Общероссийский математический портал

С. А. Теляковский, Оценки интегрального модуля непрерывности функций с редко меняющимися коэффициентами Фурье, *Матем. сб.*, 2002, том 193, номер 9, 93–106

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm680>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 12:44:38

УДК 517.518.45

С. А. Теляковский

Оценки интегрального модуля непрерывности функций с редко меняющимися коэффициентами Фурье

Рассматриваются функции, коэффициенты Фурье которых удовлетворяют условию $\Delta a_i = \Delta b_i = 0$ для всех $i \neq n_j$, где $\{n_j\}$ – некоторая лакунарная последовательность.

Для таких функций получена асимптотическая оценка скорости убывания их модуля непрерывности в метрике L , выраженная через коэффициенты Фурье.

Библиография: 6 названий.

§ 1. Введение

Пусть 2π -периодическая функция f интегрируема и

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} (a_i \cos ix + b_i \sin ix) \quad (1.1)$$

– ее ряд Фурье, коэффициенты которого “редко меняются”.

Это условие понимается следующим образом. Для коэффициентов ряда (1.1) выполняются равенства

$$a_i = a_{n_m}, \quad b_i = b_{n_m}, \quad n_{m-1} < i \leq n_m, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (1.2)$$

где $n_0 = 0$ и $n_1 = 1 < n_2 < \dots$ – лакунарная последовательность целых чисел, т.е. при некотором q справедливы оценки

$$1 < q \leq \frac{n_{m+1}}{n_m}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Таким образом, если, как обычно, $\Delta a_i := a_i - a_{i+1}$, то $\Delta a_i = \Delta b_i = 0$ для всех $i \neq n_m$.

Если указанные условия выполнены, то, следуя Н. Танович-Миллер [1], будем говорить, что коэффициенты ряда (1.1) *удовлетворяют условию W* в честь Мэри Вейс, получившей в [2] оценку, используемую при изучении рядов указанного типа.

Чтобы упростить дальнейшие формулировки, будем предполагать, что выполняются оценки

$$1 < q \leq \frac{n_{m+1}}{n_m} \leq q^2, \quad m = 1, 2, \dots \quad (1.3)$$

Это не ограничивает общности, так как к такому случаю можно прийти, дополнив при необходимости последовательность $\{n_m\}$ новыми членами.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-01210), Программы поддержки ведущих научных школ (грант № 00-15-96047) и фонда INTAS (грант № 99-01080).

В работе Л. А. Балашова и автора [3; теорема 2] показано, что ряд (1.1), коэффициенты которого удовлетворяют условию W , является рядом Фурье в том и только том случае, когда сходятся ряды

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|b_i|}{i}$$

и

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{m=j}^{\infty} (|\Delta a_{n_m}| + |\Delta b_{n_m}|)^2 \right)^{1/2}. \quad (1.4)$$

В настоящей работе для функций f , коэффициенты Фурье которых удовлетворяют условию W , получена оценка модуля непрерывности в метрике L

$$\omega(f, \delta)_L := \sup_{|2h| \leq \delta} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+h) - f(x-h)| dx$$

через коэффициенты Фурье.

Известны оценки интегрального модуля непрерывности функций через их коэффициенты Фурье при других условиях на коэффициенты. Мы не будем говорить здесь об этом, отсылая читателя к обзору [4] и работе [5], вышедшей позже обзора [4].

Понятно, что модуль непрерывности функции f не зависит от коэффициента a_0 . В дальнейшем, не теряя общности, будем считать $a_0 = 0$.

Условимся в оценках с O -символами писать O , если эта оценка равномерна относительно всех параметров. Если же числовой множитель в такой оценке может зависеть от параметра q , то будем писать O_q .

Абсолютные положительные постоянные будем обозначать A , положительные величины, которые могут зависеть только от q , — $A(q)$. В разных случаях эти величины могут быть различными. При этом имеется в виду, что соответствующие оценки выполняются, если A или $A(q)$ достаточно велики.

Основным результатом работы является следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. Пусть коэффициенты Фурье функции $f \in L[-\pi, \pi]$ удовлетворяют условию W . Тогда для интегрального модуля непрерывности функции f справедлива оценка

$$\omega(f, \delta)_L = \frac{2}{\pi} \sum_{i \geq \delta^{-1}} \frac{|b_i|}{i} + O_q(S(\delta)), \quad (1.5)$$

где

$$S(\delta) := \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{m=j}^{\infty} (\min\{n_m \delta, 1\} (|\Delta a_{n_m}| + |\Delta b_{n_m}|))^2 \right)^{1/2}. \quad (1.6)$$

Этот результат вытекает из полученных в работе оценок интеграла

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+h) - f(x-h)| dx. \quad (1.7)$$

При этом будут установлены не только оценки, необходимые для доказательства теоремы 1, поскольку оценки интеграла (1.7) могут представлять и самостоятельный интерес.

В самом деле, рядом Фурье разности $f(x+h) - f(x-h)$ является ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} 2 \sin ih (b_i \cos ix - a_i \sin ix).$$

Таким образом, интеграл (1.7) представляет собой норму в метрике L функции, полученной из сопряженной функции $\tilde{f}$ за счет умножения ее коэффициентов Фурье на осциллирующий множитель $-2 \sin ih$.

При оценке интеграла (1.7) для каждого $h \in (0, 1/2]$ находим k такое, что

$$\frac{1}{n_{k+1}} < 2h \leq \frac{1}{n_k}, \quad (1.8)$$

и по отдельности оцениваем интегралы

$$\int_{|x| \leq 1/n_k} |f(x+h) - f(x-h)| dx \quad (1.9)$$

и

$$\int_{1/n_k \leq |x| \leq \pi} |f(x+h) - f(x-h)| dx. \quad (1.10)$$

Заметим, что в силу (1.8) и (1.3) имеем

$$\frac{1}{n_k} = O_q(h). \quad (1.11)$$

Оценкам интегралов (1.9) и (1.10) посвящены соответственно §§ 3 и 4. В § 5 из этих оценок выводится теорема 1. Материал § 2 является вспомогательным.

§ 2. Вспомогательные предложения

ЛЕММА 1. Пусть $q > 1$, $\sum_m (c_m^2 + d_m^2) < \infty$ и $0 \leq \beta \leq 1/q$. Тогда для любой последовательности положительных (не обязательно целых) чисел $\{\lambda_m\}$, удовлетворяющих условиям

$$\lambda_1 \geq q, \quad \frac{\lambda_{m+1}}{\lambda_m} \geq q, \quad m = 1, 2, \dots,$$

справедливы оценки

$$\begin{aligned} \frac{1}{A(q)} \left(|c_0| + \left(\sum_{m=1}^{\infty} (c_m^2 + d_m^2) \right)^{1/2} \right) &\leq \int_{\beta}^1 \left| c_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (c_m \cos \lambda_m x + d_m \sin \lambda_m x) \right| dx \\ &\leq A(q) \left(|c_0| + \left(\sum_{m=1}^{\infty} (c_m^2 + d_m^2) \right)^{1/2} \right). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Этот результат известен (см. [6; теоремы 1 и 2]).

Нам будут нужны следующие оценки для разностей ядер Дирихле и сопряженных ядер Дирихле.

ЛЕММА 2. Пусть $0 < h \leq \pi/2$. Тогда для ядра Дирихле $D_m(x)$ и сопряженного ядра Дирихле $\tilde{D}_m(x)$ справедливы оценки

$$|D_m(x+h) - D_m(x-h)| < 2m^2h, \quad (2.2)$$

$$|\tilde{D}_m(x+h) - \tilde{D}_m(x-h)| < 2m^2h. \quad (2.3)$$

Если $x \in [2h, \pi]$, то равномерно относительно всех параметров

$$D_m(x+h) - D_m(x-h) = \frac{2}{x} \sin mh \cos mx + O\left(\frac{h}{x^2} + \min\{mh, 1\}\right), \quad (2.4)$$

$$\tilde{D}_m(x+h) - \tilde{D}_m(x-h) = \frac{2}{x} \sin mh \sin mx + O\left(\frac{h}{x^2} + \min\{mh, 1\}\right). \quad (2.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценки (2.2) и (2.3) доказываются элементарно. Например,

$$|D_m(x+h) - D_m(x-h)| = \left| \sum_{k=1}^m (\cos k(x+h) - \cos k(x-h)) \right| < \sum_{k=1}^m 2hk \leq 2m^2h.$$

Для доказательства оценки (2.4) представим ядро Дирихле следующим образом:

$$D_m(x) = \sin mx \cdot \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \cos mx.$$

Рассмотрим разность

$$\operatorname{ctg} \frac{x+h}{2} - \operatorname{ctg} \frac{x}{2} = -\frac{\sin \frac{h}{2}}{\sin \frac{x+h}{2} \cdot \sin \frac{x}{2}}.$$

Если $x+h \leq \pi$, то $\sin((x+h)/2) > \sin(x/2)$. А если $x+h > \pi$, то в силу того, что $x+h \leq 3x/2$, имеем $\sin((x+h)/2) \geq \sin(3x/4)$. Поэтому

$$\operatorname{ctg} \frac{x+h}{2} - \operatorname{ctg} \frac{x}{2} = O\left(\frac{h}{x^2}\right).$$

Пользуясь тем, что $x-h \geq x/2$, аналогично находим

$$\operatorname{ctg} \frac{x-h}{2} - \operatorname{ctg} \frac{x}{2} = O\left(\frac{h}{x^2}\right).$$

С помощью этих оценок получаем

$$\begin{aligned} D_m(x+h) - D_m(x-h) &= (\sin m(x+h) - \sin m(x-h)) \cdot \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \\ &\quad + \frac{1}{2} (\cos m(x+h) - \cos m(x-h)) + O\left(\frac{h}{x^2}\right) \\ &= 2 \sin mh \cos mx \cdot \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} - \sin mh \sin mx + O\left(\frac{h}{x^2}\right). \end{aligned}$$

Отсюда следует (2.4), так как

$$\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} = \frac{1}{x} + O(1).$$

Пользуясь представлением

$$\tilde{D}_m(x) = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} - \cos mx \cdot \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sin mx,$$

с помощью таких же рассуждений приходим к (2.5).

Лемма доказана.

§ 3. Оценки интеграла (1.9)

Из сходимости ряда (1.4) следует, что

$$\sum_{m=1}^{\infty} (|\Delta a_{n_m}| + |\Delta b_{n_m}|) < \infty.$$

Поэтому если коэффициенты Фурье функции $f \in L[-\pi, \pi]$ удовлетворяют условию W , к ряду (1.1) можно применить преобразование Абеля и получить представление

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} (\Delta a_{n_m} D_{n_m}(x) + \Delta b_{n_m} \tilde{D}_{n_m}(x)). \quad (3.1)$$

ЛЕММА 3. Пусть функция $f \in L[-\pi, \pi]$, ее коэффициенты Фурье удовлетворяют условию W , $h \in (0, 1/2]$ и k — число, для которого выполняются неравенства (1.8). Тогда справедлива оценка

$$\int_{|x| \leq 1/n_k} |f(x+h) - f(x-h)| dx = 2 \int_{|x| \leq 1/n_k} |f(x)| dx + O_q(T(h)), \quad (3.2)$$

где

$$T(h) := \sum_{m=1}^{\infty} \min\{n_m h, 1\} (|\Delta a_{n_m}| + |\Delta b_{n_m}|). \quad (3.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} & \int_{|x| \leq 1/n_k} |f(x+h) - f(x-h)| dx \\ &= \int_{-2h}^0 |f(x+h)| dx + O\left(\int_{-1/n_k}^{-2h} |f(x+h)| dx + \int_0^{1/n_k} |f(x+h)| dx\right) \\ & \quad + \int_0^{2h} |f(x-h)| dx + O\left(\int_{-1/n_k}^0 |f(x-h)| dx + \int_{2h}^{1/n_k} |f(x-h)| dx\right) \\ &= 2 \int_{-h}^h |f(x)| dx + O\left(\int_{h \leq |x| \leq h+(1/n_k)} |f(x)| dx\right) \\ &= 2 \int_{-1/n_k}^{1/n_k} |f(x)| dx + O\left(\int_{1/(2n_{k+1}) \leq |x| \leq 3/(2n_k)} |f(x)| dx\right). \end{aligned}$$

Поэтому для доказательства леммы остается установить оценку

$$\int_{1/(2n_{k+1}) \leq |x| \leq 3/(2n_k)} |f(x)| dx = O_q(T(h)). \quad (3.4)$$

Пользуясь представлением (3.1), находим

$$\begin{aligned}
& \int_{1/(2n_{k+1}) \leq |x| \leq 3/(2n_k)} |f(x)| dx \\
& \leq \int_{|x| \leq 3/(2n_k)} \left| \sum_{m=1}^k (\Delta a_{n_m} D_{n_m}(x) + \Delta b_{n_m} \tilde{D}_{n_m}(x)) \right| dx \\
& \quad + \int_{1/(2n_{k+1}) \leq |x| \leq 3/(2n_k)} \left| \sum_{m=k+1}^{\infty} (\Delta a_{n_m} D_{n_m}(x) + \Delta b_{n_m} \tilde{D}_{n_m}(x)) \right| dx \\
& \leq \frac{A}{n_k} \sum_{m=1}^k n_m (|\Delta a_{n_m}| + |\Delta b_{n_m}|) + A \log \frac{3n_{k+1}}{n_k} \sum_{m=k+1}^{\infty} (|\Delta a_{n_m}| + |\Delta b_{n_m}|).
\end{aligned}$$

Отсюда в силу (1.11) и (1.3) следует оценка (3.4).

Лемма доказана.

Оценим теперь интеграл

$$\int_0^{1/n_k} |f(x)| dx.$$

Характер полученных при этом результатов позволит утверждать, что такая же оценка справедлива и для интеграла по промежутку $[-1/n_k, 0]$.

В силу равномерных по всем параметрам оценок

$$D_{n_m}(x) = \frac{1}{x} \sin n_m x + O(1), \quad \tilde{D}_{n_m}(x) = \frac{1}{x} (1 - \cos n_m x) + O(1)$$

с помощью (3.1) и (1.11) получаем

$$\int_0^{1/n_k} |f(x)| dx = \int_0^{1/n_k} \left| \sum_{m=1}^{\infty} (\Delta a_{n_m} \sin n_m x + \Delta b_{n_m} (1 - \cos n_m x)) \right| \frac{dx}{x} + O_q(T(h)). \quad (3.5)$$

Представим интеграл из правой части (3.5) в виде ряда

$$\int_0^{1/n_k} = \sum_{j=k}^{\infty} \int_{1/n_{j+1}}^{1/n_j}$$

и при каждом j выделим в сумме по m слагаемые с $m \leq j$. Имеем

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=k}^{\infty} \int_{1/n_{j+1}}^{1/n_j} \left| \sum_{m=1}^j (\Delta a_{n_m} \sin n_m x + \Delta b_{n_m} (1 - \cos n_m x)) \right| \frac{dx}{x} \\
& \leq \sum_{j=k}^{\infty} \sum_{m=1}^j n_m (|\Delta a_{n_m}| + |\Delta b_{n_m}|) \left(\frac{1}{n_j} - \frac{1}{n_{j+1}} \right) \\
& = \sum_{m=1}^{k-1} \sum_{j=k}^{\infty} n_m (|\Delta a_{n_m}| + |\Delta b_{n_m}|) \left(\frac{1}{n_j} - \frac{1}{n_{j+1}} \right) \\
& \quad + \sum_{m=k}^{\infty} \sum_{j=m}^{\infty} n_m (|\Delta a_{n_m}| + |\Delta b_{n_m}|) \left(\frac{1}{n_j} - \frac{1}{n_{j+1}} \right) \\
& = \sum_{m=1}^{\infty} \min\{n_m/n_k, 1\} (|\Delta a_{n_m}| + |\Delta b_{n_m}|) = O_q(T(h)).
\end{aligned}$$

Для обоснования последнего шага в этой оценке ссылаемся на (1.11).

Таким образом,

$$\int_0^{1/n_k} |f(x)| dx = \sum_{j=k}^{\infty} \int_{1/n_{j+1}}^{1/n_j} \left| \sum_{m=j+1}^{\infty} (\Delta a_{n_m} \sin n_m x + \Delta b_{n_m} (1 - \cos n_m x)) \right| \frac{dx}{x} + O_q(T(h)). \quad (3.6)$$

Оценим величины

$$\alpha_j := \int_{1/n_{j+1}}^{1/n_j} \left| \sum_{m=j+1}^{\infty} (\Delta a_{n_m} \sin n_m x + \Delta b_{n_m} (1 - \cos n_m x)) \right| \frac{dx}{x}.$$

Сделаем замену $x = t/n_j$ и положим

$$\lambda_p := \frac{n_{j+p}}{n_j}, \quad p = 1, 2, \dots \quad (3.7)$$

Тогда

$$\alpha_j = \int_{n_j/n_{j+1}}^1 \left| b_{n_{j+1}} + \sum_{p=1}^{\infty} (\Delta a_{n_{j+p}} \sin \lambda_p t - \Delta b_{n_{j+p}} \cos \lambda_p x) \right| \frac{dt}{t} \quad (3.8)$$

и, значит, в силу (1.3) справедливы оценки сверху

$$\alpha_j \leq q^2 \int_{1/q^2}^1 \left| b_{n_{j+1}} + \sum_{p=1}^{\infty} (\Delta a_{n_{j+p}} \sin \lambda_p t - \Delta b_{n_{j+p}} \cos \lambda_p x) \right| dt \quad (3.9)$$

и снизу

$$\alpha_j \geq \int_{1/q}^1 \left| b_{n_{j+1}} + \sum_{p=1}^{\infty} (\Delta a_{n_{j+p}} \sin \lambda_p t - \Delta b_{n_{j+p}} \cos \lambda_p x) \right| dt. \quad (3.10)$$

Так как $\lambda_1 \geq q$ и

$$\frac{\lambda_{p+1}}{\lambda_p} = \frac{n_{j+p+1}}{n_{j+p}} \geq q, \quad p = 1, 2, \dots,$$

то к интегралам из (3.9) и (3.10) можно применить оценки (2.1).

В результате получим

$$\begin{aligned} \alpha_j &\leq A(q) \left(|b_{n_{j+1}}| + \left(\sum_{p=1}^{\infty} ((\Delta a_{n_{j+p}})^2 + (\Delta b_{n_{j+p}})^2) \right)^{1/2} \right) \\ &= A(q) \left(|b_{n_{j+1}}| + \left(\sum_{m=j+1}^{\infty} (|\Delta a_{n_m}| + |\Delta b_{n_m}|)^2 \right)^{1/2} \right) \end{aligned} \quad (3.11)$$

и

$$\alpha_j \geq \frac{1}{A(q)} \left(|b_{n_{j+1}}| + \left(\sum_{m=j+1}^{\infty} (|\Delta a_{n_m}| + |\Delta b_{n_m}|)^2 \right)^{1/2} \right).$$

Из (3.6) и этих оценок заключаем, что

$$\begin{aligned} & \frac{1}{A(q)} \left(\sum_{j=k}^{\infty} |b_{n_{j+1}}| + U(h) \right) + O_q(T(h)) \\ & \leq \int_0^{1/n_k} |f(x)| dx \leq A(q) \left(\sum_{j=k}^{\infty} |b_{n_{j+1}}| + U(h) \right) + O_q(T(h)), \end{aligned} \quad (3.12)$$

где

$$U(h) := \sum_{j=k}^{\infty} \left(\sum_{m=j+1}^{\infty} (|\Delta a_{n_m}| + |\Delta b_{n_m}|)^2 \right)^{1/2}, \quad (3.13)$$

а числа h и k связаны оценками (1.8).

Далее, согласно (1.2)

$$|b_{n_{j+1}}| = \sum_{i=n_j+1}^{n_{j+1}} \frac{|b_i|}{i} \left(\sum_{i=n_j+1}^{n_{j+1}} \frac{1}{i} \right)^{-1}. \quad (3.14)$$

Но в силу (1.3)

$$\sum_{i=n_j+1}^{n_{j+1}} \frac{1}{i} < \frac{n_{j+1} - n_j}{n_j} \leq q^2 - 1 \quad (3.15)$$

и, с другой стороны,

$$\sum_{i=n_j+1}^{n_{j+1}} \frac{1}{i} > \frac{n_{j+1} - n_j}{n_{j+1}} \geq 1 - \frac{1}{q}.$$

Вместе с (3.14) эти оценки показывают, что

$$\frac{1}{A(q)} \sum_{i=n_k+1}^{\infty} \frac{|b_i|}{i} \leq \sum_{j=k}^{\infty} |b_{n_{j+1}}| \leq A(q) \sum_{i=n_k+1}^{\infty} \frac{|b_i|}{i}.$$

Заметим еще, что

$$|b_{n_k}| \leq \sum_{m=k}^{\infty} |\Delta b_{n_m}| \leq A(q) T(h). \quad (3.16)$$

Значит, оценки (3.12) можно переписать в следующем эквивалентном им виде

$$\begin{aligned} & \frac{1}{A(q)} \left(\sum_{i=n_k}^{\infty} \frac{|b_i|}{i} + U(h) \right) + O_q(T(h)) \\ & \leq \int_0^{1/n_k} |f(x)| dx \leq A(q) \left(\sum_{i=n_k}^{\infty} \frac{|b_i|}{i} + U(h) \right) + O_q(T(h)). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Такие же оценки справедливы и для интеграла по промежутку $[-1/n_k, 0]$. Чтобы убедиться в этом, применим оценку (3.17) к функции $f(-x)$, ряд Фурье которой имеет вид

$$\sum_{i=1}^{\infty} (a_i \cos ix - b_i \sin ix),$$

и воспользуемся тем, что величины $U(h)$ и $T(h)$ сохраняют свои значения при изменении знака у всех коэффициентов b_i .

Эти оценки вместе с (3.2) приводят к следующему результату.

ТЕОРЕМА 2. Пусть функция $f \in L[-\pi, \pi]$, ее коэффициенты Фурье удовлетворяют условию W , $h \in (0, 1/2]$ и k — число, для которого выполняются неравенства (1.8). Тогда справедливы оценки

$$\begin{aligned} & \frac{1}{A(q)} \left(\sum_{i=n_k}^{\infty} \frac{|b_i|}{i} + U(h) \right) + O_q(T(h)) \\ & \leq \int_{|x| \leq 1/n_k} |f(x+h) - f(x-h)| dx \leq A(q) \left(\sum_{i=n_k}^{\infty} \frac{|b_i|}{i} + U(h) \right) + O_q(T(h)), \end{aligned}$$

где величины $U(h)$ и $T(h)$ определены формулами (3.13) и (3.3).

При доказательстве теоремы 1 будет нужна другая оценка интеграла (1.9).

ТЕОРЕМА 3. Пусть функция $f \in L[-\pi, \pi]$, ее коэффициенты Фурье удовлетворяют условию W , $h \in (0, 1/2]$ и k — число, для которого выполняются неравенства (1.8). Тогда справедлива оценка

$$\int_{|x| \leq 1/n_k} |f(x+h) - f(x-h)| dx = 4 \sum_{i=n_k}^{\infty} \frac{|b_i|}{i} + O_q(U(h) + T(h)). \quad (3.18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем исходить из оценки (3.6), установленной при доказательстве теоремы 2, но теперь иначе преобразуем величины α_j .

Из (3.8) следует, что

$$\alpha_j = \int_{n_j/n_{j+1}}^1 |b_{n_{j+1}}| \frac{dt}{t} + O \left(\int_{n_j/n_{j+1}}^1 \left| \sum_{p=1}^{\infty} (\Delta a_{n_{j+p}} \sin \lambda_p t - \Delta b_{n_{j+p}} \cos \lambda_p x) \right| \frac{dt}{t} \right).$$

Остаточный член в этом соотношении оценивается по аналогии с (3.9) и (3.11) следующим образом:

$$\begin{aligned} & \int_{n_j/n_{j+1}}^1 \left| \sum_{p=1}^{\infty} (\Delta a_{n_{j+p}} \sin \lambda_p t - \Delta b_{n_{j+p}} \cos \lambda_p x) \right| \frac{dt}{t} \\ & \leq A(q) \left(\sum_{m=j+1}^{\infty} (|\Delta a_{n_m}| + |\Delta b_{n_m}|)^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Пользуясь оценкой

$$\sum_{i=n_{j+1}}^{n_{j+1}} \frac{1}{i} = \log \frac{n_{j+1}}{n_j} + O \left(\frac{1}{n_j} \right)$$

и условием (1.2), находим

$$\int_{n_j/n_{j+1}}^1 |b_{n_{j+1}}| \frac{dt}{t} = |b_{n_{j+1}}| \log \frac{n_{j+1}}{n_j} = \sum_{i=n_{j+1}}^{n_{j+1}} \frac{|b_i|}{i} + O \left(\frac{1}{n_j} |b_{n_{j+1}}| \right).$$

Но

$$\sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{n_j} |b_{n_{j+1}}| \leq \sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{n_j} \sum_{m=j+1}^{\infty} |\Delta b_{n_m}| = \sum_{m=k+1}^{\infty} |\Delta b_{n_m}| \sum_{j=k}^{m-1} \frac{1}{n_j} = O_q(T(h)).$$

Таким образом, воспользовавшись еще оценкой (3.16), получаем

$$\int_0^{1/n_k} |f(x)| dx = \sum_{i=n_k}^{\infty} \frac{|b_i|}{i} + O_q(U(h) + T(h)).$$

По аналогии с тем, как это было сделано при доказательстве теоремы 2, убеждаемся, что такая же оценка имеет место и для интеграла по отрезку $[-1/n_k, 0]$.

Из полученных оценок в силу леммы 3 вытекает справедливость теоремы 3.

§ 4. Оценка интеграла (1.10)

ТЕОРЕМА 4. Пусть функция $f \in L[-\pi, \pi]$, ее коэффициенты Фурье удовлетворяют условию W , $h \in (0, 1/2]$ и k — число, для которого выполняются неравенства (1.8). Тогда справедливы оценки

$$\begin{aligned} \frac{1}{A(q)} V(h) + O(T(h)) &\leq \int_{1/n_k \leq |x| \leq \pi} |f(x+h) - f(x-h)| dx \\ &\leq A(q) V(h) + O(T(h)), \end{aligned} \quad (4.1)$$

где

$$V(h) := \sum_{j=1}^{k-1} \left(\sum_{m=j+1}^{\infty} ((\Delta a_{n_m})^2 + (\Delta b_{n_m})^2) \sin^2 n_m h \right)^{1/2}, \quad (4.2)$$

а величина $T(h)$ определена формулой (3.3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (3.1) имеем

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x-h) &= \sum_{m=1}^{\infty} (\Delta a_{n_m} (D_{n_m}(x+h) - D_{n_m}(x-h)) \\ &\quad + \Delta b_{n_m} (\tilde{D}_{n_m}(x+h) - \tilde{D}_{n_m}(x-h))). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Оценим интеграл по отрезку $[1/n_k, \pi]$. Позднее мы увидим, что при этом фактически будет получена оценка и для отрезка $[-\pi, -1/n_k]$.

Будем опираться на оценки из леммы 2, которые для ядер Дирихле и сопряженных с ними ядер аналогичны. Поэтому до того момента, пока не будут использоваться главные члены формул (2.4) и (2.5), будем для краткости писать слагаемые из (4.3) только с Δa_{n_j} .

Представим интеграл из (4.1) следующим образом:

$$\int_{1/n_k}^{\pi} = \sum_{j=1}^{k-1} \int_{1/n_{j+1}}^{1/n_j} + \int_1^{\pi}. \quad (4.4)$$

Если $x \in [1, \pi]$, то согласно (2.4)

$$D_{n_m}(x+h) - D_{n_m}(x-h) = O(\min\{n_m h, 1\}).$$

Поэтому

$$\int_1^{\pi} |f(x+h) - f(x-h)| dx = O\left(\sum_{m=1}^{\infty} |\Delta a_{n_m}| \min\{n_m h, 1\}\right). \quad (4.5)$$

Далее, в интегралах по каждому отрезку $[1/n_{j+1}, 1/n_j]$, $j = 1, 2, \dots, k-1$, выделим из разности $f(x+h) - f(x-h)$ выражение

$$\sum_{m=1}^j \Delta a_{n_m} (D_{n_m}(x+h) - D_{n_m}(x-h)).$$

В силу оценки (2.2)

$$\left| \sum_{m=1}^j \Delta a_{n_m} (D_{n_m}(x+h) - D_{n_m}(x-h)) \right| \leq 2h \sum_{m=1}^j n_m^2 |\Delta a_{n_m}|.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{k-1} \int_{1/n_{j+1}}^{1/n_j} \left| \sum_{m=1}^j \Delta a_{n_m} (D_{n_m}(x+h) - D_{n_m}(x-h)) \right| dx \\ & \leq 2h \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{m=1}^j n_m^2 |\Delta a_{n_m}| \left(\frac{1}{n_j} - \frac{1}{n_{j+1}} \right) \\ & = 2h \sum_{m=1}^{k-1} n_m^2 |\Delta a_{n_m}| \sum_{j=m}^{k-1} \left(\frac{1}{n_j} - \frac{1}{n_{j+1}} \right) \leq 2h \sum_{m=1}^{k-1} n_m |\Delta a_{n_m}|. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Займемся теперь оценкой интегралов

$$\beta_j := \int_{1/n_{j+1}}^{1/n_j} \left| \sum_{m=j+1}^{\infty} \Delta a_{n_m} (D_{n_m}(x+h) - D_{n_m}(x-h)) \right| dx, \quad j = 1, 2, \dots, k-1.$$

Применив к разности ядер Дирихле оценку (2.4), получим

$$\begin{aligned} \beta_j &= 2 \int_{1/n_{j+1}}^{1/n_j} \left| \sum_{m=j+1}^{\infty} \Delta a_{n_m} \sin n_m h \cos n_m x \right| \frac{dx}{x} \\ &+ O \left(\int_{1/n_{j+1}}^{1/n_j} \sum_{m=j+1}^{\infty} |\Delta a_{n_m}| \left(\frac{h}{x^2} + \min\{n_m h, 1\} \right) dx \right). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Оценим сумму по всем $j = 1, 2, \dots, k-1$ от остаточных членов из (4.7). Имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{k-1} \int_{1/n_{j+1}}^{1/n_j} \sum_{m=j+1}^{\infty} |\Delta a_{n_m}| \left(\frac{h}{x^2} + \min\{n_m h, 1\} \right) dx \\ &= h \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{m=j+1}^{\infty} |\Delta a_{n_m}| \int_{1/n_{j+1}}^{1/n_j} \frac{dx}{x^2} \\ &+ \sum_{j=1}^{k-1} \int_{1/n_{j+1}}^{1/n_j} \sum_{m=j+1}^{\infty} |\Delta a_{n_m}| \min\{n_m h, 1\} dx. \end{aligned} \quad (4.8)$$

При оценке второй суммы из правой части (4.8) можно действовать грубо

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{k-1} \int_{1/n_{j+1}}^{1/n_j} \sum_{m=j+1}^{\infty} |\Delta a_{n_m}| \min\{n_m h, 1\} dx \\
& \leq \sum_{j=1}^{k-1} \int_{1/n_{j+1}}^{1/n_j} \sum_{m=1}^{\infty} |\Delta a_{n_m}| \min\{n_m h, 1\} dx \\
& \leq \sum_{m=1}^{\infty} |\Delta a_{n_m}| \min\{n_m h, 1\}.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

При оценке первой суммы из правой части (4.8) воспользуемся тем, что

$$\sum_{j=1}^{k-1} \sum_{m=j+1}^{\infty} = \sum_{j=1}^{k-1} \left(\sum_{m=j+1}^k + \sum_{m=k+1}^{\infty} \right) = \sum_{m=2}^k \sum_{j=1}^{m-1} + \sum_{m=k+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{k-1}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
& h \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{m=j+1}^{\infty} |\Delta a_{n_m}| \int_{1/n_{j+1}}^{1/n_j} \frac{dx}{x^2} \\
& = h \sum_{m=2}^k |\Delta a_{n_m}| \sum_{j=1}^{m-1} \int_{1/n_{j+1}}^{1/n_j} \frac{dx}{x^2} + h \sum_{m=k+1}^{\infty} |\Delta a_{n_m}| \sum_{j=1}^{k-1} \int_{1/n_{j+1}}^{1/n_j} \frac{dx}{x^2} \\
& \leq h \sum_{m=2}^k n_m |\Delta a_{n_m}| + h \sum_{m=k+1}^{\infty} n_k |\Delta a_{n_m}| \\
& \leq \sum_{m=2}^{\infty} \min\{n_m h, 1\} |\Delta a_{n_m}|.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Из (4.8)–(4.10) находим

$$\sum_{j=1}^{k-1} \int_{1/n_{j+1}}^{1/n_j} \sum_{m=j+1}^{\infty} |\Delta a_{n_m}| \left(\frac{h}{x^2} + \min\{n_m h, 1\} \right) dx \leq 2 \sum_{m=1}^{\infty} \min\{n_m h, 1\} |\Delta a_{n_m}|.$$

Эта оценка вместе с (4.4)–(4.7) показывает, что

$$\begin{aligned}
& \int_{1/n_k}^{\pi} |f(x+h) - f(x-h)| dx \\
& = 2 \sum_{j=1}^{k-1} \int_{1/n_{j+1}}^{1/n_j} \left| \sum_{m=j+1}^{\infty} \Delta a_{n_m} \sin n_m h \cos n_m x \right| \frac{dx}{x} \\
& \quad + O \left(\sum_{m=1}^{\infty} \min\{n_m h, 1\} |\Delta a_{n_m}| \right).
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Напомним, что при выводе формулы (4.11) мы из представления (4.3) для краткости записывали только слагаемые с Δa_{n_m} . В общем случае вместо (4.11) получим

$$\begin{aligned} & \int_{1/n_k}^{\pi} |f(x+h) - f(x-h)| dx \\ &= 2 \sum_{j=1}^{k-1} \int_{1/n_{j+1}}^{1/n_j} \left| \sum_{m=j+1}^{\infty} (\Delta a_{n_m} \sin n_m h \cos n_m x + \Delta b_{n_m} \sin n_m h \sin n_m x) \right| \frac{dx}{x} \\ &+ O\left(\sum_{m=1}^{\infty} \min\{n_m h, 1\} (|\Delta a_{n_m}| + |\Delta b_{n_m}|) \right). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Для завершения доказательства теоремы оценим сверху и снизу интегралы

$$\gamma_j := \int_{1/n_{j+1}}^{1/n_j} \left| \sum_{m=j+1}^{\infty} (\Delta a_{n_m} \sin n_m h \cos n_m x + \Delta b_{n_m} \sin n_m h \sin n_m x) \right| \frac{dx}{x}.$$

Сделаем замену $x = t/n_j$ и определим числа λ_p по формуле (3.7). Тогда

$$\gamma_j = \int_{n_j/n_{j+1}}^1 \left| \sum_{p=1}^{\infty} (\Delta a_{n_{j+p}} \sin n_{j+p} h \cos \lambda_p x + \Delta b_{n_{j+p}} \sin n_{j+p} h \sin \lambda_p x) \right| \frac{dx}{x}. \quad (4.13)$$

Так как $\lambda_1 \geq q$ и

$$\frac{\lambda_{p+1}}{\lambda_p} = \frac{n_{j+p+1}}{n_{j+p}} \geq q,$$

то к интегралам (4.13) можно применять оценки из леммы 1.

В результате получим

$$\begin{aligned} \gamma_j &\leq q^2 \int_{1/q^2}^1 \left| \sum_{p=1}^{\infty} (\Delta a_{n_{j+p}} \sin n_{j+p} h \cos \lambda_p x + \Delta b_{n_{j+p}} \sin n_{j+p} h \sin \lambda_p x) \right| dx \\ &\leq A(q) \left(\sum_{p=1}^{\infty} \sin^2 n_{j+p} h ((\Delta a_{n_{j+p}})^2 + (\Delta b_{n_{j+p}})^2) \right)^{1/2} \\ &= A(q) \left(\sum_{m=j+1}^{\infty} \sin^2 n_m h ((\Delta a_{n_m})^2 + (\Delta b_{n_m})^2) \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (4.14)$$

и

$$\begin{aligned} \gamma_j &\geq \int_{1/q}^1 \left| \sum_{p=1}^{\infty} (\Delta a_{n_{j+p}} \sin n_{j+p} h \cos \lambda_p x + \Delta b_{n_{j+p}} \sin n_{j+p} h \sin \lambda_p x) \right| dx \\ &\geq \frac{1}{A(q)} \left(\sum_{m=j+1}^{\infty} \sin^2 n_m h ((\Delta a_{n_m})^2 + (\Delta b_{n_m})^2) \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Из (4.12), (4.14) и (4.15) вытекают оценки вида (4.1) для интеграла по отрезку $[1/n_k, \pi]$.

Чтобы получить оценку интеграла по отрезку $[-\pi, -1/n_k]$, делаем замену $x = -t$ и, пользуясь тем, что величины $V(h)$ и $T(h)$ сохраняют свои значения при изменении знака у всех коэффициентов b_i , в силу уже доказанного приходим к оценкам (4.1).

Теорема доказана.

§ 5. Доказательство теоремы 1

Сначала заметим, что величины $S(\delta)$, определенные равенством (1.6), с ростом δ возрастают и, кроме того, в силу (1.3)

$$S\left(\frac{1}{n_k}\right) \leq q^2 S\left(\frac{1}{n_{k+1}}\right). \quad (5.1)$$

Далее, учитывая (1.8), видим, что для величин, определенных равенствами (3.3), (3.13) и (4.2), справедливы оценки

$$T(\delta) \leq S(\delta), \quad U(\delta) \leq 2S(\delta), \quad V(\delta) \leq S(\delta).$$

Поэтому для чисел δ вида $1/n_k$ оценка (1.5) вытекает из (3.18) и (4.1).

Чтобы установить справедливость (1.5) для δ , удовлетворяющих условию

$$\frac{1}{n_{k+1}} < \delta < \frac{1}{n_k},$$

потребуется оценка суммы

$$\sum_i \frac{|b_i|}{i},$$

распространенной на $i \in (n_k, n_{k+1})$.

Так как для этих i согласно (1.2) имеет место равенство $b_i = b_{n_k}$, то, пользуясь оценками (3.15) и (3.16), получаем

$$\sum_i \frac{|b_i|}{i} = O_q(S(\delta)). \quad (5.2)$$

Из (3.18) и (4.1) в силу возрастания величин $S(\delta)$ и оценки (5.1) следует двойное неравенство

$$\frac{2}{\pi} \sum_{i=n_{k+1}}^{\infty} \frac{|b_i|}{i} + O_q(S(\delta)) \leq \omega(f, \delta)_L \leq \frac{2}{\pi} \sum_{i=n_k}^{\infty} \frac{|b_i|}{i} + O_q(S(\delta)). \quad (5.3)$$

А согласно (5.2) неравенства (5.3) эквивалентны (1.5).

Это завершает доказательство теоремы 1.

Список литературы

1. Buntinas M., Tanović-Miller N. New integrability and L^1 -convergence classes for even trigonometric series // Rad. Mat. 1990. V. 6. P. 149–170.
2. Weiss M. A theorem on lacunary trigonometric series // Orthogonal expansions and their continuous analogues (Edwargville, Ill. 1967). Carbondale, Ill.: SIU Press, 1968. P. 227–230.
3. Балашов Л. А., Теляковский С. А. Некоторые свойства лакунарных рядов и интегрируемость тригонометрических рядов // Труды МИАН. 1977. Т. 143. С. 32–41.
4. Теляковский С. А. Оценки модуля непрерывности в метрике L функций одной переменной через коэффициенты Фурье // Укр. матем. журн. 1994. Т. 46. С. 626–632.
5. Теляковский С. А. О частных суммах рядов Фурье функций ограниченной вариации // Труды МИАН. 1997. Т. 219. С. 378–386.
6. Belov A. S. On some local properties of the sum of lacunary trigonometric series // Anal. Math. 1988. V. 14. P. 65–97.