Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Мирзоян, Подмногообразия с полупараллельными тензорными полями как огибающие, *Матем. сб.*, 2002, том 193, номер 10, 99–112

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm686>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 12:44:33

УДК 514.752

В. А. Мирзоян

Подмногообразия с полупараллельными тензорными полями как огибающие

В пространствах постоянной кривизны в терминах различных классов огибающих дается полное решение проблемы взаимосвязи между подмногообразиями с полупараллельными тензорными полями, определенными второй фундаментальной формой с использованием произвольных тензорных операций, и подмногообразиями с соответствующими параллельными тензорными полями.

Библиография: 26 названий.

§ 1. Постановка проблемы и ее решение в частных случаях

На протяжении последних 35-ти лет различные дифференциально-геометрические обобщения симметрических пространств привели к изучению римановых пространств и подмногообразий с параллельными и полупараллельными структурами [1]–[19]. В качестве таких структур выступают различные тензорные поля такие, как тензор кривизны, тензор Риччи, фундаментальные формы (ф.ф.) α_s ($s \geq 2$) подмногообразия и др.

В этом направлении долгое время оставалась нерешенной следующая общая проблема: какова взаимосвязь между подмногообразиями с параллельными тензорными полями и подмногообразиями с полупараллельными тензорными полями?

В 1990 г. для подмногообразий с полупараллельной второй ф.ф. α_2 в пространствах постоянной кривизны эта проблема была решена Ю. Г. Лумисте [6]. Для подмногообразий с полупараллельной ф.ф. α_s ($s \geq 3$), а также для подмногообразий с полупараллельным тензорным полем, определенным формой α_2 с использованием только тензорных операций алгебраического характера (тензор кривизны, тензор Риччи, тензор кривизны нормальной связности и вектор средней кривизны подмногообразия являются примерами такого тензорного поля), эта проблема была решена автором в [14]–[20].

В настоящей работе в объемлющем пространстве постоянной кривизны указанная выше проблема решается в общем виде для подмногообразия с полупараллельными ковариантными производными произвольного тензорного поля, определяемого формой α_2 с использованием тензорных операций как алгебраического, так и дифференциального характера.

Учитывая итоговый характер работы, напомним основные определения и приведем ряд известных теорем из работ [6], [14], [18], дающих решение проблемы в частных случаях.

Пусть M является подмногообразием n -мерного пространства постоянной кривизны $M_n(c)$, и пусть ∇ и $\nabla^\perp$ обозначают риманову и нормальную связности на M ,

а $\bar{\nabla} = \nabla \oplus \nabla^\perp$ – связность Ван дер Вардена–Бортолотти. Для произвольных касательных к M векторных полей X, Y оператор кривизны $\bar{R}(X, Y)$ связности $\bar{\nabla}$ определяется формулой $\bar{R}(X, Y) = [\bar{\nabla}_X, \bar{\nabla}_Y] - \bar{\nabla}_{[X, Y]}$. Известно, что эти операторы действуют как дифференцирования тензорной алгебры на M .

Тензорное поле K на подмногообразии M называется *параллельным*, если $\bar{\nabla}K = 0$ или, более подробно, если $\bar{\nabla}_X K = 0$ для любого касательного к M векторного поля X . Тензорное поле K называется *полупараллельным*, если $\bar{R}(X, Y) \cdot K = 0$ для любых касательных к M векторных полей X, Y .

В $M_n(c)$ подмногообразие M называется *полупараллельным* [1]–[5] (или *полусимметрическим* [6]–[9]), если его вторая ф.ф. α_2 полупараллельна. На протяжении последних 16-ти лет этот класс подмногообразий интенсивно исследуется многими авторами (см. работы [4], [5], [7], [8], [10] и цитированную в них литературу). Большой интерес обусловлен тем, что в силу импликации

$$\bar{R}(X, Y) \cdot \alpha_2 = 0 \Rightarrow R(X, Y) \cdot R = 0$$

(R – тензор кривизны) полупараллельные подмногообразия имеют внутреннюю геометрию полусимметрического риманова пространства, характеризуемого последним условием. Важнейшее свойство полупараллельных подмногообразий описывает

ТЕОРЕМА ЛУМИСТЕ [6]. *В $M_n(c)$ m -мерное подмногообразие M полупараллельно тогда и только тогда, когда оно является огибающим второго порядка семейства m -мерных параллельных подмногообразий.*

Параллельные (или симметрические, что то же самое) подмногообразия характеризуются условием $\bar{\nabla}\alpha_2 = 0$ и, в основном, исчерпываются стандартными погружениями симметрических R -пространств [11]–[13].

В цикле работ автора [14]–[20] теорема Лумисте обобщалась как в направлении усиления закона огибания, так и в направлении его ослабления. Приведенные ниже определения и сформулированные теоремы показывают, в каких направлениях происходило это обобщение.

Пусть M и $\widetilde{M}$ – два m -мерных подмногообразия в $M_n(c)$, имеющих общую точку x . Говорят, что x является *точкой касания 2-го порядка* для M и $\widetilde{M}$, если для каждой кривой $\gamma \in M$, проходящей через x , существует кривая $\tilde{\gamma} \in \widetilde{M}$, также проходящая через x и имеющая с γ общую касательную и вектор кривизны. Ю. Г. Лумисте [6] доказал, что касание 2-го порядка в точке x равносильно совпадению касательных пространств $T_x(M)$ и $T_x(\widetilde{M})$ и вторых ф.ф. α_{2x} и $\tilde{\alpha}_{2x}$ в этой точке. В последней форме понятие касания 2-го порядка допускает следующее обобщение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. В $M_n(c)$ общая точка x двух m -мерных подмногообразий M и $\widetilde{M}$ называется *точкой касания s -го* ($s \geq 2$) *порядка*, если в этой точке совпадают

- 1) касательные пространства $T_x(M)$ и $T_x(\widetilde{M})$,
- 2) ф.ф. α_r и $\tilde{\alpha}_r$, $r = 2, \dots, s$, подмногообразий M и $\widetilde{M}$ соответственно, т.е. $\alpha_{rx} = \tilde{\alpha}_{rx}$ или, более подробно, $\alpha_{rx}(X_1, \dots, X_r) = \tilde{\alpha}_{rx}(X_1, \dots, X_r)$ для любых векторов $X_1, \dots, X_r \in T_x(M)$.

Если условие 2) выполняется для любого $s \geq 2$, то x называется *точкой полного касания* подмногообразий M и $\tilde{M}$.

Фундаментальные формы α_r определяются (подробности см. в [8], [14], [16]) по рекуррентной формуле $\alpha_r = \bar{\nabla} \alpha_{r-1}$ ($r \geq 3$).

Такое понимание касания s -го порядка подмногообразий не совпадает с общепринятым (см. [21; гл. 6, § 4]) и выгодно отличается тем, что определяется с использованием только фундаментальных объектов подмногообразий, характеризующих всю их геометрию.

Отметим следующее важное геометрическое следствие: если $x \in M \cap \tilde{M}$ является точкой касания $(r+1)$ -го порядка, то в этой точке совпадают k -е ($k = 1, \dots, r$) соприкасающиеся пространства подмногообразий M и $\tilde{M}$. Действительно, соприкасающиеся пространства определяются следующим образом. Пусть $((\alpha_k))_x$ обозначает линейную оболочку нормальных векторов вида $\alpha_k(X_1, \dots, X_k)$, где $X_1, \dots, X_k \in T_x(M)$. Подпространство $N_1(x) = ((\alpha_2))_x$ нормального пространства $T_x^\perp(M)$ называется *первым нормальным пространством* подмногообразия M в точке x . *Нормальные пространства* $N_k(x)$ ($k \geq 2$) подмногообразия M в точке x определяются по формуле

$$N_k(x) = ((\alpha_{k+1}))_x \cap (N_1(x) + \dots + N_{k-1}(x))^\perp,$$

где $(\cdot)^\perp$ обозначает ортогональное дополнение в $T_x^\perp(M)$. Прямая сумма $T_x(M) + N_1(x) + \dots + N_k(x)$ называется *k -м соприкасающимся пространством* подмногообразия M в точке x . Теперь очевидно, что высказанное выше утверждение справедливо.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. В $M_n(c)$ t -мерное подмногообразие M называется *огibaющим s -го порядка* ($s \geq 2$) некоторого семейства t -мерных подмногообразий $\{G\}$, если в каждой своей точке оно имеет касание s -го порядка с каким-либо подмногообразием этого семейства, причем касание вдоль M переходит от одного подмногообразия семейства к другому. Если M в каждой своей точке имеет полное касание с каким-либо подмногообразием семейства $\{G\}$, то оно называется *огibaющим полного порядка* этого семейства.

Это определение огibaющего подмногообразия s -го порядка не является единственно возможным. Другие подходы в теории огibaющих освещены в [22]–[24].

В дальнейшем для краткости подмногообразия с параллельной ф.ф. α_s ($s \geq 2$) будем называть *s -параллельными*, а с полупараллельной ф.ф. α_s – *s -полупараллельными* (при $s = 2$ подразумеваются параллельные и полупараллельные подмногообразия соответственно).

Следующие две теоремы распространяют результат Ю.Г. Лумистена s -параллельные и s -полупараллельные ($s \geq 3$) подмногообразия.

ТЕОРЕМА 1 [14]. В $M_n(c)$ t -мерное подмногообразие M класса C^∞ является *огibaющим s -го порядка семейства t -мерных s -параллельных подмногообразий* тогда и только тогда, когда оно имеет *полупараллельные ф.ф. α_{s-1} и α_s при $s \geq 3$ и полупараллельную ф.ф. α_2 при $s = 2$.*

ТЕОРЕМА 2 [14]. Пусть в $M_n(c)$ t -мерное подмногообразие M класса C^∞ имеет симметрические ф.ф. $\alpha_3, \dots, \alpha_{s-1}$ ($s \geq 4$). Тогда его ф.ф. α_s будет симметрической в том и только том случае, когда M является огибающим $(s-2)$ -го порядка семейства t -мерных $(s-2)$ -параллельных подмногообразий, у каждого из которых все ф.ф. до $(s-2)$ -го порядка включительно также являются симметрическими.

В силу импликации [14]

$$(R(X, Y) \cdot \alpha_{s-1} = 0, R(X, Y) \cdot \alpha_s = 0) \Rightarrow R(X, Y) \cdot R = 0 \quad (s \geq 4)$$

$(s-1)$ - и s -полупараллельные подмногообразия составляют новый класс подмногообразий с внутренней геометрией полусимметрического риманова пространства и в этой связи представляют большой интерес.

Пусть $F(M)$ обозначает класс тензорных полей на подмногообразии M в $M_n(c)$, определяемых только второй ф.ф. α_2 и ее ковариантными производными произвольного порядка с использованием любых тензорных операций. Классу $F(M)$ принадлежат, в частности, тензор кривизны R римановой связности на M , тензор кривизны нормальной связности $R^\perp$, тензор Риччи Ric , вектор средней кривизны H и их ковариантные производные любого порядка. Если M и $\widetilde{M}$ — два t -мерных подмногообразия в $M_n(c)$, то через $T \in F(M)$ и $\widetilde{T} \in F(\widetilde{M})$ будем обозначать соответствующие тензорные поля, т.е. такие тензорные поля, которые выражаются соответственно через вторые ф.ф. α_2 и $\widetilde{\alpha}_2$ (знак $\sim$ обозначает, что объект относится к $\widetilde{M}$) и их ковариантные производные различных порядков с использованием одних и тех же тензорных операций. В дальнейшем для произвольных касательных к подмногообразию M векторных полей $X_1, \dots, X_s$ ковариантные производные $\overline{\nabla}_{X_1} \cdots \overline{\nabla}_{X_s} T$ более коротко будем обозначать через $\overline{\nabla}^s T$ (при $s = 0$ полагаем $\overline{\nabla}^0 T = T$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть в пространстве постоянной кривизны $M_n(c)$ t -мерные подмногообразия M и $\widetilde{M}$ имеют общую точку x , и пусть $T \in F(M)$ и $\widetilde{T} \in F(\widetilde{M})$ — некоторые соответствующие тензорные поля. Точку x будем называть *точкой T -касания s -го* ($s \geq 0$) *порядка* для M и $\widetilde{M}$, если в x совпадают

- 1) касательные пространства $T_x(M)$ и $\widetilde{T}_x(\widetilde{M})$,
- 2) ковариантные производные $\overline{\nabla}^r T$ и $\overline{\nabla}^r \widetilde{T}$, где $r = 0, 1, \dots, s$.

(При $s = 0$ будем говорить просто о *точке T -касания*.)

Из определения 1 следует, что каждая точка полного касания автоматически является точкой T -касания s -го порядка для любого $s \geq 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. В $M_n(c)$ t -мерное подмногообразие M будем называть *T -огибающим* ($T \in F(M)$) *s -го* ($s \geq 0$) *порядка* для некоторого семейства t -мерных подмногообразий $\{G\}$, если в каждой своей точке оно имеет T -касание s -го порядка с каким-либо подмногообразием этого семейства, причем касание вдоль M переходит от одного подмногообразия семейства к другому. (При $s = 0$ будем говорить просто о *T -огибающем* подмногообразии.)

Если в определениях 3 и 4 тензорное поле T заменить на тензор кривизны R (или на $R^\perp$, Ric или H), то получим определение точки R -касания s -го порядка, R -огигающего подмногообразия s -го порядка и т. д.

Если на подмногообразии M в $M_n(c)$ ковариантная производная $\bar{\nabla}^s T$ ($T \in F(M)$) является параллельной, т.е. $\bar{\nabla}(\bar{\nabla}^s T) = 0$, то M будем называть $\bar{\nabla}^s T$ -параллельным подмногообразием. Если же $\bar{\nabla}^s T$ является полупараллельной, т.е. $\bar{R}(X, Y) \cdot \bar{\nabla}^s T = 0$ для любых касательных к M векторных полей X, Y , то M будем называть $\bar{\nabla}^s T$ -полупараллельным подмногообразием. При $s = 0$ получаются определения T -параллельного и T -полупараллельного подмногообразий.

Следующие теоремы описывают более слабые законы огибания, чем теорема Лумисте и теоремы 1, 2.

ТЕОРЕМА 3 [18]. Пусть в пространстве постоянной кривизны $M_n(c)$ t -мерное подмногообразие M является R -, $R^\perp$ - и T -огигающим ($T \in F(M)$ и определяется второй ф.ф. α_2 с использованием только тензорных операций алгебраического характера) семейства $\{\tilde{M}\}$ t -мерных $\tilde{T}$ -параллельных подмногообразий. Тогда M является T -полупараллельным подмногообразием.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если в тождестве Риччи для T не участвует какой-либо из тензоров R или $R^\perp$, то в теореме 3 соответствующее выражение “ R -” или “ $R^\perp$ -” необходимо опустить.

ТЕОРЕМА 4 [18]. В пространстве постоянной кривизны $M_n(c)$ t -мерное T -полупараллельное подмногообразие M (T такое же, как и в теореме 3) класса C^∞ является огигающим полного порядка для некоторого семейства $\{\tilde{M}\}$ t -мерных $\tilde{T}$ -параллельных подмногообразий.

С учетом замечания 1 теоремы 3 и 4 легко перефразировать для тензоров $R, R^\perp$, Ric и вектора H .

§ 2. Формулировка результатов

В настоящей работе, заключающей цикл исследований автора [14]–[20] по этой проблематике, изложенные в § 1 результаты обобщаются и распространяются на ковариантные производные $\bar{\nabla}^s T$ произвольного тензорного поля $T \in F(M)$ на подмногообразии M в $M_n(c)$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть в пространстве постоянной кривизны $M_n(c)$ t -мерное подмногообразие M класса C^∞ является R - и $R^\perp$ -огигающим порядка $r = 0$ и T -огигающим ($T \in F(M)$) порядка $s \geq 0$ для некоторого семейства $\{\tilde{M}\}$ t -мерных $\bar{\nabla}^s T$ -параллельных подмногообразий. Тогда M является $\bar{\nabla}^{s-1} T$ - и $\bar{\nabla}^s T$ -полупараллельным при $s \geq 1$ и T -полупараллельным при $s = 0$.

При формулировке этой теоремы для конкретных тензорных полей необходимо учитывать замечание 1.

ТЕОРЕМА 6. Пусть в пространстве постоянной кривизны $M_n(c)$ t -мерное подмногообразие M класса C^∞ является $\bar{\nabla}^{s-1} T$ - и $\bar{\nabla}^s T$ -полупараллельным ($s \geq 0$, при $s = 0$ предполагается только T -полупараллельность), где $T \in$

$F(M)$. Тогда оно является огибающим полного порядка для некоторого семейства $\{\tilde{M}\}$ t -мерных $\tilde{\nabla}^s \tilde{T}$ -параллельных подмногообразий.

Если в теореме 6 T совпадает с ф.ф. α_s ($s \geq 3$), то можно руководствоваться теоремой 1, описывающей этот случай.

ТЕОРЕМА 7. Пусть в $M_n(c)$ на t -мерном подмногообразии M класса C^∞ ковариантные производные $\tilde{\nabla}_{X_1} \dots \tilde{\nabla}_{X_r} T$ ($r = 2, \dots, s+1$, $s \geq 2$) тензорного поля $T \in F(M)$ для любых касательных к M векторных полей $X_1, \dots, X_r$ симметричны по этим аргументам. Для того чтобы ковариантная производная $\tilde{\nabla}_{X_1} \dots \tilde{\nabla}_{X_{s+2}} T$ также была симметрична по произвольным аргументам $X_1, \dots, X_{s+2}$, необходимо и достаточно, чтобы M было R -, $R^\perp$ -, $\tilde{\nabla}^s T$ -огибающим для некоторого семейства $\{\tilde{M}\}$ t -мерных $\tilde{\nabla}^s \tilde{T}$ -параллельных подмногообразий, у каждого из которых ковариантные производные $\tilde{\nabla}_{\tilde{X}_1} \dots \tilde{\nabla}_{\tilde{X}_{r'}} \tilde{T}$, $r' = 2, \dots, s$, симметричны по произвольным аргументам $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_{r'}$.

Теоремы 5–7 окончательно устанавливают законы взаимосвязей, которым подчиняются подмногообразия, несущие параллельные и полупараллельные структуры, выражаемые через вторую ф.ф. и ее ковариантные производные. Теорема Лумисте и теоремы 1–4 описывают частные проявления этих законов.

Классификация и геометрическое описание некоторых классов подмногообразий с параллельными и полупараллельными тензорными полями дана в [1], [2], [4], [5], [7], [8], [10]–[13], [25].

§ 3. Основные формулы и редукция условий

В настоящем параграфе коротко (подробности см. в [14], [16], [18]) с использованием формализма расслоения адаптированных ортонормреперов подмногообразия приведем основные формулы и уравнения и получим редукцию некоторых условий, необходимых для доказательства теорем 5–7.

Пусть $\omega = \omega^a \otimes e_a$ – каноническая 1-форма на $M_n(c)$, и пусть ω_b^a являются 1-формами связности Леви-Чивита в главном расслоении $O(M_n(c))$ ортонормреперов $(x, e_1, \dots, e_n)$ в $M_n(c)$, где $a, b = 1, \dots, n$. Тогда $\omega_a^b + \omega_b^a = 0$ и выполняются следующие структурные уравнения:

$$d\omega^a = \omega^b \wedge \omega_b^a, \quad d\omega_a^b = \omega_a^d \wedge \omega_d^b - c\omega^a \wedge \omega^b.$$

Пусть M является t -мерным подмногообразием класса C^∞ в $M_n(c)$. Тогда расслоение $O(M_n(c))$ может быть приведено к главному расслоению $O(M, M_n(c))$ адаптированных ортонормреперов $(x, e_1, \dots, e_t, e_{t+1}, \dots, e_n)$, где векторы e_i ($i, j, \dots = 1, \dots, t$) принадлежат касательному пространству $T_x(M)$, а векторы e_α ($\alpha, \beta, \dots = t+1, \dots, n$) – нормальному пространству $T_x^\perp(M)$, $x \in M$ (подробности см. в [26; гл. VII, § 1]). В силу этого по известной схеме (см. [7],

[14], [18]) получим

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega^\alpha = 0, \\ \omega_i^\alpha = h_{ij}^\alpha \omega^j, \quad h_{ij}^\alpha = h_{ji}^\alpha, \\ \bar{\nabla} h_{ij}^\alpha = h_{ijk}^\alpha \omega^k, \quad h_{ijk}^\alpha = h_{ikj}^\alpha, \\ \bar{\nabla} h_{ijk}^\alpha = h_{ijkl}^\alpha \omega^l, \\ \dots\dots\dots, \\ \bar{\nabla} h_{i_1 \dots i_t}^\alpha = h_{i_1 \dots i_t i_{t+1}}^\alpha \omega^{i_{t+1}}, \\ \dots\dots\dots, \end{array} \right. \quad (3.1)$$

где $\bar{\nabla}$ обозначает связность Ван дер Вардена–Бортолотти, а функции $h_{i_1 \dots i_t}^\alpha$ ($t \geq 2$), определяемые уравнениями системы (3.1), являются компонентами ф.ф. α_t . Все уравнения в (3.1), начиная с третьего, в развернутой записи имеют следующий вид:

$$dh_{i_1 \dots i_t}^\alpha + h_{i_1 \dots i_t}^\beta \omega_\beta^\alpha - h_{k i_2 \dots i_t}^\alpha \omega_{i_1}^k - \dots - h_{i_1 \dots k}^\alpha \omega_{i_t}^k = h_{i_1 \dots i_t i_{t+1}}^\alpha \omega^{i_{t+1}}. \quad (3.2)$$

Формы α_t являются $T^\perp(M)$ -значными (через $T^\perp(M)$ обозначаем нормальное расслоение) и действуют по правилу

$$\alpha_t: (X_1, \dots, X_t) \rightarrow h_{i_1 \dots i_t}^\alpha X_1^{i_1} \dots X_t^{i_t} e_\alpha,$$

где $X_r = X_r^i e_i$, $r = 1, \dots, t$. Из (3.1) следует, что $\alpha_t = \bar{\nabla} \alpha_{t-1}$ ($t \geq 3$).

Дифференцируя внешним образом уравнение (3.2), получаем условие его интегрируемости:

$$h_{i_1 \dots i_t k l}^\alpha \omega^k \wedge \omega^l = h_{k \dots i_t}^\alpha \Omega_{i_1}^k + \dots + h_{i_1 \dots k}^\alpha \Omega_{i_t}^k - h_{i_1 \dots i_t}^\beta \Omega_\beta^\alpha. \quad (3.3)$$

Здесь

$$\Omega_i^j = d\omega_i^j - \omega_i^k \wedge \omega_k^j = - \left(\sum_\alpha h_{i[k}^\alpha h_{l]j}^\alpha + c \delta_{i[k} \delta_{l]j} \right) \omega^k \wedge \omega^l, \quad (3.4)$$

$$\Omega_\alpha^\beta = d\omega_\alpha^\beta - \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta = - \sum_i h_{i[k}^\alpha h_{l]i}^\beta \omega^k \wedge \omega^l \quad (3.5)$$

являются 2-формами связности $\bar{\nabla} = \nabla \oplus \nabla^\perp$, где ∇ обозначает риманову связность на подмногообразии M , определенную 1-формами ω_i^j , а $\nabla^\perp$ – нормальную связность, определенную 1-формами ω_β^α .

В (3.4) и (3.5) коэффициенты

$$R_{ikl}^j = - \left(\sum_\alpha h_{i[k}^\alpha h_{l]j}^\alpha + c \delta_{i[k} \delta_{l]j} \right), \quad R_{\alpha kl}^\beta = - \sum_i h_{i[k}^\alpha h_{l]i}^\beta \quad (3.6)$$

при $\omega^k \wedge \omega^l$ являются компонентами тензоров кривизны R и $R^\perp$ связностей ∇ и $\nabla^\perp$ соответственно. При $R = 0$ говорят о локально евклидовом подмногообразии, а при $R^\perp = 0$ – о подмногообразии с плоской нормальной связностью.

Учитывая (3.3), условия интегрируемости системы (3.1) можем записать в следующем виде:

$$\begin{cases} h_{ij,kl}^\alpha \omega^k \wedge \omega^l = h_{pj}^\alpha \Omega_i^p + h_{ip}^\alpha \Omega_j^p - h_{ij}^\beta \Omega_\beta^\alpha, \\ h_{ij,kl}^\alpha \omega^l \wedge \omega^p = h_{qj,k}^\alpha \Omega_i^q + h_{iq,k}^\alpha \Omega_j^q + h_{ij,q}^\alpha \Omega_k^q - h_{ij,k}^\beta \Omega_\beta^\alpha, \\ \dots\dots\dots, \\ h_{i_1\dots i_t p q}^\alpha \omega^p \wedge \omega^q = h_{k\dots i_t}^\alpha \Omega_{i_1}^k + \dots + h_{i_1\dots k}^\alpha \Omega_{i_t}^k - h_{i_1\dots i_t}^\beta \Omega_\beta^\alpha, \\ \dots\dots\dots \end{cases} \quad (3.7)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Отметим, что системы (3.1) и (3.7) всегда конечны, так как в силу конечности n в каждой точке $x \in M$ пространство $T_x(M_n(c))$ при увеличении t необходимо заполняется или заполнение останавливается на некотором подпространстве (см. определение нормальных пространств).

Пусть $T \in F(M)$ – некоторое тензорное поле на подмногообразии M , компоненты T_{ij}^α которого (такое строение компонент не ограничивает общности рассуждений, ибо увеличение числа нижних и верхних индексов приведет только к усложнению выкладок) выражаются через $h_{i_1\dots i_t}^\alpha$ ($t \geq 2$) с использованием произвольных тензорных операций. Через $T_{ij,i_1\dots i_r}^\alpha$ будем обозначать компоненты ковариантных производных $\bar{\nabla}^r T$. Они определяются из системы

$$\begin{cases} \bar{\nabla} T_{ij}^\alpha = T_{ij,i_1}^\alpha \omega^{i_1}, \\ \bar{\nabla} T_{ij,i_1}^\alpha = T_{ij,i_1 i_2}^\alpha \omega^{i_2}, \\ \dots\dots\dots, \\ \bar{\nabla} T_{ij,i_1\dots i_s}^\alpha = T_{ij,i_1\dots i_s i_{s+1}}^\alpha \omega^{i_{s+1}}, \\ \dots\dots\dots \end{cases} \quad (3.8)$$

где левые части раскрываются по схеме (3.2).

Дифференцируя внешним образом уравнение

$$dT_{ij,i_1\dots i_s}^\alpha + T_{ij,i_1\dots i_s}^\beta \omega_\beta^\alpha - T_{kj,i_1\dots i_s}^\alpha \omega_i^k - \dots - T_{ij,i_1\dots k}^\alpha \omega_{i_s}^k = T_{ij,i_1\dots i_s}^\alpha \omega^k,$$

получаем условие его интегрируемости в следующем виде:

$$T_{ij,i_1\dots i_s k l}^\alpha \omega^k \wedge \omega^l = T_{kj,i_1\dots i_s}^\alpha \Omega_i^k + T_{ik,i_1\dots i_s}^\alpha \Omega_j^k + \dots + T_{ij,i_1\dots k}^\alpha \Omega_{i_s}^k - T_{ij,i_1\dots i_s}^\beta \Omega_\beta^\alpha. \quad (3.9)$$

Следовательно, система

$$\begin{cases} T_{ij,kl}^\alpha \omega^k \wedge \omega^l = T_{pj}^\alpha \Omega_i^p + T_{ip}^\alpha \Omega_j^p - T_{ij}^\beta \Omega_\beta^\alpha, \\ T_{ij,kl}^\alpha \omega^l \wedge \omega^p = T_{qj,k}^\alpha \Omega_i^q + T_{iq,k}^\alpha \Omega_j^q + T_{ij,q}^\alpha \Omega_k^q - T_{ij,k}^\beta \Omega_\beta^\alpha, \\ \dots\dots\dots, \\ T_{ij,i_1\dots i_s k l}^\alpha \omega^k \wedge \omega^l = T_{pj,i_1\dots i_s}^\alpha \Omega_i^p + T_{ip,i_1\dots i_s}^\alpha \Omega_j^p \\ \quad + \dots + T_{ij,i_1\dots p}^\alpha \Omega_{i_s}^p - T_{ij,i_1\dots i_s}^\beta \Omega_\beta^\alpha, \\ \dots\dots\dots \end{cases} \quad (3.10)$$

дает условия интегрируемости системы (3.8).

Условия параллельности и полупараллельности ковариантной производной $\nabla^s T$ аналитически выражаются соответственно следующими уравнениями:

$$dT_{ij,i_1\dots i_s}^\alpha + T_{ij,i_1\dots i_s}^\beta \omega_\beta^\alpha - T_{kj,i_1\dots i_s}^\alpha \omega_i^k - T_{jk,i_1\dots i_s}^\alpha \omega_j^k - T_{ij,k\dots i_s}^\alpha \omega_{i_1}^k - \dots - T_{ij,i_1\dots k}^\alpha \omega_{i_s}^k = 0, \quad (3.11)$$

$$T_{kj,i_1\dots i_s}^\alpha \Omega_i^k + T_{ik,i_1\dots i_s}^\alpha \Omega_j^k + T_{ij,k\dots i_s}^\alpha \Omega_{i_1}^k + \dots + T_{ij,i_1\dots k}^\alpha \Omega_{i_s}^k - T_{ij,i_1\dots i_s}^\beta \Omega_\beta^\alpha = 0. \quad (3.12)$$

Условие (3.11) коротко можно записать в виде $\overline{\nabla} T_{ij, i_1 \dots i_s}^\alpha = 0$, что равносильно $T_{ij, i_1 \dots i_s i_{s+1}}^\alpha = 0$. Из (3.9) следует, что (3.12) равносильно симметричности компонент $T_{ij, i_1 \dots i_s, kl}^\alpha$ по двум последним нижним индексам.

Пусть $\bar{\nabla} \bar{\nabla}^s T = 0$. Тогда $T_{ij, i_1 \dots i_s k}^\alpha = 0$ и, следовательно, $T_{ij, i_1 \dots i_s kl}^\alpha = 0$. Из первого равенства следует полупараллельность $\bar{\nabla}^{s-1} T$, а из второго – полупараллельность $\bar{\nabla}^s T$.

Таким образом, если ковариантная производная $\bar{\nabla}^s T$ является параллельной, то как $\bar{\nabla}^{s-1} T$, так и $\bar{\nabla}^s T$ являются полупараллельными и выполняются следующие условия:

$$\begin{cases} T_{kj,i_1 \dots i_{s-1}}^\alpha \Omega_i^k + T_{ik,i_1 \dots i_{s-1}}^\alpha \Omega_j^k + T_{ij,k \dots i_{s-1}}^\alpha \Omega_{i_1}^k \\ \quad + \dots + T_{ij,i_1 \dots k}^\alpha \Omega_{i_{s-1}}^k - T_{ij,i_1 \dots i_{s-1}}^\beta \Omega_\beta^\alpha = 0, \\ T_{kj,i_1 \dots i_s}^\alpha \Omega_i^k + T_{ik,i_1 \dots i_s}^\alpha \Omega_j^k + T_{ij,k \dots i_s}^\alpha \Omega_{i_1}^k \\ \quad + \dots + T_{ij,i_1 \dots k}^\alpha \Omega_{i_s}^k - T_{ij,i_1 \dots i_s}^\beta \Omega_\beta^\alpha = 0. \end{cases} \quad (3.13)$$

Из (3.9) следует, что функции $T_{ij,kl}^\alpha, T_{ij,klp}^\alpha, \dots, T_{ij,i_1 \dots i_{s+2}}^\alpha$ одновременно будут симметрическими по всем нижним индексам, стоящим после запятой (что равносильно одновременной полупараллельности тензоров $T_{ij}^\alpha, T_{ij,k}^\alpha, \dots, T_{ij,i_1 \dots i_s}^\alpha$), тогда и только тогда, когда выполняется следующая система условий:

[illegible]

Очевидно, что если подмногообразие является локально евклидовым и имеет плоскую нормальную связность, то все ковариантные производные $T_{ij,i_1\dots i_s}^\alpha$ ($s \geq 2$) тензорного поля T_{ij}^α автоматически будут симметрическими по всем нижним индексам, стоящим после запятой, и, следовательно, будут полупараллельными.

§ 4. Доказательство теоремы 5

Пусть выполняются условия теоремы 5, и пусть $\widetilde{M}$ – подмногообразие семейства $\{\widetilde{M}\}$, с которым M имеет касание в точке x . Тогда в этой точке в общем для M и $\widetilde{M}$ адаптированном ортонормальном репере совпадают

- 1) R_{ikl}^j и $\widetilde{R}_{ikl}^j$,
- 2) $R_{\alpha kl}^\beta$ и $\widetilde{R}_{\alpha kl}^\beta$,
- 3) $T_{ij,i_1\dots i_t}^\alpha$ и $\widetilde{T}_{ij,i_1\dots i_t}^\alpha$, $t = 0, 1, \dots, s$,

где $\widetilde{T}$ – тензорное поле на $\widetilde{M}$, соответствующее T . Так как подмногообразие $\widetilde{M}$ является $\widetilde{\nabla}^s \widetilde{T}$ -параллельным, то тензорные поля $\widetilde{\nabla}^{s-1} \widetilde{T}$ и $\widetilde{\nabla}^s \widetilde{T}$ являются полупараллельными и их компоненты $\widetilde{T}_{ij,i_1\dots i_{s-1}}^\alpha$ и $\widetilde{T}_{ij,i_1\dots i_s}^\alpha$ удовлетворяют условиям (3.13), записанным для $\widetilde{M}$, которые равносильны (см. (3.4)–(3.6)) системе

$$\begin{cases} \widetilde{T}_{kj,i_1\dots i_{s-1}}^\alpha \widetilde{R}_{ipq}^k + \widetilde{T}_{ik,i_1\dots i_{s-1}}^\alpha \widetilde{R}_{jpq}^k \\ \quad + \dots + \widetilde{T}_{ij,i_1\dots i_{s-1}}^\alpha \widetilde{R}_{i_{s-1}pq}^k - \widetilde{T}_{ij,i_1\dots i_{s-1}}^\beta \widetilde{R}_{\beta pq}^\alpha = 0, \\ \widetilde{T}_{kj,i_1\dots i_s}^\alpha \widetilde{R}_{ipq}^k + \widetilde{T}_{ik,i_1\dots i_s}^\alpha \widetilde{R}_{jpq}^k \\ \quad + \dots + \widetilde{T}_{ij,i_1\dots i_s}^\alpha \widetilde{R}_{i_s pq}^k - \widetilde{T}_{ij,i_1\dots i_s}^\beta \widetilde{R}_{\beta pq}^\alpha = 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

В силу алгебраического характера этих условий и совпадения в точке x указанных выше тензоров $T_{ij,i_1\dots i_{s-1}}^\alpha$ и $T_{ij,i_1\dots i_s}^\alpha$ также удовлетворяют в точке x аналогичным условиям. Так как точка $x \in M$ произвольная, а условия (4.1) имеют тензорный характер, то мы заключаем, что ковариантные производные $\widetilde{\nabla}^{s-1} \widetilde{T}$ и $\widetilde{\nabla}^s \widetilde{T}$ являются полупараллельными.

§ 5. Доказательство теоремы 6

Доказательство будем проводить методом подвижного репера Картана с использованием теории вполне интегрируемых дифференциальных систем Фробениуса–Картана. Идея доказательства такая же, как и в [14], [16], [18], однако имеются и существенные различия.

Пусть m -мерное подмногообразие M , на котором задано тензорное поле T с полупараллельными ковариантными производными $\widetilde{\nabla}^{s-1} T$ и $\widetilde{\nabla}^s T$, в расслоении адаптированных ортонормальных реперов в $M_n(c)$ определяются вполне интегрируемой системой (3.1). Последнее означает, что выполняются также условия (3.7). Пусть $x \in M$, и пусть E_n обозначает касательное евклидово пространство к $M_n(c)$ в точке x , а $T_x(M)$ – касательное пространство к M в x . Обозначим через L многообразие всех наборов $(x, T_x(M), \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_t, \dots)$ в E_n , где α_t – t -я ($t = 2, \dots, s, \dots$) ф.ф. подмногообразия M , которая отображает произведение $\underbrace{T_x(M) \times \dots \times T_x(M)}_t$

в $T_x^\perp(M)$ (ортогональное дополнение к $T_x(M)$ в E_n). В силу замечания 2 число ф.ф. в наборах конечно и одно и то же для всех наборов. Это число будем называть *длиной набора*. Если дополнить такой набор адаптированным ортонормированным репером $(x, e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n)$, где $e_i \in T_x(M)$, $e_\alpha \in T_x^\perp(M)$ ($i, j, \dots = 1, \dots, m$; $\alpha, \beta, \dots = m+1, \dots, n$), то получим реперированный набор.

Многообразие всех реперированных наборов указанной конечной длины в E_n обозначим через L^{fr} . Локальными координатами в L^{fr} являются: x^a — координаты ($a = 1, \dots, n$) точки x , параметры φ^u ($u = 1, \dots, n(n-1)/2$) таких ортогональных матриц A в $O(n, R)$, которые преобразуют базис $\{\partial/\partial x^a\}$ в базис $\{e_a\}$ после стандартной ортогонализации, компоненты $h_{i_1 \dots i_t}^\alpha$ форм α_t ($t \geq 2$) в последнем базисе.

На многообразии L^{fr} рассмотрим дифференциальную систему

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega^\alpha = 0, \\ \omega_i^\alpha - h_{ij}^\alpha \omega^j = 0, \\ dh_{ij}^\alpha + h_{ij}^\beta \omega_\beta^\alpha - h_{kj}^\alpha \omega_i^k - h_{ik}^\alpha \omega_j^k - h_{ij}^\alpha \omega^k = 0, \\ \dots, \\ dh_{i_1 \dots i_t}^\alpha + h_{i_1 \dots i_t}^\beta \omega_\beta^\alpha - h_{k \dots i_t}^\alpha \omega_{i_1}^k \\ \quad - \dots - h_{i_1 \dots k}^\alpha \omega_{i_t}^k - h_{i_1 \dots i_t i_{t+1}}^\alpha \omega^{i_{t+1}} = 0, \\ \dots, \\ dT_{ij}^\alpha + T_{ij}^\beta \omega_\beta^\alpha - T_{kj}^\alpha \omega_i^k - T_{ik}^\alpha \omega_j^k - T_{ij,k}^\alpha \omega^k = 0, \\ dT_{ij,k}^\alpha + T_{ij,k}^\beta \omega_\beta^\alpha - T_{lj,k}^\alpha \omega_i^l - T_{il,k}^\alpha \omega_j^l - T_{ij,l}^\alpha \omega_k^l - T_{ij,kl}^\alpha \omega^l = 0, \\ \dots, \\ dT_{ij,i_1 \dots i_{s-1}}^\alpha + T_{ij,i_1 \dots i_{s-1}}^\beta \omega_\beta^\alpha - T_{kj,i_1 \dots i_{s-1}}^\alpha \omega_i^k \\ \quad - \dots - T_{ij,i_1 \dots k}^\alpha \omega_{i_{s-1}}^k - T_{ij,i_1 \dots i_{s-1} i_s}^\alpha \omega^{i_s} = 0, \\ dT_{ij,i_1 \dots i_s}^\alpha + T_{ij,i_1 \dots i_s}^\beta \omega_\beta^\alpha - T_{kj,i_1 \dots i_s}^\alpha \omega_i^k - \dots - T_{ij,i_1 \dots k}^\alpha \omega_{i_s}^k = 0. \end{array} \right. \quad (5.1)$$

Эта система состоит из подсистем (а) и (б). Подсистема (а) совпадает с системой (3.1), для которой выполняются условия интегрируемости (3.7). В подсистеме (б) T_{ij}^α являются компонентами тензорного поля T , а $T_{ij,i_1 \dots i_t}^\alpha$ — компонентами ковариантной производной $\bar{\nabla}^t T$. По условию теоремы они выражаются через $h_{i_1 \dots i_r}^\alpha$ ($r \geq 2$) с помощью тензорных операций. Будем предполагать, что функции $T_{ij,i_1 \dots i_r}^\alpha$, $r = 0, 1, \dots, s$, удовлетворяют

- 1) только второму уравнению системы (3.13) при $s = 0$ (первое уравнение теряет смысл),
- 2) системе (3.13) при $s = 1$,
- 3) системе (3.13) и первым $s - 1$ уравнениям системы (3.10) при $s > 1$.

Предположим также, что R_{ikl}^j и $R_{\alpha kl}^\beta$ определяются через h_{ij}^α по формулам (3.6), а через них и Ω_i^j , Ω_α^β по формулам (3.4) и (3.5) соответственно. Тогда путем прямого вычисления получим, что система (5.1) вполне интегрируема.

Два реперированных набора будем называть *эквивалентными*, если $e'_j = A_i^j e_j$, $e'_\alpha = A_\alpha^\beta e_\beta$, где $\|A_i^j\| \in O(m, R)$, $\|A_\alpha^\beta\| \in O(n - m, R)$. Тогда для любого $t \geq 2$ будем иметь

$$h_{i_1 \dots i_t}^{\prime \alpha} = h_{j_1 \dots j_t}^\beta A_\beta^\alpha A_{i_1}^{j_1} \dots A_{i_t}^{j_t}. \quad (5.2)$$

Так как T_{ij}^α и $T_{ij,i_1\dots i_r}^\alpha$ выражаются через $h_{i_1\dots i_t}^\alpha$ с помощью тензорных операций, то они будут преобразовываться точно по такому же закону, что и (5.2). Поэтому введенная выше эквивалентность определяет отображение $L^{\text{fr}} \rightarrow L$, которое проектирует систему (5.1) в корректно определенную вполне интегрируемую дифференциальную систему на L . Отсюда следует, что для каждого фиксированного набора из L локально существует интегральное подмногообразие этой дифференциальной системы, которое имеет максимально возможную размерность, равную размерности инволюнтного распределения на L , соответствующего этой системе, т.е. m . Уравнения подсистемы (а) показывают, что фундаментальными формами этого подмногообразия являются $\alpha_2, \alpha_3, \dots$ и т.д. Последнее уравнение подсистемы (б) показывает, что на этом подмногообразии тензорное поле $T_{ij,i_1\dots i_s}^\alpha$ является параллельным.

Пусть фиксированный набор $(x, T_x(M), \alpha_{2x}, \dots, \alpha_{tx}, \dots)$ подмногообразия $\widetilde{M}$ определяет, как это было описано выше, некоторое m -мерное подмногообразие $\widetilde{M}$, порожденное системой (5.1) и проходящее через x . Так как в точке $x \in M \cap \widetilde{M}$ наборы $(x, T_x(M), \alpha_{2x}, \dots, \alpha_{tx}, \dots)$ и $(x, T_x(\widetilde{M}), \tilde{\alpha}_{2x}, \dots, \tilde{\alpha}_{tx}, \dots)$ совпадают по построению, то M является огибающим полного порядка для всех таких $\widetilde{M}$.

§ 6. Доказательство теоремы 7

Необходимость. Пусть на подмногообразии M ковариантные производные $T_{ij,i_1\dots i_r}^\alpha$ ($r = 2, \dots, s+1$, где $s \geq 2$) симметричны по индексам $i_1, \dots, i_r$, что равносильно выполнению условий (3.14). Рассуждая так же, как и при доказательстве теоремы 6, получаем, что дифференциальная система (5.1) при выполнении условий (3.7) и (3.14) вполне интегрируема. Следовательно, она определяет, как это было установлено при доказательстве теоремы 6, семейство m -мерных $\nabla^s \tilde{T}$ -параллельных подмногообразий $\{\widetilde{M}\}$, для которого M является огибающим порядка $p \geq 2$, а следовательно, R - и $R^\perp$ -огибающим. Из (5.1) следует, что для подмногообразия $\widetilde{M} \in \{\widetilde{M}\}$ функции $h_{i_1\dots i_t}^\alpha$, $t \geq 2$, будут компонентами его фундаментальной формы $\tilde{\alpha}_t$. Функции T_{ij}^α будут компонентами соответствующего тензорного поля $\tilde{T}$, а $T_{ij,i_1\dots i_{r'}}^\alpha$ — компонентами ковариантной производной $\nabla^{r'} \tilde{T}$, $r' = 1, \dots, s$. Тогда точка касания M и $\widetilde{M}$ будет точкой $\nabla^s T$ -касания, и так как $T_{ij,i_1\dots i_{r'}}^\alpha$ симметричны по индексам $i_1, \dots, i_{r'}$, то необходимость условий теоремы доказана.

Достаточность. Пусть $T_{ij,i_1\dots i_r}^\alpha$ ($r = 2, \dots, s+1$, где $s \geq 2$) симметричны по индексам $i_1, \dots, i_r$, и пусть M является R -, $R^\perp$ - и $\nabla^s T$ -огибающим для некоторого семейства m -мерных $\nabla^s T$ -параллельных подмногообразий $\{\widetilde{M}\}$, причем если $\widetilde{M} \in \{\widetilde{M}\}$, то компоненты $\tilde{T}_{ij,i_1\dots i_{r'}}^\alpha$ ($r' = 2, \dots, s$) ковариантных производных соответствующего тензорного поля $\tilde{T}$ симметричны по индексам $i_1, \dots, i_{r'}$. Покажем, что $T_{ij,i_1\dots i_{s+2}}^\alpha$ симметричны по индексам $i_1, \dots, i_{s+2}$. Так как $\nabla T_{ij,i_1\dots i_{s+1}}^\alpha = T_{ij,i_1\dots i_{s+1}i_{s+2}}^\alpha \omega^{i_{s+2}}$, то $T_{ij,i_1\dots i_{s+2}}^\alpha$ симметричны по индексам $i_1, \dots, i_{s+1}$. Так как тензор $\nabla^s \tilde{T}$ является параллельным, то он автоматически является полупараллельным. Следовательно, его компоненты $\tilde{T}_{ij,i_1\dots i_s}^\alpha$ удовлетворяют второму уравнению системы (4.1). В силу алгебраического характера этого уравнения и совпадения в точке касания тензоров R и $\tilde{R}$, $R^\perp$ и $\tilde{R}^\perp$, $\nabla^s T$ и $\nabla^s \tilde{T}$ компоненты $T_{ij,i_1\dots i_s}^\alpha$

будут удовлетворять точно такому же уравнению. Это равносильно полупараллельности $T_{ij, i_1 \dots i_s}^\alpha$, что также равносильно симметричности $T_{ij, i_1 \dots i_{s+2}}^\alpha$ по двум последним нижним индексам.

Список литературы

1. *Deprez J.* Semi-parallel hypersurfaces // *Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino.* 1986. V. 44. P. 303–316.
2. *Dillen F., Nölker S.* Semi-parallelity, multi-rotation surfaces and the helix-property // *J. Reine Angew. Math.* 1993. V. 435. P. 33–63.
3. *Asperti A. C., Mercuri F.* Semi-parallel immersions into space form // *Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B. Artic. Ric. Mat.* (8). 1994. V. 7. № 4. P. 833–895.
4. *Lumiste Ü.* Semi-parallel time-like surfaces in Lorentzian spacetime form // *Differential Geom. Appl.* 1997. V. 7. P. 59–74.
5. *Lumiste Ü.* Isometric semiparallel immersions of two-dimensional Riemannian manifolds into pseudo-Euclidean spaces // *New developments in differential geometry. Proc. Conf. Budapest, July 27–30, 1996. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1999.* P. 243–264.
6. *Lumiste Ü.* Semi-symmetric submanifold as the second order envelope of symmetric submanifolds // *Proc. Estonian Acad. Phys. Math.* 1990. V. 39. P. 1–8.
7. *Лумисте Ю. Г.* Полусимметрические подмногообразия // *Итоги науки и техн. Проблемы геометрии.* Т. 23. М.: ВИНТИ, 1991. С. 3–28.
8. *Мурзоян В. А.* Ric-полусимметрические подмногообразия // *Итоги науки и техн. Проблемы геометрии.* Т. 23. М.: ВИНТИ, 1991. С. 29–66.
9. *Мурзоян В. А.* Полусимметрические подмногообразия и их разложение в произведение // *Изв. вузов. Сер. матем.* 1991. № 9. С. 29–38.
10. *Lumiste Ü.* Submanifolds with parallel fundamental form // *Handbook of differential geometry / ed. F. Dillen and L. Verstraeten.* V. 1. Amsterdam: North-Holland, 2000. P. 779–864.
11. *Ferus D.* Symmetric submanifolds of Euclidean space // *Math. Ann.* 1980. V. 247. P. 81–93.
12. *Takeuchi M.* Parallel submanifolds of space forms // *Manifolds and Lie groups Papers in honor of Y. Matsushima.* Basel: Birkhäuser, 1981. P. 429–447. (Progr. Math. V. 14.)
13. *Backes E., Reckziegel H.* On symmetric submanifolds of spaces of constant curvature // *Math. Ann.* 1983. V. 263. № 4. P. 419–433.
14. *Мурзоян В. А.* S-полупараллельные подмногообразия в пространствах постоянной кривизны как огибающие s-параллельных подмногообразий // *Изв. НАН Армении. Сер. матем.* 1996. Т. 31. № 5. С. 44–56.
15. *Мурзоян В. А.* О k-полупараллельных подмногообразиях // *Международная геометрическая школа-семинар памяти Н. В. Ефимова. Абрау-Дюрсо, 27 сент.–4 окт. 1996 г. Тезисы докладов. Ростов-на-Дону, 1996.* С. 141–142.
16. *Мурзоян В. А.* Подмногообразия с симметрическими фундаментальными формами высшего порядка как огибающие // *Изв. вузов. Сер. матем.* 1997. № 9. С. 35–40.
17. *Мурзоян В. А.* Подмногообразия с полупараллельными фундаментальными формами высшего порядка как огибающие // *Изв. вузов. Сер. матем.* 1998. № 8. С. 79–80.
18. *Мурзоян В. А.* Обобщения теоремы Ю. Лумисте о полупараллельных подмногообразиях // *Изв. НАН Армении. Сер. матем.* 1998. Т. 33. № 1. С. 53–64.
19. *Мурзоян В. А.* Полупараллельные структуры как огибающие // *Международная геометрическая школа-семинар памяти Н. В. Ефимова. Абрау-Дюрсо, 5–11 сент. 1998 г. Тезисы докладов. Ростов-на-Дону, 1998.* С. 56–57.
20. *Мурзоян В. А.* Римановы риччи-полусимметрические многообразия и их изометрические погружения в пространства постоянной кривизны // *Дис. . . . докт. физ.-матем. наук.* Ереван: ГИУА, 1998.

21. *Алексеевский Д. В., Виноградов А. М., Лычагин В. В.* Основные идеи и понятия дифференциальной геометрии // Итоги науки и техн. Современ. пробл. матем. Фундам. направления. Т. 28. М.: ВИНТИ, 1988. С. 5–289.
22. *Фавар Ж.* Курс локальной дифференциальной геометрии. М.: ИЛ, 1960.
23. *Залгаллер В. А.* Теория огибающих. М.: Наука, 1975.
24. *Kowalski O., Nikčević S. Z.* Contact homogeneity and envelopes of Riemannian metrics // Beiträge Algebra Geom. 1998. V. 39. № 1. P. 155–167.
25. *Мирзоян В. А.* Классификация Ріс-полупараллельных гиперповерхностей в евклидовых пространствах // Матем. сб. 2000. Т. 191. № 9. С. 65–80.
26. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. Т. 2. М.: Наука, 1981.

Государственный инженерный университет Армении,
г. Ереван, Армения

Поступила в редакцию
25.07.2001