Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Христофоров, О сходимости диагональных аппроксимаций Паде для эллиптических функций, *Матем. сб.*, 2009, том 200, номер 6, 143–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm6811>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 14:30:29

УДК 517.538.53

Д. В. Христофоров

О равномерном приближении эллиптических функций аппроксимациями Паде

В работе изучаются диагональные аппроксимации Паде эллиптических функций. Известно, что отсутствие равномерной сходимости таких аппроксимаций связано с существованием у них ложных полюсов, не соответствующих какой-либо особенности приближаемой функции. В работе предложена последовательность кусочно рациональных функций, которая строится по двум соседним аппроксимациям Паде и приближает эллиптическую функцию локально равномерно в области Шталя. Доказательство сходимости этой последовательности основано на выводе формул сильной асимптотики для функции остатка и полиномов Паде и анализе поведения ложного полюса.

Библиография: 23 названия.

Ключевые слова: аппроксимации Паде, эллиптические функции, область Шталя, равномерная аппроксимация.

§ 1. Введение

Понятие локально наилучших рациональных аппроксимаций степенного ряда впервые возникло в конце XIX в. в работах Фробениуса [1] и Паде [2]. Классические результаты Чебышёва, Маркова и Стилтьеса о фундаментальных свойствах таких рациональных функций, сформулированные в терминах непрерывных дробей, положили начало развития новой области в теории рациональных приближений (подробнее см. [3]–[7]). Во второй половине XX в. появилось огромное количество работ, связанных с аппроксимациями Паде и их обобщениями. Такой интерес к этим задачам объясняется широким применением рациональных приближений в задачах механики, теоретической физики, технических расчетах [8]–[14]. Асимптотическое поведение аппроксимаций Паде, построенных только по локальным данным, позволяет делать выводы о глобальных свойствах самой функции: расположении и характере ее особенностей, аналитическом продолжении и т.п.

Настоящая работа посвящена использованию диагональных аппроксимаций Паде для равномерного приближения эллиптических функций. Хорошо известны результаты Шталя о сходимости аппроксимаций Паде алгебраических функций по (логарифмической) емкости [15]. Согласно классической теореме Шталя для всякой алгебраической функции f , заданной своим аналитическим ростком в бесконечно удаленной точке $z = \infty$, существует “симметричный” компакт (называемый далее *компактом Шталя*) $S = S(f) \subset \mathbb{C}$ со следующими свойствами:

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00317) и в рамках Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-3906.2008.1).

- 1) S состоит из конечного числа кусочно аналитических дуг и множество $D := \overline{\mathbb{C}} \setminus S$ – область;
- 2) f продолжается мероморфным образом в область $D = D(f)$;
- 3) $f_n \xrightarrow{\text{ср}} f$ на компактных подмножествах области D , где f_n – диагональные аппроксимации Паде функции f в точке $z = \infty$.

Отметим, что область Шталя $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus S$ является максимальной областью сходимости по емкости последовательности $\{f_n\}$ (см. [15]).

Хорошо известно, что отсутствие равномерной сходимости аппроксимаций Паде в области Шталя D связано с существованием так называемых ложных полюсов аппроксимации, не соответствующих какой-либо особенности приближаемой функции (см. [15]–[19]). Впервые это было отмечено Дюма [20] в 1908 г. Он исследовал сходимость чебышёвской непрерывной дроби для эллиптической функции вида

$$f(z) = w(z) - z^2 + \frac{e_1 + e_2 + e_3 + e_4}{2} z, \quad (1.1)$$

где $w(z) = \sqrt{(z - e_1)(z - e_2)(z - e_3)(z - e_4)}$, $e_1, \dots, e_4$ – попарно различные точки на комплексной плоскости и выбранная ветвь корня обеспечивает голоморфность функции f в точке $z = \infty$. Дюма показал, что в “общем положении”, которое определяется только взаимным расположением точек $e_1, \dots, e_4$ (см. п. 2.1), для некоторой бесконечной подпоследовательности $\Lambda \subset \mathbb{N}$ у диагональных аппроксимаций f_n , $n \in \Lambda$, существует множество полюсов, всюду плотное в $\overline{\mathbb{C}}$. Позднее Шталь [19] и Суетин [17] перенесли это утверждение на более общий класс функций, включающий в себя гиперэллиптические функции. Заметим, что, начиная с 60-х годов XX в., наличие ложного полюса не раз отмечалось в различных работах при попытках численных применений аппроксимаций Паде [4], [8]–[10]. При этом наличие ложных полюсов считалось некоторым недостатком метода аппроксимаций Паде и никак не связывалось с природой приближаемой функции (подробнее см. [4], [15], [18]).

В настоящей работе предложена последовательность кусочно рациональных функций, учитывающая природу ложного полюса, определяемая по двум соседним диагональным аппроксимациям Паде и приближающая заданную эллиптическую функцию локально равномерно в области Шталя D .

Пусть $w(z)$ – эллиптическая функция из (1.1) и S – компакт Шталя для нее. Рассмотрим класс функций $\mathcal{K} = \{f\}$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$f(z) = \frac{1}{\pi i} \int_S \frac{\rho(\zeta)}{w^+(\zeta)} \frac{d\zeta}{z - \zeta} + r(z), \quad (1.2)$$

где $r(z) \in \mathbb{C}(z)$, комплекснозначная функция $\rho(\zeta) \neq 0$ и голоморфна на S , функция $f(z)$ голоморфна в точке $z = \infty$. Если $\rho(\zeta) \in \mathbb{C}$ и не имеет на S ни нулей, ни полюсов, то $f(z)$ – эллиптическая функция: $f(z) = r_1(z) + r_2(z)/w(z)$, где $r_1(z), r_2(z) \in \mathbb{C}(z)$, $r_2(z) \neq 0, \infty$ на S .

Основным результатом настоящей работы является следующая

ТЕОРЕМА. *Предположим, что функция f принадлежит классу $\mathcal{K}$ и f_n , $n = 1, 2, \dots$, – ее диагональные аппроксимации Паде в точке $z = \infty$. Пусть для $z \in D$*

$$\hat{f}_n(z) := \begin{cases} f_n(z), & \text{если } f_n(z) \neq \infty \text{ в } U_{1/n}(z), \\ f_{n+1}(z) & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $U_r(z)$ – круговая окрестность точки z радиуса r в сферической метрике. Тогда в случае общего положения $\hat{f}_n \rightarrow f$, $n \rightarrow \infty$, локально равномерно в сферической метрике в области Штала D .

Функция $\hat{f}_n$ является кусочно рациональной и в случае рекуррентного построения аппроксимаций Паде не требуется дополнительных вычислений для ее построения.

Заметим, что конструкции последовательностей функций, приближающих заданную функцию локально равномерно и состоящих из преобразованных аппроксимаций Паде, были предложены ранее в [19] и [21]. В [19] приведены так называемые процедуры очищения от ложных полюсов, которые включают в себя операции контурного интегрирования или взаимного сокращения ложных полюсов и ложных нулей аппроксимации и неэффективны с точки зрения вычислений. Конструкция искомых последовательностей функций в [21] приведена в терминах спектра оператора Якоби, соответствующего разложению функции f в непрерывную J -дробь, и не относится к случаю общего положения.

Работа имеет следующую структуру. В § 2 приведены основные понятия и результаты, связанные с теорией римановых поверхностей, необходимые для доказательства сформулированной выше теоремы. В § 3 дано решение специальной краевой задачи Римана и это решение затем использовано в § 4 для получения сильных асимптотик функции остатка и знаменателя аппроксимаций Паде. Наконец, в § 5 с помощью этих результатов доказана сформулированная выше теорема.

§ 2. Основные понятия и вспомогательные результаты

2.1. Прежде всего определим условия “общего положения”, при которых мы будем проводить все доказательства в настоящей работе.

1) Будем считать, что компакт Штала S состоит из двух непересекающихся дуг S_1 и S_2 ;

2) предположим, что для функции (1.2) индекс аппроксимаций Паде нормален для всего натурального ряда (см. ниже определение 2.1);

3) пусть множества ложных полюсов аппроксимаций $\{f_n\}$ всюду плотно в $\overline{C}$.

Как показано в [16], последнее условие выполняется при рациональной зависимости некоторых вещественных числовых параметров, связанных только с взаимным расположением точек $e_1, \dots, e_4$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Пусть $f(z)$ – функция, аналитическая в точке $z = \infty$. Ее *диагональной аппроксимацией Паде степени n* называется рациональная функция

$$f_n(z) := \frac{p_n(z)}{q_n(z)},$$

где $p_n(z)$, $q_n(z)$ – это полиномы степени не выше n , $q_n(z) \not\equiv 0$, удовлетворяющие условию касания

$$R_n(z) := q_n(z)f(z) - p_n(z) = O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right), \quad z \rightarrow \infty.$$

Индекс n называется *нормальным*, если $\deg q_n = n$, $\deg p_n = n$ и полиномы p_n и q_n взаимно просты. Функция $R_n(z)$ называется *функцией остатка*.

2.2. Доказательство теоремы будем проводить при помощи некоторых конструкций на эллиптической римановой поверхности X , заданной уравнением

$$w^2 = (z - e_1)(z - e_2)(z - e_3)(z - e_4).$$

Реализуем X как два экземпляра $\overline{\mathbb{C}}$, разрезанных по дугам S_1 и S_2 компакта Штала. На каждой из дуг зададим ориентацию: $S_1 = \text{arg}(e_1, e_2)$, положительная ориентация от e_1 к e_2 ; $S_2 = \text{arg}(e_3, e_4)$, положительная ориентация от e_3 к e_4 . Соответствующим образом определяются “верхний” и “нижний” берега разрезов, а два экземпляра расширенной комплексной плоскости оказываются “склеенными” накрест. Компакту S при этом на римановой поверхности соответствует пара непересекающихся кривых $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$. Пусть $\mathcal{L} := \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$.

Зафиксируем ветвь корня, однозначную в области $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus S$, при помощи следующего соотношения

$$\frac{\sqrt{(z - e_1) \cdots (z - e_4)}}{z^2} \rightarrow 1, \quad z \rightarrow \infty.$$

Точка $\mathbf{z} \in X$ определяется своей проекцией $z = \pi(\mathbf{z})$, $z \in \overline{\mathbb{C}}$, и номером листа римановой поверхности. На первом открытом листе $D^{(1)}$ выполняется соотношение $w = \sqrt{(z - e_1)(z - e_2)(z - e_3)(z - e_4)}$, на втором открытом листе $D^{(2)}$ – соотношение $w = -\sqrt{(z - e_1)(z - e_2)(z - e_3)(z - e_4)}$. Таким образом, $\mathbf{z} = (z, \pm w)$. С первым листом мы будем отождествлять область D .

Для точки $\mathbf{z}$ используем обозначение $z^{(1)}$, если $\mathbf{z} \in D^{(1)}$, и $z^{(2)}$, если $\mathbf{z} \in D^{(2)}$. Обозначим предельные значения функции F при стремлении ее аргумента к точке $\zeta \in \mathcal{L}$ (по любому некасательному направлению) через $F^{(1)}(\zeta)$ и $F^{(2)}(\zeta)$, т.е.:

$$F^{(1)}(\zeta) := \lim_{D^{(1)} \ni \zeta^{(1)} \rightarrow \zeta} F(\zeta^{(1)}), \quad F^{(2)}(\zeta) := \lim_{D^{(2)} \ni \zeta^{(2)} \rightarrow \zeta} F(\zeta^{(2)}).$$

Обозначим через $F^+(\zeta)$ и $F^-(\zeta)$ значения функции F на верхнем ($\zeta \in S^+$) и нижнем ($\zeta \in S^-$) берегах разрезов соответственно.

Зададим базис гомологий на X . Первый из контуров $\mathcal{L}_1$ выберем в качестве базисного a -цикла $\mathbf{a}_1$ и дополним его b -циклом $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{a}_1 \circ \mathbf{b}_1 = 1$. Пространство голоморфных дифференциалов на X одномерно. Обозначим через $d\Omega_1$ a -нормированный абелев дифференциал. Имеем

$$\oint_{\mathbf{a}_1} d\Omega_1(\zeta) = 1, \quad \oint_{\mathbf{b}_1} d\Omega_1(\zeta) = B_1,$$

где $\text{Im } B_1 > 0$.

2.3. Пусть $\mathbf{z}_1$ и $\mathbf{z}_2$ – произвольные точки римановой поверхности X , а $d\Omega(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2; \mathbf{z})$ – абелев дифференциал третьего рода, голоморфный в $X \setminus \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2\}$ и имеющий простые полюсы в выделенных точках с вычетами 1 и -1 соответственно. Такой дифференциал определен с точностью до аддитивной константы. С целью нормировки потребуем выполнения условия

$$\oint_{\mathbf{a}_1} d\Omega(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2; \mathbf{z}) = 0.$$

Это условие обеспечивает a -нормированность дифференциала. Приведем здесь явный вид некоторых дифференциалов, который будет необходим в дальнейших доказательствах:

$$\begin{aligned} d\Omega(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2; \mathbf{z}) &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{w(\mathbf{z}) + w(\mathbf{z}_1)}{z - z_1} \frac{dz}{w(\mathbf{z})} - \frac{w(\mathbf{z}) + w(\mathbf{z}_2)}{z - z_2} \frac{dz}{w(\mathbf{z})} + \frac{c_1}{w(\mathbf{z})} \right\}, \\ d\Omega(\mathbf{z}_1, \infty^{(2)}; \mathbf{z}) &= \frac{1}{2} \frac{w(\mathbf{z}) + w(\mathbf{z}_1)}{z - z_1} \frac{dz}{w(\mathbf{z})} - \frac{1}{2} \frac{w(\mathbf{z}) - c_2}{w(\mathbf{z})} dz, \\ d\Omega(\infty^{(1)}, \infty^{(2)}; \mathbf{z}) &= -\frac{z - c_3}{w(\mathbf{z})} dz, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где константы $c_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, 2$, обеспечивают a -нормированность дифференциалов.

Далее будем использовать интегралы от абелевых дифференциалов по путям, лежащим в рассеченной римановой поверхности. Рассеченная риманова поверхность $\tilde{X}$ определяется как $\tilde{X} := X \setminus (\mathbf{a}_1 \cup \mathbf{b}_1)$ и является связной. Справедливо следующее соотношение Римана:

$$\oint_{\mathbf{b}_1} d\Omega(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2; \zeta) = -2\pi i \int_{\mathbf{z}_1}^{\mathbf{z}_2} d\Omega_1(\zeta), \quad (2.2)$$

где путь интегрирования от $\mathbf{z}_1$ к $\mathbf{z}_2$ лежит в $\tilde{X}$ (см. [22], [23]).

Кроме a -нормированных дифференциалов, нам понадобится дифференциал комплексной функции Грина. Пусть $g_D(z, \infty)$ – функция Грина области D , а $\tilde{g}_D(z, \infty)$ – гармонически сопряженная к ней функция, $G_D(z, \infty) = g_D(z, \infty) + i\tilde{g}_D(z, \infty)$ – комплексная функция Грина. Дифференциал комплексной функции Грина $dG(\infty^{(1)}, \infty^{(2)}; \mathbf{z})$ имеет полюсы с вычетами ± 1 в обеих бесконечно удаленных точках римановой поверхности и чисто мнимые периоды. Справедливо следующее соотношение [17]:

$$dG(\infty^{(1)}, \infty^{(2)}; \mathbf{z}) + 2\pi i \omega_1(\infty) d\Omega_1(\mathbf{z}) + d\Omega(\infty^{(1)}, \infty^{(2)}; \mathbf{z}) = 0, \quad (2.3)$$

где $\omega_1(\infty)$ – гармоническая мера дуги S_1 относительно области D ,

$$\omega_1(\infty) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathbf{a}_1} dG(\infty^{(1)}, \infty^{(2)}; \mathbf{z}). \quad (2.4)$$

Далее нам понадобится вещественная величина

$$\tau_1(\infty) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathbf{b}_1} dG(\infty^{(1)}, \infty^{(2)}; \mathbf{z}). \quad (2.5)$$

2.4. Дивизором мероморфной на X функции F будем называть формальное выражение вида $(F) = n_1 \mathbf{z}_1 + n_2 \mathbf{z}_2 + \dots + n_p \mathbf{z}_p - k_1 \zeta_1 - k_2 \zeta_2 - \dots - k_q \zeta_q$, где $\mathbf{z}_j$ – нули функции F , а n_j – их кратности, ζ_j – полюсы функции F , k_j – их кратности. По теореме Абеля $\deg(F) = 0$ и

$$\sum_{j=1}^p n_j \Omega_1(\mathbf{z}_j) - \sum_{j=1}^q k_j \Omega_1(\zeta_j) \equiv 0, \quad \text{где } \Omega_1(\mathbf{z}) = \int_{e_3}^{\mathbf{z}} d\Omega_1(\zeta),$$

равенство понимается по модулю периодов базисного голоморфного дифференциала $d\Omega_1(\mathbf{z})$.

Пусть на $X \setminus \mathcal{L}$ задана кусочно мероморфная функция $F(\mathbf{z})$, имеющая полюсы порядка меньше или равного единице только в бесконечно удаленных точках. Пусть

$$F^{(1)}(\zeta) - F^{(2)}(\zeta) = \rho(\zeta), \quad \zeta \in \mathcal{L},$$

где функция ρ голоморфна на $\mathcal{L}$. Тогда функция F восстанавливается с помощью интеграла типа интеграла Коши так [16]:

$$F(\mathbf{z}) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}^+} \rho(\zeta) d\Omega(\mathbf{z}; \zeta) + p(z), \quad \mathbf{z} \notin \mathcal{L}, \quad (2.6)$$

где

$$d\Omega(\mathbf{z}; \zeta) = \frac{1}{2} \frac{w(\zeta) + w(\mathbf{z})}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{w(\zeta)},$$

контур $\mathcal{L}^+$ ориентирован положительно относительно области $D^{(1)}$, $p(z) \in \mathbb{C}[z]$, $\deg p \leq 1$.

§ 3. Краевая задача Римана

3.1. Рассмотрим на поверхности X следующую краевую задачу Римана.

ЗАДАЧА ($\mathcal{R}$). При фиксированном $n \in \mathbb{N}$ найти функцию $\Psi = \Psi_n$ такую, что:

- 1) Ψ кусочно мероморфна на $X \setminus \mathcal{L}$;
- 2) дивизор $(\Psi) = \mathbf{z}_n + \alpha_1 + \dots + \alpha_m - n\infty^{(1)} + (n-1)\infty^{(2)} - \beta_1 - \dots - \beta_m$, где α_j и β_j лежат соответственно на первом и втором листах римановой поверхности X ;
- 3) на $\mathcal{L}$ выполнено граничное условие $\rho(\zeta)\Psi^{(1)}(\zeta) = \Psi^{(2)}(\zeta)$.

Этими условиями искомая функция $\Psi(\mathbf{z})$ определяется однозначно с точностью до мультипликативной постоянной.

3.2. Приведем решение сформулированной выше задачи, следуя схеме, предложенной в [16]. Пользуясь абелевыми интегралами, мы построим функцию с заданным дивизором, а затем подправим ее скачок на кривой $\mathcal{L}$ с учетом необходимого граничного условия.

Пусть Ψ – решение задачи ($\mathcal{R}$) и $v(z) := \Psi(z^{(1)})\Psi(z^{(2)})$. Тогда $v^+(\zeta) = v^-(\zeta)$ при $\zeta \in S = \pi(\mathcal{L})$. Дивизор функции v на $\overline{\mathbb{C}}$ есть

$$(v) = z_n - \infty + \alpha_1 + \dots + \alpha_m - \beta_1 - \dots - \beta_m.$$

Отсюда следует, что v – рациональная функция и при $z_n \neq \infty$

$$v(z) = c_n(z - z_n) \frac{z - \alpha_1}{z - \beta_1} \dots \frac{z - \alpha_m}{z - \beta_m}, \quad z \in \overline{\mathbb{C}},$$

константа c_n задает нормировку функции Ψ . Будем считать, что в случае $z_n \neq \infty$ константа $c_n = 1$. Окрестность бесконечности мы рассмотрим отдельно.

Рассмотрим a -нормированные абелевы дифференциалы $d\Omega(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2; \mathbf{z})$ и соответствующие им интегралы $\Omega(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2; \mathbf{z}) = \int_{e_3}^{\mathbf{z}} d\Omega(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2; \xi)$, где интегрирование

ведется по рассеченной римановой поверхности $\tilde{X}$. Введем функции

$$F_1(\mathbf{z}) := \exp\{\Omega(\infty^{(1)}, \infty^{(2)}; \mathbf{z})\},$$

$$F_2(\mathbf{z}) := \exp\left\{\Omega(\infty^{(1)}, \mathbf{z}_n; \mathbf{z}) + \sum_{j=1}^m \Omega(\infty^{(2)}, \alpha_j; \mathbf{z}) - \sum_{j=1}^m \Omega(\infty^{(2)}, \beta_j; \mathbf{z})\right\}.$$

Из явного вида абелевых дифференциалов (2.1) следует, что интегралы, участвующие в определении функций F_1 и F_2 , однозначны по модулю $2\pi i$. Поэтому эти функции являются однозначными и кусочно мероморфными при $\mathbf{z} \in X \setminus \mathcal{L}$.

Пусть $F_3(\mathbf{z}) := F_1^{n-1}(\mathbf{z})F_2(\mathbf{z})$. Тогда дивизоры функций F_3 и Ψ совпадают с точностью до знака, а именно, $(F_3) = -(\Psi)$. Рассмотрим далее первый лист римановой поверхности, $\mathbf{z} = z^{(1)}$.

Найдем скачок F_3 на кривой $\mathcal{L}$. Из явного вида абелевых дифференциалов получаем следующие краевые условия:

$$d\Omega^+(\infty^{(1)}, \infty^{(2)}; \zeta) + d\Omega^-(\infty^{(1)}, \infty^{(2)}; \zeta) = 0,$$

$$d\Omega^+(\infty^{(j)}, \mathbf{z}; \zeta) + d\Omega^-(\infty^{(j)}, \mathbf{z}; \zeta) = -\frac{d\zeta}{\zeta - z}, \quad j = 1, 2, \quad (3.1)$$

где $\zeta \in S$. Для функции F_1 из (3.1) имеем

$$\int_{e_3}^{\zeta} d\Omega^+(\infty^{(1)}, \infty^{(2)}; t) + d\Omega^-(\infty^{(1)}, \infty^{(2)}; t) = -\oint_{\mathbf{b}_1} d\Omega(\infty^{(1)}, \infty^{(2)}; \mathbf{t}), \quad \zeta \in S_1,$$

$$\int_{e_3}^{\zeta} d\Omega^+(\infty^{(1)}, \infty^{(2)}; t) + d\Omega^-(\infty^{(1)}, \infty^{(2)}; t) = 0, \quad \zeta \in S_2. \quad (3.2)$$

Для функции F_2 из (3.1) имеем

$$\begin{aligned} & \int_{e_3}^{\zeta} d\Omega^+(\infty^{(1)}, \mathbf{z}_n; t) + d\Omega^-(\infty^{(1)}, \mathbf{z}_n; t) + \sum_{j=1}^m [d\Omega^+(\infty^{(2)}, \alpha_j; t) + d\Omega^-(\infty^{(2)}, \alpha_j; t) \\ & \quad - d\Omega^+(\infty^{(2)}, \beta_j; t) - d\Omega^-(\infty^{(2)}, \beta_j; t)] \\ & = \log \frac{e_3 - z_n}{\zeta - z_n} + \sum_{j=1}^m \left[\log \frac{e_3 - a_j}{\zeta - a_j} - \log \frac{e_3 - b_j}{\zeta - b_j} \right] - \oint_{\mathbf{b}_1} d\Omega(\infty^{(1)}, \mathbf{z}_n; \mathbf{t}) \\ & \quad + \sum_{j=1}^m \left[\oint_{\mathbf{b}_1} d\Omega(\infty^{(2)}, \beta_j; \mathbf{t}) - \oint_{\mathbf{b}_1} d\Omega(\infty^{(2)}, \alpha_j; \mathbf{t}) \right], \quad \zeta \in S_1, \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} & \int_{e_3}^{\zeta} d\Omega^+(\infty^{(1)}, \mathbf{z}_n; t) + d\Omega^-(\infty^{(1)}, \mathbf{z}_n; t) + \sum_{j=1}^m [d\Omega^+(\infty^{(2)}, \alpha_j; t) + d\Omega^-(\infty^{(2)}, \alpha_j; t) \\ & \quad - d\Omega^+(\infty^{(2)}, \beta_j; t) - d\Omega^-(\infty^{(2)}, \beta_j; t)] \\ & = \log \frac{e_3 - z_n}{\zeta - z_n} + \sum_{j=1}^m \left[\log \frac{e_3 - a_j}{\zeta - a_j} - \log \frac{e_3 - b_j}{\zeta - b_j} \right], \quad \zeta \in S_2. \end{aligned}$$

Из (3.2) и (3.3) получаем следующие краевые условия для функции F_3 :

$$F_3^+(\zeta)F_3^-(\zeta) = \frac{\hat{c}_j}{\zeta - z_n} \frac{\zeta - \beta_1}{\zeta - \alpha_1} \dots \frac{\zeta - \beta_m}{\zeta - \alpha_m}, \quad \zeta \in S_j, \quad j = 1, 2, \quad (3.4)$$

где

$$\begin{aligned}\widehat{c}_2 &= (e_3 - z_n) \frac{e_3 - \alpha_1}{e_3 - \beta_1} \cdots \frac{e_3 - \alpha_m}{e_3 - \beta_m}, \\ \widehat{c}_1 &= \widehat{c}_2 \exp \left\{ - \oint_{\mathbf{b}_1} \left[d\Omega(\infty^{(1)}, \mathbf{z}_n; \mathbf{t}) + (n-1) d\Omega(\infty^{(1)}, \infty^{(2)}; \mathbf{t}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{j=1}^m d\Omega(\infty^{(2)}, \alpha_j; \mathbf{t}) - \sum_{j=1}^m d\Omega(\infty^{(2)}, \beta_j; \mathbf{t}) \right] \right\}.\end{aligned}\quad (3.5)$$

Введем теперь функцию $f_1(z) := F_3(z^{(1)})\Psi(z^{(1)})$ и найдем ее явное представление. Исходное граничное условие переписывается так:

$$\rho(\zeta)\Psi^+(\zeta^{(1)}) = \Psi^-(\zeta^{(2)}), \quad \zeta \in S, \quad \rho(\zeta)\Psi^-(\zeta^{(1)}) = \Psi^+(\zeta^{(2)}), \quad \zeta \in S.$$

Отсюда получаем

$$\Psi^+(\zeta^{(1)})\Psi^-(\zeta^{(1)}) = \frac{v(\zeta)}{\rho(\zeta)}, \quad \zeta \in S, \quad \Psi^+(\zeta^{(2)})\Psi^-(\zeta^{(2)}) = v(\zeta)\rho(\zeta), \quad \zeta \in S.$$

Тогда

$$f_1^+(\zeta)f_1^-(\zeta) = \frac{\widehat{c}_j}{\rho(\zeta)}, \quad \zeta \in S_j, \quad j = 1, 2. \quad (3.6)$$

Функция $\log f_1(z)$ многозначна в области D за счет приращения аргумента $f_1(z)$ при обходе кривых S_1 и S_2 . Так как $\oint_{\mathbf{a}_1} d\Omega_1(\mathbf{z}) = 1$, то существует $k_n \in \mathbb{Z}$ такое, что приращение аргумента функции $u(z) := \log f_1(z) + 2\pi i k_n \Omega_1(z)$ при обходе S_1 равно нулю. В силу того, что $D = \overline{\mathbb{C}}(S_1 \cup S_2)$, приращение аргумента $u(z)$ при обходе S_2 также равно нулю. Следовательно, $u(z)$ – однозначная и голоморфная в области D функция.

Пусть $u_0(z) := u(z)/w(z)$. Из (3.6) получаем

$$u^+(\zeta) + u^-(\zeta) = \begin{cases} -\log \rho(\zeta) + \widetilde{c}_1 - 2\pi i k B_1 + 2\pi i n_1, & \zeta \in S_1, \\ -\log \rho(\zeta) + \widetilde{c}_2 + 2\pi i n_2, & \zeta \in S_2, \end{cases}$$

где $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$. Отсюда

$$u_0^+(\zeta) - u_0^-(\zeta) = \begin{cases} -\frac{\log \rho(\zeta)}{w^+(\zeta)} + \frac{\widetilde{c}_1}{w^+(\zeta)} - \frac{2\pi i k B_1}{w^+(\zeta)} + \frac{2\pi i n_1}{w^+(\zeta)}, & \zeta \in S_1, \\ -\frac{\log \rho(\zeta)}{w^+(\zeta)} + \frac{\widetilde{c}_2}{w^+(\zeta)} + \frac{2\pi i n_2}{w^+(\zeta)}, & \zeta \in S_2, \end{cases} \quad (3.7)$$

где $\widetilde{c}_j = \log \widehat{c}_j$, $B_1 = \mathbf{b}$ -период дифференциала $d\Omega_1(\mathbf{z})$.

Функция $u_0(z)$ имеет нуль кратности два в точке $z = \infty$. Отсюда следует равенство нулю коэффициента при $1/z$ соответствующего ряда Лорана. Используя (3.7), это равенство можно записать в виде

$$\frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{\log \rho(\zeta)}{w^+(\zeta)} d\zeta = \frac{\widetilde{c}_1 + 2\pi i n_1 - 2\pi i k B_1}{2\pi i} \int_{S_1} \frac{d\zeta}{w^+(\zeta)} + \frac{\widetilde{c}_2 + 2\pi i n_2}{2\pi i} \int_{S_2} \frac{d\zeta}{w^+(\zeta)}.$$

Воспользуемся соотношениями

$$\int_{S_1} d\Omega_1^+(\zeta) = \frac{1}{2} \oint_{\mathbf{a}_1} d\Omega_1(\zeta) = \frac{1}{2}, \quad \int_{S_2} d\Omega_1^+(\zeta) = -\frac{1}{2}.$$

Получаем

$$\frac{1}{\pi i} \int_S \log \rho(\zeta) d\Omega_1^+(\zeta) = \frac{\tilde{c}_1 - \tilde{c}_2}{2\pi i} + (n_1 - n_2) - kB_1 \equiv \frac{\tilde{c}_1 - \tilde{c}_2}{2\pi i}. \quad (3.8)$$

Из соотношения Римана (2.2) и явного вида констант $\hat{c}_1$ и $\hat{c}_2$ (см. (3.5)) имеем

$$\tilde{c}_1 - \tilde{c}_2 = 2\pi i \left[\int_{\infty^{(1)}}^{\mathbf{z}_n} d\Omega_1(\zeta) + (n-1) \int_{\infty^{(1)}}^{\infty^{(2)}} d\Omega_1(\zeta) + \sum_{j=1}^m \int_{\alpha_j}^{\beta_j} d\Omega_1(\zeta) \right].$$

Подставляя это равенство в (3.8), получаем

$$\int_{\infty^{(1)}}^{\mathbf{z}_n} d\Omega_1(\zeta) \equiv \frac{1}{\pi i} \int_S \log \rho(\zeta) d\Omega_1^+(\zeta) - (n-1) \int_{\infty^{(1)}}^{\infty^{(2)}} d\Omega_1(\zeta) + \sum_{j=1}^m \int_{\alpha_j}^{\beta_j} d\Omega_1(\zeta). \quad (3.9)$$

Из соотношения Римана (2.2) и равенств (2.4) и (2.5) следует, что

$$\int_{\infty^{(1)}}^{\infty^{(2)}} d\Omega_1(\zeta) = \tau_1(\infty) + \omega_1(\infty)B_1. \quad (3.10)$$

Тогда (3.9) переписывается в таком виде:

$$\begin{aligned} \int_{\infty^{(1)}}^{\mathbf{z}_n} d\Omega_1(\zeta) &\equiv \frac{1}{\pi i} \int_S \log \rho(\zeta) d\Omega_1^+(\zeta) - (n-1)\tau_1(\infty) - (n-1)\omega_1(\infty)B_1 \\ &\quad + \sum_{j=1}^m \int_{\alpha_j}^{\beta_j} d\Omega_1(\zeta). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Вернемся к формулам (3.7) и продолжим вывод явной формулы для функции u_0 . Преобразуем краевые условия к следующему виду:

$$u_0^+(\zeta) - u_0^-(\zeta) = \begin{cases} -\frac{\log \rho(\zeta)}{w^+(\zeta)} + \frac{\tilde{c}_2}{w^+(\zeta)} + \frac{2\pi i n_2}{w^+(\zeta)} \\ \quad + \frac{\tilde{c}_1 - \tilde{c}_2}{w^+(\zeta)} + \frac{2\pi i(n_1 - n_2)}{w^+(\zeta)} - \frac{2\pi i k B_1}{w^+(\zeta)}, & \zeta \in S_1, \\ -\frac{\log \rho(\zeta)}{w^+(\zeta)} + \frac{\tilde{c}_2}{w^+(\zeta)} + \frac{2\pi i n_2}{w^+(\zeta)}, & \zeta \in S_2. \end{cases}$$

С учетом (3.8) получаем

$$u_0^+(\zeta) - u_0^-(\zeta) = \begin{cases} -\frac{\log \rho(\zeta)}{w^+(\zeta)} + \frac{\tilde{c}_2}{w^+(\zeta)} + \frac{2\pi i n_2}{w^+(\zeta)} + \frac{2 \int_S \log \rho(\zeta) d\Omega_1^+(\zeta)}{w^+(\zeta)}, & \zeta \in S_1, \\ -\frac{\log \rho(\zeta)}{w^+(\zeta)} + \frac{\tilde{c}_2}{w^+(\zeta)} + \frac{2\pi i n_2}{w^+(\zeta)}, & \zeta \in S_2. \end{cases} \quad (3.12)$$

В силу (2.6) функция u_0 восстанавливается по своим краевым условиям (3.12) при помощи интеграла типа интеграла Коши. Для функции $u(z) = u_0(z)w(z)$ получаем

$$u(z) = \frac{w(z)}{2\pi i} \int_S \frac{\log \rho(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)w^+(\zeta)} + \frac{\tilde{c}_2}{2} + \pi i n_2 - \lambda(z)w(z),$$

где

$$\lambda(z) = \frac{\lambda_1}{2\pi i} \int_{S_1} \frac{d\zeta}{(\zeta - z)w^+(\zeta)}, \quad \lambda_1 = 2 \int_S \log \rho(\zeta) d\Omega_1^+(\zeta).$$

Учитывая, что $\log f_1(z) = u(z) - 2\pi i k_n \Omega_1(z)$, для функции $f_1(z)$ имеем

$$f_1(z) = \exp \left\{ \frac{w(z)}{2\pi i} \int_S \frac{\log \rho(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)w^+(\zeta)} + \frac{\tilde{c}_2}{2} + \pi i n_2 - \lambda(z)w(z) - 2\pi i k_n \Omega_1(z) \right\}. \quad (3.13)$$

Условие

$$\Psi(z^{(1)})\Psi(z^{(2)}) = (z - z_n) \frac{z - \alpha_1}{z - \beta_1} \dots \frac{z - \alpha_m}{z - \beta_m}$$

определяет функцию Ψ с точностью до ± 1 , так что можно считать, что $e^{\pi i n_2} = 1$, т.е. $n_2 = 0$.

Комбинируя (3.8), (3.10), (3.11), находим, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi i} \int_S \log \rho(\zeta) d\Omega_1^+(\zeta) &= \int_{\infty^{(1)}}^{z_n} d\Omega_1(\zeta) + (n-1)\tau_1(\infty) + (n-1)\omega_1(\infty)B_1 - k_n B_1 \\ &+ \sum_{j=1}^m \int_{\alpha_j}^{\beta_j} d\Omega_1(\zeta). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Рассматривая мнимую часть этого равенства и учитывая условие $\text{Im } B_1 > 0$, получаем следующее представление для числа k_n :

$$k_n = (n-1)\omega_1(\infty) + \gamma_n, \quad \gamma_n \in \mathbb{R}. \quad (3.15)$$

Заметим, что величина γ_n , возникающая в (3.15), равномерно ограничена по n , т.е. $\gamma_n = O(1)$, $n \rightarrow \infty$. Для доказательства этого факта достаточно воспользоваться равенством (3.14), рассмотрев его мнимую часть. Так как интегрирование идет по рассеченной римановой поверхности $\tilde{X}$, то величина $\text{Im} \int_{\infty^{(1)}}^{z_n} d\Omega_1(\zeta)$ равномерно ограничена при $z_n \in X$. Следовательно, равномерно ограничена по n и величина γ_n .

Проинтегрировав равенство (2.3) по пути от точки e_3 до точки $z \in X$, лежащему в рассеченной римановой поверхности $\tilde{X}$, получим

$$\Omega(\infty^{(1)}, \infty^{(2)}; z) = -G(z) - 2\pi i \omega_1(\infty) \Omega_1(z). \quad (3.16)$$

Комбинируя формулы (3.13), (3.15), (3.16), равенство $f_1(z) = \Psi(z^{(1)})F_3(z^{(1)})$ и явное представление функции F_3 , находим искомое представление для функции $\Psi(z^{(1)})$:

$$\begin{aligned} \Psi(z^{(1)}) &= \Phi^{n-1}(z) \\ &\times \exp \left\{ \Omega(z_n, \infty^{(1)}; z^{(1)}) + \sum_{j=1}^m \Omega(\alpha_j, \infty^{(2)}; z^{(1)}) - \sum_{j=1}^m \Omega(\beta_j, \infty^{(2)}; z^{(1)}) \right\} \\ &\times \exp \left\{ \frac{w(z)}{2\pi i} \int_S \frac{\log \rho(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)w^+(\zeta)} + \frac{\tilde{c}_2}{2} - \lambda(z)w(z) \right\} \exp \{ -2\pi i \gamma_n \Omega_1(z^{(1)}) \}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Представление для $\Psi(z^{(2)})$ получается аналогичным образом:

$$\begin{aligned} \Psi(z^{(2)}) &= \Phi^{-(n-1)}(z) \\ &\times \exp \left\{ \Omega(\mathbf{z}_n, \infty^{(1)}; z^{(2)}) + \sum_{j=1}^m \Omega(\alpha_j, \infty^{(2)}; z^{(2)}) - \sum_{j=1}^m \Omega(\beta_j, \infty^{(2)}; z^{(2)}) \right\} \\ &\times \exp \left\{ -\frac{w(z)}{2\pi i} \int_S \frac{\log \rho(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)w^+(\zeta)} + \frac{\tilde{c}_2}{2} + \lambda(z)w(z) \right\} \exp \{-2\pi i \gamma_n \Omega_1(z^{(2)})\}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

3.3. Формулы (3.17) и (3.18) верны в случае, когда $z_n \in D \setminus \{\infty\}$. Для рассмотрения окрестности бесконечности достаточно ввести другую нормировку

$$\Psi(z^{(1)})\Psi(z^{(2)}) = \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) \frac{z - \alpha_1}{z - \beta_1} \cdots \frac{z - \alpha_m}{z - \beta_m}, \quad z_n \neq 0.$$

Тогда все рассуждения предыдущего пункта сохранятся с точностью до значений констант $\hat{c}_1$ и $\hat{c}_2$.

§ 4. Асимптотика функции остатка и полиномов Паде

4.1. Воспользуемся задачей Римана, решенной выше, для стандартного вывода асимптотики функции остатка $R_n(z)$ и знаменателей аппроксимаций Паде $q_n(z)$ (см. [16]). Напомним, что мы рассматриваем функцию f вида (1.2) и ее диагональные аппроксимации Паде f_n в точке $z = \infty$.

Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ — полюсы функции f в области D . По теореме Шталя (см. § 1) $f_n(z) \xrightarrow{\text{cap}} f(z)$, $z \in D$. Отсюда следует существование m последовательностей $\{\alpha_{1,n}\}, \{\alpha_{2,n}\}, \dots, \{\alpha_{m,n}\}$ нулей знаменателей Паде q_n таких, что $\alpha_{j,n} \rightarrow \alpha_j$, $n \rightarrow \infty$. Примем для каждого фиксированного индекса n точки β_j из формулировки краевой задачи Римана (см. § 3) равными $\alpha_{j,n}^{(2)}$, а точки α_j — равными $\alpha_j^{(1)}$. Обозначим $\alpha_{j,n} := \beta_j$. Таким образом, имеем $\pi(\alpha_{j,n}) \rightarrow \pi(\alpha_j)$, $n \rightarrow \infty$.

Введем мероморфную в $X \setminus \mathcal{L}$ функцию $F(\mathbf{z})$:

$$F(\mathbf{z}) := \Psi(\mathbf{z}) \begin{cases} R_n(z)w(z), & \mathbf{z} \in D^{(1)}, \\ -2q_n(z), & \mathbf{z} \in D^{(2)}, \end{cases}$$

где функция $\Psi(\mathbf{z})$ — решение краевой задачи Римана (3.17), (3.18). Из вида функции $f(z)$ (1.2) и вида функции остатка (см. определение 2.1) следует, что

$$R_n^+(\zeta) - R_n^-(\zeta) = -\frac{2q_n(\zeta)\rho(\zeta)}{w^+(\zeta)}, \quad \zeta \in S \setminus \{e_1, \dots, e_4\}.$$

Тогда скачок функции F на $\mathcal{L}$ определяется так:

$$F^{(1)}(\zeta) - F^{(2)}(\zeta) = \frac{\chi^{(2)}(\zeta)}{\rho(\zeta)}, \quad \zeta \in \mathcal{L},$$

где $\chi(\mathbf{z}) = \Psi(\mathbf{z})R_n(z)w(\mathbf{z})$, $\mathbf{z} \in D^{(2)}$. Из интегральной формулы (2.6) имеем

$$F(\mathbf{z}) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}^+} \chi^{(2)}(\zeta) \frac{1}{\rho(\zeta)} d\Omega(\mathbf{z}; \zeta) + p_n(z), \quad \mathbf{z} \notin \mathcal{L}, \quad \deg p_n \leq 1. \quad (4.1)$$

Рассмотрим случай $\mathbf{z} \in D^{(1)}$. Функция ρ голоморфна на каждой кривой $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$, поэтому контур интегрирования в (4.1) можно деформировать, не меняя значения интеграла, в близкий контур $L^{(2)}$, целиком лежащий в $D^{(2)}$, т.е.

$$F_1(z) := F(z^{(1)}) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L^{(2)}} \chi(\zeta^{(2)}) \frac{1}{\rho(\zeta)} d\Omega(z^{(1)}; \zeta^{(2)}) + p_n(z). \quad (4.2)$$

Имеем

$$\begin{aligned} \chi(\zeta^{(2)}) &= R_n(\zeta) w(\zeta^{(2)}) \Psi(\zeta^{(2)}) = -\Psi(\zeta^{(1)}) R_n(\zeta) w(\zeta^{(1)}) \frac{\Psi(\zeta^{(1)}) \Psi(\zeta^{(2)})}{\Psi^2(\zeta^{(1)})} \\ &= -F(\zeta^{(1)}) \frac{v(\zeta)}{\Psi^2(\zeta^{(1)})}, \end{aligned}$$

где $v(\zeta)$ определена в п. 3.2. Используя эти равенства, а также равенство $d\Omega(z^{(1)}; \zeta^{(2)}) = d\Omega(z^{(2)}; \zeta^{(1)})$, преобразуем (4.2) к виду

$$F_1(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L^{(1)}} F(\zeta^{(1)}) \frac{v(\zeta)}{\Psi^2(\zeta^{(1)})} \frac{1}{\rho(\zeta)} d\Omega(z^{(2)}; \zeta^{(1)}) + p_n(z). \quad (4.3)$$

Для $F_2(z) := F(z^{(2)})$ аналогичным образом имеем

$$F_2(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L^{(1)}} F(\zeta^{(1)}) \frac{v(\zeta)}{\Psi^2(\zeta^{(1)})} \frac{1}{\rho(\zeta)} d\Omega(z^{(1)}; \zeta^{(1)}) + p_n(z). \quad (4.4)$$

4.2. Пусть $\varepsilon > 0$. Обозначим

$$D_\varepsilon := \{z \in \mathbb{C} : g_D(z, \infty) > \varepsilon\}, \quad L(\varepsilon) := \partial D_\varepsilon, \quad S_\varepsilon := \{z \in \mathbb{C} : g_D(z, \infty) < \varepsilon\}.$$

Вес ρ голоморфен в окрестности компакта S . Будем считать, что ε изменяется в таком диапазоне, что вес ρ голоморфен в S_ε . Зафиксируем некое допустимое значение ε и возьмем последовательность $\{\varepsilon_n\}$ такую, что $\varepsilon_n \in (0, 3\varepsilon/4)$ и

$$\max_{z \in L(\varepsilon_n)} |p_n(z)| = O\left(\min_{z \in L(\varepsilon_n)} |p_n(z)|\right). \quad (4.5)$$

Действительно, такая последовательность существует. Пусть $\deg p_n(z) = 1$, иначе равенство (4.5) очевидно. Тогда $p_n(z) = k_n(z - t_n)$, $k_n \neq 0$. Выберем последовательность $\{\varepsilon_n\}$ так, что $|z - t_n| > c > 0$ для некоторой константы c , для любых n и $z \in L(\varepsilon_n)$. Пусть для фиксированного индекса n в точке z_1 достигается максимум из (4.5), а в точке z_2 – минимум. Имеем равномерную по n оценку

$$\frac{p_n(z_1)}{p_n(z_2)} = \frac{z_1 - t_n}{z_2 - t_n} = 1 + \frac{z_1 - z_2}{z_2 - t_n} \leq 1 + \frac{\text{diam}\{\varepsilon/3 < g_D(z, \infty) < 2\varepsilon/3\}}{c}.$$

Отсюда следует требуемое равенство (4.5). Пусть $M_n := \max_{z \in L(\varepsilon_n)} |F_1(z)|$, $m_n := \max_{z \in L(\varepsilon_n)} |p_n(z)|$.

Вернемся к представлению (4.3). В качестве близкого к L контура $L^{(1)}$ возьмем $L(\varepsilon_n)$. Тогда

$$F_1(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L(\varepsilon_n)} F_1(\zeta) \frac{v(\zeta)}{\Psi^2(\zeta)} \frac{1}{\rho(\zeta)} d\Omega(z^{(2)}; \zeta^{(1)}) + p_n(z).$$

С учетом явного вида функции Ψ и условия (4.5) получаем равномерную для $z \in L(\varepsilon_n)$ оценку

$$|F_1(z) - p_n(z)| = o(1) \max_{\zeta \in L(\varepsilon_n)} |F_1(\zeta)| = o(1)M_n.$$

Заметим, что здесь и всюду ниже $o(1) = o(q^n)$, $0 < q < 1$. Отсюда следует, что $m_n = M_n(1 + o(1))$. Объединяя эти равенства, получаем

$$|F_1(z) - p_n(z)| = o(1) \max_{z \in L(\varepsilon_n)} |p_n(z)| = o(1)m_n, \quad z \in L(\varepsilon_n). \quad (4.6)$$

Пусть $t := 3\varepsilon/4$. Рассмотрим многозначные аналитические функции $F_1(z)/\Phi(z)$ и $p_n(z)/\Phi(z)$ при $z \in \overline{D}_t$, где $\Phi(z)$ – многозначная отображающая функция. Так как модули этих функций однозначны, то можно использовать принцип максимума модуля:

$$\begin{aligned} \max_{z \in \overline{D}_t} \left| \frac{F_1(z) - p_n(z)}{\Phi(z)} \right| &\leq \max_{z \in L(\varepsilon_n)} \left| \frac{F_1(z) - p_n(z)}{\Phi(z)} \right| = O(1) \max_{z \in L(\varepsilon_n)} |F_1(z) - p_n(z)| \\ &= o(1)m_n. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Введем теперь новую нормировку, а именно, положим $m_n = 1$. Тогда из (4.7) получаем

$$\left| \frac{F_1(z)}{\Phi(z)} - \frac{p_n(z)}{\Phi(z)} \right| = o(1), \quad z \in \overline{D}_t. \quad (4.8)$$

В силу нормировки и по принципу максимума имеем $\max_{z \in L(\tau)} |p_n(z)| > m_n = 1$, $\tau > t$. Отсюда следует, что функция $p_n(z)/\Phi(z)$ не может сходиться к тождественно нулевой функции. С учетом этого из (4.7) получаем, что асимптотическое поведение нулей функций $F_1(z)/\Phi(z)$ и $p_n(z)/\Phi(z)$ одинаково. Аналогично можно доказать, что

$$\left| \frac{F_2(z)}{\Phi(z)} - \frac{p_n(z)}{\Phi(z)} \right| = o(1), \quad z \in \overline{D}_t. \quad (4.9)$$

Отсюда следует, что и асимптотическое поведение нулей функций $F_2(z)/\Phi(z)$ и $p_n(z)/\Phi(z)$ одинаково.

Из (4.8) и (4.9) и равенства $F(z_n) = 0$ следует, что $\deg p_n = 1$ при достаточно больших n . Пусть $p_n(z) = k_n(z - t_n)$. Тогда получаем, что $t_n - z_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Из (4.5), (4.6), определения функции F и равенства $\Psi(z^{(1)})\Psi(z^{(2)}) = v(z)$ следует, что

$$\max_{z \in L(\varepsilon_n)} \left| \frac{R_n(z)w(z)}{k_n\Psi(z^{(2)})} \frac{z - \alpha_1}{z - \alpha_{1,n}} \cdots \frac{z - \alpha_m}{z - \alpha_{m,n}} - \frac{p_n(z)}{k_n(z - z_n)} \right| = o(1), \quad n \rightarrow \infty,$$

откуда

$$\left| \frac{R_n(z)w(z)}{k_n\Psi(z^{(2)})} \frac{z - \alpha_1}{z - \alpha_{1,n}} \cdots \frac{z - \alpha_m}{z - \alpha_{m,n}} - 1 \right| = o(1), \quad n \rightarrow \infty, \quad z \in \overline{D}_t. \quad (4.10)$$

Аналогично

$$\left| \frac{-2q_n(z)}{k_n\Psi(z^{(1)})} \frac{z - \alpha_1}{z - \alpha_{1,n}} \cdots \frac{z - \alpha_m}{z - \alpha_{m,n}} - 1 \right| = o(1) \quad n \rightarrow \infty, \quad z \in \overline{D}_t. \quad (4.11)$$

Таким образом, мы получили равномерные асимптотики функции остатка и знаменателей аппроксимаций Паде.

§ 5. Доказательство теоремы о равномерном приближении

5.1. Перейдем к доказательству теоремы, сформулированной в § 1. Воспользуемся полученными асимптотиками (4.9) и (4.10) и явными представлениями для функции $\Psi(\mathbf{z})$, полученными в § 3. Напомним, что мы рассматриваем случай общего положения, когда множество полюсов аппроксимаций Паде f_n , т.е. множество нулей полиномов q_n , всюду плотно в $\overline{\mathbb{C}}$ при $n \in \mathbb{N}$. Из (4.10) и вида дивизора функции Ψ следует, что множество $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ всюду плотно в $\overline{\mathbb{C}}$.

Пусть

$$d(x, y) = \frac{|x - y|}{\sqrt{1 + |x|^2} \sqrt{1 + |y|^2}}$$

– сферическая метрика в $\overline{\mathbb{C}}$.

ЛЕММА. Точки $\mathbf{z}_{n+1}$ и $\mathbf{z}_n$ или находятся на разных листах римановой поверхности, или расстояние между их проекциями z_n и z_{n+1} ограничено от нуля, т.е. существует такая константа $c = c(f) > 0$, что $d(z_{n+1}, z_n) > c$ для любого $n > N_0$, где N_0 – некоторое число.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть точки $\mathbf{z}_{n+1}$ и $\mathbf{z}_n$ лежат на одном листе римановой поверхности. Для доказательства леммы воспользуемся равенствами (3.14) и (3.15). Учитывая, что $\beta_j = \alpha_{j,n}$, имеем

$$\frac{1}{\pi i} \int_S \log \rho(\zeta) d\Omega_1^+(\zeta) = \int_{\infty^{(1)}}^{\mathbf{z}_n} d\Omega_1(\zeta) + (n-1)\tau_1(\infty) - \gamma_n B_1 + \sum_{j=1}^m \int_{\alpha_j}^{\alpha_{j,n}} d\Omega_1(\zeta).$$

Отсюда

$$\int_{\mathbf{z}_n}^{\mathbf{z}_{n+1}} d\Omega_1(\zeta) = -\tau_1(\infty) + (\gamma_{n+1} - \gamma_n) B_1 + \sum_{j=1}^m \int_{\alpha_{j,n+1}}^{\alpha_{j,n}} d\Omega_1(\zeta). \quad (5.1)$$

В силу рассуждений, приведенных в конце § 2, имеем $\gamma_n = O(1)$, $n \rightarrow \infty$. Из (5.1) получаем, что существует константа $\tilde{c} > 0$ такая, что для некоторого $N_0 \in \mathbb{N}$

$$\left| \int_{z_n}^{z_{n+1}} \frac{dz}{w(z)} \right| > \tilde{c}, \quad n > N_0, \quad (5.2)$$

причем интегрирование ведется уже в расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$.

Теперь утверждение леммы легко доказать методом от противного. Пусть существует подпоследовательность $\tilde{\Lambda} \in \mathbb{N}$ такая, что $d(z_n, z_{n+1}) \rightarrow 0$, $n \in \tilde{\Lambda}$. В случае, когда z_n и z_{n+1} ограничены, сферическая метрика эквивалентна евклидовой метрике и $|z_n - z_{n+1}| \rightarrow 0$. С другой стороны, подынтегральное выражение в (5.2) ограничено, откуда получаем, что интеграл из (5.2) стремится к нулю. Если же $z_n \rightarrow \infty$ и $z_{n+1} \rightarrow \infty$, то имеем

$$\frac{|z_n - z_{n+1}|}{|z_n| |z_{n+1}|} \rightarrow 0.$$

Тогда $\int_{z_n}^{z_{n+1}} \frac{dz}{z^2} \rightarrow 0$. С другой стороны,

$$\int_{z_n}^{z_{n+1}} \frac{dz}{w(z)} - \int_{z_n}^{z_{n+1}} \frac{dz}{z^2} = \int_{z_n}^{z_{n+1}} \frac{z^2 - w(z)}{w(z)z^2} dz \rightarrow 0.$$

Следовательно,

$$\int_{z_n}^{z_{n+1}} \frac{dz}{w(z)} \rightarrow 0,$$

что противоречит (5.2). Лемма доказана.

5.2. Рассмотрим функцию $\hat{f}_n$ из утверждения теоремы:

$$\hat{f}_n(z) = \begin{cases} f_n(z), & f_n(z) \neq \infty \text{ в } U_{1/n}(z), \\ f_{n+1}(z) & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Введем множество

$$\tilde{D}_n := \begin{cases} D \setminus U_{1/n}(z_n), & \mathbf{z}_n \in D^{(2)}, \\ D & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

здесь $\mathbf{z}_n$ – нуль функции Ψ из представлений (3.17) и (3.18). В силу доказанного в п. 4.2 при $\mathbf{z}_n \in D^{(2)}$ точка z_n сближается с ложным полюсом аппроксимации f_n с геометрической скоростью. Поэтому при доказательстве сходимости последовательности $\hat{f}_n$ вместо $1/n$ -окрестности полюса f_n можно рассматривать $1/n$ -окрестность точки z_n .

Для доказательства сходимости $\hat{f}_n(z) \Rightarrow f(z)$ на компактах в области Штала D достаточно показать, что $[f(z) - f_n(z)]I_{\tilde{D}_n} \Rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, где через I_M обозначен индикатор множества M . Действительно, для $z \in D$ по доказанной лемме, начиная с достаточно больших индексов n , имеем либо $z \in \tilde{D}_n$, либо $z \in \tilde{D}_{n+1}$. Исходя из этой альтернативы и строится функция $\hat{f}_n$: в первом случае берется аппроксимация f_n , во втором – f_{n+1} .

Для дальнейшего доказательства воспользуемся асимптотиками (4.9) и (4.10). Имеем

$$f(z) - f_n(z) = \frac{R_n(z)}{q_n(z)} = \frac{-2\Psi(z^{(2)})}{w(z)\Psi(z^{(1)})}(1 + o(1)), \quad n \rightarrow \infty.$$

Рассмотрим отношение $\Psi(z^{(2)})/\Psi(z^{(1)})$. Из (3.17) и (3.18) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{\Psi(z^{(2)})}{\Psi(z^{(1)})} &= \Phi^{-2(n-1)}(z) \exp\{\Omega(\mathbf{z}_n, \infty^{(1)}; z^{(2)}) - \Omega(\mathbf{z}_n, \infty^{(1)}; z^{(1)})\} \\ &\times \exp\left\{\sum_{j=1}^m \Omega(\alpha_j, \alpha_{j,n}; z^{(2)}) - \sum_{j=1}^m \Omega(\alpha_j, \alpha_{j,n}; z^{(1)})\right\} \\ &\times \exp\left\{\frac{w(z)}{\pi i} \int_S \frac{\log \rho(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)w^+(\zeta)} - 2\lambda(z)w(z)\right\} \\ &\times \exp\{-2\pi i \gamma_n [\Omega_1(z^{(2)}) - \Omega_1(z^{(1)})]\}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Докажем, что правая часть этого равенства, умноженная на $I_{\tilde{D}_n}$, равномерно стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Рассмотрим n такое, что $z \in \tilde{D}_n$. Множитель $\Phi^{-2(n-1)}(z) \rightarrow 0$ со скоростью геометрической прогрессии и равномерно в области D . Три последних множителя, очевидно, равномерно ограничены по n и z . Рассмотрим подробно выражение из первого множителя

$L_n(z) := \Omega(\mathbf{z}_n, \infty^{(1)}; z^{(2)}) - \Omega(\mathbf{z}_n, \infty^{(1)}; z^{(1)})$. Из явного представления для абелевых дифференциалов получаем, что

$$L_n(z) = - \int_{e_1}^z \frac{w(\mathbf{z}_n)}{w(\zeta)(\zeta - z_n)} d\zeta - \int_{e_1}^z \frac{\zeta - c_n}{w(\zeta)} d\zeta, \quad (5.4)$$

где константа c_n обеспечивает a -нормированность дифференциала. Из условия a -нормированности $\oint_{\mathbf{a}_1} L_n(z) = 0$ найдем ее явный вид:

$$c_n = \left[\frac{w(\mathbf{z}_n)}{z_n} \oint_{\mathbf{a}_1} \frac{d\zeta}{w(\zeta)(\zeta/z_n - 1)} + \oint_{\mathbf{a}_1} \frac{\zeta}{w(\zeta)} d\zeta \right] / \oint_{\mathbf{a}_1} \frac{\zeta}{w(\zeta)} d\zeta. \quad (5.5)$$

Рассмотрим случай $|z_n| \leq K$. Если $|z - z_n| > 1/n$, то из (5.4) и (5.5) следует, что $L_n(z)$ растет не быстрее, чем $\log n$. Если $|z - z_n| \leq 1/n$ и $\mathbf{z}_n \in D^{(1)}$, то функция $\exp\{\Omega(\mathbf{z}_n, \infty^{(1)}; z^{(2)})\}$ равномерно ограничена, а $\exp\{-\Omega(\mathbf{z}_n, \infty^{(1)}; z^{(1)})\} \rightarrow 0$. Следовательно, функция $|\exp\{L_n(z)\}|$ имеет порядок роста не выше, чем n . Учитывая убывание первого множителя из (5.3) со скоростью геометрической прогрессии, получаем сходимость к нулю отношения $\Psi(z^{(2)})/\Psi(z^{(1)})$.

Теперь рассмотрим случай, когда $|z_n| > K$. Подставляя (5.5) в (5.4), получаем

$$L_n(z) = - \frac{w(\mathbf{z}_n)}{z_n} \int_{e_1}^z \frac{d\zeta}{w(\zeta)(\zeta/z_n - 1)} - \int_{e_1}^z \frac{\zeta}{w(\zeta)} d\zeta + \int_{e_1}^z \frac{d\zeta}{w(\zeta)} \left[\frac{w(\mathbf{z}_n)}{z_n} \oint_{\mathbf{a}_1} \frac{d\zeta}{w(\zeta)(\zeta/z_n - 1)} + \oint_{\mathbf{a}_1} \frac{\zeta}{w(\zeta)} dz \right] / \oint_{\mathbf{a}_1} \frac{d\zeta}{w(\zeta)}.$$

Отсюда имеем

$$L_n(z) \oint_{\mathbf{a}_1} \frac{d\zeta}{w(\zeta)} = \frac{w(\mathbf{z}_n)}{z_n} \left[- \int_{e_1}^z \frac{d\zeta}{w(\zeta)(\zeta/z_n - 1)} \oint_{\mathbf{a}_1} \frac{d\zeta}{w(\zeta)} + \int_{e_1}^z \frac{d\zeta}{w(\zeta)} \oint_{\mathbf{a}_1} \frac{d\zeta}{w(\zeta)(\zeta/z_n - 1)} \right] - \int_{e_1}^z \frac{\zeta}{w(\zeta)} d\zeta \oint_{\mathbf{a}_1} \frac{dz}{w(z)} + \oint_{\mathbf{a}_1} \frac{\zeta}{w(\zeta)} d\zeta \int_{e_1}^z \frac{d\zeta}{w(\zeta)}.$$

В правой части от n зависит лишь выражение в квадратных скобках и множитель перед ним. Выражение в квадратных скобках есть $O(1/z_n)$ при $z_n \rightarrow \infty$. Учитывая, что $w(\mathbf{z}_n)/z_n = O(z_n)$, $z_n \rightarrow \infty$, и при $d(z, z_n) > 1/n$ заключаем, что функция $|\exp\{L_n(z)\}|$ имеет порядок роста не выше n . Если $\rho(z, z_n) \leq 1/n$, то, проводя такие же рассуждения, как и в случае $|z_n| < K$, выводим ту же оценку.

Объединяя случаи $|z_n| \leq K$ и $|z_n| > K$, получаем требуемую равномерную сходимость $\Psi(z^{(2)})/\Psi(z^{(1)}) \rightarrow 0$, $z \in \tilde{D}_n$. Теорема доказана.

В заключение автор выражает благодарность С. П. Суетину за постановку задачи и внимание к работе.

Список литературы

- [1] G. Frobenius, "Ueber Relationen zwischen den Näherungsbrüchen von Potenzreihen", *J. Reine Angew. Math.*, **90** (1880), 1–17.
- [2] H. Padé, "Sur la représentation approchée d'une fonction par des fractions rationnelles", *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)*, **9** (1892), 3–93.

- [3] А. А. Гончар, “О сходимости аппроксимаций Паде для некоторых классов мероморфных функций”, *Матем. сб.*, **97(139)**:4(8) (1975), 607–629; англ. пер.: A. A. Gončar, “On convergence of Padé approximants for some classes of meromorphic functions”, *Math. USSR-Sb.*, **26**:4 (1975), 555–575.
- [4] Дж. Бейкер мл., П. Грейвс-Моррис, *Аппроксимации Паде*, 1, 2, Мир, М., 1986; пер. с англ.: G. A. Baker, jr.; P. Graves-Morris, *Padé approximants. Part I*, II, *Encyclopedia Math. Appl.*, **13–14**, Addison-Wesley, Reading, MA, 1981.
- [5] Е. М. Никишин, В. Н. Сорокин, *Рациональные аппроксимации и ортогональность*, Наука, М., 1988; англ. пер.: E. M. Nikishin, V. N. Sorokin, *Rational approximations and orthogonality*, Transl. Math. Monogr., **92**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991.
- [6] С. П. Суетин, “Аппроксимации Паде и эффективное аналитическое продолжение степенного ряда”, *УМН*, **57**:1 (2002), 45–142; англ. пер.: S. P. Suetin, “Padé approximants and efficient analytic continuation of a power series”, *Russian Math. Surveys*, **57**:1 (2002), 43–141.
- [7] А. А. Гончар, “Рациональные аппроксимации аналитических функций”, *Совр. пробл. матем.*, 2003, № 1, 83–106.
- [8] J. Gammel, W. Marshall, L. Morgan, “An application of Padé approximants to heisenberg ferromagnetism and antiferromagnetism”, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, **275**:1361 (1963), 257–270.
- [9] R. March, P. Barone, “Reconstruction of a piecewise constant function from noisy Fourier coefficients by Padé method”, *SIAM J. Appl. Math.*, **60**:4 (2000), 1137–1156.
- [10] В. Ильина, П. Силаев, *Численные методы для физиков-теоретиков*, Ин-т комп. исследований, М.–Ижевск, 2003.
- [11] H. N. A. Ismail, K. R. Raslan, G. S. E. Salem, A. A. Abd Rabboh, “Comparison study between restrictive Taylor, restrictive Padé approximations and Adomian decomposition method for the solitary wave solution of the General KdV equation”, *Appl. Math. Comput.*, **167**:2 (2005), 849–869.
- [12] M. El-Shahed, “Application of differential transform method to non-linear oscillatory systems”, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, **13**:8 (2008), 1714–1720.
- [13] С. Б. Гашков, И. Б. Гашков, “Алгоритм Берлекемпа–Мессе, цепные дроби, аппроксимации Паде и ортогональные многочлены”, *Матем. заметки*, **79**:1 (2006), 45–59; англ. пер.: S. B. Gashkov, I. B. Gashkov, “Berlekamp–Massey algorithm, continued fractions, Padé approximations, and orthogonal polynomials”, *Math. Notes*, **79**:1–2 (2006), 41–54.
- [14] И. В. Андрианов, “Аппроксимации Паде и континуализация для одномерной цепочки масс”, *Матем. моделирование*, **18**:1 (2006), 43–58.
- [15] H. Stahl, “The convergence of Padé approximants to functions with branch points”, *J. Approx. Theory*, **91**:2 (1997), 139–204.
- [16] С. П. Суетин, “О сходимости чебышёвских непрерывных дробей для эллиптических функций”, *Матем. сб.*, **194**:12 (2003), 63–92; англ. пер.: S. P. Suetin, “Convergence of Chebyshëv continued fractions for elliptic functions”, *Sb. Math.*, **194**:12 (2003), 1807–1835.
- [17] С. П. Суетин, “О равномерной сходимости диагональных аппроксимаций Паде для гиперэллиптических функций”, *Матем. сб.*, **191**:9 (2000), 81–114; англ. пер.: S. P. Suetin, “Uniform convergence of Padé diagonal approximants for hyperelliptic functions”, *Sb. Math.*, **191**:9 (2000), 1339–1373.
- [18] С. П. Суетин, “Об интерполяционных свойствах диагональных аппроксимаций Паде эллиптических функций”, *УМН*, **59**:4 (2004), 201–202; англ. пер.: S. P. Suetin, “On interpolation properties of diagonal Padé approximants of elliptic functions”, *Russian Math. Surveys*, **59**:4 (2004), 800–802.

- [19] H. Stahl, “Diagonal Padé approximants to hyperelliptic functions”, *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.* (6), 1996, 121–193.
- [20] S. Dumas, *Sur le développement des fonctions elliptiques en fractions continues*, Thesis, Zurich, 1908.
- [21] B. Beckermann, V. Kaliaguine, “The Diagonal of the Padé table and the approximation of the Weyl function of second-order difference operators”, *Constr. Approx.*, **13**:4 (1997), 481–510.
- [22] Э. И. Зверович, “Краевые задачи теории аналитических функций в гёльдеровских классах на римановых поверхностях”, *УМН*, **26**:1 (1971), 113–179; англ. пер.: E. I. Zverovich, “Boundary value problems in the theory of analytic functions in Hölder classes on Riemann surfaces”, *Russian Math. Surveys*, **26**:1 (1971), 117–192.
- [23] О. Форстер, *Римановы поверхности*, Мир, М., 1980; пер. с нем.: O. Forster, *Riemannsche Flächen*, Heidelberger Taschenbücher, **184**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1977.

Д. В. Христофоров (D. V. Khristoforov)
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: kharden@gmail.com

Поступила в редакцию
20.08.2008 и 27.10.2008