Общероссийский математический портал

Ф. Кампана, Т. Петернел, А. В. Пухликов, Обобщенная теорема Тзена и рационально связанные расслоения Фано, *Матем. сб.*, 2002, том 193, номер 10, 49–74

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm685>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 15:27:44

УДК 513.6

Ф. Кампана, Т. Петернелл, А. В. Пухликов

Обобщенная теорема Тзена и рационально связные расслоения Фано

Доказано существование и дано явное алгебраическое описание сечений расслоения X/C над кривой C с общим слоем – полным пересечением Фано в произведении взвешенных проективных пространств. Доказана рациональная связность расслоений $X/\mathbb{P}^1$, общий слой которых есть гладкое трехмерное многообразие Фано.

Библиография: 8 названий.

§ 1. Введение

В статье рассматриваются вопросы, связанные со следующей общей проблемой.

Пусть $\pi: X \rightarrow C$ – расслоение над кривой, общий слой которого рационально связан. Описать сечения расслоения π (существуют ли они, какими алгебраическими многообразиями параметризуются, как могут быть заданы явно и т. д.).

Даже частичные ответы на эти вопросы исключительно важны для понимания геометрии рационально связных многообразий и расслоений. Особенно важен случай, когда общий слой расслоения π есть многообразие Фано: если принять на веру прогнозы теории Мори, именно к расслоениям Фано над $\mathbb{P}^1$ сводится анализ рационально связных многообразий в высших размерностях. При этом необходимо иметь в виду, что все слои вполне могут иметь особенности: в рамках подхода программы минимальных моделей пространство расслоения в общем случае приобретает особенности при переходе от исходного многообразия X к модели, допускающей расслоение Фано.

Опишем основные результаты работы.

1.1. Обобщенная теорема Тзена. Пусть символ $\mathbb{P}$ обозначает взвешенное проективное пространство $\mathbb{P}(a_0, a_1, \dots, a_m)$ над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Пусть $\mathcal{V}$ обозначает класс полных пересечений Фано в произведении взвешенных проективных пространств $\mathbb{P}^{(1)} \times \dots \times \mathbb{P}^{(k)} = \mathbb{P}^\times$, где $\mathbb{P}^{(i)} = \mathbb{P}(a_0^{(i)}, a_1^{(i)}, \dots, a_{m(i)}^{(i)})$.

ТЕОРЕМА 1.1 (обобщенная теорема Тзена). *Пусть $\pi: X \rightarrow C$ – расслоение над кривой, общий слой которого принадлежит классу $\mathcal{V}$. Тогда существует сечение $\beta: C \rightarrow X$, $\pi \circ \beta = \text{id}_C$.*

СЛЕДСТВИЕ 1.2. *Пусть $\pi: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ – расслоение над рациональной кривой, общий слой которого есть полное пересечение Фано в произведении взвешенных проективных пространств. Тогда X рационально связно.*

Работа первого автора поддержана фондом INTAS-OPEN (грант № 2000-269).

Работа третьего автора поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (гранты № 02-15-99258, 02-01-00441) и фондом INTAS-OPEN (грант № 2000-269).

В ходе доказательства обобщенной теоремы Тзена получено явное описание пространств сечений расслоения X/C , аналогичное классической теореме Тзена [1]–[3]: сечения соответствуют решениям системы алгебраических уравнений в многомерном пространстве, параметризующем более широкий класс отображений. Таким образом, наш подход дает гораздо больше, чем просто формальную теорему существования. Сечения явно задаются прямой конструкцией.

1.2. Расслоения Фано.

ТЕОРЕМА 1.3. Пусть $\pi: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ – расслоение, общий слой которого есть гладкое трехмерное многообразие Фано с $b_2 = 1$. Тогда X рационально связно.

Доказательство теоремы проводится на основе классификации трехмерных многообразий Фано, данной Исковских, Мори и Мукаем, с использованием обобщенной теоремы Тзена и специальных методов для отдельных случаев. Предположение, что $b_2 = 1$, является, конечно, излишним. Разработанные в настоящей работе методы позволяют доказать рациональную связность четырехмерного многообразия X просто в предположении, что общий слой расслоения π – гладкое трехмерное многообразие Фано с произвольной группой Пикара. Авторами разобрано большинство возможностей для слоев π (из списка Исковских–Мори–Мукаея), и в каждом случае методы статьи показали свою эффективность. На самом деле, эти методы успешно работают и тогда, когда все слои морфизма π имеют особенности. Однако при $b_2 \neq 1$ или при наличии особенностей речь идет об очень длинных списках многообразий Фано. Анализ всех возможностей еще не завершен, поэтому ограничимся здесь гладкими многообразиями Фано с $b_2 = 1$ в качестве слоев общего положения.

После того как работа была завершена, авторы познакомились с новым препринтом [4], в котором методами теории деформаций и теории модулей кривых доказано существование сечений для любого расслоения на рационально связные многообразия над кривой. Однако настоящая работа полностью сохраняет свое значение, поскольку используемые здесь методы эффективны (сечения строятся явно), и к тому же они гораздо проще. В частности, в основе настоящей статьи и [4] лежат совершенно разные и независимые друг от друга подходы.

1.3. План доказательства обобщенной теоремы Тзена. В своей первоначальной форме теорема Тзена была доказана для расслоений на коники над рациональной кривой [2], см. также [1]. Позже было замечено, что аналогичный факт верен для расслоений вида

$$\begin{array}{ccc} X & \hookrightarrow & \mathbb{P} \times C \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & = & C \end{array}, \quad (1)$$

где X послойно вложено в $\mathbb{P} \times C$ как гиперповерхность (и даже полное пересечение) Фано, а проективное пространство $\mathbb{P}$ может быть заменено на произведение взвешенных проективных пространств, см. [3]. Поскольку доказательство в этом общем случае *дословно* повторяет исходное рассуждение Тзена, никто не публиковал этой теоремы, хотя ее справедливость была хорошо известна. Насколько знают авторы, единственное упоминание такого общего варианта теоремы Тзена содержится в [3].

Рассматриваемое в настоящей работе обобщение теоремы Тзена связано с существенным расширением класса расслоений X/C . Предполагая, что слой общего

положения есть полное пересечение Фано, мы не предполагаем существования *глобального* представления типа (1). В действительности, в типичных случаях такого представления и не существует и поэтому рассуждения Тзена неприменимы.

Будет доказан типичный частный случай теоремы 1.1, когда $\mathbb{P}^{(i)} \equiv \mathbb{P} = \mathbb{P}^M$ – обычное проективное пространство и общий слой $V \subset \mathbb{P} \times \cdots \times \mathbb{P}$ есть гиперповерхность типа $(M, \dots, M)$. Здесь необходимы некоторые пояснения. Основным источником трудностей является монодромия проекций на сомножители прямого произведения $\mathbb{P}^{(1)} \times \cdots \times \mathbb{P}^{(k)}$. Именно она препятствует существованию глобального по C представления типа (1). Поэтому будет рассмотрен случай одинаковых сомножителей $\mathbb{P}^{(i)} = \mathbb{P}^M$ и одинаковых степеней уравнения слоя $\pi^{-1}(t)$, $t \in C$, по координатам сомножителей $\mathbb{P}^{(i)}$. Если размерности сомножителей или степени уравнения различны, монодромия тривиальна: прямые сомножители можно разделить глобально над C и задача автоматически упрощается. Случай полного пересечения ничем не отличается от случая гиперповерхности. Степень M по каждому сомножителю, равная его размерности, выбрана максимально возможной. При этом значении степени на сечения налагается максимальное количество условий, так что если степень меньше, то сечений получается заведомо больше.

Поэтому ограничимся рассмотрением наиболее трудного частного случая: в общем случае не требуется никакой модификации приводимых ниже рассуждений, вся развитая ниже техника работает автоматически (с учетом теоремы Лефшеца, см. предложение 1.4 ниже). Однако общий случай требует значительно более громоздких обозначений. Это, в сущности, единственная причина, по которой рассмотрение ограничено типичным частным случаем.

Доказательство состоит из двух основных шагов.

Шаг 1. Строится специальная модель $X^\# / C$, бирационально эквивалентная X / C над C :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\chi} & X^\# \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & = & C \end{array},$$

где над точкой $x \in C$ общего положения бирациональное отображение χ есть *бигулярный* изоморфизм слоев, так что, в частности, χ индуцирует биекцию

$$\text{Sect}(X/C) \leftrightarrow \text{Sect}(X^\# / C)$$

множеств сечений, и тем самым проблемы существования (и описания) сечений для X/C и $X^\# / C$ эквивалентны.

Объясним смысл этого шага. По предположению слой общего положения расслоения X/C допускает вложение

$$X_x = \pi^{-1}(x) \subset \mathbb{P} \times \cdots \times \mathbb{P}$$

в качестве гиперповерхности типа $(M, \dots, M)$ в $\mathbb{P} \times \cdots \times \mathbb{P} = \mathbb{P}^{\times k}$. Однако в общем случае это вложение не может быть глобализовано даже на бирациональном уровне, т.е. не существует бирационального над C отображения

$$X \dashrightarrow \mathbb{P}^{\times k} \times C$$

на тривиальное (или локально тривиальное) $\mathbb{P}^{\times k}$ -расслоение над C , которое вкладывало бы слой общего положения в $\mathbb{P}^{\times k}$ как гиперповерхность типа $(M, \dots, M)$. Именно по этой причине неприменима классическая теорема Тзена [1]–[3]. Будет

показано, однако (§ 2), что имеется некоторый аналог такой глобализации: вложение

$$\begin{array}{ccc} X^\# & \hookrightarrow & \mathbb{P}^\# \\ & & \downarrow \\ & & C \end{array}$$

над C , где $\mathbb{P}^\#$ расслоено над C с общим слоем $\mathbb{P}^{\times k}$ (но, конечно, $\mathbb{P}^\# / C$ не является локально тривиальным $\mathbb{P}^{\times k}$ -расслоением). Конструкция пространства $\mathbb{P}^\#$ и модели $X^\#$ является геометрически явной и позволяет изучать проблему существования и описания сечений.

Шаг 2. Доказывается существование сечений $X^\# / C \hookrightarrow \mathbb{P}^\# / C$ (и одновременно дается описание сечений). Это делается в два этапа:

- сначала описываются сечения объемлющего расслоения $\mathbb{P}^\# / C$;
- затем с использованием явного описания таких дивизоров $X^\# \subset \mathbb{P}^\#$, слой которых над точкой общего положения $x \in C$ есть $(M, \dots, M)$ -гиперповерхность в $\mathbb{P}^{\times k}$, совершается ключевой шаг – выписываются условия (система алгебраических уравнений на параметры, определяющие сечения расслоения $\mathbb{P}^\# / C$), выполнение которых “заставляет” сечение $s: C \rightarrow \mathbb{P}^\#$ находиться там, где оно должно быть:

$$s(C) \subset X^\#.$$

Теперь простой счет размерностей в духе классической теоремы Тзена [1]–[3] показывает, что эти условия действительно удовлетворяются, что и завершает доказательство.

Лишь один момент требует некоторого дополнительного внимания, когда речь идет о полных пересечениях во взвешенных проективных пространствах:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.4. Пусть $\mathbb{P}^{(j)}$ – взвешенные проективные пространства, $\mathbb{P}^\times = \mathbb{P}^{(1)} \times \dots \times \mathbb{P}^{(r)}$ и $X \subset \mathbb{P}^\times$ – квазигладкое полное пересечение размерности по крайней мере 3. Тогда отображение ограничения

$$\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^\times) \rightarrow \mathrm{Pic}(X)$$

есть изоморфизм.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В том случае, когда $\mathbb{P}^\times$ и X гладкие, получаем утверждение классической теоремы Лефшеца. В общем случае отсылаем читателя к работе [5; пп. 3.2.4 и 3.2.5], где нужный факт доказан для одного взвешенного проективного пространства. Очевидная модификация рассуждений [5] доказывает предложение 1.4 в полном объеме.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.5. Для доказательства предложения 1.4 можно также использовать рассуждения работы [6] (см. [5; замечание (3.2.6)]).

Основные результаты настоящей работы получены в ходе совместных исследований, проведенных в Байройтском университете (Германия). Третий автор благодарит Фонд Гумбольдта и Региональный фонд содействия отечественной науке за финансовую поддержку своих исследований. Первый автор был поддержан программой Немецкого исследовательского общества “Глобальные методы в комплексной геометрии”.

§ 2. Построение специальной модели

В этом параграфе осуществляется первый шаг намеченной программы: строится специальная модель расслоения X/C , приспособленная к нашим задачам.

2.1. Конечное накрытие, параметризующее проекции слоев. Рассмотрим расслоение X/C , описанное в п. 1.3. Для точки $x \in C$ общего положения слой $\pi^{-1}(x) = X_x$ есть гиперповерхность типа $(M, \dots, M)$ в $\mathbb{P}^{\times k}$. Следовательно, для X_x имеется k канонически заданных проекций

$$\text{pr}: X_x \rightarrow \mathbb{P}.$$

Эти k проекций могут быть восстановлены по самому многообразию X_x и не зависят от его конкретного проективного вложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Существует проективная кривая B (приведенная, но, возможно, приводимая), k -листно накрывающая кривую C :*

$$\tau: B \rightarrow C,$$

$\deg \tau = k$, точки которой параметризуют проекции слоев $X_x \rightarrow \mathbb{P}$ в следующем смысле. Существует регулярное алгебраическое отображение

$$p: \pi^{-1}(C^\circ) \times_C B \rightarrow \mathbb{P}, \quad (2)$$

где $C^\circ \subset C$ – открытое множество, состоящее из всех таких точек $x \in C$, что слой X_x есть гиперповерхность типа $(M, \dots, M)$ в $\mathbb{P}^{\times k}$ (напомним, что по предположению это верно лишь для слоя общего положения), слой $\tau^{-1}(x) \subset B$ состоит в точности из k различных точек,

$$\tau^{-1}(x) = \{y_1, \dots, y_k\},$$

а k морфизмов

$$p|_{X_x \times \{y_i\}}: X_x \times \{y_i\} \rightarrow \mathbb{P}$$

суть в точности k проекций

$$\text{pr}: X_x \rightarrow \mathbb{P} \times \dots \times \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$$

на сомножители для каждой точки $x \in C^\circ$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для простоты считаем, что $k = 2$. Слои проекций $X_x \rightarrow \mathbb{P}$, $x \in C$, определяют или два неприводимых семейства циклов, или одно такое семейство. В первом случае получаем два рациональных отображения $X \rightarrow \mathbb{P}$, которые регулярны на общем слое X_x . В этом случае пусть B – две дизъюнктные копии кривой C ; остальное теперь очевидно.

Поэтому можно считать, что имеется одно неприводимое семейство. Пусть $\mathcal{C} \rightarrow T$ обозначает его график с проекцией $\rho: \mathcal{C} \rightarrow X$. В этом случае канонически получаем отображение $h: T \rightarrow C$, которое, конечно, является двулистным накрытием в общей точке. В этом случае положим $B = T$. Над C° имеем $\mathcal{C} = X \times_{C^\circ} B^\circ$. Отображение $\mathcal{C} \rightarrow \mathbb{P}$ определяется сопоставлением точке $z \in C_t$ той точки в $\mathbb{P}$, в которую $\rho(C_t)$ отображается соответствующей проекцией $X_h(z) \rightarrow \mathbb{P}$.

2.2. Конструкция объемлющего пространства $\mathbb{P}^\# = \mathbb{P}^{B/C}$: аналитическое описание над C° . Символом $\mathbb{P}_B = \mathbb{P} \times B$ обозначим тривиальное $\mathbb{P}$ -расслоение над B и символом $\pi_B: \mathbb{P}_B \rightarrow B$ – соответствующую проекцию. Пусть $\mathbb{P}_y = \mathbb{P} \times \{y\} = \pi_B^{-1}(y)$ – слой над точкой $y \in B$ и $\pi_C: \mathbb{P}_B \rightarrow C$ – композиция $\pi_C = \tau \circ \pi_B$. Как выше, обозначим символом $C^\circ \subset C$ множество точек общего положения, имеющих в точности k прообразов в B .

Открытое (в вещественной топологии) множество $D \subset C^\circ$ (например, малый диск) назовем *простым*, если

$$\tau^{-1}(D) = \prod_{i=1}^k D_i,$$

где $\tau: D_i \rightarrow D$ – изоморфизм для каждого i . Теперь для простого $D \subset C^\circ$ положим:

$$\mathbb{P}^{B/C}(D) = \prod_{i=1}^k_D (\mathbb{P} \times D_i) \cong \mathbb{P}^{\times k} \times D,$$

где символ $\prod_D$ обозначает расслоенное произведение относительно морфизмов

$$\mathbb{P} \times D_i \rightarrow D_i \rightarrow D.$$

Пусть

$$\varkappa_i: \mathbb{P}^{B/C}(D) \rightarrow \mathbb{P}$$

обозначает проекцию на i -й сомножитель. Теперь положим $X(D) = \pi^{-1}(D) \subset X$ и рассмотрим расслоенное произведение

$$X(D) \times_C B = X(D) \times_C \tau^{-1}(D) \simeq \prod_{i=1}^k X(D)^{(i)},$$

где $X(D)^{(i)}$ есть тождественная копия множества $X(D)$, соответствующая связной компоненте D_i . Пусть

$$\nu_i: X(D) \rightarrow X(D)^{(i)}$$

– соответствующий изоморфизм.

ЛЕММА 2.2. *Существует однозначно определенный естественный морфизм – вложение*

$$\iota_D: X(D) \rightarrow \mathbb{P}^{B/C}(D)$$

такое, что для каждого $i = 1, \dots, k$ коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} X(D) & \xrightarrow{\iota_D} & \mathbb{P}^{B/C}(D) \\ \nu_i \downarrow & & \downarrow \varkappa_i \\ X(D)^{(i)} & \xrightarrow{p_D} & \mathbb{P} \end{array}, \quad (3)$$

где

$$p_D: X(D) \times_C B \rightarrow \mathbb{P} \quad (4)$$

задается отображением $p|_D \circ \text{pr}_D$. Здесь $p|_D$ – ограничение проекции p , определенной в предложении 2.1, на множество D .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим морфизм ι_D формулой

$$\iota_D = \prod_{i=1}^k (p \circ \nu_i) \times \pi: X(D) \rightarrow \mathbb{P}^{B/C}(D) = \left(\prod_{i=1}^k \mathbb{P} \right) \times D.$$

Диаграмма (3) коммутативна очевидным образом. Очевидно также, что (4) однозначно определяет морфизм ι_D . Для слоя X_x , $x \in D$, это означает просто, что k проекций

$$p_y: X_x \rightarrow \mathbb{P}_y,$$

$y \in \tau^{-1}(x)$, определяют вложение

$$\iota_x: X_x \rightarrow \prod_{y \in \tau^{-1}(x)} \mathbb{P}_y.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Пусть $D^\# \subset D$ – открытое подмножество. Тогда $D^\#$ также простое:

$$\tau^{-1}(D^\#) = \prod_{i=1}^k D_i^\#,$$

так что описанная выше конструкция применима и к $D^\#$. Легко видеть, что существует однозначно определенное естественное вложение

$$\iota_{D^\#, D}: \mathbb{P}^{B/C}(D^\#) \hookrightarrow \mathbb{P}^{B/C}(D),$$

которое приводит к коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccc} X(D^\#) & \hookrightarrow & X(D) \\ \iota_{D^\#} \downarrow & & \downarrow \iota_D \\ \mathbb{P}^{B/C}(D^\#) & \hookrightarrow & \mathbb{P}^{B/C}(D) \end{array}.$$

Поэтому многообразия $\mathbb{P}^{B/C}(D)$ и вложения $\iota_D: X(D) \hookrightarrow \mathbb{P}^{B/C}(D)$ можно склеить и получить (некомпактное) многообразие $\mathbb{P}^{B/C}(C^\circ)$ и вложение $X(C^\circ) \subset \mathbb{P}^{B/C}(C^\circ)$.

2.3. Построение объемлющего пространства $\mathbb{P}^{B/C}$: аналитическое описание в точках ветвления. Для удобства работы с пространством $\mathbb{P}^{B/C}$ необходимо пополнить его над точками $x \in C \setminus C^\circ$. Можно считать, что если кривая B приводима, то ее компоненты не имеют общих точек, т.е. если в слое $\tau^{-1}(x)$ меньше чем k точек, то это происходит из-за ветвления морфизма τ . Более того, можно считать, что исключительное множество $C \setminus C^\circ$ состоит только из таких точек, потому что если $\#\tau^{-1}(x) = k$, то пространство $\mathbb{P}^{B/C}$ строится в точности так же, как описано выше (хотя морфизм вложения i для соответствующего слоя $X_x \hookrightarrow \mathbb{P}_x^{B/C}$, возможно, уже не определен).

Теперь возьмем точку $x \in C \setminus C^\circ$ и рассмотрим полный прообраз

$$\tau^* x = \sum_{i=1}^a l_i y_i,$$

где $a \leq k - 1$, $l_i \geq 1$ и по крайней мере одно из чисел l_i строго больше единицы. Пусть $D \subset C$ — малый диск с центром в точке x , где

$$\tau^{-1}(D) = \prod_{i=1}^a D_i, \quad D_i \ni y_i,$$

и существуют локальные координаты z на D и z_i на D_i , $z(x) = z_i(y_i) = 0$, такие, что морфизм

$$\tau: D_i \rightarrow D$$

принимает вид

$$\tau: z_i \mapsto z_i^{l_i}.$$

Пусть ζ_i — примитивный корень степени l_i из единицы и $G_i = \mathbb{Z}_{l_i}$ — циклическая группа порядка l_i .

Положим

$$\begin{aligned} Z(D) &= \prod_{i=1}^a (\mathbb{P}^{\times l_i} \times D_i) \\ &= \{((p_1^{(1)}; \dots; p_{l_1}^{(1)}; z_1), (p_1^{(2)}; \dots; p_{l_2}^{(2)}; z_2), \dots, (p_1^{(a)}; \dots; p_{l_a}^{(a)}; z_a)) : z_1^{l_1} = \dots = z_a^{l_a}\}. \end{aligned}$$

Определим теперь $\mathbb{P}^{B/C}$ локально на D следующим образом:

$$\mathbb{P}^{B/C}(D) = Z(D)/G_1 \times \dots \times G_a,$$

где циклическая группа $G_i = \langle \sigma_i \rangle$ действует на i -м факторе расслоенного произведения $Z(D)$ следующим образом:

$$\sigma_i(p_1^{(i)}; \dots; p_{l_i}^{(i)}; z_i) = (p_{l_i}^{(i)}; p_1^{(i)}; \dots; p_{l_i-1}^{(i)}; \zeta_i z_i)$$

(точки $p_j^{(i)}$ переставляются циклически). Это действие, очевидно, согласовано с конструкцией расслоенного произведения (ввиду очевидного соотношения $(\zeta_i z_i)^{l_i} = z_i^{l_i}$), и поэтому определенное таким образом действие G_i может быть естественно продолжено до действия на $Z(D)$ (на других сомножителях слоя группа G_i действует тривиально).

Легко проверить, что в проколотом диске $D^\# = D \setminus \{x\}$ эта конструкция совпадает с построениями п. 2.2: точнее, если $D^\# \subset D$ — простое открытое подмножество, так что

$$\tau^{-1}(D^\#) = \prod_{e=1}^k D_e^\#$$

(в частности $x \notin D^\#$), то имеется однозначно определенное естественное вложение

$$\mathbb{P}^{B/C}(D^\#) \hookrightarrow \mathbb{P}^{B/C}(D),$$

где слева стоит пространство, построенное в п. 2.2. В самом деле,

$$\tau^{-1}(D^\#) \cap D_i = \prod_{j=1}^{l_i} D_{i,j}^\#,$$

так что над $D^\#$ все отображения

$$\tau_{i,j}: D_{i,j}^\# \rightarrow D^\#$$

суть изоморфизмы. В частности, можно взять l_i однозначных ветвей функции $z^{1/l_i} = \tau_{i,j}^{-1}$. Зафиксируем одну из них и положим

$$\mu: D_i \cap \tau^{-1}(D^\#) \rightarrow D_i^\#, \quad \mu: z_i \mapsto z_i^\# = (z_i^{l_i})^{1/l_i},$$

где $D_i^\# = D_{i,c(i)}^\#$ есть то подмножество (связная компонента) $D_{i,j}^\#$, которое соответствует выбранной ветви. Теперь пусть отображение

$$\lambda: \prod_{i=1}^a D(\mathbb{P}^{\times l_i} \times (D_i \cap \tau^{-1}(D^\#))) = Z(D) \cap \left(\prod_{i=1}^a \mathbb{P}^{\times l_i} \cap \tau^{-1}(D^\#) \right) \rightarrow \left(\prod_{i=1}^a \prod_{j=1}^{l_i} \mathbb{P} \right) \times D$$

на i -м сомножителе задается формулой

$$(p_1^{(i)}; \dots; p_{l_i}^{(i)}; z_i) \mapsto \sigma_i^f(p_1^{(i)}; \dots; p_{l_i}^{(i)}; z_i),$$

где $f \in \mathbb{Z}$ определено условием

$$z_i^\# = \zeta_i^f z_i.$$

Легко проверить, что λ определяет изоморфизм

$$\mathbb{P}^{B/C}(D) \cap \pi^{-1}(D^\#) \cong \mathbb{P}^{B/C}(D^\#),$$

который, более того, не зависит от выбора корня ζ_i и однозначной ветви корня $(\cdot)^{1/l_i}$. Этот изоморфизм отождествляет $\mathbb{P}^{B/C}(D^\#)$ в смысле п. 2.2 с открытым подмножеством пространства $\mathbb{P}^{B/C}(D)$.

Сказанное означает, что открытые множества $\mathbb{P}^{B/C}(D)$, $D \subset C$, склеиваются в компактное комплексное пространство $\mathbb{P}^{B/C} = \mathbb{P}^{B/C}(C)$, снабженное естественной проекцией

$$\pi: \mathbb{P}^{B/C} \rightarrow C.$$

Здесь для любой точки $x \in C^\circ$ слой проекции π есть

$$\mathbb{P}_x^{B/C} = \pi^{-1}(x) = \prod_{y \in \tau^{-1}(x)} \mathbb{P}_y.$$

2.4. Построение объемлющего пространства $\mathbb{P}^{B/C}$: алгебраическое

описание. Данное выше аналитическое описание пространства $\mathbb{P}^{B/C} = \mathbb{P}_{\text{an}}^{B/C}$ очень удобно для локальных вычислений. Однако априори неясно, является ли $\mathbb{P}^{B/C}$ алгебраическим многообразием. Дадим теперь описание пространства $\mathbb{P}^{B/C}$ с точки зрения алгебраической геометрии. Чтобы подчеркнуть различие в описаниях, обозначим его символом $\mathbb{P}^{B/C} = \mathbb{P}_{\text{alg}}^{B/C}$; ниже будет показано, что существует изоморфизм комплексных пространств

$$\mathbb{P}_{\text{an}}^{B/C} \cong \mathbb{P}_{\text{alg}}^{B/C}.$$

Положим

$$\mathbb{P}_B^{\times C k} = \prod_{i=1}^k {}_C \mathbb{P}_B = \underbrace{{}_B \times {}_C \mathbb{P}_B \times {}_C \cdots \times {}_C \mathbb{P}_B}_k$$

с естественной проекцией π_B на

$$B^{\times_C k} = \prod_{i=1}^k B = \underbrace{B \times_C B \times_C \cdots \times_C B}_k,$$

индуцированной проекцией π_B на каждом сомножителе.

Пусть

$$\tau: B^{\times_C k} \rightarrow C^{\times_C k} = \prod_{i=1}^k C = C$$

– естественная проекция. Очевидно, $\tau^{-1}(C^\circ)$ – гладкое аффинное алгебраическое многообразие. Для открытого (в любой топологии) подмножества $D \subset C^\circ$ положим

$$Z_B(D) = \{(y_1, \dots, y_k) : \tau(y_1) = \cdots = \tau(y_k) = x \in D, y_i \neq y_j \text{ при } i \neq j\}.$$

Пусть

$$Z_B \subset B^{\times_C k}$$

– замыкание множества $Z_B(C^\circ)$. На многообразиях $B^{\times_C k}$ и $\mathbb{P}_B^{\times_C k}$ канонически действует симметрическая группа S_k , переставляя сомножители расслоенного произведения. Очевидно, это действие согласовано с проекцией π_B . Для открытого множества $D \subset C^\circ$ положим

$$Z_{\mathbb{P}}(D) = \pi_B^{-1}(Z_B(D)) \subset \mathbb{P}_B^{\times_C k},$$

и пусть

$$Z_{\mathbb{P}} \subset \mathbb{P}_B^{\times_C k}$$

– замыкание множества $Z_{\mathbb{P}}(C^\circ)$. Замкнутые множества Z_B и $Z_{\mathbb{P}}$ по построению S_k -инвариантны, $\pi_B(Z_{\mathbb{P}}) = Z_B$, $\pi_B^{-1}(Z_B) = Z_{\mathbb{P}}$, и проекция π_B согласована с действием группы S_k . Легко видеть, что для фактормногообразия имеем

$$B^{B/C} = Z_B/S_k \cong C.$$

Теперь положим

$$\mathbb{P}_{\text{alg}}^{B/C} = Z_{\mathbb{P}}/S_k.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. *Алгебраическое многообразие $\mathbb{P}_{\text{alg}}^{B/C}$ и компактное комплексное пространство $\mathbb{P}_{\text{an}}^{B/C}$ канонически изоморфны (как комплексные пространства).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $D \subset C^\circ$ – простое открытое множество, так что над D накрытие $\tau: B \rightarrow C$ приводимо,

$$\tau^{-1}(D) = \prod_{i=1}^k D_i.$$

Как выше, символ π обозначает естественную проекцию для каждого из рассматриваемых многообразий. По определению

$$Z_{\mathbb{P}}(D) = \{(p_1, y_1), (p_2, y_2), \dots, (p_k, y_k) : \tau(y_1) = \cdots = \tau(y_k) = x \in D, y_i \neq y_j \text{ при } i \neq j\}.$$

Рассмотрим отображение

$$\lambda: Z_{\mathbb{P}}(D) \rightarrow \mathbb{P}_{\text{an}}^{B/C}(D),$$

определенное следующим образом:

$$((p_1, y_1), \dots, (p_k, y_k)) \mapsto (p_{\sigma(1)}; \dots; p_{\sigma(k)}; z = \tau(y_1)) \in \mathbb{P}^{\times k} \times D,$$

где перестановка $\sigma \in S_k$ однозначно определяется условием

$$y_{\sigma(i)} \in D_i.$$

Легко видеть, что слои отображения λ суть в точности орбиты группы S_k , так что λ определяет естественный изоморфизм

$$Z_{\mathbb{P}}(D)/S_k \cong \mathbb{P}_{\text{an}}^{B/C}(D).$$

Поскольку этот изоморфизм естественный, он продолжается до изоморфизма

$$Z_{\mathbb{P}}(C^\circ)/S_k \cong \mathbb{P}_{\text{an}}^{B/C}(C^\circ).$$

Необходимо проверить, что этот изоморфизм комплексных пространств продолжается до глобального изоморфизма

$$Z_{\mathbb{P}}/S_k \cong \mathbb{P}_{\text{an}}^{B/C}.$$

Чтобы избежать слишком громоздких обозначений, произведем эту проверку для “экстремального” частного случая ветвления максимального порядка, когда B имеет только одну ветвь над $x \in C$. В общем случае, когда имеется несколько ветвей, аргументы полностью аналогичны, лишь индексов становится больше и формулы более громоздкие. Итак, считаем, что $\tau^{-1}(x) = \{y\}$ и в подходящих локальных координатах z и w на C и B соответственно отображение τ задается формулой

$$\tau^{-1}(D) \ni w \mapsto z = w^k \in D.$$

Напомним, что

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\text{an}}^{B/C}(D) &= \{(p_1; \dots; p_k; z)\}/\mathbb{Z}_k, \\ \mathbb{P}_{\text{alg}}^{B/C}(D) &= Z_{\mathbb{P}}(D)/S_k, \end{aligned}$$

где $Z_{\mathbb{P}}(D)$ — замыкание множества

$$Z_{\mathbb{P}}(D^\circ) = \{((p_1, z_1), \dots, (p_k, z_k)) : z_1^k = \dots = z_k^k = z \in D^\circ, z_i \neq z_j \text{ при } i \neq j\},$$

$D^\circ = D \setminus \{x\}$ — проколотый диск.

Обозначим символом $S^\circ(\mathbb{Z}_k)$ множество (группу) перестановок аддитивной группы $\mathbb{Z}_k$, оставляющих 0 на месте. Получаем разложение

$$Z_{\mathbb{P}}(D^\circ) = \coprod_{\sigma \in S^\circ(\mathbb{Z}_k)} Z_{\mathbb{P}}(D^\circ, \sigma),$$

где

$$Z_{\mathbb{P}}(D^\circ, \sigma) = \{((p_1, z_1), \dots, (p_k, z_k)) : z_i = \zeta^{\sigma(i-1)} z_1\},$$

ζ – фиксированный примитивный корень из единицы степени k . Группа S_k переставляет компоненты множества $Z_{\mathbb{P}}(D^{\circ}, \sigma)$:

$$\mu: Z_{\mathbb{P}}(D^{\circ}, \sigma) \rightarrow Z_{\mathbb{P}}(D^{\circ}, \mu[\sigma]),$$

$\mu \in S_k$, где перестановка $\mu[\sigma] \in S^{\circ}(\mathbb{Z}_k)$ определена соотношением

$$\mu[\sigma](i-1) = \sigma(\mu(i)-1) - \sigma(\mu(1)-1), \quad (5)$$

$i = 1, \dots, k$. Здесь отождествлены целое число i и его образ в $\mathbb{Z}_k$. Теперь пусть $Z_{\mathbb{P}}(D, \sigma)$ – замыкание множества $Z_{\mathbb{P}}(D^{\circ}, \sigma)$ в $Z_{\mathbb{P}}(D)$. Очевидно, группа S_k изоморфно переставляет подмножества $Z_{\mathbb{P}}(D, \sigma)$ и действует транзитивно на множестве этих подмножеств. Следовательно, если $N(\sigma) \subset S_k$ – стабилизатор компоненты $Z_{\mathbb{P}}(D, \sigma)$, то

$$\mathbb{P}_{\text{alg}}^{B/C}(D) \cong Z_{\mathbb{P}}(D, \sigma)/N(\sigma)$$

для каждого $\sigma \in S^{\circ}(\mathbb{Z}_k)$. Возьмем $\sigma = \varepsilon$, где ε – тождественная перестановка. Если $\mu \in N(\varepsilon)$, то согласно (5)

$$\mu(i) - i \in \mathbb{Z}_k$$

не зависит от $i = 1, \dots, k$, т.е. μ есть степень цикла

$$(12 \dots k).$$

Этот факт и дает искомый изоморфизм

$$\mathbb{P}_{\text{alg}}^{B/C}(D) \cong Z_{\mathbb{P}}(D, \varepsilon)/\mathbb{Z}_k \cong Z_{\mathbb{P}}^{\text{an}}(D)/\mathbb{Z}_k \cong \mathbb{P}_{\text{an}}^{B/C}(D),$$

поскольку совпадение $Z_{\mathbb{P}}(D, \varepsilon) = Z_{\mathbb{P}}^{\text{an}}(D)$ очевидно. Легко проверить, что построенный изоморфизм согласован с изоморфизмами

$$\mathbb{P}_{\text{alg}}^{B/C}(D^{\#}) \cong \mathbb{P}_{\text{an}}^{B/C}(D^{\#}),$$

которые были построены выше для открытых подмножеств $D^{\#} \subset D \cap C^{\circ}$.

2.5. Дивизоры послойного типа $(M, \dots, M)$ на $\mathbb{P}^{B/C}$. В этом пункте будет построена специальная модель $X^{\#}/C$, которая уже обсуждалась в п. 1.3. Обратимся к рациональному отображению

$$p: X \times_C B \dashrightarrow \mathbb{P},$$

регулярному над C° . Используя проекцию на второй фактор, продолжим p до отображения

$$p_B: X \times_C B \dashrightarrow \mathbb{P}_B = \mathbb{P} \times B,$$

также регулярного над C° . Теперь построим произведение

$$p_B^{\times_C k}: \underbrace{(X \times_C B) \times_C \dots \times_C (X \times_C B)}_k \dashrightarrow \underbrace{\mathbb{P}_B \times_C \dots \times_C \mathbb{P}_B}_k$$

и заметим, что существует естественный изоморфизм

$$(X \times_C B)^{\times_C k} \cong X^{\times_C k} \times_C B^{\times_C k}.$$

Взяв композицию с диагональным вложением

$$\Delta: X \hookrightarrow X^{\times_C k},$$

получим рациональное отображение

$$p_B^{\times_C k} \circ (\Delta, \text{id}): X \times_C B^{\times_C k} \dashrightarrow \mathbb{P}_B^{\times_C k}.$$

Легко видеть, что это отображение эквивариантно по отношению к действию симметрической группы S_k и образ множества $X \times_C Z_B$ лежит в $Z_{\mathbb{P}}$. Факторизуя по S_k и принимая во внимание, что Z_B/S_k есть просто C , получаем отображение

$$\iota: X \dashrightarrow \mathbb{P}^{B/C},$$

где $\iota|_{X(D)} = \iota_D: X(D) \rightarrow \mathbb{P}^{B/C}(D)$ для любого подмножества $D \subset C^\circ$. Образ

$$\iota(X) = X^\# \subset \mathbb{P}^{B/C}$$

есть искомая специальная модель расслоения X/C .

Итак, на бирациональном уровне расслоение X/C реализовано как гиперповерхность $X^\# \subset \mathbb{P}^{B/C}$ послойного типа $(M, \dots, M)$. Теперь дадим явное описание таких гиперповерхностей.

Зафиксируем систему однородных координат $(u_0, \dots, u_M)$ на $\mathbb{P}$. Пусть

$$\mathbb{M} = \{\mathcal{M} = u_0^{a_0} u_1^{a_1} \dots u_M^{a_M} : a_0 + \dots + a_M = M\} = \{\mathcal{M}_j : j \in J\}$$

— множество всех мономов степени M от переменных u_* . Для каждой точки $x \in C^\circ$ слой $\tau^{-1}(x) = \{y_1, \dots, y_k\}$ состоит из k различных точек, и слой $\mathbb{P}_x^{B/C}$ естественно отождествляется с произведением $\mathbb{P}^{(1)} \times \dots \times \mathbb{P}^{(k)}$, где $\mathbb{P}^{(i)} = \mathbb{P}$ соответствует точке $y_i \in B$. Рассмотрим множество всех мономов типа $(M, \dots, M)$ на пространстве $\mathbb{P}_x^{B/C}$:

$$\mathbb{M}^{\tau^{-1}(x)} = \{\mathcal{M}_{i_1}^{(1)} \dots \mathcal{M}_{i_k}^{(k)} : i_l \in J\},$$

где моном $\mathcal{M}_{i_l}^{(l)}$ состоит из переменных $u_j^{(l)}$, т.е. однородных координат на пространстве $\mathbb{P}^{(l)}$. Очевидно, имеется

$$\#(\mathbb{M}^{\tau^{-1}(x)}) = (\#\mathbb{M})^k$$

таких мономов.

Определить гиперповерхность типа $(M, \dots, M)$ в $\mathbb{P}^{\times k} = \mathbb{P}_x^{B/C}$ — это то же самое, что задать точку в проективном пространстве

$$\mathbb{P}(\#\mathbb{M})^k - 1$$

или ненулевой набор коэффициентов

$$\{c_{i_1, \dots, i_k} \in \mathbb{C} : i_l \in J\} / \mathbb{C}^*$$

с точностью до умножения на ненулевой множитель. Для заданной гиперповерхности типа $(M, \dots, M)$ можно изменить систему координат и добиться того, что для некоторого индекса $e \in J$

$$c_{e, e, \dots, e} \neq 0.$$

Если положить этот коэффициент равным единице, то остальные коэффициенты $c_{i_1, \dots, i_k}$ определятся однозначно.

В частности, для рассматриваемой гиперповерхности $X^\# \subset \mathbb{P}^{B/C}$ получаем: в точке $x \in C^\circ$ общего положения набор коэффициентов, определяющих гиперповерхность $X_x^\#$ в $\mathbb{P}_x^{B/C}$, единственен. Легко видеть, что получающиеся при этом в качестве коэффициентов функции на C° суть ветви многозначных рациональных алгебраических функций на C . Точнее, пусть $D \subset C^\circ$ — простое открытое множество

$$\tau^{-1}(D) = \prod_{i=1}^k D_i \subset B.$$

Для него получаем однозначно определенный набор мероморфных функций

$$c_{j_1, \dots, j_k} : D \rightarrow \mathbb{C},$$

задающий гиперповерхность $X(D)$:

$$X(D) = \left\{ \sum_{(j_1, \dots, j_k) \in J^k} c_{j_1, \dots, j_k} \mathcal{M}_{j_1}^{(1)} \cdots \mathcal{M}_{j_k}^{(k)} = 0 \right\}.$$

Теперь необходимо глобализовать мероморфные функции $c_\#$ до ветвей многозначных рациональных функций на C , т.е. рациональных функций на некоторых накрытиях кривой C . Очевидно, если

$$c_{i_1, \dots, i_k} \quad \text{и} \quad c_{j_1, \dots, j_k}$$

— две ветви одной и той же многозначной мероморфной функции, то состоящие из k символов наборы

$$(i_1, \dots, i_k) \quad \text{и} \quad (j_1, \dots, j_k)$$

различаются только перестановкой. Более формально, для любого разбиения

$$k = k_1 + \dots + k_r$$

и любого множества

$$\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_r$$

попарно различных мономов из множества $\mathbb{M}$ рассмотрим все отображения

$$\varepsilon : \tau^{-1}(x) \rightarrow \mathbb{M}, \quad \#\varepsilon^{-1}(\mathcal{M}_i) = k_i.$$

Такие и только такие отображения (для фиксированного разбиения и фиксированного набора попарно различных мономов $\mathcal{M}_i$) могут порождать различные ветви одной и той же многозначной функции.

Пусть

$$\alpha_{k_1, \dots, k_r} : A_{k_1, \dots, k_r} \rightarrow C$$

— конечное накрытие, параметризующее для любой точки $x \in C^\circ$ общего положения все разбиения слоя $\tau^{-1}(x)$ на систему подмножеств мощности $k_1, \dots, k_r$:

$$A_{k_1, \dots, k_r} = Z_B / (S_{k_1} \times \dots \times S_{k_r}),$$

где $S_{k_1} \times \cdots \times S_{k_r} \hookrightarrow S_k$ — естественное включение. Кривая $A_{k_1, \dots, k_r}$ может, конечно, быть приводимой. В этом случае, когда речь идет о рациональной функции

$$a_{k_1, \dots, k_r}: A_{k_1, \dots, k_r} \rightarrow \mathbb{C},$$

имеется в виду произвольный набор рациональных функций на ее компонентах.

Гиперповерхность послойного типа $(M, \dots, M)$ в $\mathbb{P}^{B/C}$ задается набором рациональных функций

$$a_{k_1, \dots, k_r}^{\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_r}: A_{k_1, \dots, k_r} \rightarrow \mathbb{C}$$

для всех разбиений $k = k_1 + \cdots + k_r$, $k_1 \geq \cdots \geq k_r \geq 1$, и всех наборов r попарно различных мономов $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_r$ из $\mathbb{M}$. Наборы

$$\{a_{k_1, \dots, k_r}^{\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_r}\} \text{ и } \{b_{k_1, \dots, k_r}^{\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_r}\}$$

определяют одну и ту же гиперповерхность тогда и только тогда, когда существует ненулевая рациональная функция

$$\lambda: C \rightarrow \mathbb{C}$$

такая, что

$$a_{k_1, \dots, k_r}^{\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_r} = (\lambda \circ \alpha_{k_1, \dots, k_r}) b_{k_1, \dots, k_r}^{\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_r}$$

для всех $(k_1, \dots, k_r)$, $(\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_r)$.

Фиксируя набор рациональных функций $a_{\#}^{\#}$, определяющий гиперповерхность $X^{\#} = \iota(X) \subset \mathbb{P}^{B/C}$, завершаем описание специальной модели $X^{\#} \subset \mathbb{P}^{B/C}$. Теперь все готово для изучения проблемы существования и описания сечений морфизма $\pi: X^{\#} \rightarrow C$.

§ 3. Существование сечений

В соответствии с принятой стратегией рассматриваем сечения расслоения $X^{\#}/C$ как сечения объемлющего расслоения $s: C \rightarrow \mathbb{P}^{B/C}$, $\pi \circ s = \text{id}_C$, образ которых лежит в $X^{\#}$, т.е. $s(C) \subset X^{\#}$.

3.1. Сечения объемлющего расслоения $\mathbb{P}^{B/C}$. Пусть $x \in C^{\circ}$. Задать сечение $s: C \rightarrow \mathbb{P}^{B/C}$ означает задать значение

$$s(x) \in \mathbb{P}_x^{B/C} = \prod_{b \in \tau^{-1}(x)} \mathbb{P}_b$$

для каждой точки $x \in C^{\circ}$, а это в точности то же самое, что задать значения

$$\{s_B(b) \in \mathbb{P}_b : b \in \tau^{-1}(x)\}.$$

Поэтому сечения объемлющего расслоения находятся во взаимно однозначном соответствии с сечениями

$$s_B: B \rightarrow \mathbb{P}_B = \mathbb{P} \times B.$$

В свою очередь, последние определяются наборами $M+1$ рациональных функций на B .

Введем теперь некоторые конечномерные пространства сечений следующим образом. Пусть R — эффективный дивизор на B . Положим

$$\mathcal{S}(R) = \mathcal{L}(R)^{M+1} = \{(s_0, \dots, s_M) : s_i \in \mathcal{L}(R) = H^0(\mathcal{O}_B(R))\}.$$

Очевидно,

$$\dim \mathcal{S}(R) = (M + 1) \dim \mathcal{L}(R)$$

и любой ненулевой элемент $s \in \mathcal{S}(R) \setminus \{0\}$ определяет сечение расслоения $\mathbb{P}_B/B$ и, тем самым, сечение $\mathbb{P}^{B/C}/C$. Если $\deg R \gg 0$, то отображение

$$\mathbb{P}(\mathcal{S}(R)) \rightarrow \text{Sect}(\mathbb{P}_B/B) = \text{Sect}(\mathbb{P}^{B/C}/C)$$

инъективно на непустом открытом по Зарискому подмножестве пространства $\mathbb{P}(\mathcal{S}(R))$.

С этого момента считаем, что $\tau(R) \subset C^\circ$, так что R не содержит точек ветвления морфизма τ .

3.2. Сечения расслоения $X^\# / C$. Пусть $x \in C^\circ$, $D \ni x$ — простое открытое множество, так что

$$\tau^{-1}(D) = \prod_{i=1}^k D_i,$$

$\tau: D_i \rightarrow D$ — изоморфизмы для всех i . Рассмотрим множество

$$\mathbb{P}^{B/C}(D) = \mathbb{P}^{(1)} \times \dots \times \mathbb{P}^{(k)} \times D,$$

и пусть $u_j^{(i)}$ — однородные координаты на $\mathbb{P}^{(i)}$, соответствующие координатам $u_\#$ на $\mathbb{P}$. В терминах этих координат гиперповерхность $X^\#(D) \subset \mathbb{P}^{B/C}(D)$ задается уравнением

$$F_D(u_i^{(1)}; \dots; u_i^{(k)}; z) = \sum_{(i_1, \dots, i_k) \in J^k} c_{i_1, \dots, i_k}(z) \mathcal{M}_{i_1}^{(1)} \dots \mathcal{M}_{i_k}^{(k)},$$

где мономы $\mathcal{M}_i^{(j)}$ состоят из переменных $u_\#^{(j)}$ и имеют степень M , а мероморфные функции $c_\#(z)$ суть ветви функций

$$a_{k_1, \dots, k_r}^{\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_r},$$

где z — координата на D . Однозначные ветви существуют, потому что все отображения

$$\alpha_{k_1, \dots, k_r}: A_{k_1, \dots, k_r} \rightarrow C$$

распадаются над D :

$$\alpha_{k_1, \dots, k_r}^{-1}(D) = \prod_{\beta \in \mathcal{B}(k_1, \dots, k_r)} D_\beta,$$

где $\mathcal{B}(k_1, \dots, k_r)$ — множество разбиений типа $(k_1, \dots, k_r)$ множества $\{1, \dots, k\}$, параметризующего точки слоя $\tau^{-1}(x)$.

Возьмем $s = (s_0, \dots, s_M) \in \mathcal{S}(R)$. Очевидно,

$$s|_{\tau^{-1}(D)} = \{s|_{D_i} = (s_0^{(i)}, \dots, s_M^{(i)}) : i = 1, \dots, k\}.$$

Образ сечения $s_D: D \rightarrow \mathbb{P}^{B/C}(D)$, определенного элементом $s \in \mathcal{S}(R) \setminus \{0\}$, лежит в $X^\#(D)$ тогда и только тогда, когда

$$F_D(s_\#^{(1)}; s_\#^{(2)}; \dots; s_\#^{(k)}; z) \equiv 0.$$

Теперь посмотрим, что происходит, когда $s_\#^{(i)}$ подставляются вместо $u_\#^{(i)}$ в уравнение F . Пусть $s \in \mathcal{S}(R)$ — произвольный элемент (возможно нуль).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Мероморфные функции переменной z*

$$F_D(s_D) = F_D(s_{\#}^{(1)}; \dots; s_{\#}^{(k)}; z)$$

склеиваются в однозначную рациональную алгебраическую функцию $F(s)$ на C .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО очевидно, потому что и $s_j^{(i)}(z)$, и $c_{\#}(z)$ происходят из глобально (над C) определенных объектов – ветвей многозначных алгебраических функций на C и для $D_1 \subset D_2 \subset C^{\circ}$ имеем $F_{D_1}(s_{D_1}) = F_{D_2}(s_{D_2})|_{D_1}$, так что $F_D(s_D)$ склеиваются в однозначную функцию на C° и потому на C .

3.3. Ключевой факт. Пусть $(F(s))$ – дивизор нулей и полюсов рациональной функции $F(s)$ на C .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. *На кривой C существует эффективный дивизор Δ , зависящий только от гиперповерхности $X^{\#}$ (но не зависящий от R), такой, что для $s \in \mathcal{S}(R)$*

$$(F(s)) + M\tau_*R + \Delta \geq 0. \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Итак, утверждается, что с точностью до дивизора Δ , не зависящего от R , полюсы рациональной функции $F(s)$ ограничены сверху дивизором

$$M\tau_*R = M\left(\sum_{i \in I} m_i \tau(y_i)\right), \quad \text{где} \quad R = \sum_{i \in I} m_i y_i.$$

Начнем с доказательства локальной версии оценки (6). Пусть $D \subset C^{\circ}$ – простое открытое множество,

$$\tau^{-1}(D) = \prod_{i=1}^k D_i,$$

$\tau: D_i \rightarrow D$ – изоморфизм, z – координата на D , $z_i = \tau^*z|_{D_i}$ – координата на D_i . Рассмотрим мероморфную функцию

$$F_D(s_D) = F_D(s_{\#}^{(1)}; \dots; s_{\#}^{(k)}; z) = \sum_{(i_1, \dots, i_k) \in J^k} c_{i_1, \dots, i_k}(z) \mathcal{M}_{i_1}(s_{\#}^{(1)}) \cdots \mathcal{M}_{i_k}(s_{\#}^{(k)}),$$

где $s_j^{(i)}(z) = (\tau^{-1})^*(s_j|_{D_i})$.

Теперь локальную версию утверждения (6) дает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. *Существует эффективный дивизор Δ^+ на C° , зависящий только от $X^{\#}$, такой, что для любого простого открытого множества $D \subset C^{\circ}$*

$$(F_D(s_D)) + M\tau_*(R \cap \tau^{-1}(D)) + \Delta^+ \cap D \geq 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку степень мономов $\mathcal{M}_i$ равна M , в то время как по построению для любых i, j

$$(s_j^{(i)}) + (R \cap D_i) \geq 0,$$

получаем для любого $j \in J$

$$(\mathcal{M}_j(s_{\#}^{(i)})) + M(R \cap D_i) \geq 0.$$

Отсюда получаем

$$\left(\prod_{e=1}^k \mathcal{M}_{i_e}(s_{\#}^{(e)}) \right) + M \tau_* \left(R \cap \left(\prod_{e=1}^k D_i \right) \right) \geq 0,$$

т. е.

$$\left(\prod_{e=1}^k \mathcal{M}_{i_e}(s_{\#}^{(e)}) \right) + M \tau_*(R \cap \tau^{-1}(D)) \geq 0.$$

Напомним, что функции $c_{i_1, \dots, i_k}$ суть ветви рациональных функций

$$a_{k_1, \dots, k_r}^{\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_r} : A_{k_1, \dots, k_r} \rightarrow \mathbb{C}$$

и поэтому зависят только от $X^{\#}$. Их полюсы фиксированы, и потому существует эффективный дивизор Δ^+ на C° такой, что

$$(F_D(s_D)) + M \tau_*(R \cap \tau^{-1}(D)) + \Delta^+ \cap D \geq 0,$$

что и требуется.

Теперь глобализуем предложение 3.3 и докажем предложение 3.2. Из только что полученного локального факта немедленно получаем оценку

$$(F(s)) \cap C^{\circ} + M \tau_* R + \Delta^+ \geq 0$$

(поскольку $\text{Supp } \tau_* R \subset C^{\circ}$ по предположению). Следовательно, чтобы завершить доказательство предложения 3.2, остается рассмотреть полюсы функции $F(s)$ в точках $x \in C \setminus C^{\circ}$ и доказать их ограниченность. Это нетрудно и делается так.

Чтобы проводить координатные вычисления, используем данное выше аналитическое описание пространства $\mathbb{P}^{B/C}$ около точки $x \in C \setminus C^{\circ}$. Пусть $D \ni x$ — малый диск, тогда

$$\mathbb{P}^{B/C}(D) = Z_{\mathbb{P}}(D)/G_1 \times \dots \times G_a.$$

Поднимем все функции на $Z_{\mathbb{P}}(D)$. Многочлен F_D вне точки x , т. е. на $D^{\#} = D \setminus \{x\}$, определен данной выше конструкцией. Поскольку по предположению $R \subset C^{\circ}$, все функции $s_j^{(i)}$ регулярны на $\tau^{-1}(D)$ и, следовательно, мономы $\mathcal{M}_j$ от этих функций также регулярны. Многочлен F_D линеен по своим коэффициентам, которые зависят только от $X^{\#}$. Поэтому существует эффективный дивизор $\Delta^{\#}$ с носителем в $C \setminus C^{\circ}$,

$$\Delta^{\#} = \sum_{x \in C \setminus C^{\circ}} m_x x,$$

такой, что около $x \in C \setminus C^{\circ}$ имеем

$$(F_D(s)) + (\Delta^{\#} \cap D) \geq 0.$$

Полагая $\Delta = \Delta^+ + \Delta^{\#}$, завершаем доказательство предложения 3.2.

3.4. Завершение доказательства теоремы 1.1. Как было установлено выше, отображение

$$\varphi: s \mapsto F(s) \in \mathbb{C}(C)$$

есть отображение аффинных многообразий

$$\varphi: \mathcal{S}(R) \rightarrow \mathcal{L}(M\tau_*R + \Delta).$$

По построению (локально над каждым простым открытым подмножеством $D \subset C^\circ$ и потому глобально ввиду хорошо известной характеристики полиномиальных функций) φ полиномиально степени Mk , т.е. является регулярным отображением аффинных пространств

$$\varphi: \mathbb{C}^{\dim \mathcal{S}(R)} \rightarrow \mathbb{C}^{\dim \mathcal{L}(M\tau_*R + \Delta)}.$$

Очевидно, $0 \in \varphi^{-1}(0)$, так что слой $\varphi^{-1}(0)$ над точкой $0 \in \mathcal{L}(M\tau_*R + \Delta)$ непуст. Следовательно,

$$\dim \varphi^{-1}(0) \geq \dim \mathcal{S}(R) - \dim \mathcal{L}(M\tau_*R + \Delta) = \dim \mathcal{S}(R) - (\deg R - K), \quad (7)$$

где $K \in \mathbb{Z}$ — некоторая константа. Следовательно, если $\deg R \gg 0$ достаточно велико, то слой $\varphi^{-1}(0)$ содержит ненулевые элементы, определяющие сечения расслоения $X^\# / C$.

Доказательство теоремы 1.1 закончено.

Теперь из общей теории [7] следует, что расслоение $X^\# / C$ имеет много сечений, соединяющих произвольные точки $w_i \in X^\#$ в различных слоях. Построенное выше отображение φ дает явное описание сечений как решений системы алгебраических уравнений, а неравенство (7) дает оценку размерности пространства сечений с ограниченными полюсами. Заключительная часть наших аргументов есть обобщение классического доказательства теоремы Тзена для “скрученного” (локально нетривиального) расслоения $\mathbb{P}^{B/C} \rightarrow C$.

§ 4. Расслоения на трехмерные многообразия Фано

4.1. Основной результат.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $\pi: X \rightarrow C = \mathbb{P}^1$ — расслоение, общий слой которого X_b есть гладкое трехмерное многообразие Фано с $b_2(X_b) = 1$. Тогда π имеет сечение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем приведенный в [8] список трехмерных многообразий Фано. В последующих рассуждениях ссылаемся на эту работу и пользуемся принятыми там обозначениями без специальных оговорок. Пусть r — индекс многообразия X_b .

Если $r = 4$ или $r = 3$, то X_c есть $\mathbb{P}^3$ или Q_3 и утверждение вытекает из следствия 1.2.

Если $r = 2$, то X_b — трехмерное многообразие дель Пеццо и во всех случаях доказательство снова получается применением следствия 1.2, за исключением единственного случая, когда X_b имеет тип V_5 , т.е. X_b — линейное сечение $G(2, 5)$ относительно плюккерова вложения в $\mathbb{P}^9$. В этом случае рассмотрим относительное пространство Дуади $\tau: \mathcal{D} \rightarrow B$ прямых в слоях морфизма π . Поскольку поверхность

прямых в X_c есть просто $\mathbb{P}^2$, в общей точке морфизм τ есть $\mathbb{P}^2$ -расслоение над B . Тем самым, τ имеет сечение, дающее одну рациональную кривую в общем слое X_c . Эти рациональные кривые заматают рациональную поверхность в X над $\mathbb{P}^1$, так что π имеет рациональное сечение.

Остается разобрать случай $r = 1$. Пусть g – род многообразия X_c . Если $g \leq 5$, то снова X_c – полное пересечение во взвешенном проективном пространстве, так что можно применить следствие 1.2. Поэтому пусть $g \geq 6$. Здесь воспользуемся конструкцией Мукая. Пусть $C^* \subset C$ – множество регулярных значений π . Зафиксируем точку $c \in C$. Тогда существует единственное стабильное векторное расслоение $\mathcal{E}_c$ над X_c , порожденное глобальными сечениями, которые определяют отображение

$$\phi_c: X_c \rightarrow G(m, V_c),$$

где $V_c = H^0(\mathcal{E}_c)$, такое, что $\mathcal{E}_c = \phi^*(E)$ для тавтологического расслоения E на $G(m, V_c)$. Отметим, что ϕ_c является вложением при $g \geq 7$, но может быть двулиственным накрытием при $g = 6$. Более того, $\phi_b(X_c)$ – полное пересечение в $G(m, V_c)$ при $g \geq 8$. Теперь любое стабильное расслоение на X_c , имеющее тот же ранг и те же классы Чженя, что и $\mathcal{E}_c$, изоморфно $\mathcal{E}_c$. Очевидным образом, расслоения $\mathcal{E}_c$ склеиваются локально; покажем, что они склеиваются и глобально до векторного расслоения $\mathcal{E}$ над $X^* = \pi^{-1}(C^*)$. В самом деле, выберем открытое покрытие $U_i \subset C^*$ такое, что $\mathcal{E}_i$ существует над $V_i = \pi^{-1}(U_i)$. Теперь единственность $\mathcal{E}_c$ обеспечивает существование изоморфизмов

$$\phi_{ij}: \mathcal{E}_i|_{V_{ij}} \rightarrow \mathcal{E}_j|_{V_{ij}}.$$

В силу стабильности имеем $\text{Aut}(\mathcal{E}_c) = \mathbb{C}^*$, поэтому условие коцикла

$$\phi_{ij}\phi_{jk} = \phi_{ik}$$

удовлетворяется с точностью до $\mathbb{C}^*$. Это означает, что по крайней мере $\mathbb{P}(\mathcal{E}_i)$ склеиваются в проективное расслоение над X^* . Поскольку X – расслоение на рационально связные многообразия над $\mathbb{P}^1$, это расслоение должно быть проективизацией векторного расслоения $\mathcal{E}$.

В результате получаем отображение

$$\psi: X \dashrightarrow Z$$

в расслоение $\sigma: Z \rightarrow C$, которое есть расслоение на грассманианы над C^* , а бирационально является прямым произведением. Более того, $\psi|_{X_c} = \phi_c$ для $c \in C^*$. Если теперь $g = 8$ или $g = 6$ и X не является специальным, то применим приведенное ниже предложение 4.2 (теорему Тзена для расслоений на грассманианы) для завершения доказательства. Специальный случай (род равен 6) таков: сечения расслоения $\mathcal{E}_c$ определяют двулистное накрытие

$$\phi_c: X_c \rightarrow G(2, 5),$$

образ которого есть трехмерное многообразие Фано типа V_5 . Здесь (аналитический) прообраз прямой в V_5 есть коника в X_c и, наоборот, каждая коника в X_c отображается на прямую в V_5 . Поэтому коники в X_c образуют неприводимое семейство, параметризованное поверхностью S , которая допускает отображение $h: S \rightarrow \mathbb{P}^2$, последнее многообразие есть поверхность прямых в V_5 . Очевидно, две гладкие коники не могут отображаться на одну и ту же прямую, поэтому отображение h бирационально, т.е. поверхность S рациональна. Теперь те же самые аргументы, которые были использованы в случае V_5 , обеспечивают существование сечения для X .

4.2. Сечения расслоений на грассманианы. Обратимся теперь к оставшимся случаям. Здесь необходимы дополнительные усилия, реализованные в предложении 4.3 и п. 4.5 ниже.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. Пусть $G = G(p, N)$ – грассманиан (обозначения проективные), B – гладкая рациональная кривая, и пусть $H \subset B \times G$ – относительно гладкое полное пересечение, заданное элементами

$$H_i \in |\mathcal{O}_G(k_i) \otimes g^*(\mathcal{L}_i)|.$$

Если $\sum k_i$ меньше, чем индекс G , т.е. $\sum k_i < N + 1$, то $H \rightarrow B$ имеет сечение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для упрощения обозначений рассмотрим только случай, когда H – гиперповерхность, и оставим тривиальные модификации в общем случае читателю.

Сечение s расслоения $H \rightarrow B$ задается $p + 1$ элементами

$$s_i \in H^0(B, (\mathcal{O}_B(d_i))^{\oplus(N+1)}),$$

где $0 \leq i \leq N + 1$, удовлетворяющими следующим условиям:

- 1) векторы $s_0(b), \dots, s_p(b)$ линейно независимы для общего $b \in B$;
- 2) $s_0(b) \wedge \dots \wedge s_p(b) \in H_b$ для всех $b \in B$.

Пусть

$$V(d_*) := \bigoplus_{i=0}^p H^0(\mathcal{O}_B(d_i))^{\oplus(N+1)}$$

– пространство, параметризующее наборы $p + 1$ элементов s_i . Рассмотрим отображение

$$\pi: V(d_*) \rightarrow \bigoplus_{\substack{I \subset \{1, \dots, N\} \\ |I|=p+1}} H^0(\mathcal{O}_B(d)) =: P_d,$$

заданное плюккеровыми координатами, где полагаем

$$d = \sum_{i=0}^p d_i.$$

Образ отображения π вполне может быть незамкнутым. Обозначим символом $W(d_*)$ его замыкание в P_d . В первую очередь, необходимо вычислить размерность $\dim W(d_*)$. С этого момента считаем, что $d_0 = d_1 = \dots = d_p = e$, тогда $d = (p + 1)e$ (достаточно доказать предложение для какого-то одного набора степеней d_i , поэтому мы вправе выбрать такой). В этом случае обозначим $V(d_*)$ символом V_e , $W(d_*)$ символом W_e . Отметим, что морфизм

$$\pi: V_e \rightarrow W_e$$

является доминантным по построению.

ЛЕММА. *Для относительной размерности имеет место равенство*

$$\dim V_e/W_e = \dim V_e - \dim W_e = (p+1)^2,$$

если только $e \geq 2g+1$.

Отложим на некоторое время доказательство леммы и завершим доказательство предложения 4.2. В самом деле, если гиперповерхность H задана уравнением $F \in H^0(\mathcal{O}_G(k) \otimes \pi^*(\mathcal{L}))$, то условие 2) переписывается в плюккерových координатах следующим образом:

$$F(s(b)) = \sum_{|\alpha|=k} p_\alpha(b) s^\alpha = 0.$$

Сечение $s = (s_I)$ тривиального расслоения $B \times G/B$, заданное своими плюккеровыми координатами s_I , является сечением расслоения H/B в том и только том случае, когда $F(s(b)) \equiv 0$. Теперь допустим, что $s \in W_d$, так что $s_I \in H^0(\mathcal{O}_B(d))$ для каждого $I \subset \{1, \dots, N\}$. Ясно, что отображение

$$s \mapsto F(s) \in H^0(\mathcal{O}_B(kd+m)),$$

где $m = \deg(\mathcal{L})$, определяет полиномиальное отображение

$$\varphi: W_d \rightarrow H^0(\mathcal{O}_B(kd+m))$$

замкнутых аффинных алгебраических многообразий. Поскольку $\varphi^{-1}(0) \ni 0$, слой над точкой 0 непуст. Следовательно,

$$\dim \varphi^{-1}(0) \geq \dim W_d - h^0(\mathcal{O}_B(m+kd)) \sim \dim V_d - kd \sim (N+1-k)d$$

с точностью до ограниченного слагаемого. Теперь получаем сечение точно таким же образом, как и в обычной теореме Тзена. Предложение 4.2 доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Необходимо показать, что если набор $(s_0, \dots, s_p)$ достаточно общий и другой набор $(s'_0, \dots, s'_p)$ удовлетворяет условию

$$s'_0 \wedge \dots \wedge s'_p = s_0 \wedge \dots \wedge s_p,$$

так что

$$s' = As$$

для некоторой $(p+1) \times (p+1)$ -матрицы $A = (a_{ij})$, элементы которой — мероморфные функции на B , причем $\det A = 1$, то матрица A постоянна, т.е. все элементы a_{ij} суть константы. Определим мероморфное отображение

$$\psi: B \times \mathbb{P}^p \rightarrow \mathbb{P}^N,$$

полагая

$$\psi(b, [a_0 : a_1 : \dots : a_p]) = [a_0 s_0 + \dots + a_p s_p(b)] = [\sigma(b)].$$

Здесь квадратные скобки $[\cdot]$ в правой части означают проекцию векторного пространства $V \setminus \{0\}$ на соответствующее проективное пространство, т.е. $[\sigma(b)] = [\sigma_0(b) : \dots : \sigma_N(b)]$, где σ_j — компоненты сечения $\sigma = \sum a_i s_i$. Сформулируем следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ. Если $e \geq 2g + 1$ – достаточно большое число, то отображение ψ голоморфно и бирационально на свой образ.

Сначала выведем лемму из этого утверждения. Для простоты обозначений положим $\mathcal{G} = \mathcal{O}_B(e)$. Рассмотрим сечение $s' \in H^0(B, \mathcal{G}^{\oplus N+1})$ такое, что $s' = As$, где $\det A = 1$. Запишем $s' = \sum a_j s_j$. Если $e \geq 2g + 1$, то пучок $\mathcal{G}$ очень обилен, и поэтому отображение $\Phi_{s''}: B \rightarrow \mathbb{P}^N$, переводящее b в $[s''(b)]$, для общего $s'' \in H^0(B, \mathcal{G}^{\oplus N+1})$ является вложением и степень кривой $\Phi_{s''}(B) \subset \mathbb{P}^N$ не зависит от s'' . Поскольку сечение s является общим и размерность слоя нужно вычислить лишь над общей точкой, можем считать, что сечение s' является общим в том смысле, что предыдущие утверждения справедливы для s' вместо s'' . Поскольку $s' = As$, заключаем, что $\Phi_{s'}(B) \subset W$, где W – образ бирационального отображения ψ . Следовательно, если обозначить символом B' образ морфизма

$$B \rightarrow B \times \mathbb{P}^p, \quad b \mapsto (b, [s'(b)]),$$

то получим $\Phi_{s'}(B) = \psi(B')$. Переходя к классам гомологий, имеем

$$[B'] = [B \times x] + a[l],$$

где $l \subset \mathbb{P}^p$ – прямая, $a \geq 0$ – некоторое число. Пусть $H = \psi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1))$. Тогда $H \cdot B' = H \cdot B + a$. С другой стороны, $H \cdot B' = \deg \Phi_{s'}(B) = \deg \Phi_s(B) = H \cdot B$. Следовательно, $a = 0$ и существует точка $a' = [a'_0 : \dots : a'_p] \in \mathbb{P}^p$ такая, что $[s'] = [\sum a'_j s_j]$. Поэтому найдется мероморфная функция b на B такая, что

$$s' = b \left(\sum a'_j s_j \right),$$

т.е. $ba'_j = a_j$ для всех j . Покажем, что функция b должна быть постоянной. Если бы это было не так, сечение s' обязательно имело бы нули. Но s' – общее сечение прямой суммы очень обильных линейных расслоений над кривой и поэтому сечений иметь не может.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ. Если $d' \geq 2g + 1$, то отображение вычисления

$$\epsilon: H^0(\mathcal{G}^{\oplus N+1}) \rightarrow \mathcal{G}_b^{\oplus N+1} \oplus \mathcal{G}_{b'}^{\oplus N+1}$$

сюръективно для любых $b, b' \in B$. Сюда включается и случай $b = b'$, когда последняя сумма понимается как $\mathcal{G}_b^{\oplus N+1} \otimes \mathcal{O}_{B,b}/m_b^2$. Поэтому получаем вложение

$$\tilde{\psi}: B \times \mathbb{P}^p \rightarrow \mathbb{P}^{N'},$$

где $N' = h^0(B, \mathcal{G}^{\oplus N+1}) - 1$. Переходя, если нужно, к двойственному грассманиану, можно считать, что

$$2(p+1) \leq N+1.$$

Теперь пусть $\tau: \mathbb{P}^{N'} \rightarrow \mathbb{P}^N$ – проекция из общего подпространства $\mathbb{P}^M$, где $M = N' - N - 1$. Ограничение отображения τ на образ вложения $\tilde{\psi}$ регулярно, поскольку $N+1 > p+1$. Более того, ψ имеет вид $\psi = \tau \circ \tilde{\psi}$ и потому ψ бирационально: в противном случае каждое подпространство $\mathbb{P}^{N'-N}$ пересекает $\tilde{\psi}(B \times \mathbb{P}^p)$ по крайней мере дважды, но последнее может случиться только в том случае, если

$$p+1 = \dim B \times \mathbb{P}^p \geq \operatorname{codim}_{\mathbb{P}^{N'}} \mathbb{P}^{N'-N},$$

т.е. если $p+1 \geq N$. Поскольку, как объяснялось выше, $N \geq 2(p+1) - 1$, отсюда вытекало бы, что $p = 0$ и $N = 1$, т.е. имел бы место тривиальный случай. Этим доказательство утверждения завершено.

4.3. Случай $g = 9, 10, 12$. Ключевую роль здесь играет предложение 4.3, доказываемое ниже; сейчас удобнее пользоваться аффинными обозначениями для грассманианов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. Пусть $G = G(p, m)$ – грассманиан p -мерных линейных подпространств в $\mathbb{C}^m$. Пусть $i: G \rightarrow \mathbb{P}^{\binom{m}{p}-1}$ – плюккерово вложение и B – гладкая рациональная кривая. Возьмем произвольное относительно линейное подпространство $F \subset B \times \mathbb{P}^{\binom{m}{p}-1}$ и относительно кососимметрические l -линейные формы $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ на $B \times \mathbb{C}^m$, для которых выполнено одно из двух следующих условий:

- 1) $l = 2$;
- 2) $l = p - 1$ и $k = 1$.

Пусть $\Sigma \subset B \times G$ – множество p -плоскостей, σ_j -изотропных для $1 \leq j \leq k$. Положим $Z = F \cap \Sigma$; допустим, что Z имеет ожидаемую размерность и гладко над общей точкой кривой B . Далее, пусть $n = \dim Z - 1$. Предположим, наконец, что в случае 1) выполнено неравенство

$$m + n > p(m - p) - \binom{p-1}{2}k \quad (8)$$

и в случае 2) выполнено неравенство

$$m + n > p(m - p) - 1. \quad (9)$$

Тогда проекция $Z \rightarrow B$ имеет сечение.

Сначала покажем, как вывести теорему 4.1 из предложения 4.3 в случаях $g = 9, 10, 12$. Первая часть доказательства теоремы 4.1 дает бирациональное отображение $\psi: X \dashrightarrow Z \subset C \times G \subset C \times \mathbb{P}^{\binom{m}{p}-1}$. Соответствующие параметры здесь принимают значения

$$\begin{aligned} (m, p) &= (6, 3), \text{ если } g = 9, \\ (m, p) &= (7, 5), \text{ если } g = 10, \\ (m, p) &= (7, 3), \text{ если } g = 12. \end{aligned}$$

Более того, из классификации Мукая, см. [8; п. 5.2.3], получаем, что Z имеет вид $Z = F \cap \Sigma$ для подходящих F и Σ , где соответствующие параметры принимают значения (в обозначениях предложения 4.3)

$$\begin{aligned} (l, k) &= (2, 1), \text{ если } g = 9, \\ (l, k) &= (4, 1), \text{ если } g = 10, \\ (l, k) &= (2, 3), \text{ если } g = 12. \end{aligned}$$

Теперь прямые вычисления показывают, что выполнены неравенства, необходимые для применения предложения 4.3.

4.4. Доказательство предложения 4.3. Искомое сечение s зададим набором p сечений $(s^j)_{1 \leq j \leq p}: C \rightarrow \mathbb{C}^m$, соответствующих относительно многочленам s^j на C степени d . В конце рассуждения перейдем к пределу при $d \rightarrow \infty$. Итак, рассматриваемые сечения зависят от $mp(d + 1)$ параметров.

Случай 1: $l = 2$. Искомое сечение s подчинено условиям

$$\sigma_i(s^j, s^l) = 0,$$

где $1 \leq i \leq k$ и $1 \leq j < l \leq p$. Асимптотически по d это $kp(p-1)/2$ уравнений, билинейных по входящим в них компонентам s^j . Это приводит к $p(p-1)/2$ многочленам степени $2d$ и дает $\sim k(p-1)pd$ условий (обращение в нуль соответствующих коэффициентов). Эти условия заставляют сечение $s: C \rightarrow C \times G$ иметь образ в Σ . Чтобы сечение s имело образ в Z , на него необходимо наложить дополнительные условия. Число линейных условий, задающих относительно линейное пространство F , асимптотически равно

$$\dim \Sigma - \dim F = p(m-p) - k \frac{p(p-1)}{2} - n + 1.$$

Поскольку плюккеровы координаты суть многочлены степени p относительно s^j , эти линейные условия приводят к обращению в нуль $p(m-p) - p(p-1)/2 - n + 1$ многочленов от x (это координата на $\mathbb{P}^1$), каждый степени pd , и в итоге получаем

$$\sim \left(p(m-p) - k \frac{p(p-1)}{2} - n + 1 \right) pd$$

условий.

Всего получаем асимптотически

$$kp(p-1)d + \left(p(m-p) - \frac{p(p-1)}{2} - n + 1 \right) pd$$

условий, в то время как имеется mpd параметров. Тем самым, получаем сечение, как только число параметров становится больше, чем число условий, а это приводит немедленно к неравенству (8) предложения 4.3.

Для того чтобы проверить, что $s^1 \wedge \dots \wedge s^p \neq 0$, следует рассуждать как в доказательстве предложения 4.2.

Случай 2: $l = p-1, k = 1$. Здесь рассуждения полностью аналогичны. Снова имеется mpd параметров. Число условий, вынуждающих сечение s лежать в Σ , асимптотически равно $dpl = p(p-1)d$, потому что размерность пространства $(p-1)$ -линейных кососимметрических форм на $\mathbb{C}^p$ есть $p = \binom{p}{p-1}$, и каждый коэффициент относительной формы есть многочлен степени $p-1$ в s^j , что дает многочлен степени $p(p-1)d$ в x .

Число условий, вынуждающих s лежать в F , равно, как и в случае (8),

$$(\dim \sigma - n)pd = (p(m-p) - p - n + 1)pd,$$

и в силу неравенства (9) имеем больше параметров, чем уравнений, так что сечение s существует.

4.5. Случай $g = 7$. Здесь $m = 9, p = 4$, в то время как $l = 2, k = 1$. В этом случае приведенные выше неравенства не удовлетворяются, так что нужно рассуждать по-другому. Однако все еще можно заключить, что расслоение $\Sigma \rightarrow B$ имеет по крайней мере два сечения (в действительности, одномерное семейство), скажем s_1 и s_2 . Теперь необходимо специальным образом выбрать базис e_i в $\mathbb{C}^9$, чтобы уравнения многообразия $\Sigma \subset C \times G \subset C \times \mathbb{P}^N$ приняли подходящий вид.

Используя эти два сечения, выберем векторы e_i таким образом, что соответствующее s_1 подпространство порождено $e_1, \dots, e_4$ и $q(e_i, e_j) = \delta_{ij}$. Более того, можно выбрать $e_6, \dots, e_9$ таким образом, что s_2 задается 4-плоскостью, порожденной этими векторами. Можно также добиться того, что выполнены равенства

$q(e_i, e_{5+j}) = 0$ и $q(e_{5+i}, e_{5+j}) = \delta_{ij}$. Наконец, пусть e_5 лежит в ортогональном дополнении уже выбранных векторов. Снова обозначая символом x переменную на кривой C и символами $s_{i,j}$ плюккеровы координаты сечения s ($1 \leq i \leq 4$, $1 \leq j \leq 9$), запишем уравнения, задающие условия того, что сечение s лежит в Z , в следующем виде:

$$a_i(x)s_{i,5}^2 + b_i(t)s_{i,5+i} = 0$$

при $1 \leq i \leq 4$ и

$$a_{ij}(x)s_{i,5}^2 + c_{ij}(x)s_{i,5+j} + d_{ji}(x)s_{j,5+i}$$

для очевидного набора пар i, j (имеется $\binom{4}{2} = 6$ таких уравнений). Если взять сечения $s_{i,5}$ степени $d/2$ и все остальные координаты степени d , то, добавляя 7 дополнительных линейных уравнений, задающих $Z \subset \Sigma$, получаем всего $10d + 7d = 17d$ условий. С другой стороны, имеется $16d + 4d/2 = 18d$ параметров, так что количество условий строго меньше. Этим завершается рассмотрение случая $g = 7$.

4.6. Заключительное замечание. Рассмотрение расслоений Фано с $b_2 \geq 2$ весьма утомительно и проводится на основе классификации Мори и Мукая. Естественно, решающую роль играет геометрия стягиваний Мори. Вот одно из рассуждений в качестве примера – детали будут приведены в отдельной работе. Предположим, некоторый (и, следовательно, каждый) гладкий слой X_c допускает лишь одно бирациональное стягивание. Тогда, стягивая послойно, получаем новое расслоение: $X \rightarrow X' \rightarrow C$. Если бирациональное стягивание X_c стягивает исключительный дивизор в точку, то X' имеет сечение. В противном случае получаем выделенную кривую $C_c \subset X'_c$, т.е. линейчатую поверхность $S \subset X' \rightarrow C$, которая также имеет сечение.

Список литературы

1. Шафаревич И. Р. Основы алгебраической геометрии. М.: Наука, 1988.
2. Tsen C. C. Zur Stufentheorie der quasialgebraisch-Abgeschlossenheit kommutativer Körper // J. Chinese Math. Soc. 1936. V. 1. P. 81–92.
3. Kollár J. Rational curves on algebraic varieties. Berlin: Springer-Verlag, 1996.
4. Graber T., Harris J., Starr J. Families of rationally connected varieties // Preprint: math.AG/0109220.
5. Dolgachev I. Newton polyhedra and factorial rings // J. Pure Appl. Algebra. 1980. V. 18. P. 253–258.
6. Dolgachev I. Weighted projective varieties // Group actions and vector fields. Proc. Pol.-North. Amer. Semin., Vancouver 1981. 1982. P. 34–71. (Lecture Notes in Math. V. 956.)
7. Kollár J., Miyaoka Y., Mori S. Rationally connected varieties // J. Algebraic Geom. 1992. V. 1. №3. P. 429–448.
8. Iskovskikh V. A., Prokhorov Yu. G. Fano varieties. Berlin: Springer-Verlag, 1999. (Encyclopaedia Math. Sci. V. 47.)

Département de mathématiques,
Université de Nancy I, France;
Mathematisches Institut,
Universität Bayreuth, Germany;

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, г. Москва
E-mail: frederic.campana@antares.iecn.u-nancy.fr,
thomas.peternell@uni-bayreuth.de, pukh@mi.ras.ru

Поступила в редакцию
17.01.2002