Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Филиновский, Стабилизация решений первой смешанной задачи для волнового уравнения в областях с некомпактными границами, *Матем. сб.*, 2002, том 193, номер 9, 107–138

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm681>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 17:11:11

УДК 517.956.3

А. В. Филиновский

Стабилизация решений первой смешанной задачи для волнового уравнения в областях с некомпактными границами

В работе изучается скорость убывания при больших значениях времени локальной энергии решений первой смешанной задачи для волнового уравнения в неограниченных областях $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, с гладкими некомпактными границами. В предположении, что граничная поверхность удовлетворяет условию, обобщающему условие звездности относительно начала координат, в работе установлена степенная оценка скорости убывания локальной энергии при $t \rightarrow \infty$.

Доказательство основано на полученных в работе равномерных оценках в полуплоскости $\{\operatorname{Im} k > 0\}$ решений соответствующей спектральной задачи – первой краевой задачи для уравнения Гельмгольца.

Библиография: 21 название.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, – неограниченная область, замыкание которой не содержит начало координат, с гладкой границей Γ . Рассмотрим первую смешанную задачу для волнового уравнения

$$u_{tt} - \Delta u = 0, \quad (t, x) \in Q = \{t > 0\} \times \Omega, \quad (0.1)$$

$$u(0, x) = f(x), \quad u_t(0, x) = g(x), \quad (0.2)$$

$$u|_{\Gamma} = 0, \quad t > 0. \quad (0.3)$$

Начальные функции будем предполагать вещественнозначными, гладкими в $\overline{\Omega}$, согласованными с граничным условием (0.3) и имеющими ограниченный носитель.

Хорошо известно, что для решения задачи (0.1)–(0.3) справедлив закон сохранения энергии

$$E(t) = \int_{\Omega} |\operatorname{grad} u(t, x)|^2 dx = E(0), \quad t > 0, \quad (0.4)$$

$$\operatorname{grad} u = (u_t, \nabla_x u) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

В работе изучается скорость убывания при $t \rightarrow \infty$ локальной энергии решения задачи (0.1)–(0.3) $E_R(t) = \int_{\Omega_R} |\operatorname{grad} u(t, x)|^2 dx$, где $\Omega_R = \Omega \cap \{r < R\}$, $r = |x|$.

Сформулируем некоторые известные результаты.

Работа выполнена при финансовой поддержке Программы поддержки ведущих научных школ (грант № 00-15-96100) и фонда INTAS (грант № 00-136).

Сначала рассмотрим случай компактной поверхности Γ . Если $n = 3$ и поверхность Γ звездна относительно начала координат, т.е.

$$(\nu, x) \leq 0, \quad x \in \Gamma \quad (0.5)$$

(ν – единичный вектор внешней нормали к Γ), то, как установлено в работе [1], справедлива оценка

$$E_R(t) \leq \frac{C}{t}, \quad t \geq t_0. \quad (0.6)$$

В [2] оценка (0.6) усилена

$$E_R(t) \leq \frac{C}{t^2}, \quad (0.7)$$

а в [3] при тех же предположениях доказано, что

$$E_R(t) \leq Ce^{-at}, \quad a > 0. \quad (0.8)$$

В [4] было показано, что в случае звездной поверхности Γ оценка (0.8) имеет место для всех нечетных $n \geq 3$. Величина постоянной a в (0.8) исследовалась в работе [5]. Для области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, являющейся внешностью шара радиуса r_0 , в [5] получена оценка $E_R(t) \leq Ce^{-2t/R_0}$ и доказано, что она является точной.

В работах [6]–[8] при нечетных $n \geq 3$ неравенство (0.8) установлено для областей, границы которых удовлетворяют условиям, обобщающим условие звездности относительно начала координат (0.5).

В работе [9] при $n = 2$ для связной кривой Γ , кривизна которой положительна в каждой точке, получена точная оценка

$$E_R(t) \leq \frac{C}{t^2 \ln^4 t}.$$

Рассмотрим теперь случай некомпактной поверхности Γ .

Отметим, что при $n = 2$ для областей с некомпактными границами локальная энергия $E_R(t)$ может убывать быстрее любой степени t . Более того, решение может обращаться в нуль на множествах $(T, \infty) \times \Omega_R$, $0 < R < \infty$, $T > T_0$. А именно, пусть $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x_1, 0), -\infty < x_1 \leq 0\}$, $f(x) = 0$, $g(x) = \eta(r) \cos(\varphi/2)$, $x = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$, $-\pi < \varphi < \pi$, $\eta(r) \in \dot{C}^\infty(0, +\infty)$. Тогда найдется $R_1 > 0$ такое, что $u(t, x) = 0$ при $x \in \Omega_{t-R_1}$, $t > R_1$.

Заметим также, что для некомпактной звездной поверхности Γ получить оценку (0.8) при нечетном n , вообще говоря, нельзя. Как показано в работе [10], для области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, являющейся внутренностью двугранного угла с раствором $\frac{2\pi}{2j+1}$, $j = 1, 2, \dots$, найдутся финитные начальные функции f, g и число $R_0 > 0$ такие, что

$$E_{R_0}(t) \geq \frac{C}{t^{2(2j+3)}}, \quad C > 0, \quad t \geq t_0 > 0.$$

Для звездных поверхностей Γ при $n \geq 3$ в работе [11] доказана оценка (0.7), а при $n = 2$ в [12] получено неравенство (0.6) и установлена сходимость интеграла

$$\int_0^\infty E_R(t)(1+t)^\sigma dt \leq C, \quad \sigma < 1. \quad (0.9)$$

В работе [13] установлено, что при дополнительных условиях на звездную поверхность Γ оценки (0.6), (0.7) и (0.9) можно усилить. Пусть $S_\rho = \Omega \cap \{r = \rho\}$, $\rho > 0$, а Σ_ρ – множество точек x , лежащих на единичной сфере, таких, что $\rho x \in S_\rho$. Обозначим через λ_ρ наименьшее по модулю собственное значение оператора Лапласа–Бельтрами в Σ_ρ с нулевыми данными Дирихле на $\partial\Sigma_\rho$. Пусть $\Lambda_\Omega = \liminf_{\rho \rightarrow \infty} |\lambda_\rho|$. В [13] доказано, что существует положительная постоянная Λ^* , зависящая от n , такая, что для всех областей $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих условию (0.5) и таких, что $\Lambda_\Omega > \Lambda^*$, для решения задачи (0.1)–(0.3) имеет место оценка

$$\int_T^\infty E_R(t) dt \leq \frac{C}{T^2}, \quad T \geq T_0. \quad (0.10)$$

В работе [13] также доказано, что существует положительная постоянная n^* такая, что при $n > n^*$ для всех областей $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих условию (0.5), для решения задачи (0.1)–(0.3) имеет место оценка (0.10).

Из оценки (0.10) следует, что для областей со звездными границами, удовлетворяющих условию $\Lambda_\Omega > \Lambda^*$ или $n > n^*$, сходится интеграл

$$\int_0^\infty E_R(t)(1+t)^\sigma dt \leq C, \quad \sigma < 2.$$

Кроме того, из (0.10) вытекает, что при $n = 2$ для всех областей Ω со звездными границами, удовлетворяющих условию $\Lambda_\Omega > \Lambda^*$, имеет место оценка (0.7).

Отметим, что для областей Ω со звездной границей, не удовлетворяющих ни одному из условий $\Lambda_\Omega > \Lambda^*$, $n > n^*$, неравенство (0.10) может не выполняться. Пусть $n = 2$, Ω – внешность круга единичного радиуса, $f(x) = 0$, $g(x) = \xi(r)$, $\xi(r) \in \mathring{C}^\infty(1, +\infty)$, $\xi(r) \geq 0$, $\int_1^{+\infty} \xi(r) dr > 0$. Тогда для произвольного $R > 1$ справедлива оценка

$$\int_T^\infty E_R(t) dt \geq \frac{C}{T \ln^4 T}, \quad T \geq T_0, \quad C > 0.$$

Скорость убывания локальной энергии решения задачи (0.1)–(0.3) в областях с некомпактными незвездными границами изучалась в работах [14]–[16]. В этих работах рассматривались следующие классы областей. Пусть $\varphi(x)$ – положительная квадратичная форма на $\mathbb{R}^n$. Будем считать, что

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j^2,$$

где $0 < \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_m < \alpha_{m+1} = \dots = \alpha_n = 1$, $0 \leq m \leq n-1$. Область Ω называется *областью класса* G_φ [14]–[16], если

$$(\nu, \nabla \varphi(x)) \leq 0, \quad x \in \Gamma, \quad (0.11)$$

и существует положительная постоянная C_1 такая, что

$$\sum_{j=1}^m x_j^2 \leq C_1 \left(\sum_{j=m+1}^n x_j^2 \right)^{\alpha_m}, \quad x \in \Omega. \quad (0.12)$$

Геометрически условия (0.11), (0.12) характеризуют скорость расширения области Ω на бесконечности. При $0 < \alpha_1 < 1$ область $\Omega \in G_\varphi$ расширяется как параболоид (скорость расширения увеличивается с возрастанием α_1). Случаю $\alpha_1 = 1$ соответствуют области со звездными границами, расширяющиеся как конус.

В работах [14]–[16] для областей $\Omega \in G_\varphi$, $0 < \alpha_1 < 1$, удовлетворяющих условию $C_1 < C^*$, где C^* – постоянная, зависящая от n , α_1 и α_m , установлена сходимость интеграла

$$\int_0^\infty E_R(t) dt \leq C.$$

Сформулируем основные результаты настоящей работы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Область Ω называется *областью класса P_φ* , если $\Omega \in G_\varphi$ и существует положительное число R_0 такое, что

$$(\nu, x) \geq 0, \quad x \in \Gamma \cap \{r \geq R_0\}. \quad (0.13)$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $0 < \alpha_1 < 1$. Тогда существуют постоянные $C^* > 0$ и $0 < \delta < 2$, зависящие от n , α_1 и α_m , такие, что для всех областей $\Omega \in P_\varphi$, удовлетворяющих условию $C_1 < C^*$, для решения задачи (0.1)–(0.3) справедлива оценка

$$\int_T^\infty E_R(t) dt \leq \frac{C}{T^\delta}, \quad T \geq T_0, \quad 0 < R < \infty. \quad (0.14)$$

Из неравенства (0.14) следует, что для всех областей $\Omega \in P_\varphi$, удовлетворяющих условию $C_1 < C^*$, имеет место оценка

$$E_R(t) \leq \frac{C}{t^\delta}, \quad T \geq T_0, \quad R > 0. \quad (0.15)$$

Кроме того, из (0.14) вытекает, что для всех областей $\Omega \in P_\varphi$, удовлетворяющих условию $C_1 < C^*$, сходится интеграл

$$\int_0^\infty E_R(t)(1+t)^\sigma dt \leq C, \quad \sigma < \delta. \quad (0.16)$$

Рассмотрим первую краевую задачу для уравнения Гельмгольца

$$\Delta v + k^2 v = -h(x), \quad x \in \Omega, \quad (0.17)$$

$$v|_\Gamma = 0, \quad (0.18)$$

которая при $h \in L_2(\Omega)$ имеет единственное решение $v(x, k) \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ для всех $k = \omega + i\mu \in \{\operatorname{Im} k > 0\}$. Доказательство теоремы 1 основано на свойствах решения задачи (0.17), (0.18) и его производной dv/dk при больших значениях параметра в полуплоскости $\{\operatorname{Im} k > 0\}$.

Приведем некоторые известные результаты. Будем считать, что функция h быстро убывает на бесконечности. В работах [7], [17] для компактной звездной поверхности Γ была установлена оценка

$$\|v\|_{L_2(\Omega_R)} \leq C, \quad -\infty < \omega < \infty, \quad \mu > 0, \quad R > 0.$$

Случай некомпактной звездной поверхности Γ рассмотрен в работах [12], [14]. Для звездной поверхности Γ в работе [12] получено неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\|v_r - ikv\|_{L_2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{1}{r} \nabla_{\Theta} v \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \right) d\omega \leq C,$$

$$\frac{1}{r^2} |\nabla_{\Theta} v|^2 = |\nabla v|^2 - |v_r|^2, \quad \mu > 0,$$

а в работе [14] доказана оценка

$$\int_{\Omega} \left(|v_r - i\omega v|^2 + \frac{1}{r^2} |\nabla_{\Theta} v|^2 + \frac{|v|^2}{r^2 \ln^{2q} r} \right) dx \leq C, \quad -\infty < \omega < \infty, \quad \mu > 0,$$

где $q = 1$ при $n = 2$ и $q = 0$ при $n \geq 3$.

Оценки решений задачи (0.17), (0.18) при больших значениях спектрального параметра в полуплоскости $\{\text{Im } k > 0\}$ в областях с некомпактными незвездными границами устанавливались в работах [14]–[16]. В [14]–[16] для областей $\Omega \in G_{\varphi}$, $0 < \alpha_1 < 1$, удовлетворяющих условию $C_1 < C^*$, установлено неравенство

$$\int_{\Omega} \left(\left| \frac{(\nabla v, \nabla \varphi)}{|\nabla \varphi|} - i\omega \frac{|\nabla \varphi|}{2\sqrt{\varphi}} v \right|^2 + |\nabla_{\tau} v|^2 + \frac{|v|^2}{r^{2\alpha_m}} \right) \frac{dx}{r^{\gamma}} \leq C(\omega^2 + 1),$$

$$|\nabla_{\tau} v|^2 = |\nabla v|^2 - \frac{|(\nabla v, \nabla \varphi)|^2}{|\nabla \varphi|^2}, \quad \gamma \in (\max\{1 - 2\alpha_1, 2\alpha_m - 1\}, 1),$$

$$-\infty < \omega < \infty, \quad \mu > 0.$$

В работе [18] изучалось поведение функции dv/dk при $\mu \rightarrow 0$, $\omega \neq 0$. В [18] для областей $\Omega \in P_{\varphi}$ при $0 < \alpha_1 = \dots = \alpha_{n-1} < 1$ получена оценка

$$\left\| \frac{dv}{dk} \right\|_{L_2(\Omega_R)} \leq \frac{C}{\mu^{\sigma}}, \quad \sigma = \sigma(\alpha_1) \in (0, 1),$$

$$0 < \omega_1 < |\omega| < \omega_2 < \infty, \quad 0 < \mu < 1, \quad R > 0,$$

где постоянная C зависит от ω_1 и ω_2 .

В работе [13] получены равномерные оценки функции dv/dk в полуплоскости $\{\text{Im } k > 0\}$ для областей Ω со звездными границами. А именно, показано, что в случае звездной поверхности Γ для решения задачи (0.17), (0.18) имеет место оценка

$$\left\| \frac{dv}{dk} \right\|_{L_2(\Omega_R)} \leq C \frac{|\omega| + 1}{|k|}, \quad -\infty < \omega < +\infty, \quad \mu > 0. \quad (0.19)$$

Заметим, что множитель $1/|k|$ в правой части неравенства (0.19), вообще говоря, нельзя заменить на $1/|k|^\sigma$, $\sigma < 1$. Пусть $n = 2$, Ω — внешность круга единичного радиуса, $h(x) = \xi(r)$, $\xi(r) \in \mathring{C}^\infty(1, +\infty)$, $\xi(r) \geq 0$, $\int_1^{+\infty} \xi(r) dr > 0$. Тогда для произвольного $R > 1$ найдутся положительные постоянные N , C' и C'' такие, что при $\text{Im } k > 0$, $|k| < N$, справедливы оценки

$$\frac{C'}{|k| \ln^2 |k|} \leq \left\| \frac{dv}{dk} \right\|_{L_2(\Omega_R)} \leq \frac{C''}{|k| \ln^2 |k|}.$$

В работе [19] изучалось поведение решения задачи (0.17), (0.18) в окрестности точки $k = 0$. В частности, для областей Ω из классов G_φ , $0 < \alpha_1 < 1$, в [19] получены представления функции $v(x, k)$ в виде асимптотических по k при $k \rightarrow 0$ рядов.

Доказательство теоремы 1 основано на следующих свойствах решения задачи (0.17), (0.18) в полуплоскости $\{\text{Im } k > 0\}$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $0 < \alpha_1 < 1$. Тогда существуют постоянные $C^* > 0$, $p > 0$ и $0 < \beta < 1$ такие, что для всех областей $\Omega \in P_\varphi$, удовлетворяющих условию $C_1 < C^*$, при $-\infty < \omega < +\infty$, $\mu > 0$ для решения задачи (0.17), (0.18) имеют место оценки

$$\int_{\Omega} |v|^2 \frac{dx}{r^\gamma} \leq C(\omega^2 + 1) \int_{\Omega} |h|^2 r^\gamma dx, \quad (0.20)$$

$$\int_{\Omega} \left| \frac{dv}{dk} \right|^2 \frac{dx}{r^\gamma} \leq C(|\omega|^p + 1)(|k|^{-p} + 1)(\mu^{-\beta} + 1)^2 \int_{\Omega} |h|^2 r^\gamma dx, \quad (0.21)$$

$\gamma > \gamma_1$, где постоянная γ_1 зависит от n , α_1 и α_m .

Работа состоит из четырех параграфов.

В §1 устанавливаются равномерные в полуплоскости $\{\text{Im } k > 0\}$ оценки решений первой краевой задачи для уравнения Гельмгольца в областях из классов P_φ .

В §2 исследуется поведение решений первой краевой задачи для уравнения Гельмгольца при больших значениях параметра.

В §3 изучается поведение решений первой краевой задачи для уравнения Гельмгольца при малых значениях параметра.

В §4 устанавливаются оценки локальной энергии решений первой смешанной задачи для волнового уравнения при больших значениях времени.

§1. Оценки решений первой краевой задачи для уравнения Гельмгольца в верхней полуплоскости

Будем рассматривать обобщенное решение задачи (0.1)–(0.3) из энергетического класса (см. [15]), т.е. функцию $u(t, x) \in C([0, +\infty); \mathring{W}_2^1(\Omega))$ такую, что $u_t(t, x) \in C([0, +\infty); L_2(\Omega))$, удовлетворяющую начальным условиям $u(0, x) = f(x)$, $u_t(0, x) = g(x)$ и интегральному тождеству

$$\int_{Q_T} ((\nabla u, \nabla \chi) - u_t \chi_t) dt dx = \int_{\Omega} g(x) \chi(0, x) dx, \quad Q_T = (0, T) \times \Omega, \quad T > 0,$$

при всех $\chi(t, x) \in W_2^1(Q_T)$, $\chi|_{(0,T) \times \Gamma} = 0$, $\chi|_{t=T} = 0$, а также удовлетворяющую энергетическому соотношению (0.4). Известно, что при гладких начальных функциях f и g , имеющих ограниченный носитель, решение из энергетического класса существует и единственно (см. [15]). Как показано в работе [14], для всех $k = \omega + i\mu$, $-\infty < \omega < \infty$, $\mu > 0$, существует функция

$$v(x, k) = \int_0^\infty e^{ikt} u(t, x) dt.$$

Функция v принадлежит пространству $\mathring{W}_2^1(\Omega)$, аналитична по $k \in \{\operatorname{Im} k > 0\}$ в норме $W_2^1(\Omega_R)$, $R > 0$, и удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_\Omega ((\nabla v, \nabla \psi) - k^2 v \psi) dx = \int_\Omega (g - ikf) \psi dx \quad (1.1)$$

для произвольной $\psi(x) \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$, т.е. является обобщенным (из $\mathring{W}_2^1(\Omega)$) решением задачи (0.17), (0.18) с $h = g - ikf$. Полагая в (1.1) $\psi = \bar{v}$, получаем равенство

$$\int_\Omega (|\nabla v|^2 + (\mu^2 - \omega^2 - 2i\omega\mu)|v|^2) dx = \int_\Omega h \bar{v} dx. \quad (1.2)$$

Отделяя в (1.2) вещественную и мнимую части, имеем

$$\int_\Omega (|\nabla v|^2 + (\mu^2 - \omega^2)|v|^2) dx = \operatorname{Re} \left(\int_\Omega h \bar{v} dx \right), \quad (1.3)$$

$$2\omega\mu \int_\Omega |v|^2 dx = -\operatorname{Im} \left(\int_\Omega h \bar{v} dx \right). \quad (1.4)$$

Тогда при $\mu > 0$, $\omega \neq 0$ единственность решения задачи (0.17), (0.18) в пространстве $\mathring{W}_2^1(\Omega)$ следует из равенства (1.4), а при $\mu > 0$, $\omega = 0$ — из равенства (1.3).

Таким образом, при всех $-\infty < \omega < \infty$, $\mu > 0$ функция $v(x, k)$ принадлежит пространству $\mathring{W}_2^1(\Omega)$ и является единственным (в $\mathring{W}_2^1(\Omega)$) решением задачи (0.17), (0.18). Кроме того, функция v при любом $R > 0$ принадлежит пространству $W_2^2(\Omega_R)$ и аналитична по k в норме $W_2^2(\Omega_R)$.

ЛЕММА 1. Для любого $p = 0, 1, 2, \dots$ при всех $-\infty < \omega < \infty$, $\mu > 0$ для решения задачи (0.17), (0.18) справедлива оценка

$$\int_\Omega (|\nabla v|^2 + |v|^2) r^p dx \leq C(\mu) \int_\Omega |h|^2 r^p dx. \quad (1.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. В работе [14] установлено, что при всех $p = 0, 1, 2, \dots$ для решения задачи (0.1)–(0.3) имеет место оценка

$$\int_{\Omega} (|\nabla u(t, x)|^2 + u_t(t, x)^2) r^p dx \leq \int_{\Omega} (|\nabla f|^2 + g^2)(r + t)^p dx, \quad t > 0. \quad (1.6)$$

Из (1.6) с $f = 0, g_j = h_j, j = 1, 2$, следует, что для $h(x) = h_1(x) + ih_2(x)$ выполнено следующее

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (|\nabla v|^2 + |v|^2) r^p dx \\ &= \int_{\Omega} \left(\left| \nabla \int_0^{\infty} e^{i\omega t - \mu t} u(t, x) dt \right|^2 + \left| \int_0^{\infty} e^{i\omega t - \mu t} u(t, x) dt \right|^2 \right) r^p dx \\ &\leq \int_{\Omega} \left(\left(\int_0^{\infty} e^{-\mu t} |\nabla u(t, x)| dt \right)^2 + \left(\int_0^{\infty} e^{-\mu t} |u(t, x)| dt \right)^2 \right) r^p dx \\ &\leq \int_0^{\infty} e^{-\mu t} dt \int_0^{\infty} e^{-\mu t} dt \int_{\Omega} (|\nabla u(t, x)|^2 + |u(t, x)|^2) r^p dx \\ &= \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} e^{-\mu t} dt \int_{\Omega} \left(|\nabla u(t, x)|^2 + \left| \int_0^t u_{\tau}(\tau, x) d\tau \right|^2 \right) r^p dx \\ &\leq \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} e^{-\mu t} dt \int_{\Omega} \left(|\nabla u(t, x)|^2 + t \int_0^t |u_{\tau}(\tau, x)|^2 d\tau \right) r^p dx \\ &\leq \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} e^{-\mu t} dt \int_{\Omega} |h|^2 (r + t)^p dx + \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} e^{-\mu t} t dt \int_0^t d\tau \int_{\Omega} |h|^2 (r + \tau)^p dx \\ &= \frac{1}{\mu} \sum_{j=0}^p C_p^j \int_0^{\infty} e^{-\mu t} t^j \left(1 + \frac{t^2}{j+1} \right) dt \int_{\Omega} |h|^2 r^{p-j} dx \\ &\leq C(\mu) \int_{\Omega} |h|^2 r^p dx. \end{aligned}$$

Неравенство (1.5) доказано.

Пусть $w(x, k) = v(x, k) e^{-i\omega \sqrt{\varphi(x)}}$, $k = \omega + i\mu$, $-\infty < \omega < +\infty$, $\mu > 0$, где v – решение задачи (0.17), (0.18). Функция w является решением краевой задачи

$$\begin{aligned} \Delta w + \frac{i\omega}{\sqrt{\varphi}} \left((\nabla w, \nabla \varphi) + \left(\frac{\Delta \varphi}{2} - \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} + 2\mu \sqrt{\varphi} \right) w \right) \\ + \left(\omega^2 \left(1 - \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} \right) - \mu^2 \right) w = -h e^{-i\omega \sqrt{\varphi}}, \quad x \in \Omega, \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$w|_{\Gamma} = 0. \quad (1.8)$$

Справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 2. Пусть $0 < \alpha_1 < 1$ и $\gamma \in (\max\{1 - 2\alpha_1, 2\alpha_m - 1\}, 1)$. Тогда существует постоянная $C^* > 0$ такая, что для всех областей $\Omega \in G_\varphi$ с $C_1 < C^*$ для решения задачи (1.7), (1.8) справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left((1 + \mu r) |\nabla w|^2 + (1 + \mu^3 r) \frac{|w|^2}{r^{2\alpha_m}} \right) \frac{dx}{r^\gamma} \\ & \leq C(\omega^2 + 1) \int_{\Omega} |h|^2 r^{\gamma_1} dx, \quad -\infty < \omega < +\infty, \quad \mu > 0, \end{aligned} \quad (1.9)$$

где постоянная γ_1 зависит от n, α_1, α_m и γ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Оценка (1.9) выводится из интегрального соотношения, применявшегося при доказательстве леммы 6 работы [15] и леммы 1 работы [16].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Так как $|w| = |v|$, то из оценки (1.9) следует неравенство

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{|v|^2 dx}{r^{\gamma+2\alpha_m}} \leq C(\omega^2 + 1) \int_{\Omega} |h|^2 r^{\gamma_1} dx, \\ & -\infty < \omega < +\infty, \quad \mu > 0, \quad \gamma \in (\max\{1 - 2\alpha_1, 2\alpha_m - 1\}, 1), \\ & \gamma_1 = \gamma_1(n, \alpha_1, \alpha_m, \gamma). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Из соотношения (1.10) следует оценка (0.20).

Установим одну оценку, важную для дальнейших рассуждений. Поскольку

$$|\nabla v|^2 = \left| \nabla w + i\omega \frac{\nabla \varphi}{2\sqrt{\varphi}} w \right|^2,$$

где

$$\alpha_1 \leq \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} \leq 1,$$

то из неравенства (1.9) следует, что

$$\int_{\Omega} \frac{|\nabla v|^2 dx}{r^{\gamma+2\alpha_m}} \leq C \int_{\Omega} (|\nabla w|^2 + \omega^2 |w|^2) \frac{dx}{r^{\gamma+2\alpha_m}} \leq C(\omega^2 + 1)^2 \int_{\Omega} |h|^2 r^{\gamma_1} dx.$$

Таким образом, при всех $-\infty < \omega < +\infty, \mu > 0$ имеет место оценка

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{|\nabla v|^2 dx}{r^{\gamma+2\alpha_m}} \leq C(\omega^2 + 1)^2 \int_{\Omega} |h|^2 r^{\gamma_1} dx, \\ & \gamma \in (\max\{1 - 2\alpha_1, 2\alpha_m - 1\}, 1), \quad \gamma_1 = \gamma_1(n, \alpha_1, \alpha_m, \gamma). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Докажем неравенство (0.21). Дифференцируя уравнение (0.17) и краевое условие (0.18) по k , заключаем, что функция dv/dk является обобщенным (из $\dot{W}_2^1(\Omega)$) решением краевой задачи

$$\Delta \frac{dv}{dk} + k^2 \frac{dv}{dk} = -2kv, \quad x \in \Omega, \quad (1.12)$$

$$\left. \frac{dv}{dk} \right|_{\Gamma} = 0. \quad (1.13)$$

Пусть $\gamma > 0$. Рассмотрим краевую задачу

$$\Delta y + k^2 y = -\frac{\overline{dv}}{dk} r^{-\gamma}, \quad x \in \Omega, \quad (1.14)$$

$$y \Big|_{\Gamma} = 0. \quad (1.15)$$

Так как правая часть уравнения (1.15) принадлежит пространству $L_2(\Omega)$, то задача (1.14), (1.15) имеет единственное обобщенное решение $y(x, k) \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$. Применяя к задаче (1.14), (1.15) лемму 2, заключаем, что для функции y имеют место оценки

$$\int_{\Omega} |y|^2 \frac{dx}{r^3} \leq C(\omega^2 + 1) \int_{\Omega} \left| \frac{dv}{dk} \right|^2 r^{\gamma_1 - 2\gamma} dx, \quad (1.16)$$

$$\int_{\Omega} |\nabla y|^2 \frac{dx}{r^3} \leq C(\omega^2 + 1)^2 \int_{\Omega} \left| \frac{dv}{dk} \right|^2 r^{\gamma_1 - 2\gamma} dx, \quad (1.17)$$

$$-\infty < \omega < +\infty, \quad \mu > 0, \quad \gamma_1 = \gamma_1(n, \alpha_1, \alpha_m, \gamma_0).$$

Умножим уравнение (1.14) на y и проинтегрируем по области Ω с учетом того, что функции dv/dk и y принадлежат пространству $\mathring{W}_2^1(\Omega)$. Получим равенство

$$\int_{\Omega} \left| \frac{dv}{dk} \right|^2 \frac{dx}{r^{\gamma}} = 2k \int_{\Omega} v y dx. \quad (1.18)$$

Из уравнений (0.17) и (1.14) следует, что

$$\begin{aligned} & - \left(((x, \nabla y) + (n-2)y)h + (x, \nabla v) \frac{\overline{dv}}{dk} r^{-\gamma} \right) \\ & = ((x, \nabla y) + (n-2)y)(\Delta v + k^2 v) + (x, \nabla v)(\Delta y + k^2 y) \\ & = \operatorname{div}((x, \nabla y) \nabla v + (x, \nabla v) \nabla y - (\nabla v, \nabla y)x \\ & \quad + (n-2)y \nabla v + k^2 v y x) - 2k^2 v y. \end{aligned} \quad (1.19)$$

В силу леммы 1 при $\mu > 0$

$$\int_{\Omega} (|\nabla v|^2 + |v|^2) r dx < \infty, \quad (1.20)$$

$$\int_{\Omega} (|\nabla y|^2 + |y|^2) r dx < \infty. \quad (1.21)$$

Интегрируя соотношение (1.19) по области Ω с учетом граничных условий (0.18) и (1.15), получаем равенство

$$\begin{aligned} 2k \int_{\Omega} v y dx &= \frac{1}{k} \left(\int_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial \nu} \frac{\partial y}{\partial \nu}(\nu, x) ds \right. \\ & \quad \left. + \int_{\Omega} \left(((x, \nabla y) + (n-2)y)h + (x, \nabla v) \frac{\overline{dv}}{dk} r^{-\gamma} \right) dx \right) \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left| \frac{dv}{dk} \right|^2 \frac{dx}{r^{\gamma}} &= \frac{1}{k} \left(\int_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial \nu} \frac{\partial y}{\partial \nu}(\nu, x) ds \right. \\ & \quad \left. + \int_{\Omega} \left(((x, \nabla y) + (n-2)y)h + (x, \nabla v) \frac{\overline{dv}}{dk} r^{-\gamma} \right) dx \right). \end{aligned} \quad (1.22)$$

ЛЕММА 3. Пусть $0 < \alpha_1 < 1$. Тогда существуют постоянные $C^* > 0$, $p > 0$ и $0 < \beta < 1$ такие, что для всех областей $\Omega \in P_\varphi$, удовлетворяющих условию $C_1 < C^*$, при $\mu > 0$, $|\omega| \geq \sigma\mu$, $\sigma > 0$ для решения задачи (0.17), (0.18) справедлива оценка

$$\int_{\Gamma} \left| \frac{\partial v}{\partial \nu} \right|^2 |(\nu, x)| ds \leq C(|\omega|^p + 1)(|k|^{-2} + 1)(\mu^{-\beta} + 1) \int_{\Omega} |h|^2 r^\gamma dx, \quad (1.23)$$

$\gamma > \gamma_1$, где постоянная γ_1 зависит от n , α_1 и α_m , а постоянная C зависит от n , α_1 , α_m и σ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3. Пусть $z(x, k) = v(x, k)e^{-i\omega r}$, $k = \omega + i\mu$, $-\infty < \omega < +\infty$, $\mu > 0$, где $v(x, k)$ – решение задачи (0.17), (0.18). Функция z является решением краевой задачи

$$\Delta z + 2i\omega \left(z_r + \left(\frac{n-1}{2r} + \mu \right) z \right) - \mu^2 z = -he^{-i\omega r}, \quad x \in \Omega, \quad (1.24)$$

$$z|_{\Gamma} = 0. \quad (1.25)$$

В работе [14] доказано, что при всех $-\infty < \omega < +\infty$, $\mu > 0$ функция z удовлетворяет равенству

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial z}{\partial \nu} \right|^2 (\nu, x) ds &= \int_{\Omega} ((1 + 2\mu r)|\nabla z|^2 + 2\mu^3 r|z|^2) dx \\ &- \int_{\Omega} (\mu^2 |z|^2 - 2\mu \operatorname{Re}(\bar{z} z_r)) dx - \int_{\Omega} \operatorname{Re}((2r\bar{z}_r + (n-1 + 2\mu r)\bar{z})he^{i\omega r}) dx. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Поскольку область Ω принадлежит классу P_φ , существует число $R_0 > 0$ такое, что $(\nu, x) \geq 0$, $r \geq R_0$. Так как $|\partial z / \partial \nu|_{\Gamma} = |\partial v / \partial \nu|_{\Gamma}$, то из равенства (1.26) следует, что

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma \setminus \Gamma_{R_0}} \left| \frac{\partial z}{\partial \nu} \right|^2 (\nu, x) ds &= - \int_{\Gamma_{R_0}} \left| \frac{\partial z}{\partial \nu} \right|^2 (\nu, x) ds \\ &+ \int_{\Omega} ((1 + 2\mu r)|\nabla z|^2 + 2\mu^3 r|z|^2) dx - \int_{\Omega} (\mu^2 |z|^2 - 2\mu \operatorname{Re}(\bar{z} z_r)) dx \\ &- \int_{\Omega} \operatorname{Re}((2r\bar{z}_r + (n-1 + 2\mu r)\bar{z})he^{i\omega r}) dx \\ &\leq \int_{\Gamma_{R_0}} \left| \frac{\partial z}{\partial \nu} \right|^2 |(\nu, x)| ds + C \int_{\Omega} ((1 + \mu r)|\nabla z|^2 + \mu^3 r|z|^2) dx \\ &- \mu^2 (1 - 2\varepsilon) \int_{\Omega} |z|^2 dx + \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} \right) \int_{\Omega} |\nabla z|^2 dx \\ &+ \varepsilon \int_{\Omega} |z|^2 \frac{dx}{r^\gamma} + C(\varepsilon) \int_{\Omega} |h|^2 r^\gamma dx, \quad \gamma > 0, \quad \varepsilon > 0, \end{aligned}$$

откуда при $\gamma > 2$, $\varepsilon < 1/2$ с учетом доказанного в лемме 2 работы [15] неравенства (справедливого и для областей из класса P_φ)

$$\int_{\Omega} \frac{|z|^2 dx}{r^{\gamma+2\alpha_m}} \leq C \int_{\Omega} |\nabla z|^2 \frac{dx}{r^{\gamma}}, \quad -\infty < \gamma < \infty,$$

получаем оценку

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma \setminus \Gamma_{R_0}} \left| \frac{\partial z}{\partial \nu} \right|^2 |(\nu, x)| ds &\leq C \left(\int_{\Gamma_{R_0}} \left| \frac{\partial z}{\partial \nu} \right|^2 |(\nu, x)| ds \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Omega} ((1 + \mu r) |\nabla z|^2 + \mu^3 r |z|^2) dx + \int_{\Omega} |h|^2 r^{\gamma} dx \right), \quad \gamma > 2. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Оценим сначала поверхностный интеграл в правой части (1.27). Имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{R_0}} \left| \frac{\partial z}{\partial \nu} \right|^2 |(\nu, x)| ds &\leq C \int_{\Gamma_{R_0}} \left| \frac{\partial z}{\partial \nu} \right|^2 ds \leq C \|v\|_{W_2^2(\Omega_{R_0+1})}^2 \\ &\leq C (\|v\|_{L_2(\Omega_{R_0+2})}^2 + \|\Delta v\|_{L_2(\Omega_{R_0+2})}^2), \end{aligned}$$

откуда, используя оценку (1.11) и уравнение (0.17), получаем

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{R_0}} \left| \frac{\partial z}{\partial \nu} \right|^2 |(\nu, x)| ds &\leq C \left((\omega^2 + 1) \int_{\Omega} |h|^2 r^{\gamma} dx + (\omega^2 + 1)^3 \int_{\Omega} |h|^2 r^{\gamma} dx \right) \\ &\leq C (\omega^2 + 1)^3 \int_{\Omega} |h|^2 r^{\gamma} dx, \end{aligned} \quad (1.28)$$

$\gamma > 2, \quad \mu > 0, \quad |\omega| \geq \sigma \mu, \quad \sigma > 0.$

Далее, учитывая неравенство (0.12), имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla z|^2 dx &= \int_{\Omega} |\nabla (w e^{i\omega(\sqrt{\varphi}-r)})|^2 dx \\ &= \int_{\Omega} \left| e^{i\omega(\sqrt{\varphi}-r)} \nabla w + w e^{i\omega(\sqrt{\varphi}-r)} \left(\frac{\nabla \varphi}{2\sqrt{\varphi}} - \frac{x}{r} \right) \right|^2 dx \\ &\leq C \left(\int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx + \int_{\Omega} |w|^2 \left| \frac{\nabla \varphi}{2\sqrt{\varphi}} - \frac{x}{r} \right|^2 dx \right) \\ &\leq C \left(\int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx + \int_{\Omega} \frac{|w|^2 dx}{r^{2(1-\alpha_m)}} \right), \end{aligned} \quad (1.29)$$

$$\int_{\Omega} |\nabla z|^2 r dx \leq C \left(\int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx + \int_{\Omega} |w|^2 r^{2\alpha_m-1} dx \right). \quad (1.30)$$

Воспользуемся теперь оценкой (1.6) с $p = 1$. Получаем

$$\begin{aligned}
 \mu^3 \int_{\Omega} |z|^2 r \, dx &= \mu^3 \int_{\Omega} |w|^2 r \, dx \leq C \mu^3 \int_{\Omega} r \, dx \left| \int_0^{\infty} e^{i\omega t - \mu t} u \, dt \right|^2 \\
 &\leq C \mu^3 \int_{\Omega} r \, dx \int_0^{\infty} e^{-\mu t} \, dt \int_0^{\infty} e^{-\mu t} |u|^2 \, dt \\
 &\leq C \mu^2 \int_0^{\infty} e^{-\mu t} \, dt \int_{\Omega} |u|^2 r \, dx \leq C \mu^2 \int_0^{\infty} e^{-\mu t} \, dt \int_{\Omega} |h|^2 r \, dx \\
 &= C \int_0^{\infty} e^{-\tau} \tau \, d\tau \int_{\Omega} |h|^2 r \, dx = C \int_{\Omega} |h|^2 r \, dx.
 \end{aligned} \tag{1.31}$$

Объединяя неравенства (1.28)–(1.31), заключаем, что

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma \setminus \Gamma_{R_0}} \left| \frac{\partial z}{\partial \nu} \right|^2 |(\nu, x)| \, ds &\leq C \left(\int_{\Omega} |\nabla w|^2 (1 + \mu r) \, dx \right. \\
 &\quad \left. + \int_{\Omega} |w|^2 (1 + \mu r) \frac{dx}{r^{2(1-\alpha_m)}} + (\omega^2 + 1)^3 \int_{\Omega} |h|^2 r^{\gamma} \, dx \right), \\
 \gamma &> 2, \quad \mu > 0, \quad |\omega| \geq \sigma \mu, \quad \sigma > 0.
 \end{aligned} \tag{1.32}$$

Умножим уравнение (1.7) на

$$(\nabla \bar{w}, \nabla \varphi) + \left(\frac{\Delta \varphi}{2} - \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} + 2\mu\sqrt{\varphi} \right) \bar{w}$$

и проинтегрируем по Ω с учетом (1.20) и граничного условия (1.8). В результате получим равенство

$$\begin{aligned}
 &-\frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\nu, \nabla \varphi) \left| \frac{\partial w}{\partial \nu} \right|^2 \, ds + \int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^n \varphi_{x_j x_j} |w_{x_j}|^2 - \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} |\nabla w|^2 \right) \, dx \\
 &\quad + 2\mu \int_{\Omega} |\nabla w|^2 \sqrt{\varphi} \, dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \Delta \left(\frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} \right) |w|^2 \, dx \\
 &\quad + \omega^2 \int_{\Omega} \left(\left(1 - \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} \right) \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} - \frac{1}{2} \left(\nabla \varphi, \nabla \left(\frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} \right) \right) \right) |w|^2 \, dx \\
 &\quad - 2\omega^2 \mu \int_{\Omega} \sqrt{\varphi} \left(1 - \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} \right) |w|^2 \, dx - \mu^2 \int_{\Omega} \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} |w|^2 \, dx \\
 &\quad + 2\mu^3 \int_{\Omega} \sqrt{\varphi} |w|^2 \, dx + \mu \int_{\Omega} \operatorname{Re}(\bar{w}(\nabla w, \nabla \varphi)) \frac{dx}{\sqrt{\varphi}} \\
 &= \int_{\Omega} \operatorname{Re} \left(\left((\nabla \bar{w}, \nabla \varphi) + \left(\frac{\Delta \varphi}{2} - \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} + 2\mu\sqrt{\varphi} \right) \bar{w} \right) h e^{-i\omega\sqrt{\varphi}} \right) \, dx.
 \end{aligned}$$

В силу условия (0.11) имеем

$$\begin{aligned}
2\mu \int_{\Omega} |\nabla w|^2 \sqrt{\varphi} dx &\leq - \int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^n \varphi_{x_j x_j} |w_{x_j}|^2 - \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} |\nabla w|^2 \right) dx \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \Delta \left(\frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} \right) |w|^2 dx \\
&\quad - \omega^2 \int_{\Omega} \left(\left(1 - \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} \right) \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} - \frac{1}{2} \left(\nabla \varphi, \nabla \left(\frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} \right) \right) \right) |w|^2 dx \\
&\quad + 2\omega^2 \mu \int_{\Omega} \sqrt{\varphi} \left(1 - \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} \right) |w|^2 dx + \mu^2 \int_{\Omega} \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} |w|^2 dx \\
&\quad - \mu \int_{\Omega} \operatorname{Re}(\overline{w}(\nabla w, \nabla \varphi)) \frac{dx}{\sqrt{\varphi}} \\
&\quad + \int_{\Omega} \operatorname{Re} \left(\left((\nabla \overline{w}, \nabla \varphi) + \left(\frac{\Delta \varphi}{2} - \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} + 2\mu\sqrt{\varphi} \right) \overline{w} \right) h e^{-i\omega\sqrt{\varphi}} \right) dx.
\end{aligned} \tag{1.33}$$

Оценим интегралы в правой части неравенства (1.33). Учитывая (1.9), заключаем, что при $-\infty < \omega < \infty$, $\mu > 0$ справедливы оценки

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^n \varphi_{x_j x_j} |w_{x_j}|^2 - \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} |\nabla w|^2 \right) dx \right| \\
&\leq C \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx \leq C \left(\int_{\Omega} |\nabla w|^2 r^{1-\gamma} dx \right)^{\beta} \left(\int_{\Omega} |\nabla w|^2 \frac{dx}{r^{\beta(1-\gamma)/(1-\beta)}} \right)^{1-\beta} \\
&\leq C \left(\int_{\Omega} |\nabla w|^2 r^{1-\gamma} dx \right)^{\beta} \left(\int_{\Omega} |\nabla w|^2 \frac{dx}{r^{\gamma}} \right)^{1-\beta} \\
&\leq C \left(\int_{\Omega} |\nabla w|^2 r dx \right)^{\beta} \left(\int_{\Omega} |\nabla w|^2 \frac{dx}{r^{\gamma}} \right)^{1-\beta} \\
&\leq C \left(\frac{\omega^2 + 1}{\mu} \int_{\Omega} |h|^2 r^{\gamma_1} dx \right)^{\beta} \left((\omega^2 + 1) \int_{\Omega} |h|^2 r^{\gamma_1} dx \right)^{1-\beta} \\
&\leq \frac{C(\omega^2 + 1)}{\mu^{\beta}} \int_{\Omega} |h|^2 r^{\gamma_1} dx,
\end{aligned} \tag{1.34}$$

$$\gamma_0 < \gamma < 1, \quad \gamma_0 = \max\{1 - 2\alpha_1, 2\alpha_m - 1\}, \quad \gamma < \beta < 1,$$

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{2} \int_{\Omega} \Delta \left(\frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} \right) |w|^2 dx \right| \leq \int_{\Omega} |w|^2 \frac{dx}{r^2} \leq C \left(\int_{\Omega} |w|^2 dx \right)^{\beta} \left(\int_{\Omega} |w|^2 \frac{dx}{r^{2/(1-\beta)}} \right)^{1-\beta} \\
&\leq \frac{C}{\mu^{2\beta}} \left(\int_{\Omega} |h|^2 r^{\gamma_1} dx \right)^{\beta} \left(\int_{\Omega} |w|^2 \frac{dx}{r^{2/(1-\beta)}} \right)^{1-\beta} \\
&\leq \frac{C}{\mu^{2\beta}} \left(\int_{\Omega} |h|^2 r^{\gamma_1} dx \right)^{\beta} \left(\int_{\Omega} |w|^2 \frac{dx}{r^{\gamma+2\alpha_m}} \right)^{1-\beta} \\
&\leq \frac{C(\omega^2 + 1)^{1-\beta}}{\mu^{2\beta}} \int_{\Omega} |h|^2 r^{\gamma_1} dx, \\
&\gamma_0 < \gamma < 1, \quad \frac{\gamma + 2\alpha_m - 2}{\gamma + 2\alpha_m} < \beta < \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\left| \frac{1}{2} \int_{\Omega} \Delta \left(\frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} \right) |w|^2 dx \right| \leq \frac{C(\omega^2 + 1)^{1-\beta/2}}{\mu^\beta} \int_{\Omega} |h|^2 r^{\gamma_1} dx, \quad (1.35)$$

$$\gamma_0 < \gamma < 1, \quad \frac{2\gamma + 4\alpha_m - 4}{\gamma + 2\alpha_m} < \beta < 1.$$

Далее, в силу условия (0.12) имеем

$$\left| \omega^2 \int_{\Omega} \left(\left(1 - \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} \right) \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} - \frac{1}{2} \left(\nabla \varphi, \nabla \left(\frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} \right) \right) \right) |w|^2 dx \right|$$

$$\leq C\omega^2 \int_{\Omega} |w|^2 \frac{dx}{r^{2(1-\alpha_m)}} \leq C\omega^2 \left(\int_{\Omega} |w|^2 dx \right)^\beta \left(\int_{\Omega} |w|^2 \frac{dx}{r^{2(1-\alpha_m)/(1-\beta)}} \right)^{1-\beta}. \quad (1.36)$$

Из равенства (1.4) и оценки (1.10) следует, что

$$\int_{\Omega} |w|^2 dx \leq \frac{C(\omega^2 + 1)}{|\omega|\mu} \int_{\Omega} |h|^2 r^{\gamma_1} dx. \quad (1.37)$$

Учитывая неравенства (1.36) и (1.37), заключаем, что

$$\left| \omega^2 \int_{\Omega} \left(\left(1 - \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} \right) \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} - \frac{1}{2} \left(\nabla \varphi, \nabla \left(\frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} \right) \right) \right) |w|^2 dx \right|$$

$$\leq \frac{C|\omega|^{2-\beta}(\omega^2 + 1)^\beta}{\mu^\beta} \left(\int_{\Omega} |h|^2 r^{\gamma_1} dx \right)^\beta \left(\int_{\Omega} |w|^2 \frac{dx}{r^{\gamma+2\alpha_m}} \right)^{1-\beta}$$

$$\leq \frac{C|\omega|^{2-\beta}(\omega^2 + 1)^\beta}{\mu^\beta} \int_{\Omega} |h|^2 r^{\gamma_1} dx, \quad (1.38)$$

$$\gamma_0 < \gamma < 1, \quad \frac{1 + 2\alpha_m}{3} < \beta < 1.$$

Умножим уравнение (1.7) на $\overline{w}\varphi^\delta$, проинтегрируем по области Ω с учетом граничного условия (1.8) и возьмем мнимую часть. Получим равенство

$$\frac{\omega}{2} \int_{\Omega} \left(\delta \frac{|\nabla \varphi|^2}{\varphi} - 4\mu\sqrt{\varphi} \right) \varphi^{\delta-1/2} dx$$

$$= \int_{\Omega} \operatorname{Im} \left(\frac{\delta \overline{w}(\nabla w, \nabla \varphi)}{\varphi} - h\overline{w}e^{-i\omega\sqrt{\varphi}} \right) \varphi^\delta dx. \quad (1.39)$$

Из (1.39) с $\delta = 1/2$ следует неравенство

$$|\omega| \int_{\Omega} (1 + \mu r) |w|^2 dx \leq C \int_{\Omega} \left(\varepsilon |w|^2 + \frac{|\nabla w|^2}{\varepsilon} + \frac{|w|^2}{r^\gamma} + |h|^2 r^\gamma \right) dx, \quad (1.40)$$

$\gamma > \gamma_1$, с произвольным $\varepsilon > 0$. Полагая в (1.40) $\varepsilon = |\omega|/(2C)$ и учитывая оценки (1.10) и (1.34), заключаем, что

$$|\omega|\mu \int_{\Omega} |w|^2 r dx \leq C(\omega^2 + 1) \left(\frac{1}{|\omega|\mu^\beta} + 1 \right) \int_{\Omega} |h|^2 r^{\gamma_1} dx,$$

т.е.

$$\begin{aligned} \omega^2 \mu \int_{\Omega} |w|^2 r \, dx &\leq C(\omega^2 + 1) \left(\frac{1}{\mu^\beta} + |\omega| \right) \int_{\Omega} |h|^2 r^{\gamma_1} \, dx, \\ -\infty < \omega < \infty, \quad \mu > 0. \end{aligned} \quad (1.41)$$

Объединяя неравенства (0.12), (1.37) и (1.41), получаем

$$\begin{aligned} \left| 2\omega^2 \mu \int_{\Omega} \left(1 - \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} \right) \sqrt{\varphi} |w|^2 \, dx \right| &\leq C \omega^2 \mu \int_{\Omega} |w|^2 r^{2\alpha_m - 1} \, dx \\ &\leq C \left(\omega^2 \mu \int_{\Omega} |w|^2 r \, dx \right)^\beta \left(\omega^2 \mu \int_{\Omega} |w|^2 r^{(2\alpha_m - 1 - \beta)/(1 - \beta)} \, dx \right)^{1 - \beta} \\ &\leq C \left(\omega^2 \mu \int_{\Omega} |w|^2 r \, dx \right)^\beta \left(\omega^2 \mu \int_{\Omega} |w|^2 \, dx \right)^{1 - \beta} \\ &\leq C(\omega^2 + 1) |\omega|^{1 - \beta} \left(\frac{1}{\mu^\beta} + |\omega| \right)^\beta \int_{\Omega} |h|^2 r^{\gamma_1} \, dx, \\ \max \left\{ \frac{1}{2}, 2\alpha_m - 1 \right\} &< \beta < 1, \quad -\infty < \omega < \infty, \quad \mu > 0. \end{aligned} \quad (1.42)$$

В силу оценки (1.6) справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \mu^2 \int_{\Omega} \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} |w|^2 \, dx &\leq C \mu^2 \int_{\Omega} |w|^2 \, dx \\ &= C \mu^2 \int_{\Omega} |v|^2 \, dx = C \mu^2 \int_{\Omega} dx \left| \int_0^\infty e^{(i\omega - \mu)t} u(t, x) \, dt \right|^2 \\ &\leq C \mu^2 \int_{\Omega} dx \int_0^\infty e^{-\mu t} u^2(t, x) \, dt \int_0^\infty e^{-\mu t} \, dt \leq C \int_{\Omega} |h|^2 r^{\gamma_1} \, dx, \\ \mu \left| \int_{\Omega} \operatorname{Re}(\overline{w}(\nabla w, \nabla \varphi)) \frac{dx}{\sqrt{\varphi}} \right| &\leq C \left(\mu^2 \int_{\Omega} |w|^2 \, dx + \int_{\Omega} |\nabla w|^2 \, dx \right) \\ &\leq C \left(\mu^2 \int_{\Omega} |h|^2 r^{\gamma_1} \, dx + \frac{\omega^2 + 1}{\mu^\beta} \int_{\Omega} |h|^2 r^{\gamma_1} \, dx \right) \\ &\leq C(\omega^2 + 1)(\mu^{-\beta} + 1) \int_{\Omega} |h|^2 r^{\gamma_1} \, dx. \end{aligned} \quad (1.43)$$

Кроме того, справедливо

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \operatorname{Re} \left(\left((\nabla \overline{w}, \nabla \varphi) + \left(\frac{\Delta \varphi}{2} - \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} + 2\mu\sqrt{\varphi} \right) \overline{w} \right) h e^{-i\omega\sqrt{\varphi}} \right) dx \right| \\ \leq C \left(\int_{\Omega} |\nabla w| |h| r \, dx + \int_{\Omega} |w| |h| \, dx + \mu \int_{\Omega} |w| |h| r \, dx \right) \\ \leq C \left(\int_{\Omega} \frac{|\nabla w|^2 \, dx}{r^\gamma} + \int_{\Omega} |h|^2 r^{\gamma+2} \, dx + \int_{\Omega} \frac{|w|^2 \, dx}{r^\gamma} \right. \\ \left. + \int_{\Omega} |h|^2 r^\gamma \, dx + \mu^2 \int_{\Omega} |w|^2 \, dx + \int_{\Omega} |h|^2 r^\gamma \, dx \right) \\ \leq C(\omega^2 + 1) \int_{\Omega} |h|^2 r^\gamma \, dx, \quad \gamma > \gamma_1. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Используя неравенства (1.33)–(1.35), (1.36) и (1.43)–(1.45), получаем

$$\begin{aligned}
\mu \int_{\Omega} |\nabla w|^2 r \, dx &\leq C \int_{\Omega} |\nabla w|^2 \sqrt{\varphi} \, dx \\
&\leq C \left(\frac{\omega^2 + 1}{\mu^\beta} + \frac{(\omega^2 + 1)^{1-\beta/2}}{\mu^\beta} + \frac{|\omega|^{2-\beta}(\omega^2 + 1)^\beta}{\mu^\beta} \right. \\
&\quad \left. + (\omega^2 + 1)|\omega|^{1-\beta} \left(\frac{1}{\mu^\beta} + |\omega| \right)^\beta + 1 + \frac{\omega^2 + 1}{\mu^\beta} \right) \int_{\Omega} |h|^2 r^\gamma \, dx \\
&\leq C(|\omega|^p + 1)(\mu^{-\beta} + 1) \int_{\Omega} |h|^2 r^\gamma \, dx, \\
\gamma &> \gamma_1, \quad 0 < \beta < 1, \quad p > 0, \quad -\infty < \omega < \infty, \quad \mu > 0.
\end{aligned} \tag{1.46}$$

Объединяя оценки (1.32), (1.34), (1.36), (1.42) и (1.46), получаем

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma \setminus \Gamma_{R_0}} \left| \frac{\partial v}{\partial \nu} \right|^2 |(\nu, x)| \, ds &\leq C \left((\omega^2 + 1)^3 + \frac{\omega^2 + 1}{\mu^\beta} + \frac{|\omega|^p + 1}{\mu^\beta} \right. \\
&\quad \left. + \frac{(\omega^2 + 1)^\beta}{\mu^\beta |\omega|^\beta} + \frac{\omega^2 + 1}{|\omega|^{1+\beta}} + \left(\frac{1}{\mu^\beta} + |\omega| \right)^\beta \right) \int_{\Omega} |h|^2 r^\gamma \, dx \\
&\leq C(|\omega|^p + 1)(\omega^{-2} + 1)(\mu^{-\beta} + 1) \int_{\Omega} |h|^2 r^\gamma \, dx, \\
\gamma &> \gamma_1, \quad 0 < \beta < 1, \quad p > 0, \quad 0 < |\omega| < \infty, \quad \mu > 0.
\end{aligned} \tag{1.47}$$

В силу соотношений (1.28) и (1.47) имеем

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} \left| \frac{\partial v}{\partial \nu} \right|^2 |(\nu, x)| \, ds &\leq (|\omega|^p + 1)(\omega^{-2} + 1)(\mu^{-\beta} + 1) \int_{\Omega} |h|^2 r^\gamma \, dx, \\
\gamma &> \gamma_1, \quad 0 < \beta < 1, \quad p > 0, \quad 0 < |\omega| < \infty, \quad \mu > 0.
\end{aligned} \tag{1.48}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} \left| \frac{\partial v}{\partial \nu} \right|^2 |(\nu, x)| \, ds &\leq C(|\omega|^p + 1)(|k|^{-2} + 1)(\mu^{-\beta} + 1) \int_{\Omega} |h|^2 r^\gamma \, dx, \\
\gamma &> \gamma_1, \quad 0 < \beta < 1, \quad p > 0, \quad \mu > 0, \quad |\omega| \geq \sigma \mu, \quad \sigma > 0.
\end{aligned}$$

Лемма 3 доказана.

Для доказательства неравенства (0.21) теперь воспользуемся соотношением (1.22). Имеем

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \left| \frac{dv}{dk} \right|^2 \frac{dx}{r^\gamma} &\leq \frac{C}{|k|} \left(\left| \int_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial \nu} \frac{\partial y}{\partial \nu}(\nu, x) \, ds \right| + \int_{\Omega} |\nabla y| |h| r \, dx \right. \\
&\quad \left. + \int_{\Omega} |y| |h| \, dx + \int_{\Omega} |\nabla v| \left| \frac{dv}{dk} \right| \frac{dx}{r^{\gamma-1}} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{C}{|k|} \left(\left(\int_{\Gamma} \left| \frac{\partial v}{\partial \nu} \right|^2 |(\nu, x)| ds \right)^{1/2} \left(\int_{\Gamma} \left| \frac{\partial y}{\partial \nu} \right|^2 |(\nu, x)| ds \right)^{1/2} \right. \\
&\quad + \left(\int_{\Omega} \frac{|\nabla y|^2 dx}{r^{\gamma-2}} \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |h|^2 r^{\gamma} dx \right)^{1/2} \\
&\quad + \left(\int_{\Omega} \frac{|y|^2 dx}{r^{\gamma}} \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |h|^2 r^{\gamma} dx \right)^{1/2} \\
&\quad + \left(\int_{\Omega} \frac{|\nabla v|^2 dx}{r^{\gamma+2}} \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} \left| \frac{dv}{dk} \right|^2 \frac{dx}{r^{\gamma}} \right)^{1/2} \Big) \\
&\leq \frac{C}{|k|} \left((|\omega|^p + 1)(|k|^{-2} + 1)(\mu^{-\beta} + 1) \left(\int_{\Omega} |h|^2 r^{\gamma} dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} \left| \frac{dv}{dk} \right|^2 \frac{dx}{r^{\gamma}} \right)^{1/2} \right. \\
&\quad + (\omega^2 + 1) \left(\int_{\Omega} \left| \frac{dv}{dk} \right|^2 \frac{dx}{r^{\gamma}} \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |h|^2 r^{\gamma} dx \right)^{1/2} \\
&\quad + (\omega^2 + 1)^{1/2} \left(\int_{\Omega} \left| \frac{dv}{dk} \right|^2 \frac{dx}{r^{\gamma}} \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |h|^2 r^{\gamma} dx \right)^{1/2} \\
&\quad + (\omega^2 + 1) \left(\int_{\Omega} |h|^2 r^{\gamma} dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} \left| \frac{dv}{dk} \right|^2 \frac{dx}{r^{\gamma}} \right)^{1/2} \Big) \\
&\leq C(|\omega|^p + 1)(|k|^{-3} + 1)(\mu^{-\beta} + 1) \left(\int_{\Omega} \left| \frac{dv}{dk} \right|^2 \frac{dx}{r^{\gamma}} \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |h|^2 r^{\gamma} dx \right)^{1/2}, \\
&\quad \gamma > \gamma_1, \quad 0 < \beta < 1, \quad p > 0, \quad \mu > 0, \quad |\omega| \geq \sigma\mu, \quad \sigma > 0.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\int_{\Omega} \left| \frac{dv}{dk} \right|^2 \frac{dx}{r^{\gamma}} \leq C(|\omega|^p + 1)(|k|^{-3} + 1)(\mu^{-\beta} + 1) \left(\int_{\Omega} \left| \frac{dv}{dk} \right|^2 \frac{dx}{r^{\gamma}} \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |h|^2 r^{\gamma} dx \right)^{1/2},$$

откуда

$$\int_{\Omega} \left| \frac{dv}{dk} \right|^2 \frac{dx}{r^{\gamma}} \leq C(|\omega|^p + 1)^2(|k|^{-3} + 1)^2(\mu^{-\beta} + 1)^2 \int_{\Omega} |h|^2 r^{\gamma} dx, \quad (1.49)$$

$\gamma > \gamma_1, \quad 0 < \beta < 1, \quad p > 0, \quad \mu > 0, \quad |\omega| \geq \sigma\mu, \quad \sigma > 0.$

Оценим теперь интеграл $\int_{\Omega} (|dv/dk|^2/r^{\gamma}) dx$ в области $\mu > 0, |\omega| \leq \sigma\mu, \sigma < 1$. Умножая уравнение (1.12) на $\overline{dv/dk}$ и интегрируя по области Ω с учетом граничного условия (1.13) и принадлежности функций v и dv/dk пространству $\dot{W}_2^1(\Omega)$, получаем равенство

$$\int_{\Omega} \left(\left| \nabla \frac{dv}{dk} \right|^2 + (\mu^2 - \omega^2) \left| \frac{dv}{dk} \right|^2 \right) dx = 2k \int_{\Omega} v \overline{\frac{dv}{dk}} dx. \quad (1.50)$$

Из (1.50) следует, что

$$\begin{aligned}
(1 - \sigma^2)\mu^2 \int_{\Omega} \left| \frac{dv}{dk} \right|^2 dx &\leq \varepsilon \mu^2 \int_{\Omega} \left| \frac{dv}{dk} \right|^2 dx + \frac{C}{\varepsilon} \int_{\Omega} |v|^2 dx \\
&\leq \varepsilon \mu^2 \int_{\Omega} \left| \frac{dv}{dk} \right|^2 dx + \frac{C}{\varepsilon \mu^2} \int_{\Omega} |v|^2 dx
\end{aligned}$$

и поэтому

$$\int_{\Omega} \left| \frac{dv}{dk} \right|^2 dx \leq \frac{C}{|k|^4} \int_{\Omega} |h|^2 r^{\gamma} dx, \quad (1.51)$$

$$\mu > 0, \quad |\omega| \leq \sigma \mu, \quad \sigma < 1.$$

Объединяя неравенства (1.49) и (1.51), заключаем, что существуют постоянные $C^* > 0$, $p > 0$ и $0 < \beta < 1$ такие, что при $-\infty < \omega < +\infty$, $\mu > 0$ имеет место оценка

$$\int_{\Omega} \left| \frac{dv}{dk} \right|^2 \frac{dx}{r^{\gamma}} \leq C(|\omega|^p + 1)(|k|^{-p} + 1)(\mu^{-\beta} + 1)^2 \int_{\Omega} |h|^2 r^{\gamma} dx,$$

$\gamma > \gamma_1$, где постоянная γ_1 зависит от n , α_1 и α_m .

Теорема 2 полностью доказана.

§ 2. Поведение решений первой краевой задачи для уравнения Гельмгольца при больших значениях параметра

Пусть $u(t, x)$ – решение задачи (0.1)–(0.3). При $\text{Im } k > 0$ имеем

$$\int_0^{\infty} e^{ikt} u(t, x) dt = v(x, k), \quad x \in \Omega,$$

где функция v является решением задачи

$$\Delta v + k^2 v = -h, \quad h = (g - ikf), \quad x \in \Omega, \quad (2.1)$$

$$v|_{\Gamma} = 0. \quad (2.2)$$

В силу неравенства (0.20) для всех $R > 0$ справедлива оценка

$$\|v(x, k)\|_{L_2(\Omega_R)}^2 \leq C(\omega^2 + 1)(\|r^{\gamma/2} g\|_{L_2(\Omega)}^2 + |k|^2 \|r^{\gamma/2} f\|_{L_2(\Omega)}^2), \quad (2.3)$$

$$-\infty < \omega < \infty, \quad \mu > 0, \quad \gamma > \gamma_1.$$

Уточним оценку (2.3) для больших значений $|k|$.

Пусть $m = 1, 2, \dots$. Из уравнения (2.1) следует равенство

$$v = \frac{1}{k^{2m}} ((-\Delta)^{m-1} h + k^2 (-\Delta)^{m-2} h + \dots + k^{2(m-1)} h + (-\Delta)^m v). \quad (2.4)$$

Из (2.1), (2.2) вытекает, что функция $(-\Delta)^m v$ является решением задачи

$$\Delta (-\Delta)^m v + k^2 (-\Delta)^m v = -(-\Delta)^m h, \quad x \in \Omega,$$

$$(-\Delta)^m v|_{\Gamma} = 0,$$

а потому в силу неравенства (0.20) для всех $R > 0$

$$\|(-\Delta)^m v\|_{L_2(\Omega_R)}^2 \leq C(\omega^2 + 1)(\|r^{\gamma/2} \Delta^m g\|_{L_2(\Omega)}^2 + |k|^2 \|r^{\gamma/2} \Delta^m f\|_{L_2(\Omega)}^2)$$

$$\leq C(\omega^2 + 1)(|k|^2 + 1), \quad (2.5)$$

$$-\infty < \omega < \infty, \quad \mu > 0.$$

Используя равенство (2.4) и оценку (2.5), имеем

$$\begin{aligned}
\|v\|_{L_2(\Omega_R)}^2 &\leq \frac{C}{|k|^{4m}} (\|\Delta^{m-1}h\|_{L_2(\Omega_R)}^2 + |k|^4 \|\Delta^{m-2}h\|_{L_2(\Omega_R)}^2 \\
&\quad + \dots + |k|^{4(m-1)} \|h\|_{L_2(\Omega_R)}^2 + \|(-\Delta)^m v(x, k)\|_{L_2(\Omega_R)}^2) \\
&\leq \frac{C}{|k|^{4m}} (1 + |k|^2)(1 + |k|^4 + \dots + |k|^{4(m-1)} + \omega^2) \\
&\leq \frac{C}{|k|^{4m}} (|k|^{4m-2} + 1).
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Оценивая теперь функцию v в области $K_N = \{\operatorname{Im} k > 0, |k| < N\}$, $N > 0$, с помощью неравенства (2.3), а в области $\{\operatorname{Im} k > 0, |k| > N\}$ — с помощью неравенства (2.6), получаем оценку

$$\|v\|_{L_2(\Omega_R)}^2 \leq \frac{C}{|k|^2 + 1}, \quad \operatorname{Im} k > 0, \tag{2.7}$$

где постоянная C зависит от R , f и g .

Далее, функция dv/dk является решением задачи

$$\Delta \frac{dv}{dk} + k^2 \frac{dv}{dk} = if - 2kv, \quad x \in \Omega, \tag{2.8}$$

$$\left. \frac{dv}{dk} \right|_{\Gamma} = 0, \tag{2.9}$$

и в силу оценки (0.21) при любом $R > 0$ удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{dv}{dk} \right\|_{L_2(\Omega_R)}^2 &\leq C((\omega^2 + 1) \|fr^{\gamma/2}\|_{L_2(\Omega)}^2 \\
&\quad + (|\omega|^p + 1)(|k|^{-p} + 1)(\mu^{-\beta} + 1)(|k|^2 \|fr^{\gamma/2}\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|gr^{\gamma/2}\|_{L_2(\Omega)}^2)),
\end{aligned} \tag{2.10}$$

$$-\infty < \omega < \infty, \quad \mu > 0, \quad \gamma > \gamma_1.$$

Следовательно, при $k \in \{\operatorname{Im} k > 0, |k| > N\}$, $N > 0$, имеет место оценка

$$\left\| \frac{dv}{dk} \right\|_{L_2(\Omega_R)}^2 \leq C(|\omega|^p + 1)(|k|^2 + 1)(\mu^{-\beta} + 1)^2. \tag{2.11}$$

Уточним оценку (2.11) для больших значений $|k|$. Из уравнения (2.8) следуют равенства

$$\begin{aligned}
\frac{dv}{dk} &= \frac{1}{k^{2m}} \left((-\Delta)^{m-1}(2kv - if) + k^2(-\Delta)^{m-2}(2kv - if) \right. \\
&\quad \left. + \dots + k^{2(m-1)}(2kv - if) + (-\Delta)^m \frac{dv}{dk} \right) \\
&= \frac{1}{k^{2m}} \left(2k((-\Delta)^{m-1}v + k^2(-\Delta)^{m-2}v + \dots + k^{2(m-1)}v) \right. \\
&\quad \left. - i((-\Delta)^{m-1}f + k^2(-\Delta)^{m-2}f + \dots + k^{2(m-1)}f) + \frac{d}{dk}(-\Delta)^m v \right).
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Функция $\frac{d}{dk}(-\Delta)^m v$ является решением краевой задачи

$$\Delta \frac{d}{dk}(-\Delta)^m v + k^2 \frac{d}{dk}(-\Delta)^m v = i(-\Delta)^m f - 2k(-\Delta)^m v, \quad x \in \Omega, \quad (2.13)$$

$$\frac{d}{dk}(-\Delta)^m v|_{\Gamma} = 0. \quad (2.14)$$

Поэтому в силу оценки (2.11) при $k \in \{\operatorname{Im} k > 0, |k| > N\}$, $N > 0$,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{d}{dk}(-\Delta)^m v \right\|_{L_2(\Omega_R)}^2 &\leq C((\omega^2 + 1)\|(-\Delta)^m f r^{\gamma/2}\|_{L_2(\Omega)}^2 \\ &+ (|\omega|^p + 1)(|k|^{-p} + 1)(\mu^{-\beta} + 1)^2(|k|^2\|\Delta^m f r^{\gamma/2}\|_{L_2(\Omega)}^2 \\ &+ \|\Delta^m g r^{\gamma/2}\|_{L_2(\Omega)}^2)) \leq C(|\omega|^p + 1)(|k|^2 + 1)(\mu^{-\beta} + 1)^2. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Используя равенство (2.12) и оценки (2.7) и (2.15), заключаем, что при $m > p/4 + 1$

$$\begin{aligned} \left\| \frac{dv}{dk} \right\|_{L_2(\Omega_R)}^2 &\leq \frac{C}{|k|^{4m}} \left(|k|^2(\|\Delta^{m-1} v\|_{L_2(\Omega_R)}^2 + |k|^4\|\Delta^{m-2} v\|_{L_2(\Omega_R)}^2 \right. \\ &+ \dots + |k|^{4(m-1)}\|v\|_{L_2(\Omega_R)}^2) + (\|\Delta^{m-1} f\|_{L_2(\Omega_R)}^2 + |k|^4\|\Delta^{m-2} f\|_{L_2(\Omega_R)}^2 \\ &+ \dots + |k|^{4(m-1)}\|f\|_{L_2(\Omega_R)}^2) + \left\| \frac{d}{dk}(-\Delta)^m v \right\|_{L_2(\Omega_R)}^2 \Big) \\ &\leq \frac{C}{|k|^{4m}} \left(\frac{|k|^2(|k|^{4m-2} + 1)}{|k|^2 + 1} + |k|^{4(m-1)} + 1 + (|\omega|^p + 1)(|k|^2 + 1)(\mu^{-\beta} + 1)^2 \right) \\ &\leq C \left(\frac{1}{|k|^{4m}} + \frac{(\mu^{-\beta} + 1)^2}{|k|^{4m-p-2}} \right) \leq C \frac{(\mu^{-\beta} + 1)^2}{|k|^2 + 1}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

$\operatorname{Im} k > 0, \quad |k| > N.$

Оценивая теперь функцию $v(x, k)$ в области $K_N = \{\operatorname{Im} k > 0, |k| < N\}$, $N > 0$, с помощью неравенства (2.10), а в области $\{\operatorname{Im} k > 0, |k| > N\}$ — с помощью неравенства (2.16), получаем оценку

$$\left\| \frac{dv}{dk} \right\|_{L_2(\Omega_R)}^2 \leq \frac{C(|k|^{-p} + 1)(\mu^{-\beta} + 1)^2}{|k|^2 + 1}, \quad \operatorname{Im} k > 0, \quad (2.17)$$

где постоянная C зависит от R, f и g .

§ 3. Поведение решений первой краевой задачи для уравнения Гельмгольца при малых значениях параметра

Уточним оценку (2.17) для малых значений $|k|$. Для этого нам потребуются некоторые утверждения о разрешимости задачи Дирихле для уравнения Пуассона в неограниченных областях.

Рассмотрим задачу

$$\Delta v = -h(x), \quad x \in \Omega, \quad (3.1)$$

$$v|_{\Gamma} = 0, \quad (3.2)$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — неограниченная область, замыкание которой не содержит начало координат.

Определим пространство $L_{2,\gamma}(\Omega)$, $-\infty < \gamma < +\infty$, как пополнение множества функций из пространства $C^\infty(\Omega)$, имеющих ограниченный носитель, по норме

$$\|v\|_{L_{2,\gamma}(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |v|^2 r^\gamma dx \right)^{1/2}.$$

Определим пространство $H_{\gamma_1, \gamma_2}^1(\Omega)$, $-\infty < \gamma_1 < +\infty$, $-\infty < \gamma_2 < +\infty$, как пополнение множества функций из пространства $C^\infty(\Omega)$, имеющих ограниченный носитель, по норме

$$\|v\|_{H_{\gamma_1, \gamma_2}^1(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} (|\nabla v|^2 r^{\gamma_1} + |v|^2 r^{\gamma_2}) dx \right)^{1/2}.$$

Подпространство $H_{\gamma_1, \gamma_2}^1(\Omega)$, содержащее функции, след которых на поверхности Γ равен нулю, обозначим через $\mathring{H}_{\gamma_1, \gamma_2}^1(\Omega)$.

Решением задачи (3.1), (3.2) из пространства $\mathring{H}_{\gamma_1, \gamma_2}^1(\Omega)$ будем называть функцию $v(x) \in \mathring{H}_{\gamma_1, \gamma_2}^1(\Omega)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_{\Omega} (\nabla v, \nabla z) dx = \int_{\Omega} h z dx \quad (3.3)$$

для любой функции $z(x) \in W_2^1(\Omega)$ такой, что $z|_{\Gamma} = 0$, и имеющей ограниченный носитель.

В соответствии с определением, данным в работах [13], [19], полагаем $\Lambda_\Omega = \liminf_{\rho \rightarrow \infty} |\lambda_\rho|$, где λ_ρ — наименьшее по модулю собственное значение оператора Лапласа–Бельтрами в Σ_ρ с нулевыми данными Дирихле на $\partial\Sigma_\rho$ (Σ_ρ — множество точек x , лежащих на единичной сфере, таких, что $\rho x \in S_\rho$, $S_\rho = \Omega \cap \{r = \rho\}$, $\rho > 0$).

ЛЕММА 4. Пусть $\gamma > 0$. Тогда для любой области Ω , удовлетворяющей условию $\Lambda_\Omega > \gamma(\gamma+n-2)/2$, при всех $h \in L_{2,\gamma+2}(\Omega)$ существует единственное решение $v \in \mathring{H}_{\gamma, \gamma-2}^1(\Omega)$ задачи (3.1), (3.2) и справедлива оценка

$$\|v\|_{H_{\gamma, \gamma-2}^1(\Omega)} \leq C \|h\|_{L_{2,\gamma+2}(\Omega)}, \quad (3.4)$$

где постоянная C зависит от n и γ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4. Единственность решения задачи (3.1), (3.2) в пространстве $\mathring{H}_{\gamma, \gamma-2}^1(\Omega)$ при $\gamma > 0$ следует из результатов работы [14], где доказано, что гармоническая в Ω функция $v \in W_2^1(\Omega_R)$, $R > 0$, равная нулю на Γ и удовлетворяющая условию

$$\int_{\Omega} \frac{|v|^2 dx}{r^n \ln^{2q} r} < \infty \quad (3.5)$$

($q = 1$ при $n = 2$ и $q = 0$ при $n \geq 3$), тождественно равна нулю.

Для доказательства существования решения задачи (3.1), (3.2) построим его как предел решений в ограниченных областях. Обозначим через $v_R(x)$ обобщенное (из $\mathring{W}_2^1(\Omega_R)$) решение задачи

$$\Delta v_R = -h, \quad x \in \Omega_R, \quad (3.6)$$

$$v_R|_{\Gamma_R \cup S_R} = 0, \quad \Gamma_R = \Gamma \cap \{r < R\}. \quad (3.7)$$

Умножим уравнение (3.6) на $\bar{v}_R r^\gamma$, проинтегрируем по области Ω_R и возьмем вещественную часть. Получим равенство

$$\int_{\Omega_R} |\nabla v_R|^2 r^\gamma dx - \frac{\gamma(\gamma + n - 2)}{2} \int_{\Omega_R} |v_R|^2 r^{\gamma-2} dx = \operatorname{Re} \left(\int_{\Omega_R} h \bar{v}_R r^\gamma dx \right). \quad (3.8)$$

Преобразуем левую часть соотношения (3.8) к виду

$$\begin{aligned} & \varepsilon_1 \int_{\Omega_R} |\nabla v_R|^2 r^\gamma dx + (1 - \varepsilon_1) \int_{\Omega_R} \left| \frac{\partial v_R}{\partial r} \right|^2 r^\gamma dx \\ & + (1 - \varepsilon_1) \int_{\Omega_R} |\nabla_{\Theta} v_R|^2 r^{\gamma-2} dx - \frac{\gamma(\gamma + n - 2)}{2} \int_{\Omega_R} |v_R|^2 r^{\gamma-2} dx \\ & = \operatorname{Re} \left(\int_{\Omega_R} h \bar{v}_R r^\gamma dx \right), \\ & 0 < \varepsilon_1 < 1, \quad \frac{1}{r^2} |\nabla_{\Theta} z|^2 = |\nabla z|^2 - |z_r|^2. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \varepsilon_1 \int_{\Omega_R} |\nabla v_R|^2 r^\gamma dx + (1 - \varepsilon_1) \int_{\Omega_R} \left| \frac{\partial v_R}{\partial r} \right|^2 r^\gamma dx \\ & + \int_{R_1}^R r^{\gamma+n-3} dr \int_{\Sigma_r} \left((1 - \varepsilon_1) |\nabla_{\Theta} v_R|^2 - \frac{\gamma(\gamma + n - 2)}{2} |v_R|^2 \right) d\Theta \\ & \leq \frac{\varepsilon_2}{2} \int_{\Omega_R} |v_R|^2 r^{\gamma-2} dx + \frac{1}{2\varepsilon_2} \int_{\Omega_R} |h|^2 r^{\gamma+2} dx, \\ & R_1 > 0, \quad \varepsilon_2 > 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Так как

$$\Lambda_\Omega = \liminf_{\rho \rightarrow \infty} \inf_{\eta \in \mathring{W}_2^1(\Sigma_\rho)} \frac{\int_{\Sigma_\rho} |\nabla_\Theta \eta|^2 d\Theta}{\int_{\Sigma_\rho} |\eta|^2 d\Theta} > \frac{\gamma(\gamma + n - 2)}{2},$$

то выберем постоянные ε_1 и R_1 такими, что

$$\inf_{\rho > R_1} \inf_{\eta \in \mathring{W}_2^1(\Sigma_\rho)} \frac{\int_{\Sigma_\rho} |\nabla_\Theta \eta|^2 d\Theta}{\int_{\Sigma_\rho} |\eta|^2 d\Theta} = \inf_{\rho > R_1} |\lambda_\rho| > \frac{\gamma(\gamma + n - 2)}{2(1 - \varepsilon_1)}.$$

Тогда из (3.9) следует неравенство

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 \int_{\Omega_R} |\nabla v_R|^2 r^\gamma dx + C \int_{\Omega_R} |v_R|^2 r^{\gamma-2} dx \\ \leq \frac{\varepsilon_2}{2} \int_{\Omega_R} |v_R|^2 r^{\gamma-2} dx + \frac{1}{2\varepsilon_2} \int_{\Omega_R} |h|^2 r^{\gamma+2} dx, \\ C = \frac{2(1 - \varepsilon_1)}{\gamma(\gamma + n - 2)} - \inf_{\rho > R_1} |\lambda_\rho|. \end{aligned}$$

Полагая теперь $\varepsilon_2 = C$, получаем оценку

$$\int_{\Omega_R} |\nabla v_R|^2 r^\gamma dx + \int_{\Omega_R} |v_R|^2 r^{\gamma-2} dx \leq C \int_{\Omega_R} |h|^2 r^{\gamma+2} dx, \quad (3.10)$$

в которой постоянная C не зависит от R .

При каждом $R > 0$ продолжим функцию v_R нулем на $\Omega \setminus \Omega_R$. Полученные таким образом функции обозначим через $\tilde{v}_R(x)$. Функции $\tilde{v}_R$ принадлежат пространству $\mathring{H}_{\gamma, \gamma-2}^1(\Omega)$. Из неравенства (3.10) следует, что

$$\|\tilde{v}_R\|_{\mathring{H}_{\gamma, \gamma-2}^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{L_{2, \gamma+2}(\Omega)}. \quad (3.11)$$

Таким образом, для некоторой последовательности $R_j \rightarrow \infty, j \rightarrow \infty$, в пространстве $\mathring{H}_{\gamma, \gamma-2}^1(\Omega)$ существует слабый предел

$$v = \lim_{j \rightarrow \infty} \tilde{v}_{R_j}, \quad (3.12)$$

при этом функция v удовлетворяет неравенству (3.11) и интегральному тождеству (3.3) при любой функции $z \in W_2^1(\Omega)$ такой, что $z|_\Gamma = 0$, и имеющей ограниченный носитель. Поэтому функция v является обобщенным из $\mathring{H}_{\gamma, \gamma-2}^1(\Omega)$ решением задачи (3.1), (3.2). Лемма 4 доказана.

Отметим, что разрешимость первой краевой задачи для уравнения Пуассона во внешности компакта в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, при условиях на бесконечности, отличных от рассматриваемых в настоящей работе, изучалась в работах [20], [21].

ЛЕММА 5. Пусть $0 < \alpha_1 < 1$. Тогда существует постоянная $C^* > 0$ такая, что для всех областей $\Omega \in P_\varphi$, удовлетворяющих условию $C_1 < C^*$, для решения задачи (2.1), (2.2) имеет место оценка

$$\left\| \frac{dv}{dk} \right\|_{L_2(\Omega_R)}^2 \leq \frac{C(\mu^{-\beta} + 1)^2}{|k|^2 + 1}, \quad \text{Im } k > 0, \quad R > 0. \quad (3.13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 5. Пусть $v(x, k)$ – решение задачи

$$\Delta v + k^2 v = -h(x), \quad x \in \Omega, \quad (3.14)$$

$$v|_\Gamma = 0, \quad (3.15)$$

где h – гладкая в $\bar{\Omega}$ функция, согласованная с граничным условием (3.15) и имеющая ограниченный носитель. Рассмотрим краевые задачи

$$\Delta v_j = -v_{j-1}, \quad x \in \Omega, \quad (3.16)$$

$$v_j|_\Gamma = 0, \quad (3.17)$$

$$j = 0, \dots, m, \quad v_{-1} = h.$$

Пусть $\gamma_1 > 0$ – постоянная из теоремы 2 и $\gamma > \gamma_1$. Так как область Ω принадлежит классу P_φ , то выполнено неравенство (0.12), и, следовательно, $\Lambda_\Omega = \infty$. Тогда в силу леммы 4 существуют единственные решения задач (3.16), (3.17) $v_j(x) \in \mathring{H}_{\gamma+4(m-j)+2, \gamma+4(m-j)}^1(\Omega)$, $j = 0, \dots, m$, и справедливы оценки

$$\|v_j\|_{H_{\gamma+4(m-j)+2, \gamma+4(m-j)}^1(\Omega)} \leq C \|v_{j-1}\|_{L_{2, \gamma+4(m-j+1)}(\Omega)}, \quad j = 0, \dots, m.$$

Следовательно,

$$\|v_j\|_{L_{2, \gamma+4(m-j)}(\Omega)} \leq C \|h\|_{L_{2, \gamma+4(m+1)}(\Omega)}, \quad j = 0, \dots, m. \quad (3.18)$$

Так как $v_m \in L_2(\Omega)$, то существует обобщенное из $W_2^1(Q_T)$ решение $\tilde{u}(t, x)$ смешанной задачи

$$\tilde{u}_{tt} - \Delta \tilde{u} = 0, \quad t > 0, \quad x \in \Omega,$$

$$\tilde{u}(0, x) = 0, \quad \tilde{u}_t(0, x) = v_m,$$

$$\tilde{u}|_\Gamma = 0, \quad t > 0.$$

Тогда

$$u = (-\Delta)^{m+1} \tilde{u} = (-1)^{m+1} \frac{\partial^{2(m+1)}}{\partial t^{2(m+1)}} \tilde{u},$$

где $u(t, x) \in W_2^1(Q_T)$, $T > 0$, — решение задачи

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u &= 0, & t > 0, & x \in \Omega, \\ u(0, x) &= 0, & u_t(0, x) &= h(x), \\ u|_{\Gamma} &= 0, & t > 0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} v &= (-1)^{m+1} \int_0^\infty e^{ikt} u dt = (-1)^{m+1} \int_0^\infty e^{ikt} \frac{\partial^{2(m+1)} \tilde{u}}{\partial t^{2(m+1)}} dt \\ &= v_0 + k^2 v_1 + \dots + k^{2m} v_m + k^{2(m+1)} \int_0^\infty e^{ikt} \tilde{u} dt \\ &= v_0 + k^2 v_1 + \dots + k^{2m} v_m + k^{2(m+1)} \tilde{v}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

где $\tilde{v}(x, k) \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$ — решение задачи

$$\Delta \tilde{v} + k^2 \tilde{v} = -v_m, \quad x \in \Omega, \quad \operatorname{Im} k > 0, \quad (3.20)$$

$$\tilde{v}|_{\Gamma} = 0. \quad (3.21)$$

Так как в силу оценки (3.18) функция v_m принадлежит пространству $L_{2,\gamma}(\Omega)$, $\gamma > \gamma_1$, то, учитывая (0.20), заключаем, что

$$\|\tilde{v}\|_{L_2(\Omega_R)} \leq C, \quad (3.22)$$

$$k \in K_N = \{\operatorname{Im} k > 0, |k| < N\}, \quad N > 0.$$

Функция $d\tilde{v}/dk$ является решением краевой задачи

$$\Delta \frac{d\tilde{v}}{dk} + k^2 \frac{d\tilde{v}}{dk} = -2k\tilde{v}, \quad x \in \Omega, \quad \operatorname{Im} k > 0, \quad (3.23)$$

$$\frac{d\tilde{v}}{dk} \Big|_{\Gamma} = 0, \quad (3.24)$$

и в силу неравенства (0.21) для нее справедлива оценка

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left| \frac{d\tilde{v}}{dk} \right|^2 \frac{dx}{r^\gamma} &\leq C(|k|^{-p} + 1)(\mu^{-\beta} + 1)^2 \int_{\Omega} |v_m|^2 r^\gamma dx \\ &\leq C(|k|^{-p} + 1)(\mu^{-\beta} + 1)^2 \int_{\Omega} |h|^2 r^{\gamma+4(m+1)} dx, \quad k \in K_N. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Поэтому

$$\left\| \frac{d\tilde{v}}{dk} \right\|_{L_2(\Omega_R)}^2 \leq C(|k|^{-p} + 1)(\mu^{-\beta} + 1)^2, \quad k \in K_N, \quad R > 0. \quad (3.26)$$

В силу равенства (3.19) имеем соотношение

$$\frac{dv}{dk} = 2kv_1 + 4k^3v_2 + \dots + 2mk^{2m-1}v_m + (2m+2)k^{2m+1}\tilde{v} + k^{2(m+1)}\frac{d\tilde{v}}{dk},$$

из которого с учетом неравенства (3.26) вытекает оценка

$$\begin{aligned} \left\| \frac{dv}{dk} \right\|_{L_2(\Omega_R)}^2 &\leq C \left(|k|^2 \|v_1\|_{L_2(\Omega_R)}^2 + |k|^6 \|v_2\|_{L_2(\Omega_R)}^2 + \dots + |k|^{2(2m-1)} \|v_m\|_{L_2(\Omega_R)}^2 \right. \\ &\quad \left. + |k|^{2(2m+1)} \|\tilde{v}\|_{L_2(\Omega_R)}^2 + |k|^{4(m+1)} \left\| \frac{d\tilde{v}}{dk} \right\|_{L_2(\Omega_R)}^2 \right) \\ &\leq C (|k|^2 + |k|^{4(m+1)} (|k|^{-p} + 1) (\mu^{-\beta} + 1)^2), \\ &\quad k \in K_N, \quad R > 0. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Из неравенства (3.27) следует, что при $m > p/4 - 1$

$$\left\| \frac{dv}{dk} \right\|_{L_2(\Omega_R)}^2 \leq C (\mu^{-\beta} + 1)^2, \quad k \in K_N, \quad R > 0, \quad (3.28)$$

где постоянная C зависит от h . Применяя теперь неравенство (3.28) при $h = g$ и $h = -ikf$, заключаем, что для решения задачи

$$\Delta v + k^2 v = -(g - ikf), \quad x \in \Omega, \quad (3.29)$$

$$v|_{\Gamma} = 0, \quad (3.30)$$

также имеет место оценка (3.28). Оценивая решение задачи (3.29), (3.30) в области $K_N = \{\operatorname{Im} k > 0, |k| > N\}$ с помощью (2.17), получаем неравенство

$$\left\| \frac{dv}{dk} \right\|_{L_2(\Omega_R)}^2 \leq \frac{C (\mu^{-\beta} + 1)^2}{|k|^2 + 1}, \quad \operatorname{Im} k > 0, \quad R > 0.$$

Лемма 5 доказана.

§ 4. Оценки локальной энергии решений смешанной задачи для волнового уравнения при больших значениях времени

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть $v(x, k) \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$, $\operatorname{Im} k > 0$, — решение задачи (3.29), (3.30). Тогда для почти всех $t > 0$ и $x \in \Omega$ справедлива формула обращения

$$e^{-\mu t} u(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} v(x, \omega + i\mu) d\omega.$$

Учитывая неравенство (2.7) и теорему Планшереля, выводим оценку

$$\int_0^{\infty} e^{-2\mu t} \|u(t, x)\|_{L_2(\Omega_R)}^2 dt = 4\pi^2 \int_{-\infty}^{\infty} \|v(x, \omega + i\mu)\|_{L_2(\Omega_R)}^2 d\omega \leq C. \quad (4.1)$$

Поскольку при $\varkappa > 0$

$$v(x, \omega + \varkappa + i\mu) - v(x, \omega - \varkappa + i\mu) = 2i \int_0^\infty e^{i\omega t} e^{-\mu t} \sin \varkappa t u(t, x) dt,$$

то из (4.1) и оценки (3.13) леммы 5 следует, что

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty e^{-2\mu t} \|u(t, x)\|_{L_2(\Omega_R)}^2 \sin^2 \varkappa t dt \\ &= \pi^2 \int_{-\infty}^\infty \|v(x, \omega + \varkappa + i\mu) - v(x, \omega - \varkappa + i\mu)\|_{L_2(\Omega_R)}^2 d\omega \\ &= \pi^2 \int_{-\infty}^\infty \left\| \int_\mu^{\mu+\varkappa} \frac{d}{d\eta} v(x, \omega - \varkappa + i\eta) d\eta + \int_{\omega-\varkappa}^{\omega+\varkappa} \frac{d}{d\eta} v(x, \eta + i(\mu + \varkappa)) d\eta \right. \\ & \quad \left. + \int_{\mu+\varkappa}^\mu \frac{d}{d\eta} v(x, \omega + \varkappa + i\eta) d\eta \right\|_{L_2(\Omega_R)}^2 d\omega \\ &\leq C \int_{-\infty}^\infty d\omega \left(\left\| \int_\mu^{\mu+\varkappa} \frac{d}{d\eta} v(x, \omega - \varkappa + i\eta) d\eta \right\|_{L_2(\Omega_R)}^2 \right. \\ & \quad \left. + \left\| \int_{\omega-\varkappa}^{\omega+\varkappa} \frac{d}{d\eta} v(x, \eta + i(\mu + \varkappa)) d\eta \right\|_{L_2(\Omega_R)}^2 \right. \\ & \quad \left. + \left\| \int_\mu^{\mu+\varkappa} \frac{d}{d\eta} v(x, \omega + \varkappa + i\eta) d\eta \right\|_{L_2(\Omega_R)}^2 \right) \\ &\leq C \int_{-\infty}^\infty d\omega \left(\left(\int_\mu^{\mu+\varkappa} \left\| \frac{d}{d\eta} v(x, \omega - \varkappa + i\eta) \right\|_{L_2(\Omega_R)} d\eta \right)^2 \right. \\ & \quad \left. + \left(\int_{\omega-\varkappa}^{\omega+\varkappa} \left\| \frac{d}{d\eta} v(\eta + i(\mu + \varkappa)) \right\|_{L_2(\Omega_R)} d\eta \right)^2 \right. \\ & \quad \left. + \left(\int_\mu^{\mu+\varkappa} \left\| \frac{d}{d\eta} v(\omega + \varkappa + i\eta) \right\|_{L_2(\Omega_R)} d\eta \right)^2 \right) \\ &\leq C \int_{-\infty}^\infty d\omega \left(\left(\int_\mu^{\mu+\varkappa} \frac{\eta^{-\beta} + 1}{\sqrt{(\omega - \varkappa)^2 + \eta^2 + 1}} d\eta \right)^2 \right. \\ & \quad \left. + \left(\int_{\omega-\varkappa}^{\omega+\varkappa} \frac{(\varkappa + \mu)^{-\beta} + 1}{\sqrt{\eta^2 + (\varkappa + \mu)^2 + 1}} d\eta \right)^2 \right. \\ & \quad \left. + \left(\int_\mu^{\mu+\varkappa} \frac{\eta^{-\beta} + 1}{\sqrt{(\omega + \varkappa)^2 + \eta^2 + 1}} d\eta \right)^2 \right) \\ &\leq C \int_{-\infty}^\infty \frac{d\omega}{\omega^2 + 1} \left(\left(\int_0^\varkappa (\eta^{-\beta} + 1)^2 d\eta \right)^2 \right. \\ & \quad \left. + \left((\varkappa^{-\beta} + 1) \int_{\omega-\varkappa}^{\omega+\varkappa} d\eta \right)^2 + \left(\int_0^\varkappa (\eta^{-\beta} + 1)^2 d\eta \right)^2 \right) \\ &\leq C \varkappa^{2(1-\beta)}, \quad \varkappa > 0, \quad 0 < \mu < 1. \end{aligned}$$

Поэтому при $T \geq T_0 > 0$

$$\begin{aligned}
\int_T^\infty e^{-2\mu t} \|u(t, x)\|_{L_2(\Omega_R)}^2 dt &= \sum_{j=1}^\infty \int_{2^{j-1}T}^{2^j T} e^{-2\mu t} \|u(t, x)\|_{L_2(\Omega_R)}^2 dt \\
&\leq \frac{1}{\sin^2(1/2)} \sum_{j=1}^\infty \int_{2^{j-1}T}^{2^j T} e^{-2\mu t} \|u(t, x)\|_{L_2(\Omega_R)}^2 \sin^2\left(\frac{t}{2^j T}\right) dt \\
&\leq \frac{1}{\sin^2(1/2)} \sum_{j=1}^\infty \int_0^\infty e^{-2\mu t} \|u(t, x)\|_{L_2(\Omega_R)}^2 \sin^2\left(\frac{t}{2^j T}\right) dt \\
&= \frac{\pi^2}{\sin^2(1/2)} \sum_{j=1}^\infty \int_{-\infty}^\infty \left\| v\left(x, \omega + \frac{1}{2^j T} + i\mu\right) - v\left(x, \omega - \frac{1}{2^j T} + i\mu\right) \right\|_{L_2(\Omega_R)}^2 d\omega \\
&\leq C \sum_{j=1}^\infty \frac{1}{(2^j T)^{2(1-\beta)}} = \frac{C}{T^\delta}, \quad 0 < \mu < 1, \quad \delta = 2(1-\beta),
\end{aligned}$$

где постоянная C не зависит от μ . Таким образом,

$$\int_T^\infty e^{-2\mu t} \|u(t, x)\|_{L_2(\Omega_R)}^2 dt \leq \frac{C}{T^\delta}, \quad T \geq T_0, \quad 0 < \mu < 1. \quad (4.2)$$

Поскольку функции $e^{-2\mu t} \|u(t, x)\|_{L_2(\Omega_R)}^2 \nearrow \|u(t, x)\|_{L_2(\Omega_R)}^2$, $\mu \rightarrow +0$, $t \in [0, +\infty)$, то в силу неравенства (4.2) и теоремы Б. Леви о монотонной сходимости заключаем, что

$$\int_T^\infty \|u(t, x)\|_{L_2(\Omega_R)}^2 dt \leq \frac{C}{T^\delta}, \quad T > T_0. \quad (4.3)$$

Заметим теперь, что функция $u_t(t, x)$ при всех $T > 0$ принадлежит пространству $W_2^1(Q_T)$ и является решением задачи

$$(u_t)_{tt} - \Delta(u_t) = 0, \quad t > 0, \quad x \in \Omega, \quad (4.4)$$

$$u_t(0, x) = g, \quad (u_t)_t(0, x) = \Delta f, \quad (4.5)$$

$$u_t|_\Gamma = 0, \quad t > 0. \quad (4.6)$$

В силу гладкости и финитности начальных функций для решения задачи (4.4)–(4.6) также справедлива оценка (4.3). Таким образом,

$$\int_T^\infty \|u_t(t, x)\|_{L_2(\Omega_R)}^2 dt \leq \frac{C}{T^\delta}, \quad T \geq T_0. \quad (4.7)$$

Далее, функция $\Delta u(t, x)$ при всех $T > 0$ принадлежит пространству $W_2^1(Q_T)$ и является решением задачи

$$(\Delta u)_{tt} - \Delta(\Delta u) = 0, \quad t > 0, \quad x \in \Omega, \quad (4.8)$$

$$\Delta u(0, x) = \Delta f, \quad (\Delta u)_t(0, x) = \Delta g, \quad (4.9)$$

$$\Delta u|_\Gamma = 0, \quad t > 0. \quad (4.10)$$

Применяя к функции Δu оценку (4.3), получаем

$$\int_T^\infty \|\Delta u(t, x)\|_{L_2(\Omega_R)}^2 dt \leq \frac{C}{T^\delta}, \quad T \geq T_0. \quad (4.11)$$

Пусть $\xi_R(r) \in C^\infty[0, +\infty)$, $R > 0$, — функция такая, что $\xi_R(r) = 1$, $0 < r < R$, $\xi_R(r) = 0$, $r > R + 1$, $0 < \xi_R(r) < 1$, $R < r < R + 1$. Справедливо равенство

$$\int_{\Omega_{R+1}} \Delta u(t, x) u(t, x) \xi_R dx = \int_{\Omega_{R+1}} \left(-|\nabla u(t, x)|^2 \xi_R + u^2(t, x) \frac{\Delta \xi_R}{2} \right) dx,$$

из которого следует, что

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_R} |\nabla u(t, x)|^2 dx &\leq \int_{\Omega_{R+1}} |\nabla u(t, x)|^2 \xi_R dx \\ &\leq \int_{\Omega_{R+1}} \left(|\Delta u(t, x)| |u(t, x)| \xi_R + u^2(t, x) \frac{\Delta \xi_R}{2} \right) dx \\ &\leq C (\|\Delta u(t, x)\|_{L_2(\Omega_{R+1})}^2 + \|u(t, x)\|_{L_2(\Omega_{R+1})}^2). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Объединяя оценки (4.3), (4.11) и (4.12), заключаем, что

$$\begin{aligned} \int_T^\infty \|\nabla u(t, x)\|_{L_2(\Omega_R)}^2 dt \\ \leq C \int_T^\infty (\|\Delta u(t, x)\|_{L_2(\Omega_{R+1})}^2 + \|u(t, x)\|_{L_2(\Omega_{R+1})}^2) dt \leq \frac{C}{T^\delta}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$T \geq T_0, \quad R > 0.$$

Из неравенств (4.7) и (4.13) следует

$$\int_T^\infty E_R(t) dt \leq \frac{C}{T^\delta}, \quad T \geq T_0, \quad R > 0. \quad (4.14)$$

Теорема 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕРАВЕНСТВА (0.15). Поскольку каждая область $\Omega \in P_\varphi$ принадлежит также соответствующему классу G_φ , то из результатов работ [14]–[16] следует, что

$$\int_0^\infty E_R(t) dt < \infty.$$

Поэтому существует последовательность $t_j \rightarrow \infty$, $j \rightarrow \infty$, такая, что $\lim_{j \rightarrow \infty} E_R(t_j) = 0$. Тогда справедливо равенство

$$E_R(t) = - \lim_{j \rightarrow \infty} \int_t^{t_j} \frac{d}{d\tau} E_R(\tau) d\tau = - \int_t^\infty \frac{d}{d\tau} E_R(\tau) d\tau.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} E_R(t) &\leq C \int_t^\infty d\tau \int_{\Omega_R} (|u_\tau(\tau, x)| |u_{\tau\tau}(\tau, x)| + |\nabla u(\tau, x)| |\nabla u_\tau(\tau, x)|) dx \\ &\leq \int_t^\infty E_R(\tau) d\tau + \int_t^\infty d\tau \int_{\Omega_R} |\operatorname{grad} u_\tau(\tau, x)|^2 dx. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Заметим теперь, что функция $u_t(t, x) \in W_2^1(Q_T)$, $T > 0$, является решением задачи (4.4)–(4.6). В силу гладкости и финитности начальных функций для решения задачи (4.4)–(4.6) также справедлива оценка (4.14). Таким образом,

$$\int_t^\infty d\tau \int_{\Omega_R} |\operatorname{grad} u_\tau(\tau, x)|^2 dx \leq \frac{C}{T^\delta}. \quad (4.16)$$

Объединяя оценки (4.14)–(4.16), получаем неравенство (0.15).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕРАВЕНСТВА (0.16). Пусть $\sigma < \delta$. Используя оценку (0.14), имеем

$$\begin{aligned} \int_0^\infty E_R(t)(1+t)^\sigma dt &= - \int_0^\infty (1+t)^\sigma \frac{d}{dt} \left(\int_t^\infty E_R(\tau) d\tau \right) dt \\ &= -(1+t)^\sigma \int_t^\infty E_R(\tau) d\tau \Big|_0^\infty + \sigma \int_0^\infty (1+t)^{\sigma-1} dt \int_t^\infty E_R(\tau) d\tau \\ &\leq \int_0^\infty E_R(t) dt + \sigma \int_0^\infty (1+t)^{\sigma-1} dt \int_t^\infty E_R(\tau) d\tau \\ &\leq \int_0^\infty E_R(t) dt + C \int_0^\infty \frac{dt}{(1+t)^{1+\sigma-\delta}} \leq C. \end{aligned}$$

Неравенство (0.16) доказано.

Список литературы

1. Morawetz C. S. The decay of solutions of the exterior initial-boundary value problem for the wave equation // Comm. Pure Appl. Math. 1961. V. 14. №3. P. 561–568.
2. Morawetz C. S. The limiting amplitude principle // Comm. Pure Appl. Math. 1962. V. 15. №3. P. 349–361.
3. Lax P. D., Morawetz C. S., Phillips R. S. Exponential decay of solutions of the wave equation in the exterior of a star-shaped obstacle // Comm. Pure Appl. Math. 1963. V. 16. №4. P. 477–486.
4. Лакс П. Д., Филлипс Р. С. Теория рассеяния. М.: Мир, 1971.
5. Михайлов В. П. О корнях функций Макдональда // Труды МИАН. 1968. Т. 103. С. 162–171.
6. Иерий В. Я. Экспоненциальное убывание решений волнового уравнения во внешности почти звездной области // Докл. АН СССР. 1969. Т. 189. №5. С. 938–940.
7. Morawetz C. S. Decay for solutions of the exterior problem for the wave equation // Comm. Pure Appl. Math. 1975. V. 28. №2. P. 229–264.
8. Morawetz C. S., Ralston J. V., Strauss W. A. Decay of solutions of the wave equation outside nontrapping obstacles // Comm. Pure Appl. Math. 1977. V. 30. №4. P. 447–508.
9. Муравей Л. А. Об асимптотическом поведении при больших значениях времени решений внешних краевых задач для волнового уравнения с двумя пространственными переменными // Матем. сб. 1978. Т. 107(149). №1(9). С. 84–133.

10. *Zachmanoglou E. C.* An example of slow decay of the solution of the initial-boundary value problem for the wave equation in unbounded regions // *Bull. Amer. Math. Soc.* 1964. V. 70. № 4. P. 633–636.
11. *Zachmanoglou E. C.* The decay of solutions of the initial-boundary value problem for the wave equation in unbounded regions // *Arch. Ration. Mech. Anal.* 1963. V. 14. № 4. P. 312–325.
12. *Муравей Л. А.* Волновое уравнение и уравнение Гельмгольца в неограниченной области со звездной границей // *Труды МИАН.* 1988. Т. 185. С. 171–180.
13. *Filinovskii A. V.* Stabilization of solutions of wave equation in domains with star-shaped boundaries // *Russian J. Math. Phys.* 2001. V. 8. № 4. P. 433–452.
14. *Филиновский А. В.* Стабилизация решений волнового уравнения в неограниченных областях // *Матем. сб.* 1996. Т. 187. № 6. С. 131–160.
15. *Филиновский А. В.* Стабилизация решений волнового уравнения в областях с некомпактными границами // *Матем. сб.* 1998. Т. 189. № 8. С. 141–160.
16. *Филиновский А. В.* Убывание энергии решений первой смешанной задачи для волнового уравнения в областях с некомпактными границами // *Матем. заметки.* 2000. Т. 67. № 2. С. 311–315.
17. *Morawetz C. S., Ludwig D.* An inequality for the reduced wave operator and the justification of geometrical optics // *Comm. Pure Appl. Math.* 1968. V. 21. № 2. P. 187–203.
18. *Винник А. А., Эйдус Д. М.* Принцип предельной амплитуды для областей типа параболоида // *Изв. вузов. Сер. матем.* 1979. № 3(202). С. 28–37.
19. *Filinovskii A. V.* On the behaviour of the resolvent for the Dirichlet problem to the Laplace operator in unbounded domains for small parameter values // *J. Nat. Geom.* 2002. V. 22. № 5. P. 49–80.
20. *Михлин С. Г.* Интегрирование уравнения Пуассона в бесконечной области // *Докл. АН СССР.* 1953. Т. 91. № 5. С. 1015–1017.
21. *Михлин С. Г.* О решениях с конечной энергией у эллиптических дифференциальных уравнений // *Уч. записки Лен. пед. инст. им. А. И. Герцена.* 1958. Т. 183. № 1. С. 5–21.