_{\alpha+k-1}^k j^k| \leq (\alpha j)^k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.4)$$

Далее,

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{(n+j)^k} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{n^k} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu C_{k+\nu-1}^\nu \left(\frac{j}{n} \right)^\nu = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{n^k},$$

где

$$\begin{aligned} |\beta_k| &= \left| \sum_{i=1}^k b_i (-1)^{k-i} j^{k-i} C_{k-1}^{k-i} \right| \leq \sum_{i=1}^k C_{k-1}^{k-i} M^i j^{k-i} \\ &= \sum_{l=0}^{k-1} C_{k-1}^l M^{k-l} j^l = M(M+j)^{k-1} \leq (M+j)^k, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (5.5)$$

Применяя лемму 5.1 к произведению (5.3) и учитывая (5.4), (5.5), при $n \geq n_0$ получаем

$$\frac{f_{n+j+1}}{f_{n+j}} = \frac{q}{n^\alpha} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_{k,j}}{n^k} \right),$$

где

$$|\alpha_{k,j}| \leq (M+j+\alpha j)^k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Отсюда, учитывая представление

$$\frac{f_{n+j}}{f_n} = \frac{f_{n+1}}{f_n} \frac{f_{n+2}}{f_{n+1}} \dots \frac{f_{n+j}}{f_{n+j-1}}$$

и применяя лемму 5.1, с помощью индукции по j легко показать, что

$$\frac{f_{n+j}}{f_n} = \left(\frac{q}{n^\alpha} \right)^j \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_{k,j}}{n^k} \right),$$

где

$$|b_{k,j}| \leq \left(M(j-1) + \frac{(\alpha+1)j(j-1)}{2} \right)^k, \quad k = 1, 2, \dots$$

и $j \leq m(n)$. Тогда, положив $c = \max\{M, (\alpha+1)/2\}$, получим

$$|b_{k,j}| \leq (cj^2)^k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Теорема 5.1 доказана.

Пусть теперь

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{l_n},$$

где l_n – арифметическая прогрессия, члены которой неотрицательные целые числа, а разность $d \in \mathbb{N}$. Предположим также, что функция

$$f(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \xi^n \quad (5.6)$$

принадлежит классу $\mathcal{A}(\alpha, q)$ и

$$g(z) = z^{l_0} f(z^d).$$

Для удобства о g также будем говорить, что она принадлежит классу $\mathcal{A}(\alpha, q)$. Теорема 5.1 позволяет к функциям $f \in \mathcal{A}(\alpha, q)$ и g применять теоремы 4.1–4.4. В результате для m , $0 \leq m \leq m(n)$, при выполнении условия (4.8) получим ряд следствий.

СЛЕДСТВИЕ 5.1. *Функция e^z принадлежит классу $\mathcal{A}(1, 1)$ и при $n \rightarrow \infty$*

$$\begin{aligned} R_{n,m}(e^z) &\sim \|e^z - \pi_{n,m}(z; e^\xi)\| \sim \frac{m!}{(n+1)! n^{2m}} \\ &\sim m! \left(\frac{1}{n}\right)^m R_{n+m,0}(e^z) \sim m! \left(\frac{1}{n}\right)^m \|e^z - \pi_{n+m,0}(z; e^\xi)\|. \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 5.2. *Функции*

$$\cos z, \quad \operatorname{ch} z, \quad \frac{\sin z}{z}, \quad \frac{\operatorname{sh} z}{z}$$

принадлежат классу $\mathcal{A}(2, 1/4)$, и если g ($l_0 = 0$, $d = 2$) одна из них, то при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} R_{2n+i, 2m+j}(g) &\sim \|g - \pi_{2n+i, 2m+j}(\cdot; g)\| \sim \frac{m!}{(2n^3)^m} R_{2n,0}(g) \\ &\sim m! \left(\frac{2}{n}\right)^m R_{2(n+m),0}(g) \sim m! \left(\frac{2}{n}\right)^m \|g - \pi_{2(n+m),0}(\cdot; g)\|, \end{aligned}$$

где $0 \leq i + j \leq 1$ и

$$R_{2n,0}(g) \sim \begin{cases} \frac{1}{(2n+2)!}, & \text{если } g(z) = \cos z, \operatorname{ch} z; \\ \frac{1}{(2n+3)!}, & \text{если } g(z) = \frac{\sin z}{z}, \frac{\operatorname{sh} z}{z}. \end{cases}$$

СЛЕДСТВИЕ 5.3. *Функции $\sin z$, $\operatorname{sh} z$ принадлежат классу $\mathcal{A}(2, 1/4)$, и если g ($l_0 = 1$, $d = 2$) одна из них, то при $0 \leq i + j \leq 1$ и $n \rightarrow \infty$*

$$\begin{aligned} R_{2n+1+i, 2m+j}(g) &\sim \|g - \pi_{2n+1+i, 2m+j}(\cdot; g)\| \sim \frac{m!}{(2n^3)^m (2n+3)!} \\ &\sim m! \left(\frac{2}{n}\right)^m R_{2(n+m)+1, 0}(g) \\ &\sim m! \left(\frac{2}{n}\right)^m \|g - \pi_{2(n+m)+1, 0}(\cdot; g)\|. \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 5.4. *Пусть J_ν , I_ν суть соответственно функция Бесселя первого рода и модифицированная функция Бесселя при $\nu = 1, 2, \dots$, т.е.*

$$\begin{aligned} J_\nu &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z/2)^{2n+\nu}}{n!(n+\nu)!}, \\ I_\nu &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2n+\nu}}{n!(n+\nu)!}. \end{aligned}$$

Тогда функции $J_\nu, I_\nu \in \mathcal{A}(2, 1/4)$, и если g ($l_0 = \nu$, $d = 2$) одна из них, то при $0 \leq i + j \leq 1$ и $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} R_{2n+\nu+i, 2m+j}(g) &\sim \|g - \pi_{2n+\nu+i, 2m+j}(\cdot; g)\| \\ &\sim \frac{m!}{2^{2n+m+\nu+2} n^{3m} (n+1)! (n+\nu+1)!}. \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 5.5. *Интеграл вероятности*

$$\operatorname{Er} f(z) = \int_0^z e^{-t^2} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{n!(2n+1)}$$

принадлежит классу $\mathcal{A}(1, -1)$ ($l_0 = 1$, $d = 2$) и при $n \rightarrow \infty$

$$R_{2n+1+i, 2m+j}(\operatorname{Er} f) \sim \|\operatorname{Er} f - \pi_{2n+1+i, 2m+j}(\cdot; \operatorname{Er} f)\| \sim \frac{m!}{2n^{2m+1} (n+1)!},$$

где $0 \leq i + j \leq 1$.

СЛЕДСТВИЕ 5.6. *Функция*

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n!)^{1/\lambda}}, \quad \lambda > 0, \quad \frac{1}{\lambda} \in \mathbb{N},$$

принадлежит классу $\mathcal{A}(1/\lambda, 1)$ и при $n \rightarrow \infty$

$$R_{n,m}(G) \sim \|G - \pi_{n,m}(\cdot; G)\| \sim \frac{m!}{((n+1)!)^{1/\lambda} (\lambda n^{1+1/\lambda})^m}. \quad (5.7)$$

СЛЕДСТВИЕ 5.7. *Функция Миттаг-Леффлера*

$$M(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(1 + n/\lambda)}, \quad \lambda > 0, \quad \frac{1}{\lambda} \in \mathbb{N},$$

принадлежит классу $\mathcal{A}(1/\lambda, \lambda^{1/\lambda})$ и при $n \rightarrow \infty$

$$R_{n,m}(M) \sim \|M - \pi_{n,m}(\cdot; M)\| \sim \frac{m!}{\Gamma(1 + (n+1)/\lambda)} \left(\frac{\lambda^{1/\lambda-1}}{n^{1/\lambda+1}} \right)^m. \quad (5.8)$$

Для фиксированного m соотношения (5.7) и (5.8) установлены в [13] при произвольном $\lambda > 0$. Можно показать, что следствия 5.6 и 5.7 остаются в силе для $m \leq m(n)$ при выполнении (4.8), если λ – вещественное число и $0 < \lambda \leq 4$.

СЛЕДСТВИЕ 5.8. *Функции*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\operatorname{ch} z + \cos z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{4n}}{(4n)!}, \\ \cos \frac{z}{\sqrt{2}} \operatorname{ch} \frac{z}{\sqrt{2}} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{4n}}{(4n)!} \end{aligned}$$

принадлежат классу $\mathcal{A}(4, 1/256)$, и если g ($l_0 = 0, d = 4$) одна из них, то при $0 \leq i + j \leq 3$ и $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} R_{4n+i, 4m+j}(g) &\sim \|g - \pi_{4n+i, 4m+j}(\cdot; g)\| \sim \frac{m!}{(4n+4)!(64n^5)^m} \\ &\sim m! \left(\frac{4}{n} \right)^m R_{4(n+m), 0}(g) \sim m! \left(\frac{4}{n} \right)^m \|g - \pi_{4(n+m), 0}(\cdot; g)\|. \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 5.9. *Функции*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\operatorname{sh} z + \sin z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{4n+1}}{(4n+1)!}, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\operatorname{sh} \frac{z}{\sqrt{2}} \cos \frac{z}{\sqrt{2}} + \operatorname{ch} \frac{z}{\sqrt{2}} \sin \frac{z}{\sqrt{2}} \right) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{4n+1}}{(4n+1)!} \end{aligned}$$

принадлежат классу $\mathcal{A}(4, 1/256)$, и если g ($l_0 = 1, d = 4$) одна из них, то при $0 \leq i + j \leq 3$ и $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} R_{4n+1+i, 4m+j}(g) &\sim \|g - \pi_{4n+1+i, 4m+j}(\cdot; g)\| \sim \frac{m!}{(4n+5)!(64n^5)^m} \\ &\sim m! \left(\frac{4}{n} \right)^m R_{4(n+m)+1, 0}(g) \\ &\sim m! \left(\frac{4}{n} \right)^m \|g - \pi_{4(n+m)+1, 0}(\cdot; g)\|. \end{aligned}$$

Для функций из двух последних следствий при выполнении условий (4.8), $0 \leq m \leq m(n)$ и $n \rightarrow \infty$ аппроксимации Паде дают выигрыш в сравнении с многочленами Тейлора, но он меньше выигрыша для экспоненты уже в $(4en/m)^m/\sqrt{2}$ раз. Если предположить, что следствия 5.8 и 5.9 справедливы для m , сравнимых с n , то для таких m при $n \rightarrow \infty$

$$m! \left(\frac{4}{n}\right)^m \sim \sqrt{2\pi m} \left(\frac{4}{e} \frac{m}{n}\right)^m \rightarrow \infty,$$

и в этом случае аппроксимации Паде указанных функций приближают их значительно хуже, чем многочлены Тейлора. Последнее замечание относится и к рациональным функциям наилучшего приближения. Очевидно, что в построенных примерах ухудшение аппроксимативных свойств аппроксимаций Паде связано с усилением лакуарности степенного ряда. Поэтому ясно, как с помощью ряда Тейлора экспоненты построить примеры степенных рядов, для сумм которых отмеченное уменьшение выигрыша становится более значительным.

В заключение приведем некоторые примеры степенных рядов из [25], для сумм которых теоремы 4.1–4.4 позволяют исследовать поведение параболических последовательностей элементов таблиц Паде и Чебышёва: 5.2.7 (7–9), 5.2.7 (13), 5.2.7 (14), 5.2.8 (3–5), 5.2.8 (8–19), 5.2.8 (22), 5.2.10 (1), 5.2.10 (3–6).

Список литературы

1. Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П. Аппроксимации Паде. М.: Мир, 1986.
2. Дзядык В. К. Об асимптотике диагональных аппроксимаций Паде функций $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$ и $\operatorname{ch} z$ // Матем. сб. 1979. Т. 108(150). №2. С. 247–267.
3. Альпер С. Я. Об асимптотических значениях наилучшего приближения аналитических функций в комплексной области // УМН. 1959. Т. 15. №1(85). С. 131–134.
4. Гончар А. А. Об одной теореме Саффа // Матем. сб. 1974. Т. 94. №1. С. 152–157.
5. Saff E. B. The convergence of rational functions of best approximation to the exponential function. II // Proc. Amer. Math. Soc. 1972. V. 32. P. 187–194.
6. Saff E. B. On the degree of best rational approximation to the exponential function // J. Approx. Theory. 1973. V. 9. №2. P. 97–101.
7. Braess D. On the conjecture of Meinardus on rational approximation of e^z // J. Approx. Theory. 1984. V. 40. №4. P. 375–379.
8. Trefethen L. N. The asymptotic accuracy of rational best approximations to e^z on a disk // J. Approx. Theory. 1984. V. 40. №4. P. 380–384.
9. Антекеров А. И. Асимптотика определителей Адамара и сходимость строк аппроксимаций Паде для суммы экспонент // Матем. сб. 1980. Т. 113(155). №4(12). С. 520–537.
10. Старовойтов А. П., Старовойтова Н. А. Асимптотика определителей Адамара и поведение строк таблиц Паде и Чебышёва для суммы экспонент // Матем. сб. 1996. Т. 187. №2. С. 141–157.
11. Русак В. Н. Сравнение строк рациональной таблицы Чебышёва–Гончара для индивидуальных функций // Докл. АН БССР. 1986. Т. 30. №11. С. 969–971.
12. Русак В. Н. Исследование строк рациональной таблицы Чебышёва для индивидуальных аналитических функций // Изв. АН БССР. Сер. физ.-матем. наук. 1988. №6. С. 26–30.
13. Levin A. L., Lubinsky D. S. Rows and diagonals of the Walsh array for entire functions with smooth Maclaurin series coefficients // Constr. Approx. 1990. V. 6. №3. P. 257–286.
14. Березкина Л. Л., Русак В. Н. О наилучших рациональных аппроксимациях некоторых целых функций // Вестн. АН БССР. Сер. физ.-матем. наук. 1990. №4. С. 27–32.
15. Lorentz G., v. Golitschek M., Makavoz Y. Constructive Approximation. Advanced Problems. Berlin: Springer-Verlag, 1996.

16. *Levin A. L., Lubinsky D. S.* Best rational approximations of entire functions whose Maclaurin series coefficients decrease rapidly and smoothly // Trans. Amer. Math. Soc. 1986. V. 293. №2. P. 533–545.
17. *Русак В. Н., Старовойтов А. П.* О свойствах таблиц Паде и Чебышёва целых функций с правильным убыванием коэффициентов Тейлора // Докл. НАН Беларуси. 2002. Т. 46. №3. С. 24–27.
18. *Русак В. Н., Старовойтов А. П.* Рациональная аппроксимация целых функций с правильным убыванием коэффициентов Тейлора // Conference “Functional Methods in Approximation Theory, Operator Theory, Stochastic Analysis and Statistics”: Abstracts. Kyiv: Kyiv National Taras Shevchenko University, 2001. С. 69–70.
19. *Русак В. Н., Старовойтов А. П.* Асимптотика определителей Адамара целых функций с правильным убыванием коэффициентов Тейлора // Современные проблемы теории функций и их приложения: Тезисы докладов 11-й Саратовской зимней школы. Саратов: Изд-во ГосУНЦ “Колледж”, 2002. С. 173–174.
20. *Русак В. Н., Та Хонг Куанг.* Асимптотика параболических звеньев рациональной таблицы Чебышёва для аналитических функций // Докл. АН БССР. 1990. Т. 34. №10. С. 868–871.
21. *Вейль Г.* Классические группы. М.: ИЛ, 1947.
22. *Хуа Ло-кен.* Гармонический анализ функций многих комплексных переменных в классических областях. М.: ИЛ, 1959.
23. *Бернштейн С. Н.* Собрание сочинений в 4-х томах. Т. 2. М.: Изд-во АН СССР, 1954.
24. *Полиа Г., Сегё Г.* Задачи и теоремы из анализа. Т. 1. М.: Наука, 1978.
25. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981.

Белорусский государственный университет
E-mail: rusak@phys.bsu.unibel.by
Svoitov@gsu.unibel.by

Поступила в редакцию
28.09.2001 и 27.05.2002