Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Штерн, Критерии слабой и сильной непрерывности представлений топологических групп в банаховых пространствах, *Матем. сб.*, 2002, том 193, номер 9, 139–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm682>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 02:18:04

УДК 512.546+517.987

А. И. Штерн

Критерии слабой и сильной непрерывности представлений топологических групп в банаховых пространствах

Получены некоторые необходимые и достаточные условия слабой и сильной непрерывности представлений топологических групп в банаховых пространствах. В частности, показано, что представление S локально компактной группы G в сопряженном банаховом пространстве непрерывно в сильной (или, что равносильно, в слабой) операторной топологии в том и только том случае, если для некоторого числа q , $0 \leq q < 1$, для любого единичного вектора ξ в пространстве представления S существует такая окрестность $U = U(\xi) \subset G$ единичного элемента $e \in G$, что $\|S(g)\xi - \xi\| \leq q$ для всех $g \in U$. Получены варианты этого критерия для других классов групп (в том числе, не обязательно локально компактных) и уточнения для конечномерных представлений, а также разобраны некоторые примеры. Даны приложения к теории квазипредставлений топологических групп.

Библиография: 37 названий.

§ 1. Введение

Начиная с теоремы Банаха 1932 года [1; теорема 1.4], утверждающей, что измеримый по Бэру гомоморфизм одной полной сепарабельной метризуемой группы в другую непрерывен, изучались условия сильной непрерывности измеримых, борелевских и бэровских гомоморфизмов и представлений топологических групп и полугрупп (см., например, [2]–[10] и родственные результаты в [11]). Однако условие измеримости отображения является ограничительным, и проверка этого условия не всегда проста. Например, если K – локально компактное пространство, снабженное непрерывным действием α аменабельной (см., например, [12]) локально компактной группы G , F – непрерывная функция на K , а функция f определяется как результат применения некоторого инвариантного среднего на G к непрерывной функции двух переменных на $G \times K$, заданной формулой $(g, k) \mapsto \alpha(g, k)$, $g \in G$, $k \in K$, то вопрос об измеримости функции f на K не решен даже в случае, когда K – компакт, а G – группа целых чисел (и это создает пока что не преодоленное затруднение в реализации программы А. М. Вершика, высказанной в п. 2 подстрочного примечания на с. 125 в [13] и состоящей в попытке доказать эргодическую теорему с помощью применения теоремы Фубини к продолжению функции на стоун-чеховское замыкание по переменной из G); во всяком случае, даже для компактного пространства K нельзя гарантировать измеримость f по Борелю (соответствующий пример приведен в [14; § 1, замечание 1] и, в несколько упрощенном

виде, в [15]), и тем более нельзя гарантировать непрерывность функции f .¹ Существенную помощь в решении проблем измеримости оказывают иногда методы теории банаховых алгебр.² Но сложность ситуации увеличивается при рассмотрении не обязательно ограниченных представлений некоммутативных групп; тогда, с точки зрения теории банаховых алгебр, нужно пользоваться менее изученными групповыми алгебрами с весом (на общих локально компактных группах), для которых в настоящее время нет некоторых важных инструментов, в том числе критерия аменабельности. Поэтому желательно, с одной стороны, ограничиться средствами собственно группового языка, а с другой – отказаться от сильного предположения измеримости.

В связи с этим в настоящей статье условия непрерывности изучаются на основе оценки величины сильной вариации в точке. В частности, доказывается следующий критерий непрерывности представлений локально компактных групп ограниченными линейными операторами в сопряженном банаховом пространстве.

ТЕОРЕМА. Пусть G – локально компактная группа, S – ее (алгебраическое) представление в сопряженном банаховом пространстве E слабо* непрерывными линейными операторами. Следующие условия равносильны:

- 1) представление S непрерывно в сильной (или, что равносильно, в слабой) операторной топологии³;
- 2) существует такое число $q \in \mathbb{R}$, $0 \leq q < 1$, что для любого единичного вектора ξ в пространстве E представления S существует такая окрестность $U = U(\xi) \subset G$ единичного элемента $e \in G$, что для всех $g \in U$ $\|S(g)\xi - \xi\| \leq q$.

Таким образом, если сильное колебание представления локально компактной группы в сопряженном банаховом пространстве удовлетворяет неравенству в условии п. 2) теоремы, то это колебание равно нулю, и представление непрерывно.

¹В этой ситуации искушение “применить” теорему Фубини или “воспользоваться” непрерывностью функции f не было преодолено в нескольких публикациях. Так, в [16] была сформулирована теорема, что если G – аменабельная локально компактная группа и ρ – сильно непрерывное отображение G в группу унитарных операторов в гильбертовом пространстве, удовлетворяющее условию $\|\rho(gg') - \rho(g)\rho(g')\| \leq \varepsilon$ для достаточно малого ε и для всех $g, g' \in G$, то существует непрерывное представление S группы G в том же пространстве, удовлетворяющее условию $\|\rho(g) - S(g)\| \leq 2\varepsilon$ для всех $g \in G$. Как известно, доказательство этого факта в [16] содержит упомянутый выше пробел, который может быть преодолен, например, с помощью основного результата статьи Джонсона [17]. Сходный пробел имеется и в недавней работе [18] (где рассматривалась аналогичная задача в одномерном случае, в котором правильное решение давно известно [19]).

²Например, решение проблемы измеримости функции на локально компактной группе, ответственной за данное дифференцирование из групповой алгебры в ее сопряженное пространство, использует именно эту технику [20].

³Напомним, что для любой локально компактной группы сильная непрерывность ее представления в любом банаховом пространстве равносильна слабой непрерывности этого представления. Единственное доказательство этого утверждения, опубликованное в монографии на русском языке [21; гл. 3, §1, п. 4], содержит и ошибку, и пробел. В оригинальном доказательстве де Лю и Гликсберга [22], которое авторы приписывают Миркилу, не обоснована принадлежность результата интегрирования исходному банахову пространству, а не просто его второму сопряженному. Полное доказательство приведено в [3].

Возникает естественный вопрос о возможности улучшения величины постоянной q , обеспечивающей непрерывность представления. Очевидный пример унитарного представления группы $\mathbb{R}$ сдвигами в пространстве $l^2(\mathbb{R})$ показывает, что нельзя заменить условие $q < 1$ постоянной $q = \sqrt{2}$. Как мы увидим, представления локально компактных групп в конечномерных нормированных пространствах допускают улучшение общей оценки для q .

Основные результаты работы имеют непосредственные следствия для отображений, близких к представлениям. Напомним стандартное определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [23]. Пусть G – группа, E – нормированное пространство. Отображение T полугруппы G в алгебру $L(E)$ непрерывных линейных операторов в E называется *квазипредставлением* (точнее, ε -*квазипредставлением*, где $\varepsilon \geq 0$), если

$$\|T(g_1 g_2) - T(g_1)T(g_2)\| \leq \varepsilon \quad \forall g_1, g_2 \in G.$$

Один из наиболее общих вопросов, связанных с ε -квазипредставлениями, состоит в изучении условий, обеспечивающих существование обычного представления группы, близкого к данному квазипредставлению. Имеется ряд результатов, дающих достаточные условия существования представления, близкого к данному квазипредставлению (см. обзор в [24] и библиографию к этой статье), однако до настоящего времени вопрос о непрерывности близкого представления был полностью решен только в случае ограниченных квазипредставлений, когда возможен переход к постановке для групповой алгебры и последующее применение техники Джонсона. Изучение не обязательно ограниченных квазипредставлений (см., например, [25]) находится за пределами этой техники, но попытка решения проблемы непрерывности близкого представления в [25] не может считаться вполне удовлетворительной. Поэтому существенно, что основная теорема настоящей статьи позволяет немедленно получить следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть G – локально компактная группа, T – ее сильно непрерывное отображение в группу ограниченных обратимых линейных операторов в сопряженном банаховом пространстве E , и пусть существует такое представление S группы G в E , что $\|S(g) - T(g)\| \leq C$ для всех $g \in G$ и некоторого C , $C < 1/2$. Тогда представление T сильно непрерывно.

Это несколько улучшает результаты статьи [25], позволяющие проверять выполнение условий этого следствия.

Изложение ведется следующим образом. В §2 получен ряд вспомогательных утверждений. В §3 доказывается основная теорема, обсуждается возможность распространения основного результата на случай представлений не обязательно локально компактных групп в дополнительном предположении, что банахово пространство представления имеет свойство точек непрерывности, и отдельно рассматривается случай представлений локально компактных групп и связанных групп Ли в конечномерных нормированных пространствах. Информация о представлениях, близких к сильно непрерывным квазипредставлениям, позволяющая устанавливать автоматическую непрерывность аппроксимирующих представлений, содержится в §4.

Критерий непрерывности представлений локально компактных групп, удовлетворяющих второй аксиоме счетности, в предположении, что в условии п. 2) приведенной выше теоремы требуется выполнение неравенства для нормы не на всей окрестности, а на дополнении множества меры нуль в этой окрестности, мы обсудим в другой работе.

Часть результатов статьи без доказательств приведена в [26].

§ 2. Обозначения и вспомогательные утверждения

Пусть $\mathbb{T}$ – одномерный тор, $\mathbb{R}$ – поле действительных чисел, $\mathbb{C}$ – поле комплексных чисел, $\mathbb{N}$ – натуральный ряд, $\mathbb{Z}$ – аддитивная группа целых чисел. Символы $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ используются также для обозначения аддитивных групп соответствующих полей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть G – топологическая группа, S – ее (не обязательно, сильно непрерывное) представление в нормированном пространстве E . Введем *сильную вариацию* $\varepsilon(S; \xi; U) \geq 0$ представления S в окрестности U единичного элемента e группы G на векторе $\xi \in E$, полагая $\varepsilon(S; \xi; U)$ равной верхней грани $\sup_{g \in U} \|S(g)\xi - \xi\|$, и *сильную вариацию* $\varepsilon(S; \xi) \geq 0$ представления S в единичном элементе e группы G на векторе $\xi \in E$, полагая $\varepsilon(S; \xi)$ равной нижней грани величин $\sup_{g \in U} \|S(g)\xi - \xi\|$ по всем окрестностям $U \subset G$ единичного элемента $e \in G$, т.е.

$$\varepsilon(S; \xi) = \inf_{U \ni e} \varepsilon(S; \xi; U) = \inf_{U \ni e} \sup_{g \in U} \|S(g)\xi - \xi\|.$$

Введем, наконец, *сильную вариацию* $\varepsilon(S) \geq 0$ представления S в единичном элементе e группы G (или, кратко, *сильную вариацию представления* S), полагая $\varepsilon(S)$ равным верхней грани по всем векторам $\xi \in E$ единичной длины от нижних граней величин $\sup_{g \in U} \|S(g)\xi - \xi\|$ по всем окрестностям $U \subset G$ единичного элемента $e \in G$, т.е.

$$\varepsilon(S) = \sup_{\xi \in E, \|\xi\| \leq 1} \inf_{U \ni e} \varepsilon(S; \xi; U) = \sup_{\xi \in E, \|\xi\| \leq 1} \inf_{U \ni e} \sup_{g \in U} \|S(g)\xi - \xi\|. \quad (1)$$

Аналогично, если G – топологическая группа, S – ее (не обязательно, слабо непрерывное) представление в нормированном пространстве E , а E^* – пространство, сопряженное к E , то *слабой вариацией* $\omega(S; \xi; f; U) \geq 0$ представления S в окрестности U единичного элемента e группы G на векторе $\xi \in E$ и функционале $f \in E^*$ мы будем называть верхнюю грань $\sup_{g \in U} |f(S(g)\xi - \xi)|$, *слабой вариацией* $\omega(S; \xi; f) \geq 0$ представления S в единичном элементе e группы G на векторе $\xi \in E$ и функционале $f \in E^*$ – нижнюю грань величин $\sup_{g \in U} |f(S(g)\xi - \xi)|$ по всем окрестностям $U \subset G$ единичного элемента $e \in G$, т.е.

$$\omega(S; \xi; f) = \inf_{U \ni e} \omega(S; \xi; f; U) = \inf_{U \ni e} \sup_{g \in U} |f(S(g)\xi - \xi)|,$$

и *слабой вариацией* $\omega(S) \geq 0$ представления S в единичном элементе e группы G (или, кратко, *слабой вариацией представления* S) – верхнюю грань по всем

векторам $\xi \in E$ единичной длины и всем функционалам $f \in E^*$ единичной нормы от нижних граней величин $\sup_{g \in U} |f(S(g)\xi - \xi)|$ по всем окрестностям $U \subset G$ единичного элемента $e \in G$, т.е.

$$\omega(S) = \sup_{\substack{\xi \in E, \|\xi\| \leq 1; \\ f \in E^*, \|f\| \leq 1}} \inf_{U \ni e} \omega(S; \xi; f; U) = \sup_{\substack{\xi \in E, \|\xi\| \leq 1; \\ f \in E^*, \|f\| \leq 1}} \inf_{U \ni e} \sup_{g \in U} |f(S(g)\xi - \xi)|. \quad (2)$$

Наконец, пусть G – топологическая группа, S – ее (не обязательно, слабо* непрерывное) представление в банаховом пространстве E , сопряженном к некоторому банахову пространству E_* . Слабой* вариацией $\omega^*(S; \xi; f; U) \geq 0$ представления S в окрестности U единичного элемента e группы G на векторе $\xi \in E$ и функционале $f \in E_*$ мы будем называть верхнюю грань $\sup_{g \in U} |(S(g)\xi - \xi)f|$, слабой* вариацией $\omega^*(S; \xi; f) \geq 0$ представления S в единичном элементе e группы G на векторе $\xi \in E$ и функционале $f \in E_*$ – нижнюю грань величин $\sup_{g \in U} |(S(g)\xi - \xi)f|$ по всем окрестностям $U \subset G$ единичного элемента $e \in G$, т.е.

$$\omega^*(S; \xi; f) = \inf_{U \ni e} \omega^*(S; \xi; f; U) = \inf_{U \ni e} \sup_{g \in U} |(S(g)\xi - \xi)f|,$$

и слабой* вариацией $\omega^*(S) \geq 0$ представления S в единичном элементе e группы G (или, кратко, слабой* вариацией представления S) – верхнюю грань по всем векторам $\xi \in E$ единичной длины и всем функционалам $f \in E^*$ единичной нормы от нижних граней величин $\sup_{g \in U} |(S(g)\xi - \xi)f|$ по всем окрестностям $U \subset G$ единичного элемента $e \in G$, т.е.

$$\omega^*(S) = \sup_{\substack{\xi \in E, \|\xi\| \leq 1; \\ f \in E^*, \|f\| \leq 1}} \inf_{U \ni e} \omega^*(S; \xi; f; U) = \sup_{\substack{\xi \in E, \|\xi\| \leq 1; \\ f \in E^*, \|f\| \leq 1}} \inf_{U \ni e} \sup_{g \in U} |(S(g)\xi - \xi)f|. \quad (3)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть G – топологическая группа, S – ее (алгебраическое) представление в нормированном пространстве E . Мы будем говорить, что S локально равномерно ограничено, если существует окрестность V единичного элемента e в G и постоянная C , удовлетворяющие условию $\|S(g)\| \leq C$ для любого $g \in V$.

Пусть G – топологическая группа, S – ее (алгебраическое) представление в нормированном пространстве E . Пусть E^* – пространство, сопряженное к E . Напомним, что формула $(S^*(g)f)(\xi) = f(S(g)\xi)$, где $g \in G$, $\xi \in E$, $f \in E^*$, определяет представление S^* группы G в пространстве E^* , называемое сопряженным к представлению S .

ЛЕММА 1. Пусть G – топологическая группа, S – ее представление в нормированном пространстве E . Пусть $\varepsilon(S)$, $\omega(S)$ (и $\omega^*(S)$, если E – сопряженное пространство) – вариации представления S , введенные в определении 2.

- 1) Если $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, то неравенство $\varepsilon(S) \leq a$ выполняется тогда и только тогда, когда для любого $b > a$ и любого единичного вектора ξ в пространстве E представления S существует такая окрестность

- $U = U(\xi) \subset G$ единичного элемента $e \in G$, что $\|S(g)\xi - \xi\| < b$ для всех $g \in U$. Аналогичное описание имеет величина $\omega(S)$ (а также величина $\omega^*(S)$, если она определена).
- 2) Представление S сильно (слабо, слабо*) непрерывно тогда и только тогда, когда $\varepsilon(S) = 0$ (соответственно $\omega(S) = 0$, $\omega^*(S) = 0$).
 - 3) Справедливо неравенство $\omega(S) \leq \varepsilon(S)$ и, если S – представление в сопряженном пространстве, то $\omega^*(S) \leq \omega(S)$.
 - 4) Для сопряженного к S представления S^* группы G в пространстве E^* , сопряженном к E , справедливо равенство $\omega^*(S^*) = \omega(S)$.
 - 5) Если величина $\varepsilon(S)$ конечна, а группа G локально компактна, то представление S локально равномерно ограничено. В частности, если группа G компактна, то представление S ограничено.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения 1) и 3) непосредственно следуют из определения величин $\varepsilon(S)$, $\omega(S)$ и $\omega^*(S)$ (см. формулы (1)–(3)), утверждение 4) – из определения величин $\omega(S)$ и $\omega^*(S)$ в (2) и (3) и из определения сопряженного представления, а утверждение 2) – из утверждения 1). Докажем утверждение 5). Пусть V – окрестность единичного элемента в группе G , имеющая компактное замыкание K , пусть θ – единичный вектор в пространстве E , и пусть V_θ – окрестность единичного элемента в группе G , удовлетворяющая условию $\|S(g)\theta - \theta\| \leq q$ для всех $g \in V_\theta$. Конечное семейство сдвигов окрестности V_θ покрывает K ; пусть $K = \bigcup_{i=1}^N g_i V_\theta$. Тогда для любого $g \in V$ имеем $g = g_i g'$, $g' \in V_\theta$, и

$$\|S(g)\theta\| = \|S(g_i)\| \|S(g')\theta\| \leq \|S(g_i)\| (1 + q),$$

где набор $\{g_i\}$ конечен. Таким образом, для любого вектора $\theta \in E$, норма которого равна единице, V -орбита вектора θ ограничена в E . Из принципа равномерной ограниченности следует, что нормы операторов $S(g)$, $g \in V$, ограничены в совокупности. Это завершает доказательство леммы 1.

ЛЕММА 2. Пусть G – локально компактная группа, G_i , $i = 1, \dots, n$, – такой конечный набор метризуемых локально компактных групп, снабженных непрерывными гомоморфизмами $\varphi_i: G_i \rightarrow G$, что ограничение φ_V отображения φ произведения $G_1 \times \dots \times G_n$ на G , определяемого формулой $\varphi(g_1, \dots, g_n) = \varphi_1(g_1) \dots \varphi_n(g_n)$, где $g_i \in G_i$ для всех $i = 1, \dots, n$, на некоторую окрестность V единичного элемента e группы $G_1 \times \dots \times G_n$ является гомеоморфизмом. Пусть S – (алгебраическое) представление группы G в банаховом пространстве. Если представление S непрерывно в сильной операторной топологии на образе каждой подгруппы G_i в G , то представление S сильно непрерывно. В частности, если G – связная группа Ли и ее представление S непрерывно в сильной операторной топологии на каждой однопараметрической подгруппе группы G , то оно непрерывно в сильной операторной топологии.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку S – представление, то

$$S(\varphi_1(g_1) \dots \varphi_n(g_n)) = S(\varphi_1(g_1)) \dots S(\varphi_n(g_n)) \quad \forall g_i \in G_i.$$

Отображение $\psi: G_1 \times \cdots \times G_n \supset V \ni (g_1, \dots, g_n) \mapsto S(\varphi_1(g_1)) \cdots S(\varphi_n(g_n))$, где $g_i \in G_i$ для всех $i = 1, \dots, n$, очевидным образом покоординатно непрерывно на окрестности V единичного элемента в локально компактной группе $G_1 \times \cdots \times G_n$. Можно считать, что V содержит замыкание произведения $\prod_{i=1}^n V_i$ для некоторых окрестностей V_i единичных элементов в группах G_i , $i = 1, \dots, n$. Так как каждое отображение $S_i: G_i \rightarrow S \circ \varphi_i$, $i = 1, \dots, n$, непрерывно, то S_i -образ замыкания $\overline{V_i}$ окрестности V_i является метризуемым компактом в пространстве $\mathcal{L}(E)$ ограниченных линейных операторов в банаховом пространстве E представления S , где пространство $\mathcal{L}(E)$ снабжено сильной операторной топологией. Поскольку умножение операторов непрерывно по совокупности переменных в сильной операторной топологии на ограниченных множествах, мы видим, что сквозное отображение $G_1 \times \cdots \times G_n \rightarrow G \rightarrow \mathcal{L}(E)$, определенное формулой $(g_1, \dots, g_n) \mapsto g_1 \cdots g_n \mapsto S(\varphi_1(g_1)) \cdots S(\varphi_n(g_n))$, сильно непрерывно по совокупности переменных⁴. Таким образом, ввиду постулированного в условии теоремы локального гомеоморфизма, представление S группы G имеет точки сильной непрерывности. Но представление, сильно непрерывное хотя бы в одной точке, сильно непрерывно всюду.

Рассмотрим случай, когда G – связная группа Ли. Выберем базис $e_1, \dots, e_n$ в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G и рассмотрим отображение конечномерного векторного пространства $\mathbb{R}^n$ в G , определенное формулой $\mathbb{R} \ni t = (t_1, \dots, t_n) \mapsto g(t) = \exp(t_1 e_1) \cdots \exp(t_n e_n) \in G$. Это отображение гладко и имеет в нуле единичную матрицу Якоби. Поэтому оно определяет диффеоморфизм некоторой окрестности V нуля в $\mathbb{R}^n$ на окрестность U единичного элемента в G . В частности, набор однопараметрических подгрупп $G_i = \{\exp t_i e_i \mid t_i \in \mathbb{R}\}$ удовлетворяет условиям, предъявляемым в первой части леммы. Это завершает доказательство леммы 2.

Из доказательства леммы 2 немедленно вытекает следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть G – группа Ли, S – ее (алгебраическое) представление в банаховом пространстве. Если представление S непрерывно в сильной операторной топологии на каждой однопараметрической подгруппе группы G , то оно непрерывно в сильной операторной топологии.

Следующий вспомогательный результат, лемма 3, является главным техническим средством в доказательстве основных результатов. Одновременно он проясняет связь между введенными выше понятиями и одним из самых слабых условий непрерывности представления. Нам понадобится следующая топология в пространстве непрерывных линейных операторов в пространстве представления.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть E – банахово пространство, сопряженное к некоторому банахову пространству E_* , и пусть $\mathcal{L}(E)$ – пространство непрерывных линейных операторов в E . Слабой* операторной топологией в $\mathcal{L}(E)$ назовем топологию, определяемую семейством полунорм вида $T \mapsto |f(Tx)|$, где $T \in \mathcal{L}(E)$, $x \in E$ и $f \in E_*$.

⁴Этим прямым доказательством непрерывности отображения по совокупности переменных автор обязан А. С. Мищенко. Первоначальное доказательство использовало косвенные средства.

Поскольку, вообще говоря, пространство E_* не определяется пространством E однозначно, то слабая* операторная топология может тоже оказаться зависящей от выбора E_* . Однако при любом выборе пространства E_* , повторяя стандартное доказательство компактности единичного шара в сопряженном пространстве в слабой топологии, мы можем убедиться в компактности единичного шара в пространстве $\mathcal{L}(E)$ в любой слабой* операторной топологии. Выберем одну из них.

ЛЕММА 3. Пусть E – сопряженное банахово пространство, G – топологическая группа и S – локально равномерно ограниченное (алгебраическое) представление группы G в банаховом пространстве E слабо* непрерывными линейными операторами. Если $\omega^*(S) < 1$, то $\omega^*(S) = 0$, т.е. представление S непрерывно в слабой* операторной топологии.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы рассмотрим пространство $\mathcal{L}(E)$ непрерывных линейных операторов в пространстве E представления S в слабой* операторной топологии. Пусть M – пересечение замыканий $\overline{S(V)}$ (здесь и далее черта означает замыкание множества в слабой* операторной топологии) образов $S(V)$ всевозможных окрестностей $V \subset G$ единичного элемента группы G . Поскольку представление S ограничено на некоторой окрестности V_0 единичного элемента, то для окрестностей $V \subset V_0$ множества $\overline{S(V)}$ компактны в слабой* операторной топологии как замкнутые подмножества компактных множеств.

Пусть T – некоторый элемент M . Докажем, что $T = 1_E$. Ввиду только что отмеченной компактности множеств $\overline{S(V)}$ равенство $M = \{1_E\}$ равносильно слабой* непрерывности представления S в e . Действительно, дополнение любой окрестности нуля W в множестве $\overline{S(V_0)}$ (для такой окрестности V_0 , что $\overline{S(V_0)}$ компактно в слабой* операторной топологии) тоже компактно в слабой* операторной топологии. Если $M = \{1_E\}$, то пересечение $M \cap (\overline{S(V_0)} \setminus W)$ пусто, и поэтому существует конечный набор множеств вида $\overline{S(V_i)}$, $i = 1, \dots, N$, для которых пересечение

$$\left(\bigcap_{i=1}^N \overline{S(V_i)} \right) \cap (\overline{S(V_0)} \setminus W)$$

пусто, так что $S(V) \subset W$ для $V = V_0 \cap (\bigcap_{i=1}^N V_i)$.

Так как для любого единичного вектора $\xi \in E$ и любого функционала $f \in E_*$ единичной длины окрестность $U(\xi)$ участвует в построении множества M , то $|(T\xi - \xi)f| \leq q$ для всех единичных векторов $\xi \in E$ и функционалов $f \in E_*$ единичной длины. Таким образом, $\|T - 1_E\| \leq q$.

Для любой окрестности V единичного элемента в G и любого натурального n существует окрестность W единичного элемента в G , удовлетворяющая условию $W^{2^n} \subset V$. Отсюда следует, что $S(W)^{2^n} \subset S(V)$, и, очевидно, $(S(W))^{2^n} \subset S(V) \subset \overline{S(V)}$. Пусть $n = 1$. Тогда $S(W)S(W) \subset S(V)$ для любого α и, так как умножение раздельно непрерывно в слабой* операторной топологии, то для любого $B \in S(W)$ из очевидного соотношения $BS(W) \subset S(V)$ следует $\overline{BS(W)} \subset \overline{S(V)}$, откуда $S(W)\overline{S(W)} \subset \overline{S(V)}$. В свою очередь, это значит, что для любого $B \in \overline{S(W)}$ из очевидного соотношения $S(W)B \subset \overline{S(V)}$ следует $\overline{S(W)}B \subset \overline{S(V)}$, откуда $\overline{S(W)S(W)} \subset \overline{S(V)}$. По индукции отсюда следует, что для любой окрестности

V единичного элемента в G и любого натурального n и окрестности W единичного элемента в G , удовлетворяющей условию $W^{2^n} \subset V$, имеем $(\overline{S(W)})^{2^n} \subset \overline{S(V)}$. В частности, поскольку $T \in \overline{SO}$ для любой окрестности O единичного элемента, то $T^n \in \overline{S(V)}$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и для всех окрестностей V единичного элемента в G , откуда следует, что $T^n \in M$. Как мы видели выше, отсюда следует, что $\|T^n - 1_E\| \leq q$ для всех натуральных n .

Пусть E_* – пространство, к которому сопряжено E . Пусть I – некоторое инвариантное среднее на $\mathbb{N}$. Для любого $f \in E_*$ и любого $x \in E$ положим $(Ax)(f) = I_n((T^n x)(f))$ (аналогичный прием использован в существенно более общей ситуации в [27]). Мы получаем непрерывный линейный функционал на E_* , т.е. вектор $Ax \in E$, причем

$$\begin{aligned} |((A - 1_E)x)(f)| &= |I_n(((T^n - 1_E)x)(f))| \\ &\leq \sup |((T^n - 1_E)x)(f)| \leq \|T^n - 1_E\| \|x\| \|f\| \leq q \|x\| \|f\| \end{aligned}$$

для любых $f \in E_*$ и $x \in E$. Мы получаем непрерывный линейный оператор A в E , причем $\|A - 1_E\| \leq q < 1$, так что A непрерывно обратим. Кроме того, из инвариантности среднего следует, что для любого $f \in E_*$ и любого $x \in E$ имеем $(ATx)(f) = I_n((T^{n+1}x)(f)) = I_n((T^n x)(f)) = (Ax)(f)$, т.е. $AT = A$. Умножая на A^{-1} слева, получаем, что $T = 1_E$, и поэтому представление S слабо* непрерывно в единичном элементе, а тогда и всюду на G . Это доказывает лемму 3.

Для обеспечения сильной непрерывности слабо непрерывных представлений, не обязательно, локально компактных групп нам понадобится понятие банахова пространства, имеющего свойство точек непрерывности, и это понятие не может считаться общеизвестным. Введем необходимое определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Банахово пространство F называется *пространством, имеющим свойство точек непрерывности*, если для любого непустого ограниченного слабо замкнутого множества $M \subset F$ существует точка в M , в которой ограничение на M тождественного отображения пространства F в слабой топологии в пространство F в сильной топологии непрерывно.

Любое рефлексивное банахово пространство, и вообще любое банахово пространство со свойством Радона–Никодима, имеет свойство точек непрерывности, но обратные утверждения не имеют места (см. [28]–[30]). В частности, сопряженное пространство к (не обязательно, коммутативной) C^* -алгебре заведомо имеет свойство точек непрерывности, если спектр этой C^* -алгебры вполне несовершенен. Например, пространство $l^1(M)$ для любого (не обязательно, счетного) множества M и пространство операторов со следом в любом (не обязательно сепарабельном) гильбертовом пространстве имеют свойство точек непрерывности [31].

Следующая вспомогательная теорема устанавливает достаточные условия сильной непрерывности слабо непрерывных представлений. Все технические средства, необходимые при ее доказательстве, могут быть найдены в [32], и теорема легко выводится из теоремы 2.5 в [32], использующей технику фрагментируемых множеств в банаховых пространствах, но в нужном нам виде утверждение отсутствует и в [32], и в других статьях, посвященных связи между слабой и

сильной непрерывностью. Мы приводим точную формулировку и элементарное доказательство для полноты изложения.

ТЕОРЕМА 1. Пусть G – топологическая группа, и пусть S – локально равномерно ограниченное представление группы G в банаховом пространстве E , имеющем свойство точек непрерывности. Если S слабо непрерывно (т.е. отображение $g \mapsto f(S(g)\xi)$, $g \in G$, непрерывно для любых $f \in E^*$ и $\xi \in E$), то представление S непрерывно в сильной операторной топологии.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\xi \in E$, пусть V – окрестность, на которой представление S равномерно ограничено, и пусть $M = \{S(g)\xi \mid g \in V\}$ – ξ -образ окрестности единичного элемента в G , на которой представление S равномерно ограничено (скажем, $\|S(g)\| \leq C$ для всех $g \in V$), поэтому M – непустое ограниченное подмножество в E . Поскольку по условию пространство E имеет свойство точек непрерывности, то для непустого ограниченного множества $M \subset E_*$ существует точка m в слабом замыкании $\overline{\text{cl}} M$ выпуклой оболочки $\text{cl} M$ множества M , в которой ограничение на M тождественного отображения пространства E в слабой топологии в пространство E в сильной топологии непрерывно. Отсюда следует, что для любого $\varepsilon > 0$ сильная окрестность $\{x \mid x \in \overline{\text{cl}} M \text{ и } \|x - m\| < \varepsilon/2\}$ точки m в $\overline{\text{cl}} M$ содержит относительную слабую окрестность, диаметр которой поэтому не превосходит ε . Полный прообраз W этой слабой окрестности непуст и открыт в группе G . Рассмотрим пересечение $V \cap W$. Образ этого открытого множества на векторе ξ имеет малый сильный диаметр. Пусть $g_0 \in V \cap W$. Множество $g_0^{-1}V \cap W$ тоже открыто в G и содержит единичный элемент $e \in G$. Диаметр образа N этого множества в M не превосходит $C\varepsilon$, так что этот диаметр сколь угодно мал вместе с ε . С другой стороны, N содержит вектор ξ . Таким образом, N содержится в шаре радиуса $C\varepsilon$ с центром в ξ и отображение $g \mapsto S(g)\xi$ сильно непрерывно в e . Так как ξ произволен, то S сильно непрерывно в e и, следовательно, сильно непрерывно всюду.

В частности, для любой топологической группы слабая непрерывность ограниченных представлений этой группы в рефлексивных банаховых пространствах (и тем более ее унитарных представлений в гильбертовых пространствах) равносильна сильной непрерывности этих представлений.

§ 3. Доказательство основных теорем

ТЕОРЕМА 2. Пусть E – банахово пространство, G – топологическая группа и S – локально равномерно ограниченное (алгебраическое) представление группы G в банаховом пространстве E . Если $\omega(S) < 1$, то $\omega(S) = 0$, т.е. представление S непрерывно в слабой операторной топологии.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сопряженное к представлению S представление S^* в пространстве E^* , сопряженном к E . Поскольку S локально равномерно ограничено, то и S^* локально равномерно ограничено. Согласно утверждению 4) леммы 1 из условия $\omega(S) < 1$ следует, что $\omega^*(S^*) = \omega(S) < 1$. По лемме 3 представление S^* слабо* непрерывно. Отсюда и из определения сопряженного пред-

ставления непосредственно следует, что S слабо непрерывно. Это доказывает теорему 2.

Следующий критерий непосредственно следует из предыдущей теоремы.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть E – банахово пространство, имеющее свойство точек непрерывности. Пусть G – топологическая группа, и пусть S – локально равномерно ограниченное (алгебраическое) представление группы G в банаховом пространстве E . Если $\omega(S) < 1$, то $\varepsilon(S) = 0$, т.е. представление S непрерывно в сильной операторной топологии.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 2 представление S слабо непрерывно. Так как E – банахово пространство, имеющее свойство точек непрерывности, то применение теоремы 1 завершает доказательство сильной непрерывности представления S .

В частности, для любой топологической группы G и любого ее ограниченного представления S в рефлексивном банаховом пространстве (и тем более унитарного представления в гильбертовом пространстве) условие $\omega(S) < 1$ равносильно сильной непрерывности представления S .

Теперь мы можем доказать наш основной результат о сильной непрерывности представлений локально компактных групп.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть G – локально компактная группа, и пусть S – (алгебраическое) представление группы G в банаховом пространстве E слабо* непрерывными линейными операторами. Если выполнено хотя бы одно из двух условий:

- 1) $\varepsilon(S) < 1$;
- 2) представление S локально равномерно ограничено и $\omega(S) < 1$,

то $\varepsilon(S) = 0$, т.е. представление S непрерывно в сильной операторной топологии.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае 2) утверждение получается применением следствия 2. В случае 1) нужно еще сослаться на утверждения 3) и 5) леммы 1.

Рассмотрим теперь случай конечномерных представлений локально компактных групп и покажем, что в этом случае неравенство в условии теорем о непрерывности может быть существенно ослаблено. Сначала разберем случай связной группы Ли.

ТЕОРЕМА 3. Пусть G – связная группа Ли, и пусть S – (алгебраическое) представление группы G в конечномерном нормированном линейном пространстве E . Если $\varepsilon(S) < 2$, то $\varepsilon(S) = 0$, т.е. представление S непрерывно в сильной операторной топологии.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 2 достаточно рассмотреть случай однопараметрической подгруппы и соответствующее ограничение представления S можно считать представлением группы $\mathbb{R}$. Рассмотрим базис $k_1, \dots, k_n$ для коммутативного семейства $S(\mathbb{R})$ операторов в пространстве E , в котором матрицы представления имеют треугольную форму. Достаточно доказать непрерывность пред-

ставления в каждом из корневых подпространств представления (в которых на диагонали стоят одинаковые элементы для всех $x \in \mathbb{R}$, причем в разных подпространствах эти диагональные элементы связаны с разными характерами; таким образом, конечномерное представление коммутативной группы есть прямая сумма треугольных блоков, в каждом из которых на диагонали стоит один и тот же характер). Итак, рассмотрим такое корневое подпространство, отвечающее диагональному характеру χ .

Пусть характер χ разрывен, т.е. пусть существует такая стремящаяся к нулю последовательность x_m в $\mathbb{R}$, что $\chi(x_m)$ не стремится к 1. Ввиду локальной компактности группы G и утверждения 5) леммы 1 мы вправе считать, что последовательность $\chi(x_m)$ ограничена, и, переходя к подпоследовательности, мы можем предполагать, что $\chi(x_m) \rightarrow a$, где $a \in \mathbb{C}$, $|a| = 1$, $a \neq 1$. Пусть ε_0 – число, удовлетворяющее условию $\varepsilon(S) < \varepsilon_0 < 2$. Поскольку для некоторой окрестности Ω единичного элемента и для всех попавших в Ω элементов x_m имеем $|\chi(x_m) - 1| \leq \varepsilon_0 < 2$, то в пределе получаем $|a - 1| \leq \varepsilon_0$. Так как $kx_m \rightarrow 0$ для любого целого k , то $kx_m \in \Omega$ для достаточно больших m , причем $\chi(kx_m) \rightarrow a^k$. Отсюда следует, что $|a^k - 1| \leq \varepsilon_0$ для всех целых k , что возможно только в случае, если, во первых, a имеет единичный модуль и, во вторых, a – первообразный корень из единицы не слишком высокой нечетной степени p (число p легко оценивается с помощью величины разности $2 - \varepsilon_0 > 0$). Но, пользуясь безграничной делимостью группы Ли $\mathbb{R}$, мы вправе считать, что при каждом натуральном q имеем $\chi(x_m p^{-q}) \rightarrow b_q$ при $m \rightarrow \infty$, где число b_q удовлетворяет тем же условиям

$$b_q \in \mathbb{C}, \quad |b_q| = 1, \quad b_q \neq 1, \quad |b_q^k - 1| \leq \varepsilon_0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad (4)$$

причем $b_q^p = b_{q-1}$ при $b_0 = a$. По построению число b_q удовлетворяет условию $(b_q)^{p^q} = a \neq 1$ и $(b_q)^{p^{q+1}} = 1$, так что b_q – первообразный корень из единицы степени p^{q+1} , что противоречит условию (4) при больших значениях числа q . Таким образом, каждый характер χ непрерывен.

Домножим представление в соответствующем корневом подпространстве на скалярную функцию χ^{-1} . Тогда в соответствующем корневом подпространстве матрица оператора представления является верхней треугольной с единицами на главной диагонали. Если это подпредставление R разрывно, то существует такая стремящаяся к нулю последовательность x_m в $\mathbb{R}$, что $R(x_m)$ не стремится к 1. Ввиду ограниченности образа окрестностей с компактным замыканием можно считать, что $R(x_m) \rightarrow A$, где A – верхняя треугольная матрица с единицами на диагонали, причем, как и выше, последовательность норм $\|A^n\|$ ограничена. Отсюда непосредственно следует, что над главной диагональю верхней треугольной матрицы A нет ненулевых элементов, так что A – единичная матрица. Это доказывает непрерывность представления R , а поэтому и представления S , что завершает доказательство теоремы.

Условие этой теоремы является наилучшим возможным. С помощью базиса Гамерля (в векторном пространстве $\mathbb{R}$ над полем рациональных чисел) нетрудно построить разрывный характер группы $\mathbb{R}$ (или одномерного тора), не принимающий значения -1 (ср. [33; 25.26(e)]) и тем самым удовлетворяющий строгому неравенству $|\chi(x) - 1| < 2$ для всех $x \in \mathbb{R}$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть G – локально компактная группа, и пусть S – (алгебраическое) представление группы G в конечномерном нормированном пространстве E . Если $\varepsilon(S) < \sqrt{3}$, то $\varepsilon(S) = 0$, т.е. представление S непрерывно в сильной операторной топологии⁵.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G_0 – компонента единицы группы G , Q – компактная подгруппа факторгруппы G/G_0 , H – полный прообраз Q в G . Очевидно, достаточно доказать непрерывность ограничения представления S на (открытую) подгруппу $H \subset G$, так что можно предполагать, что группа G в условии леммы почти связна (т.е. факторгруппа группы G по G_0 компактна), и поэтому G можно считать проективно-лиевой группой [34].

Рассмотрим некоторый базис $e_1, \dots, e_n$ в пространстве E и для любого e_i , $i = 1, \dots, n$, введем соответствующую вектору e_i окрестность $U_i \subset G$ единичного элемента $e \in G$, удовлетворяющую условию $\|S(g)e_i - e_i\| < \sqrt{3}$ для всех $g \in U_i$. Пусть N – такая компактная подгруппа группы G , содержащаяся в $U = \bigcap_{i=1}^n U_i$, что факторгруппа G/N есть группа Ли, и пусть N_0 – компонента единицы группы N .

Напомним, что в компактной связной топологической группе G любой элемент g содержится в некоторой максимальной связной коммутативной подгруппе $K_g \subset G$, причем любые две максимальные связные коммутативные подгруппы в G сопряжены в G [35].

Рассмотрим некоторую максимальную связную коммутативную подгруппу $L \subset N_0$. Образ этой группы в представлении S ограничен по лемме 1, и замыкание этого образа есть ограниченная (и потому компактная) коммутативная группа матриц. Они имеют общий собственный базис $f_1, \dots, f_n$ в пространстве E . Рассмотрим соответствующую вектору f_i окрестность $V_i \subset G$ единичного элемента $e \in G$, удовлетворяющую условию $\|S(g)f_i - f_i\| < \sqrt{3}$ для всех $g \in V_i$. Пусть M – такая компактная подгруппа группы G , содержащаяся в $V = \bigcap_{i=1}^n V_i$, что факторгруппа G/M есть группа Ли. Пусть $R = N \cap M$, и пусть R_0 – компонента единицы группы R . По построению факторгруппа G/R есть группа Ли с конечным числом компонент связности. Поэтому в дальнейшем доказательстве можно считать, что эта факторгруппа связна.

Любая максимальная связная коммутативная подгруппа $C \subset R_0$ нетривиальна, если R_0 нетривиальна, и является связной коммутативной подгруппой в N_0 . Поэтому C сопряжена некоторой подгруппе C_1 группы L . Тогда $S(C_1)$ (образ группы C_1 в представлении S) есть ограниченная подгруппа в полной линейной группе пространства E , которая тем самым подобна некоторой подгруппе группы унитарных матриц $U(\dim E)$. Перейдем к соответствующей реализации. Поскольку построенный выше базис $f_1, \dots, f_n$ в пространстве E является собственным для C_1 , то

⁵ По-видимому, для связных топологических групп постоянная $\sqrt{3}$ в этой теореме может быть улучшена до 2. А. С. Мищенко предложил следовать с этой целью плану предыдущего доказательства. Непосредственный перенос рассуждения встречает затруднения, поскольку группа $\mathbb{R}$ не только безгранично делима, но и локально безгранично делима, и именно последний факт использован в доказательстве предыдущей теоремы. Доказательство удастся довести до конца в случае коммутативных связных компактных групп, но оно громоздко и будет опубликовано в другой статье.

любой диагональный матричный элемент T_{ii} оператора $T \in S(C_1)$, $i = 1, \dots, n$, определяет характер группы C_1 , удовлетворяющий условию $|T_{ii}(c) - 1| \leq \sqrt{3}$ для всех $c \in C_1$. Но единичная окружность не содержит неединичных подгрупп, лежащих в части круга $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$, $|z - 1| < \sqrt{3}$, поэтому $S(C_1) = \{1_E\}$. Тогда и $S(C) = \{1_E\}$ и, таким образом, $S(R_0) = \{1_E\}$. Отсюда следует, что представление S можно считать представлением факторгруппы G/R_0 , которая является расширением связной группы Ли G/R с помощью компактной вполне несвязной группы R/R_0 .

Рассмотрим замыкание H образа группы R в представлении S . Как и выше, ввиду ограниченности представления S на подгруппе R группа H есть (вообще говоря, несвязная) компактная группа Ли, и прообраз ее компоненты единицы H_0 в R есть подгруппа конечного индекса в R . В связной компактной группе Ли H_0 найдем максимальный тор Σ . Пусть $h_1, \dots, h_n$ — собственный базис для Σ . Рассмотрим окрестности $W_i \subset G/R_0$ единичного элемента $e \in G/R_0$, удовлетворяющие условию $\|S(g)h_i - h_i\| < \sqrt{3}$ для всех $g \in W_i$, и построим компактную подгруппу $Q \subset R/R_0$, содержащуюся в $W = \bigcap_{i=1}^n W_i$, для которой факторгруппа $(R/R_0)/Q$ конечна. Образ $S(Q)$ содержится в $S(R) = H$. Пусть Q_0 — подгруппа группы Q , являющаяся прообразом группы H_0 при отображении S ; индекс Q_0 в Q конечен. Любой элемент группы $S(Q_0)$, с одной стороны, сопряжен некоторому элементу тора Σ , а с другой — диагонален в базисе $h_1, \dots, h_n$, причем $\|S(g)h_i - h_i\| < \sqrt{3}$ для всех $g \in Q_0$. Как и выше, отсюда следует, что образ группы Q_0 в представлении S единичен, и поэтому представление S можно считать представлением факторгруппы $(G/R_0)/Q_0$, которая является расширением связной группы Ли G/R с помощью конечной группы $(R/R_0)/Q_0$. Это сводит задачу к случаю связной группы Ли, изученному (с лучшей константой) в предыдущей теореме, и потому завершает доказательство теоремы 4.

§ 4. Приложение: аппроксимация квазипредставлений

Приведем упомянутое во введении улучшение результата статьи [25], позволяющее проверять выполнение условий автоматической непрерывности представлений, аппроксимирующих сильно непрерывные квазипредставления.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $c = f^{-1}(1)/2 \approx 0.2831\dots$, где $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^{2^n}$, $|t| < 1$. Пусть G — аменабельная дискретная группа⁶ и T — (вообще говоря, неограниченное) δ -квазипредставление группы G в сопряженном банаховом пространстве E , причем $\delta < c$. Предположим дополнительно, что $T(e) = 1_E$

⁶Заметим, что для топологической группы условие ее аменабельности как дискретной группы весьма ограничительно. Например, связная локально компактная группа аменабельна как дискретная группа тогда и только тогда, когда она разрешима (описание групп Ли с этим свойством приведено в [36; теорема 3.9]; в общем случае утверждение следует из трех хорошо известных фактов: 1) если локально компактная группа аменабельна как дискретная группа, то она аменабельна как локально компактная группа; 2) если связная локально компактная группа аменабельна, то ее факторгруппа по радикалу (наибольшему связному разрешимому нормальному делителю) компактна (см. [36; теорема 3.8]); 3) компактная группа аменабельна как дискретная группа тогда и только тогда, когда она не имеет полупростых компактных некоммутативных факторгрупп; ср. [36; теорема 3.9] и [37; теорема 9.19]).

и $T(g)^{-1} = T(g^{-1})$ для всех $g \in G$. Существует (обычное) представление S группы G в E такое, что $\|S(g) - T(g)\| \leq \varepsilon$ для всех $g \in G$, где $\varepsilon = f(\delta)$ (напомним, что $f(t) \leq t/(2 - 4t)$, $t \in [0, 1/2)$).

Таким образом, если в условиях этой теоремы квазипредставление T сильно непрерывно и либо группа G локально компактна, либо банахово пространство E имеет свойство точек непрерывности, то, поскольку $\varepsilon(S) \leq 2f(c) < 1$, представление S тоже сильно непрерывно по следствию 2 или 3 соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как T — δ -квазипредставление, то для всех $g, h \in G$ выполняется неравенство $\|T(gh)T(h^{-1}) - T(g)\| \leq \delta$. В частности, отображение $h \mapsto T(gh)T(h^{-1})$ определяет ограниченную операторнозначную функцию. Положим

$$S(g) = I_h(T(gh)T(h^{-1})), \quad g \in G,$$

где I_h означает применение некоторого двусторонне инвариантного среднего I на G по переменному $h \in G$. Ввиду двусторонней инвариантности среднего I имеем

$$\begin{aligned} S(g) &= I_h(T(gh)T(h^{-1})) = I_h(T(gkh)T((kh)^{-1})) = I_h(T(gkh)T(h^{-1}k^{-1})) \\ &= I_h((T(gkh) - T(gk)T(h))(T(h^{-1}k^{-1}) - T(h^{-1})T(k^{-1})) \\ &\quad + T(gk)T(h)(T(h^{-1}k^{-1}) - T(h^{-1})T(k^{-1})) + T(gkh)T(h^{-1})T(k^{-1})) \\ &= \Delta + T(gk)I_h(T(h)(T(h^{-1}k^{-1}) - T(h^{-1})T(k^{-1}))) + S(gk)T(k^{-1}) \end{aligned}$$

для всех $g, k \in G$, где через Δ обозначен оператор

$$I_h((T(gkh) - T(gk)T(h))(T(h^{-1}k^{-1}) - T(h^{-1})T(k^{-1}))),$$

норма которого не превосходит δ^2 . Из соотношения $T(h)^{-1} = T(h^{-1})$, где $h \in G$, следует, что

$$I_h(T(h)(T(h^{-1}k^{-1}) - T(h^{-1})T(k^{-1}))) = I_h(T(h)T(h^{-1}k^{-1})) - T(k^{-1}),$$

а из инвариантности среднего (с помощью замены $h \mapsto kl$ и перехода к среднему по l) заключаем, что

$$I_h(T(h)T(h^{-1}k^{-1})) - T(k^{-1}) = I_l(T(k^{-1}l)T(l)) - T(k^{-1}) = S(k^{-1}) - T(k^{-1}).$$

Получаем, что

$$S(g) = \Delta + T(gk)(S(k^{-1}) - T(k^{-1})) + S(gk)T(k^{-1})$$

или

$$T(gk)T(k^{-1}) - T(gk)S(k^{-1}) - S(gk)T(k^{-1}) + S(g) = \Delta \quad \forall g, k \in G.$$

С другой стороны, имеем

$$\begin{aligned} &(S(gk) - T(gk))(S(k^{-1}) - T(k^{-1})) \\ &= S(gk)S(k^{-1}) - T(gk)S(k^{-1}) - S(gk)T(k^{-1}) + T(gk)T(k^{-1}) \end{aligned}$$

для всех $g, k \in G$ и можно вычесть последнее тождество из предыдущего. Получаем, что

$$S(g) - S(gk)S(k^{-1}) = \Delta - (S(gk) - T(gk))(S(k^{-1}) - T(k^{-1})),$$

откуда следует неравенство $\|S(g) - S(gk)S(k^{-1})\| \leq 2\delta^2$. Поэтому S является $2\delta^2$ -квазипредставлением группы G , причем $\|S(g) - T(g)\| \leq \delta$. Положим $T = T_n$ и $S = T_{n+1}$. Тогда при $\delta = \delta_1 < 1/2$ оценка

$$\delta_{n+1} \leq 2\delta_n^2 \leq 2^{2^{n+1}-1} \delta_1^{2^{n+1}} = \frac{1}{2} (2\delta_1)^{2^{n+1}}$$

немедленно приводит к требуемому результату для отображения, определяемого как предел (по отношению к равномерной сходимости на группе в смысле нормы оператора) $\tilde{T} = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n$, которое и оказывается искомым 0-квазипредставлением, или обычным представлением. Это завершает доказательство теоремы 5.

Заключение

Следующая замечательная гипотеза о возможных значениях величины $\varepsilon(S)$ для конечномерных представлений была высказана А. С. Мищенко.

ГИПОТЕЗА. Пусть G – топологическая группа, S – ее представление в конечномерном нормированном пространстве. Тогда нижняя грань величин $\varepsilon(S)$ по всем возможным нормированиям пространства представления может принимать только три значения: 0, 2, и ∞ .

Отметим в поддержку этой гипотезы, что для унитарных представлений топологических групп в гильбертовых пространствах действительно выполняется соотношение $\varepsilon(S) \in \{0, 2\}$, которое вытекает из теоремы 2, следствия 2 и очевидного факта, что норма разности двух унитарных операторов не превосходит 2.

Автор выражает благодарность А. С. Мищенко за внимание к работе, участникам его семинара в МГУ за обсуждение результатов и В. М. Мануйлову за стимулирующие вопросы; это участие коллег привело автора к практически полному переписыванию первоначального текста статьи.

Список литературы

1. Banach S. Théorie des opérations linéaires. Warszawa: Subwencji Funduszu Narodowej, 1932.
2. Moore R. T. Measurable, continuous and smooth vectors for semi-groups and group representations. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1968. (Mem. Amer. Math. Soc. V. 78.)
3. Johnson B. E. Cohomology of Banach algebras. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1972. (Mem. Amer. Math. Soc. V. 127.)
4. Gaal S. A. Linear analysis and representation theory. New York: Springer-Verlag, 1973.
5. Moore C. C. Group extensions and cohomology for locally compact groups. III // Trans. Amer. Math. Soc. 1976. V. 221. № 1. P. 1–33.
6. Sasvari Z. Positive definite and definitizable functions. Berlin: Akademie-Verlag, 1994.
7. Baker J. W., Lashkarizadeh B. M. Representations and positive definite functions on topological semigroups // Glasg. Math. J. 1996. V. 38. № 1. P. 99–111.
8. Neeb K.-H. On a theorem of S. Banach // J. Lie Theory. 1997. V. 7. № 2. P. 293–300.

9. Pestov V. Review of [8] // Math. Rev. 98i:22003. 1998.
10. Neeb K.-H., Pickrell D. Supplements to the papers entitled: "On a theorem of S. Banach" and "The separable representations of $U(H)$ " // J. Lie Theory. 2000. V. 10. № 1. P. 107–109.
11. Exel R., Lacas M. Continuous Fell bundles associated to measurable twisted actions // Proc. Amer. Math. Soc. 1997. V. 125. № 3. P. 795–799.
12. Гринлиф Ф. Инвариантные средние на топологических группах и их приложения. М.: Мир, 1973.
13. Вершик А. М. Счетные группы, близкие к конечным (приложение к русскому переводу книги [12]). С. 112–135.
14. Shtern A. I. Almost convergence and its applications to the Fourier–Stieltjes localization // Russian J. Math. Phys. 1993. V. 1. № 1. P. 115–125.
15. Shtern A. I. Review of [18] // Math. Rev. 2001i:22008. 2001.
16. Kazhdan D. On ε -representations // Israel J. Math. 1982. V. 43. № 4. P. 315–323.
17. Johnson B. E. Approximately multiplicative maps between Banach algebras // J. London Math. Soc. (2). 1988. V. 37. № 2. P. 294–316.
18. Cabello-Sanchez F. Pseudo-characters and almost multiplicative functionals // J. Math. Anal. Appl. 2000. V. 248. № 1. P. 275–289.
19. Forti G. L. The stability of homomorphisms and amenability, with applications to functional equations // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1987. V. 57. P. 215–226.
20. Johnson B. E. Weak amenability of group algebras // Bull. London Math. Soc. 1991. V. 23. № 3. P. 281–284.
21. Любич Ю. И. Введение в теорию банаховых представлений групп. Харьков: "Вища школа", 1985.
22. de Leeuw K., Glicksberg I. The decomposition of certain group representations // J. Anal. Math. 1965. V. 15. P. 135–192.
23. Штерн А. И. Квазипредставления и псевдопредставления // Функц. анализ и его прилож. 1991. Т. 25. № 2. С. 87–91.
24. Shtern A. I. Almost representations and quasi-symmetry // Lie Groups and Lie Algebras. Their Representations, Generalizations and Applications / ed. B. P. Komrakov et al. Math. Appl. (Soviet Ser.). V. 433. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1998. P. 337–358.
25. Штерн А. И. Жесткость и аппроксимация квазипредставлений аменабельных групп // Матем. заметки. 1999. Т. 65. № 6. С. 908–920.
26. Shtern A. I. Continuity of Banach representations in terms of point variations // Russian J. Math. Phys. 2002. V. 9. № 2. P. 251–253.
27. Штерн А. И. Об операторах в пространствах Фреше, подобных изометриям // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1991. № 4. С. 67–70.
28. Bourgain J., Rosenthal H. P. Geometrical implications of certain finite-dimensional decompositions // Bull. Soc. Math. Belg. Sér. B. 1980. V. 32. № 1. P. 57–82.
29. Bourgin R. D. Geometric aspects of convex sets with the Radon–Nikodým property. Berlin: Springer-Verlag, 1983. (Lect. Notes in Math. V. 993.)
30. Ghoussoub N., Maurey B. G_δ embeddings in Hilbert space. II // Math. Scand. 1984. V. 54. P. 70–78.
31. Chu, Cho-Ho. A note on scattered C^* -algebras and the Radon–Nikodým property // J. London Math. Soc. 1981. V. 24. № 3. P. 533–536.
32. Megrelishvili M. G. Operator topologies and reflexive representability // Nuclear groups and Lie groups / ed. E. Martin Peinador, J. Nunez Garsia. Berlin: Heldermann, 2001. P. 197–208. (Res. Expo. Math. V. 24.)
33. Хьюитт Э., Росс К. Абстрактный гармонический анализ. Т. I. М.: Наука, 1975.
34. Глушков В. М. Структура локально бикompактных групп и пятая проблема Гильберта // УМН. 1957. Т. 12. № 2. С. 3–41.
35. Ahdout S., Hurwitz C., Itzkowitz G., Rothman S., Strassberg H. Maximal protori in compact topological groups // Papers on general topology and applications (Flushing, NY, 1992). New York: New York Acad. Sci., 1994. P. 227–236. (Ann. New York Acad. Sci. V. 728.)

36. *Paterson A. L. T.* Amenability. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1988. (Math. Surv. Monogr. V. 29.)
37. *Hofmann K. H., Morris S. A.* The Structure of compact groups. Berlin: de Gruyter, 1998.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: `ashtern@member.ams.org`

Поступила в редакцию
28.02.2002